1. El comportamiento de la tasa de ahorro en el modelo de Ramsey.

2. Política fiscal en el modelo de Ramsey

3. El modelo de generaciones superpuestas

1 El comportamiento de la tasa de ahorro durante la transición

Podemos inferir la evolución de la tasa de ahorro a través de la evolución de $\frac{c}{y}$. Reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales y el diagrama de fase en términos de k y $\frac{c}{y}$.

$$\frac{c}{y} \Rightarrow s = \frac{y-c}{y} \Rightarrow s = 1 - \frac{c}{y}$$

Usando:

$$\begin{aligned} y &= Ak^{\alpha} \\ \frac{y}{y} &= \alpha\frac{k}{k} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\dot{c}}{y}}{\frac{c}{y}} = \frac{\frac{\partial\frac{c}{y}}{dt}}{\frac{c}{y}} = \frac{\dot{c}\frac{1}{y} - c\frac{\dot{y}}{y^2}}{\frac{c}{y}}$$

$$\frac{\frac{\dot{c}}{c}\frac{c}{y} - \frac{c}{y}\frac{\dot{y}}{y}}{\frac{c}{y}} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} - \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\theta}\left[A\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] \\ \frac{\dot{k}}{k} &= Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (n+\delta) \end{aligned}$$

Recordar que: $\frac{c}{k} = \frac{c}{y}Ak^{\alpha-1}$

podemos llegar a:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\dot{c}}{y}}{\frac{c}{y}} &= \frac{1}{\theta}\left[A\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] \\ &\quad -\alpha\left[Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{y}Ak^{\alpha-1} - n - \delta\right] \end{aligned}$$

Aplicando la condición $\frac{\dot{c}}{y} = 0$ tenemos:

$$\frac{1}{\theta}\left[A\alpha k^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] = \alpha Ak^{\alpha-1} - \alpha\frac{c}{y}Ak^{\alpha-1} - \alpha(n+\delta) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha\frac{c}{y}Ak^{\alpha-1} &= \alpha Ak^{\alpha-1} - \frac{1}{\theta}A\alpha k^{\alpha-1} \\ &\quad + \frac{(\delta+\rho)}{\theta} - \alpha(n+\delta) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{c}{y} = \frac{-(1-\theta)}{\theta} + \frac{k^{1-\alpha}}{A\alpha}\left[\frac{(\delta+\rho)}{\theta} - \alpha(n+\delta)\right] \tag{3}$$

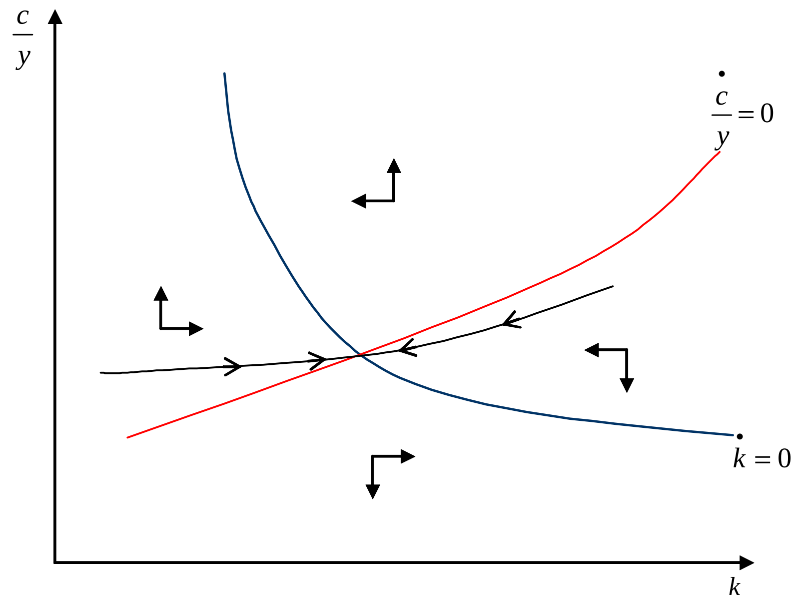

Figure 1: primer caso

Vemos como la curva $\frac{\dot{c}}{y} = 0$ tiene pendiente positiva si:

$$\frac{\rho + \delta}{\theta} > \alpha\,(n + \delta)$$

y negativa si:

$$\frac{\rho + \delta}{\theta} < \alpha\,(n + \delta)$$

y es horizontal si:

$$\frac{\rho + \delta}{\theta} = \alpha\,(n + \delta)$$

Por otro lado, de la condición $\dot{k} = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{y}Ak^{\alpha-1} - (n+\delta) \qquad (4)\\ \frac{c}{y}Ak^{\alpha-1} &= Ak^{\alpha-1} - (n+\delta) \\ \frac{c}{y} &= 1 - \frac{(n+\delta)}{A}k^{1-\alpha} \qquad (5) \end{aligned}$$

Luego la curva $\dot{k} = 0$ siempre tiene pendiente negativa.
Ahora estamos en condiciones de graficar el diagrama de fase.

Primer caso: la curva $\frac{\dot{c}}{y} = 0$ tiene pendiente positiva ($\frac{\rho+\delta}{\theta} > \alpha\,(n+\delta)$). En este caso $\frac{c}{y}$ sube por lo que la tasa de ahorro cae (θ es menor que $\frac{\rho+\delta}{\alpha(n+\delta)}$).Ejemplo. (ver figura 1)

Segundo caso: la curva $\frac{\dot{c}}{y} = 0$ tiene pendiente negativa ($\frac{\rho+\delta}{\theta} < \alpha\,(n+\delta)$). Ojo que tiene una pendiente en valor absoluto menor que $\dot{k} = 0$.En este caso $\frac{c}{y}$ baja por lo que la tasa de ahorro cae (θ es mayor que $\frac{\rho+\delta}{\alpha(n+\delta)}$) (ver figura 2)

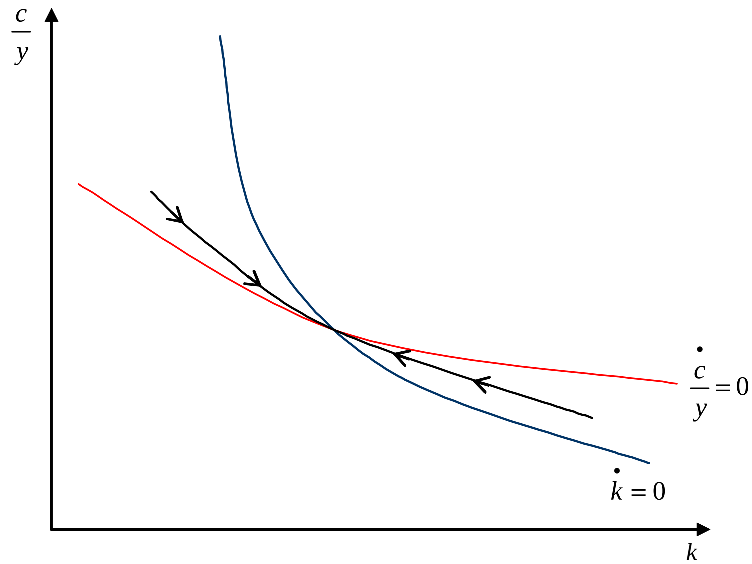

Figure 2: segundo caso

Tercer caso: la curva $\frac{\dot{c}}{y}=0$ no depende de k. Tiene pendiente igual a cero ($\frac{\rho+\delta}{\theta}=\alpha\left(n+\delta\right)$). En este caso la tasa de ahorro es constante (cuando θ es igual a $\frac{\rho+\delta}{\alpha(n+\delta)}$). Reproducimos el modelo de Solow. (ver figura 3)

2 Política fiscal en el modelo de Ramsey

Ahora vamos a introducir al gobierno en el modelo de Ramsey. Supongamos que el gobierno realiza un consumo G_t por unidad de trabajo efectivo en cada momento t. Además, suponemos que este gasto del gobierno no afecta la utilidad de las familias, ni tampoco afecta el producto futuro.

Como pensamos en un gobierno que mantiene un presupuesto equilibrado, vamos a suponer (sólo por ahora) que puede financiar todo su gasto con un impuesto de suma fija (por trabajador efectivo) igual a T_t (notar que las decisiones de las familias sobre cuánto ahorrar y cuánto consumir son independientes de este impuesto, es decir, no es un impuesto distorsivo).

Como el gobierno mantiene un presupuesto balanceado en cada período, no tiene ninguna deuda extraordinaria, con lo cual tenemos:

$$T_t = G_t$$

Ahora la inversión es la diferencia entre el producto $f\left(k\right)$ y la suma del consumo privado c_t y el consumo del gobierno g_t, de manera que la ecuación de movimiento del capital es ahora:

$$\dot{k}_t = f\left(k\right) - c_t - G_t - \left(x+n+\delta\right)k_t \tag{6}$$

Imponiendo la condición de que en el estado estacionario $\dot{k}=0$, obtenemos:

$$c_t = f\left(k\right) - G_t - \left(x+n+\delta\right)k_t \tag{7}$$

la solución a la ecuación diferencial de coeficiente variable 6 es:

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} = k_0 + \int_0^\infty \left(w_t - G_t\right)e^{-\int(r_t-n-x)dt} \tag{8}$$

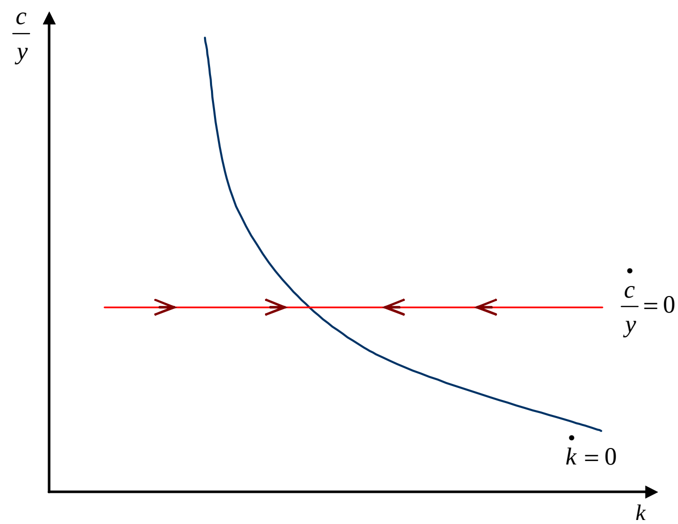

Figure 3: tercer caso

Notar que como los impuestos no afectan las decisiones de cuánto ahorrar y cuánto consumir, la ecuación de Euler se mantiene inalterada. Pero sí cambia la restricción intertemporal de las familias dado que ahora el gobierno se está llevando una parte del producto que antes podían consumir las familias. Esto quiere decir que la riqueza de las familias cae en una cantidad igual al valor presente de los gastos futuros del gobierno (o bien del valor presente de los impuestos futuros que debe pagar).

2.1 Incremento Permanente en el Gasto del Gobierno

Para entender las consecuencias de este análisis, supongamos que inicialmente $G_0 = 0$ y que luego aumenta *permanentemente* a un nivel constante G_1. Entonces la curva $\dot{k} = 0$ se mueve hacia abajo en una cantidad igual a g. Esto se explica dado que para un cierto valor de k_t, c_t debe caer en G de manera que $\dot{k}$ se mantenga igual a cero. Esto lo podemos ver en la figura 4:

Claramente, el estado estacionario de esta economía se mueve hacia abajo de E_0 a E_1, implicando un nivel menor de consumo de largo plazo. ¿Como se ve modificado la tasa de interés de largo plazo? ¿Que ocurre si inicialmente estamos fuera del equilibrio de estado estacionario?

2.2 Incremento Temporario en el Gasto del Gobierno

Ahora suponemos que el gobierno aumenta G en forma temporaria. En $t = 0$, $G = G_0 > 0$ pero luego en $t = 1$ el $G = 0$. Vemos cómo ahora el consumo cae menos que el aumento en el gasto público. ¿Qué ocurre con la tasa de interés? (Figuras 5 y 6)

2.3 Financiamiento con Deuda vs Financiamiento con Impuestos

Supongamos que ahora el gobierno puede emitir bonos (de manera que puede contraer deuda) para financiar la diferencia entre g_t y τ_t. De la misma forma, en cada momento en que disponga de un *superávit primario*, $T_t - G_t$ que sea mayor que los intereses de la deuda, el gobierno puede pagar su deuda existente: b_t. De esta forma, la restricción de presupuesto dinámica del gobierno se puede escribir como:

$$\dot{b}_t = (r_t - n - x)\, b_t + G_t - T_t \tag{9}$$

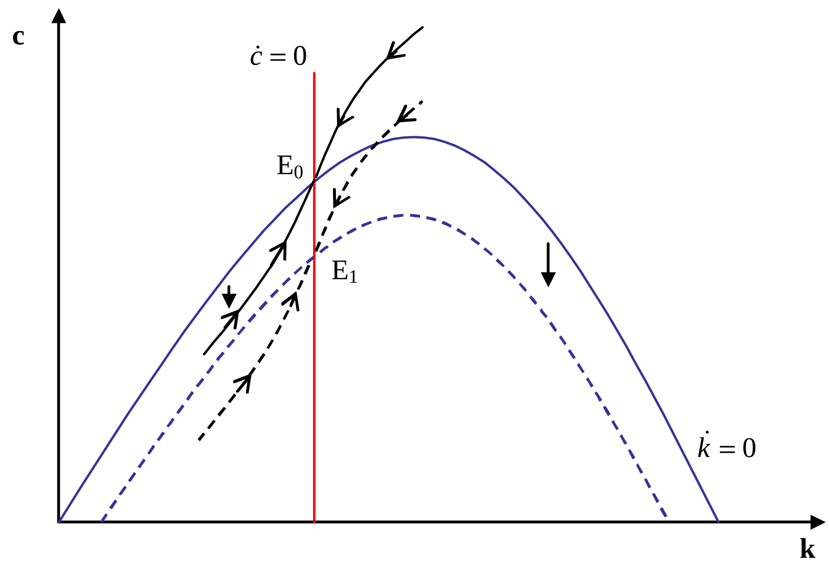

Figure 4: incremento permanente en G

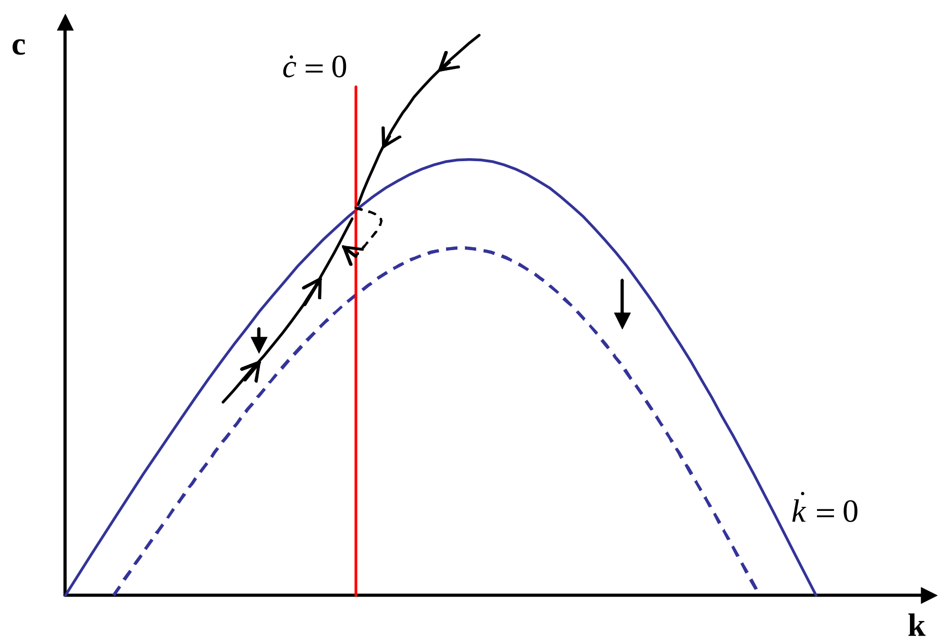

Figure 5: incremento temporario en G

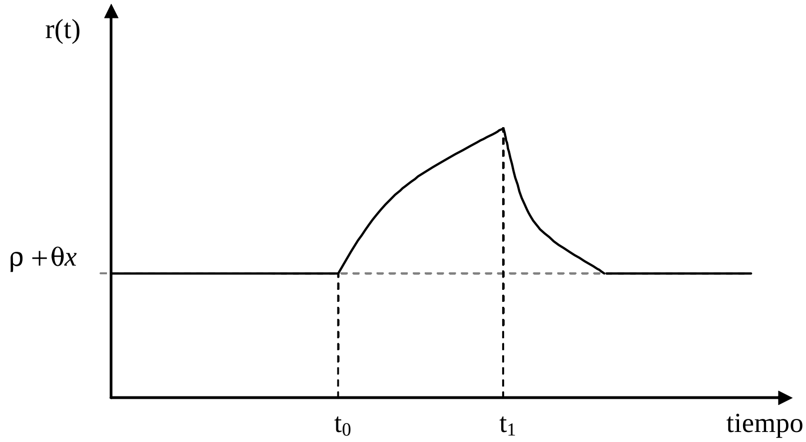

Figure 6: evolución de r en el tiempo

Adicionalmente, debemos imponerle al gobierno la condición de que su deuda sea *sostenible.* Esto quiere decir que los superávit futuros deben ser suficientes para pagar la deuda corriente y los intereses que de ella se generen:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\int(r_t-n-x)dt} b_T = 0$$

De la misma forma que lo hicimos con el problema de las familias, podemos resumir esto en la *restricción presupuestaria intertemporal* del gobierno:

$$\int_0^\infty G_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} = -b_0 + \int_0^\infty T_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} \tag{10}$$

que también se puede escribir como:

$$\int_0^\infty (T_t - G_t) e^{-\int(r_t-n-x)dt} = b_0 \tag{11}$$

Notar que los bonos son un activo para las familias tenedoras. Para que las familias tengan incentivos de mantener sus activos en bonos y no en capital, los primeros deberían pagar el mismo interés que los últimos. Dado esto, lo mejor que puede hacer el gobierno es establecer una tasa de interés para los bonos igual a r_t.

Como $A_t = k_t + b_t$ podemos escribir la restricción presupuestaria de las familias de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} = k_0 + b_0 + \int_0^\infty (w_t - T_t)\, e^{-\int(r_t-n-x)dt} \tag{12}$$

reemplazando 11 en 12 tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty c_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} &= k_0 + \int_0^\infty (T_t - G_t) e^{-\int(r_t-n-x)dt} \\ &\quad + \int_0^\infty (w_t - T_t)\, e^{-\int(r_t-n-x)dt}\end{aligned}$$

Finalmente nos queda:

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int(r_t-n-x)dt} = k_0 + \int_0^\infty (w_t - G_t)\, e^{-\int(r_t-n-x)dt}$$

que es la misma expresión que 8. Podemos concluir que para las familias es lo mismo que el gobierno financie sus gastos con impuestos o con deuda. El bienestar de las familias permanece inalterado.

2.4 Impuestos distorsivos sobre el ingreso del capital

Supongamos que en lugar de un impuesto de suma fija, el gobierno decide financiar su gasto con un impuesto proporcional al ingreso del capital a la tasa τ. De manera de concentrarnos solamente en la distorsión, supongamos que la recaudación impositiva se devuelve a las familias en la forma de unas transferencias de suma fija T_r (per cápita). La nueva forma que toma la restricción de presupuesto de las familias es,

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t + Tr_t - c_t - na_t \qquad (0)$$

Por el lado de las preferencias no hay ningún cambio. Dado que las familias toman como dadas las tranferencias Tr_t y que estas son de suma fija, es fácil ver que la presencia de éstas no implican ninguna modificación en las CPO de las familias. En particular, el sendero óptimo del consumo para la familia representativa sigue siendo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho) \qquad (1)$$

Las firmas maximizan beneficios los cuales ahora están negativamente afectados por un impuesto a los ingresos,

$$Be = F(K, \hat{L})(1 - \tau) - (r + \delta)K - wL \qquad (2)$$

En términos de capital por trabajador efectivo la función de beneficios se puede reescribir,

$$Be = \hat{L}\left[f(\hat{k})(1 - \tau) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}\right] \qquad (3)$$

Las CPO del problema de las firmas determinan que ahora para cada nivel de tasa real de interés, las firmas alquilarán menos capital dada la existencia del impuesto (que les reduce la productividad del capital después de impuestos).

$$r_t = (1 - \tau)\, f\,'\left(\hat{k}\right) - \delta \qquad (4)$$

El nivel de impuestos también afectará al nivel de salarios que las firmas estarán dispuestas a pagar,

$$w = \left[(1 - \tau)\left(f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right)\right] e^{xt} \qquad (5)$$

Podemos ahora derivar el equilibrio agregado para la economía. Para ello debemos primero explicitar la restricción de presupuesto del gobierno,

$$Tr = \tau f(\hat{k}) e^{xt} \qquad (6)$$

Luego haciendo $a = k$ (y $b = 0$), y reemplazando (4), (5) y (6) en (0), llegamos a (recordando que $k = \hat{k}e^{xt}$ y $c = \hat{c}\ e^{xt}$):

$$\begin{aligned} \dot{k}e^{-xt} &= \left[(1 - \tau)((f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k})\right] + \\ &\quad +((1 - \tau)\, f\,'\left(\hat{k}\right) - \delta)\hat{k} + \tau f(\hat{k}) - \hat{c} - n\hat{k} \end{aligned}$$

y reemplazando $\dot{k}e^{-xt} = \hat{k} + \hat{k}x$, se llega a:

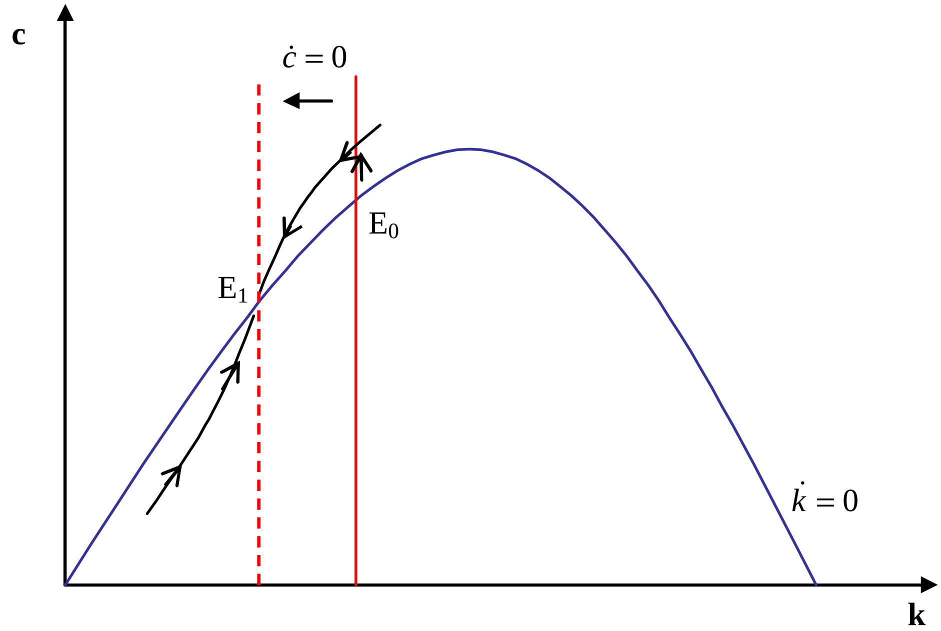

Figure 7: impuesto al capital

$$\hat{k} = f(\hat{k}) - (n + \delta + x)\hat{k} - \hat{c}$$

Vemos entonces que en el equilibrio agregado la curva $\dot{\hat{k}} = 0$ no se modifica por la presencia del impuesto y las transferencias.

Por otro lado reemplazando (4) en (2) llegamos a la expresión para la tasa de cambio del consumo (en términos de trabajo efectivo) para la economía:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} = \frac{(1-\tau)\, f'\left(\hat{k}\right) - \delta - \rho - \theta x}{\theta}$$

Aplicando la condición de que en estado estacionario $\dot{\hat{c}}_t = 0$, obtenemos:

$$f'\left(\hat{k}\right) = \frac{\delta + \rho + \theta x}{(1-\tau)} \tag{13}$$

Notar, que como $f'\left(\hat{k}\right)$ es decreciente en $\hat{k}$, un aumento en la tasa de impuesto τ genera en el largo plazo una disminución del stock de capital. De manera que $\dot{c} = 0$ se mueve hacia la izquierda.

El efecto del impuesto en la trayectoria al nuevo estado estacionario lo podemos ver en la figura 7:

El estado estacionario se mueve de E_0 a E_1 de manera que, en el largo plazo, el impuesto genera una disminución en el stock de capital y una disminución en el consumo per cápita.

Sin embargo, es importante destacar que como el capital no puede ajustar instantáneamente, el impacto inicial causa un aumento en el consumo per cápita hacia el nuevo sendero de equilibrio que termina en E_1. Este debe ser el caso si las familias satisfacen su restricción presupuestaria. Este aumento del consumo per cápita en el corto plazo ocurre porque las familias comienzan a ahorrar una porción menor de su ingreso en respuesta al impuesto sobre el retorno del capital. Esto produce un menor nivel de inversión y por ello el capital y el consumo per cápita comienzan a disminuir a lo largo del nuevo sendero de equilibrio hasta alcanzar el nuevo estado estacionario.

3 El Modelo de Diamond: Generaciones Superpuestas (Basado en Romer 1996)

3.1 Supuestos

Cada individuo vive dos períodos. Nuevos individuos nacen en cada período. Suponemos tiempo discreto.

$L_t =$ población en t. $L_t = (1+n)L_{t-1}$.(L_{t-1}"viejos" más nL_{t-1} "jóvenes")

$n =$tasa de crecimiento de la población.

En el momento 0 el capital lo tiene la generación "vieja". Ello se combina con trabajo de los jóvenes para producir output. Los viejos en el momento 0 consumen en función del ingreso del capital . Los jóvenes en el momento 0 obtienen w_o y consumen una parte y ahorran la otra.

3.2 El Problema de las Familias:

Los individuos trabajan cuando jóvenes y consumen en los dos períodos: c_{1t}, c_{2t}. Las preferencias vienen dadas por,

$$u_t = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{c_{2t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

con $\theta > 0$ y $\rho > -1$.

En cualquier período t los jóvenes dividen su ingreso $w_t A_t$ (recordar que w es el salario por trabajador efectivo) entre consumo y ahorro. El ahorro va a ser igual al capital que el individuo va a tener cuando viejo y que se lo va a alquilar a los jóvenes en $t+1$. La restricción de presupuesto en el primer período (cuando joven) es,

$$C_{1t} + S_t = w_t A_t$$

Donde S_t representa el ahorro. La restricción de presupuesto para el segundo período es igual a:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t A_t - C_{1t})$$

Usando las dos expresiones previas podemos escribir la restricción de prespuesto intertemporal:

$$C_{1t} + \frac{C_{2t}}{1 + r_{t+1}} = A_t w_t$$

Esta ecuación nos dice que el valor presente del consumo de toda la vida es igual al valor presente de sus riqueza inicial (que es cero) más el valor presente de sus ingresos laborales futuros (que es $A_t w_t$)

Las familias maximizan su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, el lagrangiano del problema es:

$$L = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda\left[A_t w_t - \left(C_{1t} + \frac{C_{2t}}{1+r_{t+1}}\right)\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} C_{1t}^{-\theta} &= \lambda \\ \frac{C_{2t+1}^{-\theta}}{1+\rho} &= \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} \end{aligned}$$

reemplazando la primera condición de primer orden en la segunda tenemos:

$$\frac{C_{2t+1}^{-\theta}}{1+\rho} = \frac{C_{1t}^{-\theta}}{1+r_{t+1}}$$

$$\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left[\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{\frac{1}{\theta}} \tag{1}$$

Reemplazando en la restricción presupuestaria tenemos:

$$A_t w_t = C_{1t} + \frac{C_{1t}}{1+r_{t+1}} \left[\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$C_{1t} = \frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} A_t w_t$$

$$A_t w_t - C_{1t} = A_t w_t + \frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} A_t w_t$$

$$\frac{A_t w_t - C_{1t}}{A_t w_t} = s\left(r_{t+1}\right) = \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}$$

$$C_{1t} = \left[1 - s\left(r_{t+1}\right)\right] A_t w_t$$

De la ecuación previa vemos que r_{t+1} determina la fracción del ingreso que los individuos consumen en el período 1. La respuesta del ahorro ante cambios en r_{t+1} depende del valor de θ. Intuición: Si $\theta = 1$ la tasa de ahorro es constante. Si $\theta > 1$ la tasa de ahorro es decreciente en r y creciente si $\theta < 1$. Intuición: cuando los individuos están más dispuestos a substituir consumo de hoy por el de mañana (bajo θ) el efecto substitución domina al efecto ingreso.

3.3 El Problema de las Firmas:

$$Y = F(K_t, A_t L_t)$$

$$A_{t+1} = (1+g) A_t$$

Donde A_t es el nivel de la tecnología en t y g es la tasa de progreso técnico. Se supone que la tasa de depreciación es cero. La solución al problema de las firmas es la que vimos anteriormente. De las condiciones de primer orden surge:

$$\begin{aligned} r &= f'\left(\hat{k}_t\right) \\ w_t &= f\left(\hat{k}_t\right) - \hat{k}\, f'\left(\hat{k}_t\right) \end{aligned}$$

3.4 Equilibrio agregado

El stock de capital en $t+1$ es igual al numero de individuos jóvenes en t multiplicado por los ahorros por individuo,

$$K_{t+1} = s\left(r_{t+1}\right) L_t w_t A_t$$

donde $s\left(r_{t+1}\right)$ es la tasa de ahorro por individuo.

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = s\left(r_{t+1}\right) \frac{w_t A_t}{A_{t+1}} \frac{L_t}{L_{t+1}}$$

$$\hat{k}_{t+1} = s\left(r_{t+1}\right) w_t \frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)}$$

Reemplazando por las condiciones de primer orden de las firmas,

$$\begin{aligned} r_t &= f\,'\left(\hat{k}_t\right) \\ w_t &= f\left(\hat{k}_t\right) - \hat{k}\ f\,'\left(\hat{k}_t\right) \end{aligned}$$

tenemos:

$$\hat{k}_{t+1} = s\left(f\,'\left(\hat{k}_{t+1}\right)\right)\left[f\left(\hat{k}_t\right) - kf\,'\left(\hat{k}_t\right)\right]\frac{1}{\left(1+n\right)\left(1+g\right)} \tag{2}$$

La ecuación en diferencias de arriba es la solución general que describe la dinámica del capital por trabajador efectivo.

Ejemplo: si $\theta = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} s\left(f\,'\left(\hat{k}_{t+1}\right)\right) &= s\left(r_{t+1}\right) = \\ \frac{\left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{\left(1+\rho\right)^{\frac{1}{\theta}} + \left(1+r_{t+1}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}} &= \frac{1}{2+\rho} \end{aligned}$$

Notemos que en este ejemplo el modelo predice que la tasa de ahorro es constante y depende negativamente de ρ.

Por otro lado, si $f\left(\hat{k}\right) = \hat{k}^{\alpha}$ entonces:

$$w = \hat{k}^{\alpha} - \hat{k}\ \alpha\ \hat{k}^{\alpha-1} = \left(1-\alpha\right)\ \hat{k}^{\alpha}$$

Reemplazando en 2 tenemos:

$$\hat{k}_{t+1} = \left(1-\alpha\right)\hat{k}_t^{\alpha}\frac{1}{\left(1+n\right)\left(2+\rho\right)\left(1+g\right)}$$

Si llamamos:

$$D = \frac{\left(1-\alpha\right)}{\left(1+n\right)\left(2+\rho\right)\left(1+g\right)}$$

Tenemos:

$$\hat{k}_{t+1} = D\ \hat{k}_t^{\alpha}$$

Vemos que el equilibrio de estado estacionario $\hat{k}^*$ es estable dado que la curva corta la diagonal desde arriba. Es fácil obtener el valor para $\hat{k}^*$,

$$\hat{k}^* = \left[\frac{\left(1-\alpha\right)}{\left(1+n\right)\left(2+\rho\right)\left(1+g\right)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

¿Cómo cambia el nivel de $\hat{k}^*$ ante aumentos de n o en ρ? (ver figura 9)

Estos resultados son muy similares a los que encontramos en el modelo de Ramsey.

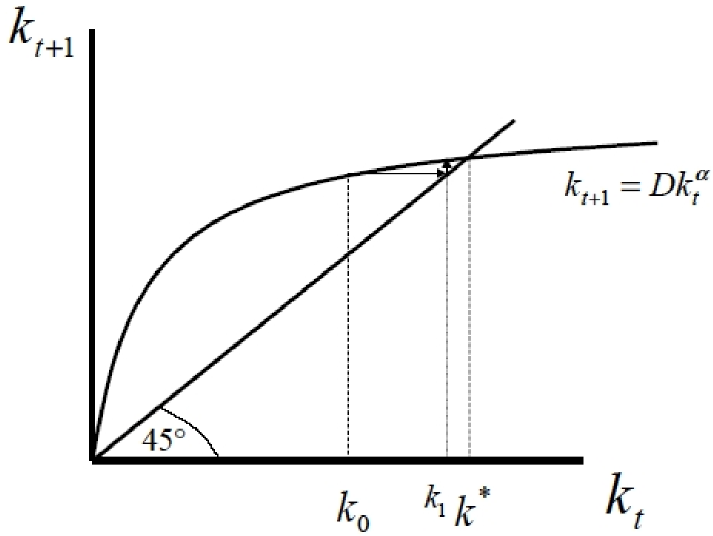

Figure 8: ajuste del capital

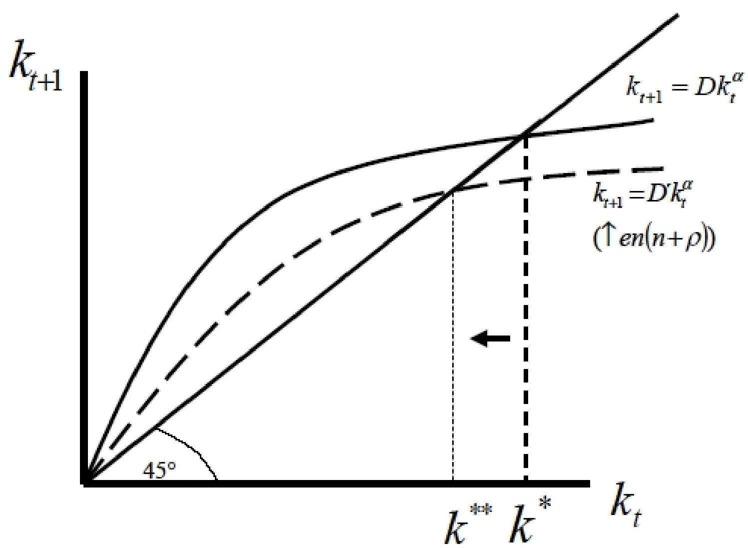

Figure 9: aumentos en n o rho

3.5 La velocidad de convergencia

Nuevamente linealizamos el modelo alrededor del estado estacionario,

$$k_{t+1} \approx k_t + \frac{dk_{t+1}}{dk_t}_{k=k^*}(k_t - k^*)$$

$$k_{t+1} \approx k_t + \alpha D{k^*}^{\alpha-1}(k_t - k^*)$$

reemplazando $k^* = D^{\frac{1}{1-\alpha}}$ llegamos a ,

$$k_{t+1} \approx k_t + \alpha(k_t - k^*)$$

Donde α es ahora la tasa de convergencia. Haciendo sucesivos reemplazos se llega a,

$$\frac{(k_{t+1} - k_o)}{t} \approx \frac{(\alpha^t - 1)}{t}k_0 + (1-\alpha)k^*$$

Nuevamente vemos cómo en este modelo, similarmente al caso de Ramsey, la tasa de crecimiento del capital depende negativamente del capital inicial y positivamente del stock de capital de estado estacionario. La misma expresión se aplica al ingreso.

3.6 El caso general

$$\hat{k}_{t+1} = s\left(f\,\acute{}\left(\hat{k}_{t+1}\right)\right)\left[f\left(\hat{k}_t\right) - kf\,\acute{}\left(\hat{k}_t\right)\right]\frac{1}{(1+n)(1+g)} \tag{3}$$

Si dividimos y multiplicamos por $f\left(\hat{k}_t\right)$

$$\begin{aligned} \hat{k}_{t+1} &= \frac{1}{(1+n)(1+g)}s\left(f\,\acute{}\left(\hat{k}_{t+1}\right)\right). \\ &\quad .\frac{\left[f\left(\hat{k}_t\right) - kf\,\acute{}\left(\hat{k}_t\right)\right]}{f\left(\hat{k}_t\right)}f\left(\hat{k}_t\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Luego el stock de capital por trabajador efectivo en $t+1$ depende del producto por trabajador efectivo, de cuánto de ese producto representa pago de salarios, de cuánto de esos salarios se ahorran y cuántos trabajadores efectivos existen en t relativo a $t+1$. Nótese que los ahorros dependen de los ingresos salariales. Para entender por qué puede haber más de un estado estacionario, expresamos la expresión de arriba para $\hat{k}_t = \hat{k}_{t+1} = k^*$ y dividimos por k^*.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{(1+n)(1+g)}s\left(f\,\acute{}\hat{k}^*\right) \\ &\quad \frac{\left[f\left(\hat{k}^*\right) - \hat{k}^* f\,\acute{}\left(\hat{k}^*\right)\right]}{f\left(\hat{k}_t\right)}\frac{f\left(\hat{k}_t^*\right)}{\hat{k}^*} \end{aligned} \tag{5}$$

Luego si $s(.)$ es constante y la fracción de pagos de salarios sobre el producto es constante (igual a $1-\alpha$), no puede existir más que un solo equilibrio de estado estacionario. Ahora, cuando el share de salarios sube con k y lo mismo ocurre con $s(.)$ (cuando $\theta > 1$),podemos tener equilibrios múltiples. (figura 10)

Si la tasa de ahorro y el share de pagos al trabajo caen fuertemente cuando baja k, k_t podría converger a 0. (figura 11)

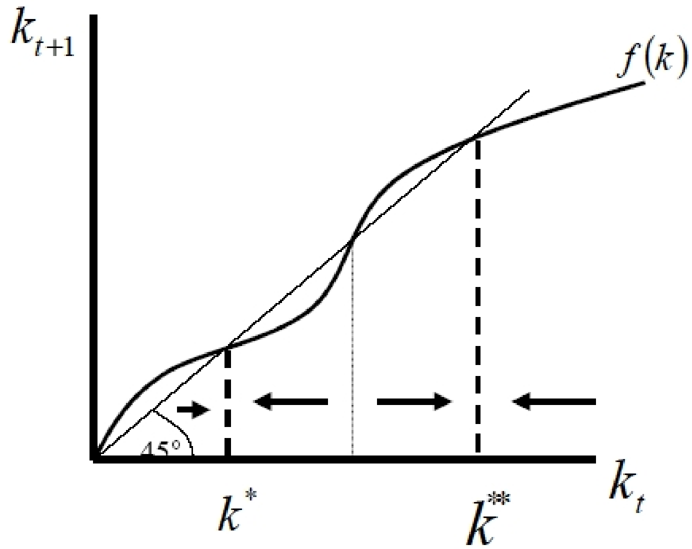

Figure 10: equilibrios múltiples

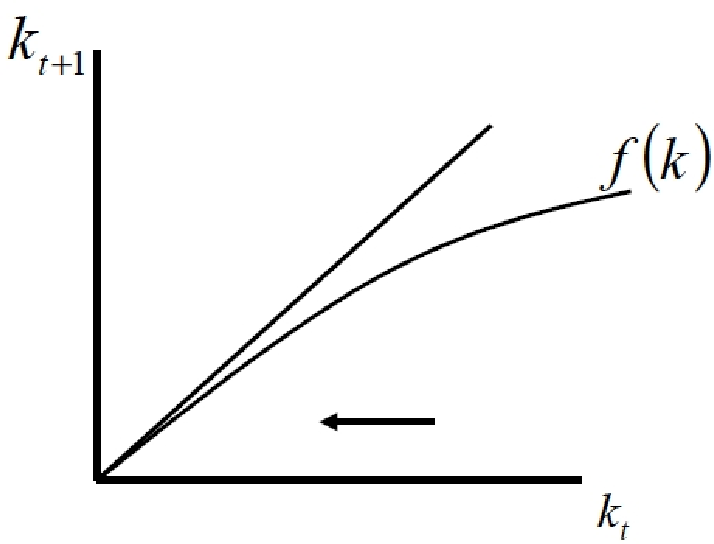

Figure 11: k converge a 0

3.7 Gobierno en el Modelo de Generaciones Superpuestas

El gobierno realiza un gasto en bienes de consumo (por trabajador efectivo) en el momento t que llamaremos G_t. Para financiar este gasto recauda impuestos sobre los jóvenes. Por simplicidad y para no generar distorsiones, vamos a suponer que es un impuesto de suma fija. Considerando que ahora los jóvenes deben pagar impuestos, tenemos que el ingreso del que pueden disponer va a ser menor. El nuevo ingreso disponible de los agentes jóvenes es:

$$(1-\alpha)\,k_t^{\alpha} - G_t$$

Por lo cual, la ecuación 14 resulta:

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)\,k_t^{\alpha} - G_t}{(1+n)\,(2+\rho)\,(1+g)} \tag{6}$$

Notar que un G_t más alto reduce k_{t+1} para un k_t dado.

Para ver cómo influye la introducción del gobierno en este modelo supongamos que nos encontramos inicialmente con un gobierno que gasta $G_t = G_o$ Ahora supongamos que por alguna razón el gobierno aumenta G hasta G_1 en forma permanente. Vemos en la ecuación 6 que esto hace que la función de movimiento del capital se mueva hacia abajo.

El movimiento hacia abajo de la curva k_{t+1} tiene como consecuencia una reducción del capital por trabajador efectivo de estado estacionario, esto quiere decir que cae k^* y sube la tasa real de interés de largo plazo. Este resultado contrasta con lo que se obtenía en el modelo de Ramsey (k* no cambia ni tampoco r).

En el modelo de Diamond los aumentos del consumo del gobierno generan una dismiución en el stock de capital por trabajador efectivo de estado estacionario, y una mayor tasa de interés de equilibrio. ¿Cómo se entiende esto? El aumento del gasto lleva a un aumento de impuestos que reduce el ingreso disponible. Como los agentes desean suavizar su consumo en el tiempo y los impuestos se pagan sólo cuando se es joven, van a querer transladar consumo futuro al presente. La manera de hacer esto es disminuyendo el ahorro y consumiendo cuando joven una mayor porción del ingreso disponible. La caída en el ahorro produce un aumento en la tasa de interés porque la curva de inversión permanece inalterada. Notar que el impuesto no afecta a la productividad marginal del capital por lo que no afecta a la curva de inversión. Sólo disminuye el stock de capital por trabajador efectivo.

3.8 Equivalencia Ricardiana

En la sección anterior introducimos el gasto del gobierno el cual sólo lo podía financiar con impuestos de suma fija. En esta última sección, vamos a permitirle al gobierno financiar su gasto total o parcialmente con deuda. En cada momento t el ahorro de los jóvenes puede ser asignado a capital o bonos del gobierno. Como es de esperar, vamos a tener una modificación en la ecuación **??** ya que ahora los agentes pueden ahorrar en bonos del gobierno y no sólo en capital:

$$k_{t+1} + b_{t+1} = \frac{(1-\alpha)\,k_t^{\alpha} - T_t}{(1+n)\,(2+\rho)\,(1+g)}$$

donde b_{t+1} es el stock de bonos por unidad de trabajo efectivo, y T_t es la recaudación de impuestos en el momento t. Notar que la restricción presupuestaria del gobierno es ahora:

$$G_t = T_t + B_t \tag{7}$$

Vemos ahora que si el gobierno elige finaciar un gasto G_t con menos impuestos T_t y emitiendo más deuda B_t, como los individuos pagan sus impuestos sólo cuando trabajan (jóvenes), los bonos van a representar

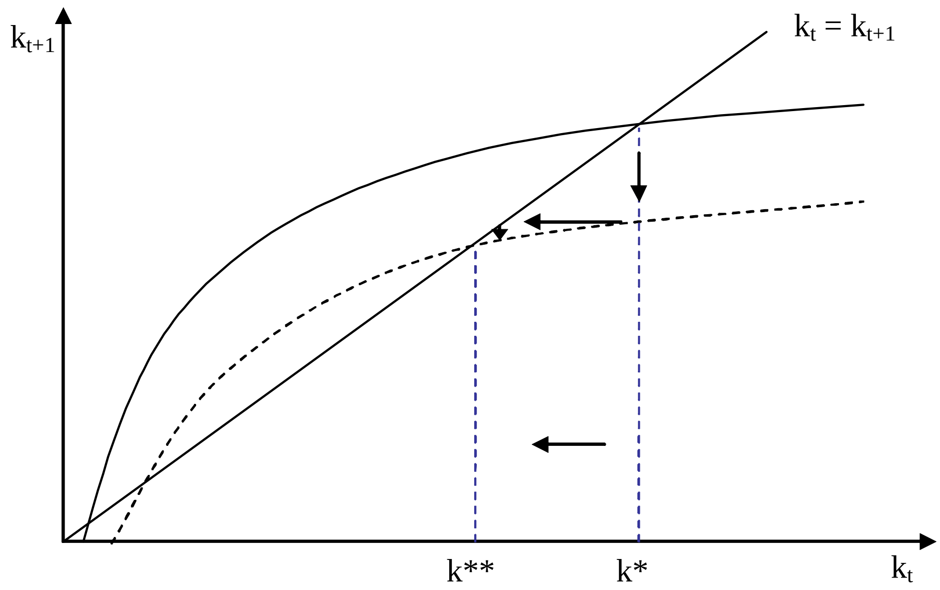

Figure 12: aumento en G

una riqueza neta para los individuos ya que los futuros impuestos los pagan las generaciones futuras. Que el gobierno financie parte de sus gastos con bonos (y menos impuestos) le permite a los jóvenes disponer de un mayor ingreso a lo largo de toda su vida. Como ellos viven sólo dos períodos no van a hacerse cargo de la deuda que contrae el gobierno, que va a pagar por los bonos en un período mayor al de la vida de los agentes. Para pagar los bonos les cobrará mayores impuestos a las futuras generaciones. Podemos concluir que en este modelo no tiene por qué cumplirse la Equivalencia Ricardiana. ¿Que ocurre si los individuos son altruistas y les preocupa la utilidad de las futuras generaciones?