El modelo de crecimiento óptimo (Ramsey)

1 Comportamiento de las familias

Economía descentralizada. Las familias resuelven el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}} u &= \int_0^{\infty} u(c(t))\, e^{-\rho t} e^{nt} dt \\ s.t.\ \ w_t + r_t a_t &= \dot{a}_t + c_t + n a_t \\ \lim_{t\to\infty} a_t e^{-(r-n)t} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde $a_t = k_t - b_t$. La familia ahorra en activo $a(t)$ compuesto por derechos sobre capital físico $k(t)$, y bonos $-b(t)$ ($b(t)$ es deuda).

La primera ecuación describe las preferencias de las familias. $u(c(t))$ es la función de utilidad instantánea que cumple con todos los requisitos de buen comportamiento (primer derivada positiva, segunda negativa y las condiciones de INADA). $c(t)$ es el consumo por persona adulta. Luego $u(c(t))\, e^{nt}$ mide el bienestar de una familia de tamaño e^{nt} en el momento t. La familia descuenta la utilidad del consumo en momentos futuros: $\rho > 0$ es la tasa de preferencia temporal. En general vamos a suponer que $\rho - n > 0$ (es suficiente para asegurar un equilibrio de estado estacionario).

La condición $\lim_{t\to\infty} a_t e^{-(r-n)t} \geq 0$ se llama condición de "no Ponzi". No se permite que la deuda crezca en forma no sostenible (a una tasa más alta que la tasa de interés).

Armamos el Hamiltoniano (en valor presente):

$$H = u(c(t))\, e^{-\rho t} e^{nt} + \lambda(t)\,(w_t + r_t a_t - c_t - n a_t)$$

$\lambda(t)$ es una variable de coestado que representa el precio sombra en 0 de una unidad de producto (ingreso) disponible en el momento t. Vemos cómo la elección de $c(t)$ afecta al nivel de bienestar en forma directa vía $u(c(t))$ y también vía el cambio en el stock de $a(t)$.

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$\begin{aligned} a)\ \ \frac{\partial H}{\partial c} &= 0 \Rightarrow \lambda = u'(c)\, e^{-(\rho t)} \\ b)\ \ \frac{-\partial H}{\partial a} &= \dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = -(r-n)\,\lambda \end{aligned}$$

y la condición de transversalidad:

$$c)\ \ \lim_{t\to\infty} \lambda_t a_t = 0$$

Las condiciones a), b) y c) son necesarias y suficientes para un equilibrio. (En el apéndice de estas notas se demuestra que la condición de transversalidad implica que la condición de no Ponzi se cumple con igualdad)

La intución queda más clara si derivamos la ecuación que surge de (a) con respecto al tiempo y la sustituimos en (b):

$$u''(c)\,\dot{c}e^{-(\rho-n)t} - u'(c)\,(\rho-n)\,e^{-(\rho-n)t} = \dot{\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
& u''(c)\,\dot{c}e^{-(\rho-n)t} - u'(c)(\rho-n)\,e^{-(\rho-n)t} \\
= \quad & (r-n)\,u'(c)\,e^{-(\rho-n)t}
\end{aligned}
$$

$$
r = \rho - \left[\frac{u''(c)\,c}{u'(c)}\right]\frac{\dot{c}}{c} \tag{1}
$$

Para una función de utilidad del tipo: $u(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
u'(c) &= c^{-\theta} \\
u''(c) &= -\theta c^{-\theta-1}
\end{aligned}
$$

y si reemplazamos en (1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
r &= \rho - \left[\frac{-\theta c^{-\theta-1}c}{c^{-\theta}}\right]\frac{\dot{c}}{c} \\
r &= \rho + \theta\frac{\dot{c}}{c}
\end{aligned}
$$

Finalmente la tasa de crecimiento del consumo es:

$$
\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho) \tag{2}
$$

Ahora queremos encontrar la función de consumo. Para ello primero vamos a resolver la ecuación diferencial (2):

$$
\int \frac{\dot{c}}{c}dt = \int \frac{1}{\theta}(r-\rho)\,dt
$$

$$
\ln c_t = \frac{1}{\theta}(r-\rho)\,t + G
$$

donde G es una constante.

$$
c_t = e^{\frac{1}{\theta}(r-\rho)t}\bar{B}
$$

donde $\bar{B}$ es una nueva constante. Si evaluamos esta función en $t=0$ tenemos:

$$
c_0 = \bar{B}
$$

Finalmente tenemos la función consumo:

$$
c_t = c_0 e^{\frac{1}{\theta}(r-\rho)t} \tag{3}
$$

(Ejercicio: encontrar c_0)

2 Comportamiento de las firmas

Las Firmas son productoras de bienes, para realizar esta producción pagan salarios y hacen pagos al capital. Tienen acceso a la tecnología:

$$Y = F\left(K, L, t\right) \tag{4}$$

donde, Y es el output flow
K es el capital (en unidades del bien)
L es trabajo (en horas-persona por año)
t es tiempo y representa el efecto del progreso técnico dado exógenamente.

La función de producción satisface las propiedades neoclásicas, y la podemos escribir de la siguiente manera:

$$Y = F(K, \hat{L})$$

donde $\hat{L} = L * A_t$ es trabajo medido en unidades "efectivas", y donde A_t es el nivel de tecnología que crece a una tasa constante $x \geq 0$; $A_t = e^{xt}$ normalizando de manera que: $A_0 = 1$.

Dado que la tecnología tiene rendimientos constantes a escala podemor escribir la función de producción como:

$$\frac{Y}{\hat{L}} = F\left(\frac{K}{\hat{L}}, 1\right) \tag{5}$$

Es decir, escribimos la función de producción en unidades trabajo efectivas:

$$\hat{y} = f\left(\hat{k}\right)$$

donde, $\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}}; \hat{k} = \frac{K}{\hat{L}}$
se cumplen las condiciónes de **Inada,**

$$\begin{aligned} f\,'\left(\hat{k}\right) &\rightarrow \infty \text{ a medida que } \hat{k} \rightarrow 0 \\ f\,'\left(\hat{k}\right) &\rightarrow 0 \text{ a medida que } \hat{k} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Recordar que:

$$\begin{aligned} r &= R - \delta \\ R &= r + \delta \end{aligned}$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital físico y R es el costo de alquiler del capital.
Las firmas buscan maximizar su beneficio (Be) que está dado por la siguiente función:

$$Be = F\left(K, \hat{L}\right) - \left(r + \delta\right) K - wL$$

Si consideramos una firma con una escala arbitraria y con un nivel de trabajo efectivo $\hat{L}$, podemos escribir los beneficios para esta firma como:

$$Be = \hat{L}\left[f\left(\hat{k}\right) - \left(r + \delta\right)\hat{k} - we^{-xt}\right] \tag{6}$$

Ésta es la función que las firmas quieren maximizar.
Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Be}{\partial K} &= 0 \Longrightarrow \hat{L}\left[f\text{ '}\left(\hat{k}\right)\frac{1}{\hat{L}} - (r+\delta)\frac{1}{\hat{L}}\right] = 0 \\
\frac{\partial Be}{\partial L} &= 0 \Longrightarrow e^{xt}\left[f\left(\hat{k}\right) - (r+\delta)\hat{k} - we^{-xt}\right] + \\
& \hat{L}\ \left[-f\text{ '}\left(\hat{k}\right)\frac{K}{\hat{L}^2}e^{xt} + (r+\delta)\frac{K}{\hat{L}^2}e^{xt}\right] = 0
\end{aligned}$$

Organizando términos, las CPO de las firmas son:

$$\begin{aligned}
f\text{ '}\left(\hat{k}\right) &= (r+\delta) \\
w &= \left[f\left(\hat{k}\right) - f\text{ '}\left(\hat{k}\right)\hat{k}\right]e^{xt}
\end{aligned}$$

3 Equilibrio Agregado

Recordar que la restricción: $\dot{a} = w + ra - c - na$ determina $\dot{a}$. En el equilibrio agregado tenemos que $b = 0$, luego:

$a = k$ y $\hat{k} = ke^{-xt}$

Por otro lado, w y r están dados por:

$$\begin{aligned}
r &= f'(\hat{k}) - \delta \\
w &= \left[f\left(\hat{k}\right) - f\,'(\hat{k})\hat{k}\right]e^{xt}
\end{aligned}$$

donde $\hat{k}$ es ahora el capital agregado de la economía.

La restricción flujo de las familias determina $\dot{a}$:

$$\dot{a} = w + ra - c - na \tag{7}$$

usando $a = k$ y $\hat{k} = ke^{-xt}$ y reemplazando r y w (CPO de las firmas), y tenemos:

$$\dot{k} = \left[f\left(\hat{k}\right) - f\,'\left(\hat{k}\right)\hat{k}\right]e^{xt} + rk - c - nk$$

$$\dot{k} = \left[f\left(\hat{k}\right) - (r+\delta)\hat{k}\right]e^{xt} + rk - c - nk$$

dado que: $k = \hat{k}e^{xt}$ tenemos:

$$\dot{k} = \left[f\left(\hat{k}\right) - (r+\delta)\hat{k}\right]e^{xt} + r\hat{k}e^{xt} - c - n\hat{k}e^{xt}$$

$$\dot{k}e^{-xt} = f\left(\hat{k}\right) - (n+\delta)\hat{k} - ce^{-xt}$$

como $\dot{k}e^{-xt} = \dot{\hat{k}} + \hat{k}x$

$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - (x+n+\delta)\hat{k} - \hat{c}$$

donde: $\hat{c} = \dfrac{C}{\hat{L}} = ce^{-xt}$, y donde $\hat{k}_0$ está dado.

3.1 Una digresión:

Notar que esta ley de movimiento del capital es idéntica a la obtenida en el modelo de Solow- Swan, donde teníamos una tasa de ahorro constante. Recordar que en ese modelo el consumo per cápita (o por trabajador efectivo) era una porción fija del ingreso per cápita (o por trabajador efectivo): $c = (1-s)\,f\,(k)$. Reemplazando en la ecuación de movimiento del capital tenemos:

$$\hat{k} = sf\left(\hat{k}\right) - (x+n+\delta)\,\hat{k}$$

que es la ecuación fundamental de Solow Swan.

Esta ecuación es la restricción impuesta por los recursos. Es la ecuación que determina la evolución de $\hat{k}$ en el tiempo, y de esa manera $\hat{y} = f\left(\hat{k}\right)$,

El elemento que falta en la determinación del equilibrio es $\hat{c}$,si conociéramos la relación entre $\hat{c}$ y $\hat{k}$, o si tuviéramos otra ecuación diferencial que determine la evolución de $\hat{c}$, entonces podríamos estudiar toda la dinámica de la economía.

Recordar que en el modelo de Solow, esta relación la obteníamos a partir del supuesto de que la tasa de ahorro es constante, lo que implicaba una relación lineal entre consumo y la función de producción: $\hat{c} = (1-s)\,f\left(\hat{k}\right)$.

En el modelo de Ramsey el consumo se determina endógenamente siguiendo el siguiente sendero temporal:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\,(r-\rho)$$

Usando la condición:

$$r = f\,'\left(\hat{k}\right) - \delta \quad \text{y} \quad \hat{c} = ce^{-xt}$$

y obtenemos:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta}\left[f\,'\left(\hat{k}\right) - \delta - \rho - \theta x\right] \tag{8}$$

3.2 Expreso la condición de transversalidad en términos de $\hat{k}$,

A partir de la CPO de la familia se obtiene:

$$\dot{\lambda}(t) + (r-n)\,\lambda(t) = 0$$

resolviendo,

$$\lambda(t) = e^{-(r-n)t}\lambda(0)$$

La expresión para la condición de transversalidad es,

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t a_t = 0$$

como $a = k$ y $k = \hat{k}e^{xt}, r = f\'(\hat{k}) - \delta$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(f\'(\hat{k})-\delta-n)t}\hat{k}e^{xt} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(f\'(\hat{k})-\delta-n-x)t}\hat{k} = 0$$

4 Solución de Estado Estacionario

De las secciones anteriores surge el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}} &= f\left(\hat{k}\right) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k} \quad (9)\\ \frac{\dot{\hat{c}}}{c} &= \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - (\rho+\delta+\theta x)\right] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(f'(\hat{k})-\delta-n-x)t}\hat{k} = 0$$

En el estado estacionario se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}} &= 0 \Longrightarrow f\left(\hat{k}^*\right) - \hat{c}^* - (x+n+\delta)\,\hat{k}^* = 0\\ \frac{\dot{\hat{c}}}{c} &= 0 \Longrightarrow \frac{1}{\theta}\left[f'\left(\hat{k}^*\right) - \delta - \rho - \theta x\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{k}} = 0 \Longrightarrow \hat{c} = f\left(\hat{k}^*\right) - (x+n+\delta)\,\hat{k}^* \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\hat{c}}}{c} &= 0 \Longrightarrow f'\left(\hat{k}^*\right) = \delta+\rho+\theta x \quad (12)\\ &\Longrightarrow f'\left(\hat{k}^*\right) - \delta = \rho+\theta x \quad (13) \end{aligned}$$

Por su lado, la condición de transversalidad implica,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(f'(\hat{k}^*)-\delta-n-x)t}\hat{k}^* = 0$$

como $\hat{k}^* > 0$ entonces, $f'(\hat{k}^*) - \delta > x+n$. Si reemplazamos $f'(\hat{k}^*) - \delta = \rho+\theta x$ en la desigualdad llegamos a,

$$\rho + \theta x > x + n$$

Que se puede escribir como,

$$\rho > n + (1-\theta)x$$

Luego concluimos que en este modelo con progreso técnico la tasa de preferencia temporal tiene que ser mayor que n para que se cumpla la condición de transversalidad cuando $\theta \leq 1$.Intuición: cuanto menos cóncava sea $U(c)$ más elevada tendrá que ser ρ (recordar que en el estado estacionario c crece a la tasa x). Tarea: mostrar que la condición de arriba es necesaria y suficiente para que $\int_0^\infty u\left(c\left(t\right)\right)e^{-\rho t}e^{nt}dt$ converja a un numero finito. (Ayuda: calcular el límite para $c(t) = c^*$).

Resumimos la solución de estado estacionario del modelo:

$$\hat{k}^* \Longrightarrow f'\left(\hat{k}^*\right) - \delta = \rho+\theta x > n + x$$

$$\hat{c}^* \Longrightarrow \hat{c}^* = f\left(\hat{k}^*\right) - (x+n+\delta)\,\hat{k}^*$$

$$\hat{y}^{*} \Longrightarrow \hat{y}^{*} = f\left(\hat{k}^{*}\right)$$

También recordamos que en el estado estacionario:

$$\frac{K}{AL} = \frac{C}{AL} = \frac{Y}{AL} = \text{constante} \Longrightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} = x$$

5 La dinámica de transición:

Reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales que son la solución para la dinámica del consumo y capital agregados,

$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - \hat{c} - (x+n+\delta)\,\hat{k} \tag{14}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left[f\acute{}(\hat{k}) - (\rho+\delta+\theta x)\right] \tag{15}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(f\acute{}(\hat{k})-\delta-n-x)t}\hat{k} = 0$$

La dinámica la vamos a presentar utilizando un Diagrama de Fases. En el armado del diagrama de fases seguimos los siguientes pasos:

En primer lugar, armamos las curvas $\dot{\hat{k}} = 0$ y $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$. Notar que la curva $\dot{\hat{k}} = 0$:

$$\hat{c} = f\left(\hat{k}\right) - (x+n+\delta)\,\hat{k}$$

es inicialmente creciente hasta alcanzar un valor máximo (el de la regla de oro, donde $f'\left(\hat{k}_G\right) - \delta = x + n$) y luego es decreciente.

En segundo lugar, queremos analizar qué pasa en las regiones que estén por encima y por debajo de la curva $\dot{k} = 0$. Mirando la ecuación vemos que por encima de esta curva (c aumenta un poquito) el capital disminuye. Haciendo el mismo análisis vemos que por debajo de la curva, el capital disminuye.

Ahora queremos hacer el mismo análisis para $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$.

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0 \Rightarrow \hat{c}\left[\frac{1}{\theta}(f\acute{}\left(\hat{k}\right) - \rho - \delta - \theta x)\right] = 0$$

Vemos que hay dos forma de tener una estado estacionario para el consumo per capita: $\hat{c} = 0$ y $f\acute{}\left(\hat{k}\right) = \rho + \delta + \theta x$

La primera posibilidad $\hat{c} = 0$ se corresponde con el eje horizontal de diagrama.

La segunda posibilidad, notar que $\hat{c} = 0$ se mantiene para un $\hat{k}$ fijo independientemente del valor de $\hat{c}$. Es por ello que es una línea vertical en el valor $\hat{k}^{*}$.

A la derecha de esta línea estamos aumentando un poquito $\hat{k}$, cuando esto ocurre, por la ley de rendimientos marginales decrecientes, está cayendo $f\acute{}\left(\hat{k}\right)$. Como $\rho + \delta + \theta x$ está fijo, el consumo va cayendo.

A la izquierda pasa lo opuesto.Podemos entonces graficar el diagrama de fases. Chequear cuál de las trayectorias posibles cumple con todas las condiciones de óptimo.

6 Modelo sin progreso técnico:

Solución al problema de las familias:

$$\dot{a} = w_t + r_t a - c_t - na_t$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{-1}{\sigma_t}\left[r_t - \rho\right]$$

$$\sigma_t = \frac{u\acute{}(c)\,c}{u\acute{}(c)}$$

Solución al problema de las firmas:

$$\begin{aligned} f\acute{}\,(k) - \delta &= r_t \\ f\,(k) - f\acute{}\,(k)\,k &= w \end{aligned}$$

Usando $b = 0$ y $a = k$, tenemos:

$$\dot{k} = f\,(k) - f\acute{}\,(k)\,k + \left(f\acute{}\,(k) - \delta\right)k_t - c_t - nk_t$$

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f\,(k) - c_t - (n+\delta)\,k_t \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\theta}\left[f\acute{}\,(k) - \delta - \rho\right] \end{aligned}$$

más la condición de trasversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} k_t e^{(f\acute{}\,(k_t)-(n+\delta))t} \geqq 0$$

Solución de estado estacionario:

$$\begin{aligned} f\acute{}(k^*) - \delta &= \rho \\ c^* &= f\,(k^*) - (n+\delta)\,k^* \\ y^* &= f\,(k^*) \end{aligned}$$

Recordar que ahora en el estado estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} = 0 \\ \frac{\dot{C}}{C} &= \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} = n \end{aligned}$$

Dinámica de transición:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f\,(k) - c_t - (n+\delta)\,k_t \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\theta}\left[f\acute{}\,(k) - \delta - \rho\right] \end{aligned}$$

7 Apéndice

7.0.1 En equilibrio la condición de no Ponzi se cumple en igualdad

Queremos demostrar que en el equilibrio
$\lim_{t\to\infty} a_t e^{-(r-n)t} \geq 0$ se va a satisfacer con igualdad.
de (b) tenemos:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(r-n) \tag{16}$$

recordar que:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{d\ln\lambda_t}{dt}$$

con lo cual podemos resolver (6) fácilmente:

$$\int \frac{d\ln\lambda_t}{dt} = \int -(r-n)\,dt$$

$$\ln\lambda_t = -(r-n)\,t + B$$

donde B es una constante.

$$\begin{aligned} \lambda_t &= e^{-(r-n)t+B} \\ \lambda_t &= e^{-(r-n)t}D \end{aligned}$$

donde $D = e^B$
Si evaluamos esta ecuación en t=0 tenemos:

$$\lambda_0 = D \tag{17}$$

$$\lambda_t = e^{-(r-n)t}\lambda_0 \tag{18}$$

Finalmente, reemplazando (17) en (c) obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_0 e^{-(r-n)t} a_t = 0$$

como $\lambda_0 = D$ debe darse que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(r-n)t} a_t = 0 \tag{19}$$