El Modelo de Solow con Progreso técnico (Makiw, Romer and Weil (1992)

1 El modelo sin capital humano

función de producción del Tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha} \tag{1}$$

$A_t L_t$ representa ·"mano de obra efectiva" (aumentada por el nivel de productividad dado por el progreso técnico).

$$L_t = L_0 e^{nt} \tag{2}$$

$$A_t = A_0 e^{gt} \tag{3}$$

Donde n y g son las tasas exógenas de crecimiento de la población y progreso técnico. La condición de equilibrio macroeconómico (ahorro=inversión) se puede escribir,

$$\dot{K} + \delta K = sY$$

Dividiendo por AL,

$$\frac{\dot{K}}{AL} + \frac{\delta K}{AL} = \frac{sY}{AL}$$

suponiendo que $k = \frac{K}{AL}$, y recordando que,

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - \left(\frac{K}{(AL)^2} \left(\dot{L}A + \dot{A}L \right) \right) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \frac{A}{A} \frac{\dot{L}}{L}$$

$$- \frac{K}{AL} \frac{L}{L} \frac{\dot{A}}{A}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - k(n+g)$$

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{k} + (n+g) k$$

se llega a,

$$\dot{k}_t = sy_t - (n+g+\delta) k_t$$

y reemplazando por la función de producción,

$$\dot{k}_t = sk_t^{\alpha} - (n+g+\delta) k_t \tag{4}$$

En el equilibrio de estado estacionario se define como $k = k^*$ tal que $\dot{k}_t = 0$. Resolvemos para k^* y y^*,

$$k^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5}$$

$$y^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{6}$$

Resultados de estática comparativa para k^* : $\frac{dk^*}{ds} > 0$, $\frac{dk^*}{dn} < 0$

¿Cuál es la tasa de ahorro s_G que maximiza el nivel de consumo de largo plazo c^*?

$$c^* = (1-s)f(k^*(s))$$

En el estado estacionario,

$$sf(k^*(s)) = (n+\delta+g)k^*(s)$$

reemplazando arriba,

$$c^* = f(k^*(s)) - (n+\delta+g)k^*(s)$$

Derivando respecto de s,

$$\frac{dc^*}{ds} = \left[f'(k^*(s) - (n+\delta+g)\right]\frac{dk^*}{ds} = 0$$

Luego la condición para s_G es la siguiente,

$$f'(k^*(s_G)) - \delta = n + g$$

Sin progreso técnico ($g = 0$), la expresión de arriba resume la conocida condición que la tasa de ahorro de la regla de oro implica que la tasa real de interés se iguala a la tasa de crecimiento de la población.

Con el fin de encontrar una expresión para el *ingreso per capita* en el equilibrio de estado estacionario, reescribamos la función de producción,

$$Y_t = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left[A_0 e^{gt}\right]^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}\left[A_0 e^{gt}\right]^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t^{\alpha}}{A_t^{\alpha}}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}\left[A_0 e^{gt}\right]^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_0 e^{gt}$$

La expresión de arriba indica que el ingreso per capita depende del nivel de capital por trabajador "efectivo" y de la tecnología. Reemplazando por la solución de estado estacionario para k^*,

$$\frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{s}{n+g+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_0 e^{gt}$$

Tomamos logaritmo natural,

$$\ln\frac{Y_t}{L_t} = \ln A_o + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta) \tag{7}$$

Donde A_o es el nivel inicial de productividad de la mano de obra. Hay que pensar que este nivel inicial no solo refleja diferencias en la tecnología inicial sino también otros factores como instituciones o politicas publicas (impuestos, regulaciones, regimen comercial, infraestructura, etc.). Suponemos que A_0 se determina de la siguiente forma,

$$\ln A_0 = a + \varepsilon_i \tag{8}$$

donde a es una constante y ε_i es un shock específico que afecta la productividad inicial en cada país. Luego la ecuación final para el logaritmo del ingreso per capita es igual a,

$$\ln \frac{Y_t}{L_t} = a + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n+g+\delta) + \varepsilon_i \tag{9}$$

La ecuación de arriba es la que se utilizará en el analisis empírico. Notar que dado que $\alpha = \frac{1}{3}$. La estimación de la ecuación no solo debe arrojar que el coeficiente de s debe ser positivo y el de n negativo sino que dichos coeficientes deben tener la misma magnitud en valor absoluto y deben aproximarse a,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1.31$$

Un supuesto crítico para poder estimar la ecuación de arriba por OLS es que s y n son independiente del shock ε_i. Ver resultados de la estimación en MRW (1992). Problema: $\widehat{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0.50$

2 Extensión con capital humano

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta} \tag{10}$$

donde H es el stock de capital humano.La reglas de acumulación de capital físico y humano son similares,

$$\dot{k}_t = s_k y_t - (n+g+\delta) k_t \tag{11}$$

$$\dot{h}_t = s_h y_t - (n+g+\delta) k_t \tag{12}$$

con,

$$y = \frac{Y}{AL}; h = \frac{H}{AL}; k = \frac{K}{AL}$$

En el estado estacionario

$$\dot{k}_t = \dot{h}_t = 0$$

$$y_t = k_t^{\alpha} h_t^{\beta}$$

$$\begin{aligned} s_k k^{*\alpha} h^{*\beta} &= k^* (n+g+\delta) \\ s_h k^{*\alpha} h^{*\beta} &= h^* (n+g+\delta) \end{aligned}$$

despejamos para k^* y h^*,

$$\begin{aligned} k^{*(\alpha-1)} &= \frac{(n+g+\delta)}{h^{*\beta} s_k} \\ h^{*(\beta-1)} &= \frac{(n+g+\delta)}{k^{*\alpha} s_h} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k^* &= \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\
h^* &= \left(\frac{s_k^{\alpha} s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}
$$

Reemplazamos en la función de producción,

$$
\begin{aligned}
y^* &= \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^{\beta}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_k^{\alpha} s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \\
y^* &= \frac{s_k^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(n+g+\delta)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}}
\end{aligned}
$$

Que podemos escribir como:

$$
\frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t s_k^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(n+g+\delta)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}} = \frac{A_0 e^{gt} s_k^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(n+g+\delta)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}}
$$

Tomando logaritmo llegamos a,

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{Y_t}{L_t} &= \ln A_o + gt - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln (n+g+\delta) \\
&\quad + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln (s_k) \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln (s_h)
\end{aligned}
$$

Nuevamente suponemos que,

$$
\ln A_0 = a + \varepsilon_i \tag{13}
$$

Reemplazando arriba llegamos a la nueva ecuación a ser utilizada en el análisis empírico,

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{Y_t}{L_t} &= a + gt - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln (n+g+\delta) \\
&\quad + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln (s_k) \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln (s_h) + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

Para estimar esta ecuación por OLS tenemos que suponer que s_k, s_h,y n son independientes de la diferencias iniciales en el ingreso percapita determinada por el shock ε_i

Implicancias:

$$
\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} > \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{14}
$$

if $\alpha = \beta = 1/3$ then:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} = 1 > 0.5 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Intuición para este resultado? Aumentos en s_k tienen un mayor impacto en el producto per capita porque no solo afecta a k^* sino que también afecta en forma indirecta a h^*.

Una segunda implicancia es que la suma de los coefficientes de las variables de interés es igual a cero,

$$\ln(s_k) + \ln(s_h) + \ln(n+g+\delta) = 0$$

Principales resultados de la estimación (ver MRW (1992)):

a) El modelo explica casi 80% de la variabilidad en el ingreso per capita entre países.

b) Las restricciones para los coeficientes se verifican

c) Analsis de sensibilidad: ¿cuánto dependen los resultados de los supuestos de cómo se miden ciertas variables: ej. tasa de ahorro de capital humano?.

3 La dinámica fuera del estado estacionario

Ahora vamos a utilizar el modelo para estudiar la dinámica fuera del estado estacionario y obtener prediciones para la tasa de crecimiento del ingreso per capita (para $k < k^*$) y la velocidad de convergencia. Intuición gráfica de la solución para la tasa de cremiento del modelo de Solow.

Analisis formal del modelo de.MRW con capital humano. Como vimos anteriormente, el producto por trabajador efectivo es:

$$y = k^{\alpha} h^{\beta}$$

que podemos escribir como:

$$\ln y = \alpha \ln k + \beta \ln h$$

Queremos linearizar alrededor del estado estacionario. Vamos a hacer una linearización de Taylor.

Primero, algo de notación:

$$\hat{y} = \frac{\dot{y}}{y}; \hat{k} = \frac{\dot{k}}{k}; \hat{h} = \frac{\dot{h}}{h}$$

La tasa de crecimiento del producto por trabajador efectivo esta dada por:

$$\hat{y} = \alpha \hat{k} + \beta \hat{h} \tag{15}$$

Las leyes de movimiento del capital humano y capital físico son:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= s_h y - (n+g+\delta) h \\ \dot{k} &= s_k y - (n+g+\delta) k \end{aligned}$$

Sustituyendo en (15) tenemos:

$$\hat{y} = \alpha \left[s_k \left(\frac{y}{k} \right) - (n+g+\delta) \right] + \beta \left[s_h \left(\frac{y}{h} \right) - (n+g+\delta) \right]$$

que podemos reescribir como:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \alpha\left[s_k k^{\alpha-1}h^{\beta}-(n+g+\delta)\right]+\\ &\beta\left[s_h k^{\alpha}h^{\beta-1}-(n+g+\delta)\right]\end{aligned}$$

ahora vamos a hacer una log-linearización. Para esto es importante notar que,

$$y = e^{\ln y}$$

ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \alpha\left[s_k e^{(\alpha-1)\ln k+\beta\ln h}-(n+g+\delta)\right]+\\ &\beta\left[s_h e^{\alpha\ln k+(\beta-1)\ln h}-(n+g+\delta)\right]\end{aligned}$$

Si llamamos,

$$\hat{y} \equiv \theta\left(\ln k; \ln h\right)$$

la tasa de crecimiento del ingreso por trabajador efectivo es función del lnk y el lnh

Cuando hacemos la aproximación de Taylor aredедor del estado estacionario $ln\ k^*, \ln h^*$ tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{y} &\simeq \theta\left(\ln k^*, \ln h^*\right)+\theta_{\ln k}\left(\ln k^*, \ln h^*\right)\left(\ln k-\ln k^*\right)+\\ &\theta_{\ln h}\left(\ln k^*, \ln h^*\right)\left(\ln h-\ln h^*\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Debemos calcular $\theta\left(\ln k^*, \ln h^*\right); \theta_{\ln k}\left(\ln k^*, \ln h^*\right)$;
$\theta_{\ln h}(\ln k^*, \ln h^*)$, es claro que:

$$\theta\left(\ln k^*, \ln h^*\right) = 0$$

Es decir, evaluado en k^*y h^* tenemos $\dot{y} = \hat{y} = 0$.
Además tenemos que calcular las derivadas:

$$\begin{aligned}\theta_{\ln k}\left(\ln k, \ln h\right) &= \alpha s_k(\alpha-1)e^{(\alpha-1)\ln k+\beta\ln h}+\\ &\beta\alpha s_h e^{\alpha\ln k+(\beta-1)\ln h}\end{aligned}$$

cuando la evaluamos en el estado estacionario tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_{\ln k}\left(\ln k^*, \ln h^*\right) &= \alpha s_k(\alpha-1)e^{(\alpha-1)\ln k^*+\beta\ln h^*}+\\ &\beta\alpha s_h e^{\alpha\ln k^*+(\beta-1)\ln h^*}\end{aligned}$$

Notar que:

$$
\begin{aligned}
s_k e^{(\alpha-1)\ln k^* + \beta \ln h^*} &= s_k\left(\frac{y^*}{k^*}\right) = (n+g+\delta) \\
s_h e^{\alpha \ln k^* + (\beta-1)\ln h^*} &= s_k\left(\frac{y^*}{h^*}\right) = (n+g+\delta)
\end{aligned}
$$

Con lo cual la derivada de la tasa de crecimiento del producto per capita respecto de capital per capita evaluada en el estado estacionario nos queda:

$$
\begin{aligned}
\theta_{\ln k}(\ln k^*, \ln h^*) &= (\alpha-1)\,\alpha\,(n+g+\delta) \\
&\quad +\beta\alpha\,(n+g+\delta) \\
&= \alpha\,(\beta+\alpha-1)\,(n+g+\delta)
\end{aligned}
$$

Hacemos lo mismo con $\theta_{\ln h}(\ln k^*, \ln h^*)$ y tenemos:

$$
\begin{aligned}
\theta_{\ln h}(\ln k^*, \ln h^*) &= \beta\alpha\,(n+g+\delta) \\
&\quad +\beta\,(\beta-1)\,(n+g+\delta) \\
&= \beta\,(\alpha+\beta-1)\,(n+g+\delta)
\end{aligned}
$$

Ahora sustituimos todo en (16) y queda:

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &\simeq \alpha\,(\beta+\alpha-1)\,(n+g+\delta)\,(\ln k - \ln k^*) + \\
&\quad +\beta\,(\alpha+\beta-1)\,(n+g+\delta)\,(\ln h - \ln h^*)
\end{aligned}
$$

Reordenando términos resulta:

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &\simeq (\alpha+\beta-1)\,(n+g+\delta)\,[\alpha\,(\ln k - \ln k^*) \\
&\quad +\beta\,(\ln h - \ln h^*)]
\end{aligned} \tag{17}
$$

Antes habíamos visto que de la función de producción obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \alpha \ln k + \beta \ln h \\
\ln y^* &= \alpha \ln k^* + \beta \ln h^* \\
\ln y - \ln y^* &= \alpha\,(\ln k - \ln k^*) + \beta(\ln h - \ln h^*)
\end{aligned}
$$

Reemplazando arriba obtenemos:

$$
\hat{y} \simeq -\,(1-\alpha-\beta)\,(n+g+\delta)\,[\ln y - \ln y^*]
$$

Hemos derivado una expresión aproximada para la tasa de crecimiento del ingreso por trabajador efectivo fuera del estado estacionario. La misma sugiere que dicha tasa de crecimiento será más elevada cuanto más lejos este la economia del equilibrio de largo plazo (menor sea $\ln y$ para un dado $\ln y^*$). También, para un ingreso corriente dado, ln y, la tasa de crecimiento será mayor cuanto más elevado sea el ingreso de largo plazo ln y^*.Luego países con tasas de ahorro (de capital físico y capital humano) más elevadas crecen en forma más acelerada en la transición hacia el equilibrio de largo plazo por que a mayor s_k y s_h sube y^* La tasa de convergencia del modelo de MRW:

$$\frac{d\ln y}{dt} = -(1-\alpha-\beta)(n+g+\delta)[\ln y - \ln y^*]$$

Llamemos $\lambda^{MRW} = -(1-\alpha-\beta)(n+g+\delta)$ a la velocidad de convergencia: cuánto se reduce por unidad de tiempo la distancia entre ln y y $\ln y^*$. Tomando valores "razonables" para α, β, n, g y δ este parámetro da cercano a 0.02.

Entonces tenemos una ecuación diferencial de primer orden:

$$\hat{y} = \lambda^{MRW}[\ln y^* - \ln y_t]$$

que podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \\
\hat{y} &= \dot{x} \\
\varphi &= \lambda \ln y^* \\
\lambda &= (1-\alpha-\beta)(n+g+\delta)
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial nos queda:

$$\dot{x}_t = -\lambda x_t + \varphi$$

La solución de esta ecuación es:

$$x_t = x_0 e^{-\lambda t} + \frac{\varphi}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$$

Reemplazando $\ln y_t = x_t$ y $\ln y_0 = x_0$ tenemos:

$$\ln y_t = \ln y_0 e^{-\lambda t} + \ln y^*\left(1-e^{-\lambda t}\right) \tag{18}$$

$$\ln y_t - \ln y^* = e^{-\lambda t}(\ln y_0 - \ln y^*)$$

$$\frac{\ln y_t - \ln y^*}{\ln y_0 - \ln y^*} = e^{-\lambda t}$$

Si queremos calcular cuánto tarda en recorrer la mitad de camino hasta el estado estacionario, tenemos que calcular t cuando el miembro de la izquierda es 0.5.

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

Tomamos logaritmos y nos queda:

$$
\begin{aligned}
-\ln 2 &= -\lambda t \\
t &= \frac{\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Para $\lambda \simeq 0.02$, $t = 0.069/0.02$=35 años !!!

Si queremos testear la hipótesis de velocidad de convergencia como lo hacen MRW, necesitamos obtener una expresión que nos permita realizar alguna regresión. Restando $\ln y_0$ en ambos miembros de (18) tenemos:

$$
\ln y_t - \ln y_0 = \ln y^* \left(1 - e^{-\lambda t}\right) - \ln y_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right)
$$

Si ahora reemplazamos por el ingreso por trabajador efectivo de estado estacionario que encontramos anteriormente (y^*) ,tenemos:

$$
\begin{aligned}
\ln y_t - \ln y_0 &= \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln(s_k) + \\
&+ \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(s_h) \\
&- \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(n+g+\delta) \\
&- \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln y_0
\end{aligned}
$$

Esta ecuación es la que utilizan MRW (1992) para explicar los determinantes de la tasa de crecimiento del ingreso per capita. Notar que la expresión de arriba está escrita en términos de ingreso por trabajador efectivo. Es sencillo transformarla en términos de $\frac{Y(t)}{L(t)}$.

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{Y_t}{L_t} - \ln \frac{Y_o}{L_o} &= a\left(1 - e^{-\lambda t}\right) - gt \\
&+ \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln(s_k) \\
&+ \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(s_h) \\
&- \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(n+g+\delta) \\
&- \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln \frac{Y_o}{L_o} + \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \epsilon_i
\end{aligned}
$$

Vemos claramente que la tasa de crecimiento es función de los determinantes del ingreso de largo plazo y del ingreso inicial. Ver resultados de la estimación en MRW (1992).