Lecciones 8 y 9

1. Programación Dinámica

La programación dinámica es un método para resolver un problema de maximización. Veremos un caso particular en que la función tiene como dominio un conjunto Ω de sucesiones definido por

$$\Omega = \{(a_n) : \mathbb{N} \longrightarrow X, a_{n+1} \in \Gamma(a_n)\}$$

donde X es un espacio (en general métrico y más particularmente un subconjunto de $\mathbb{R}^m$) y $\Gamma : X \longrightarrow X$ una *correspondencia* de X a X, es decir una función de X a las partes de X. Más particularmente la función que querremos maximizar será de la forma

$$u((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$$

donde $F : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real con dominio $X \times X$. Obviamente debemos dar condiciones (hipótesis) para que dicha función esté bien definida, es decir, que la serie converja. En caso de que la serie tienda a más o menos infinito, podemos eventualmente agregar dichos puntos a $\mathbb{R}$, considerando como codominio de F al conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pero nosotros no entraremos en esos detalles en este curso.

El problema de maximización que estudiaremos será entonces:

$$\sup_{\substack{(a_n)\in\Omega,\\ a_0=x}} u((a_n)).$$

Como se ve dicho problema depende de la condición inicial $a_0 = x$. La idea de la programación dinámica es hacer variar x y ver que sucede con los supremos correspondientes. Si llamamos $v(x)$ al supremo para la condición inicial $a_0 = x$, es decir

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{(a_n)\in\Omega,\\ a_0=x}} u((a_n)). \qquad (ES)$$

demostraremos que

$$v(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} \left(F(x,y)) + \beta v(y)\right). \qquad (EF) \tag{1}$$

A la ecuación anterior se la conoce como *ecuación de Bellman*. Su solución involucra al teorema de la contracción, ya que si definimos el operador T dado por

$$T(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y\in\Gamma(x)} (F(x,y)) + \beta f(y))$$

tendremos (por Blackwell) una contracción T tal que $Tv = v$. Una vez hallado v, si el supremo se alcanzara, nos interesará conocer la sucesión donde lo hace. A tal fin, se demuestra que si (a_n) es una sucesión que alcanza el supremo, entonces verificará la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$v(a_n) = F(a_n, a_{n+1}) + \beta v(a_{n+1}).$$

A dicha ecuación algunos autores la llaman *principio de optimalidad* de Bellman, aunque otros llaman con dicho nombre a la ecuación (EF).

Otra forma de encarar el problema es, en el caso de que $X = \mathbb{R}^m$ y suponiendo las hipótesis necesarias en cada caso, la siguiente: si el supremo en la ecuación (EF) se alcanza en un y (interior a $\Gamma(x)$), entonces

$$F_y(x, y) + \beta v'(y) = 0.$$

Por otro lado, si repetimos lo anterior para cada x tendremos una función $y = g(x)$ que verificará (Teorema de la envolvente)

$$v'(x) = F_x(x, g(x)).$$

(Esto se obtiene de derivar con respecto a x la ecuación $v(x) = F(x, g(x)) + \beta v(g(x))$). Ahora bien, poniendo $x = a_{n+1}, g(x) = a_{n+2}$ en la última ecuación y $x = a_n, y = a_{n+1}$ en la anterior, obtenemos

$$\begin{cases} F_y(a_n, a_{n+1}) + \beta v'(a_{n+1}) = 0, \\ v'(a_{n+1}) = F_x(a_{n+1}, a_{n+2}), \end{cases}$$

de donde

$$F_y(a_n, a_{n+1}) + \beta F_x(a_{n+1}, a_{n+2}) = 0.$$

Lo cual es una ecuación en diferencias de segundo orden que no depende de encontrar v. Dicha ecuación se llama de *Euler* y al ser de segundo grado necesita dos condiciones de borde para su resolución. Una es $a_0 = x$, la otra

$$\lim \beta^n \langle F_x(a_n, a_{n+1}), x_n \rangle = 0$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^m$.

Hay tres resultados fundamentales a demostrar:

1. Que toda solución de (ES) es solución de (EF).
2. Que toda solución de (EF) es solución de (ES) siempre que verifique una condición extra que daremos.
3. El principio de optimalidad de Bellman.

Pero antes demostraremos que bajo ciertas condiciones el operador T definido anteriormente devuelve una función continua y acotada si se le da una como entrada una tal función.

TEOREMA 1 (del máximo) Si $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $\Gamma : X \longrightarrow Y$ una correspondencia compacta y continua entonces la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} f(x, y),$$

es continua

Demostración. La función está bien definida por se f continua y Γ compacta (es decir que $\Gamma(x)$ es un compacto de Y para todo $x \in X$). Para demostrar que h es continua consideraremos para cada x el conjunto

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\}$$

de los puntos donde se alcanza el máximo de f en $\Gamma(x)$. De esta forma G también es una correspondencia de X a Y. Demostraremos que es *upper hemi-continuos* (abreviado u.h.c.), es decir, que si $(x_n) \in X$ es una sucesión convergente a un $x \in X$, entonces toda sucesión $(y_n) \in Y$ tal que $y_n \in G(x_n)$, poseerá una subsucesión (y_{n_i}) convergente a un $y \in G(x)$. Antes de seguir conviene dar la definición de *lower hemi-continuos* (l.h.c.) y de continuidad de correspondencias. Una correspondencia será l.h.c. en $x \in X$ si para toda sucesión (x_n) convergente a x y todo $y' \in \Gamma(x)$

existe una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) y una sucesión (y'_i), tales que $y'_i \in \Gamma(x_{n_i})$ y $y'_i \longrightarrow y'$. Una correspondencia será continua en $x \in X$ si es tanto u.h.c. como l.h.c..

Continuemos con la demostración de que $G(x)$ es l.h.c. Efectivamente, dada una sucesión x_n convergente a un $x \in X$ y una sucesión $(y_n) \in Y$ tal que $y_n \in G(x_n)$, por ser Γ continua (y por ende u.h.c.), tendremos una subsucesión (y_{n_i}) convergente a un $y \in \Gamma(x)$. Restaría entonces demostrar que $y \in G(x)$. Para ello, recordando la definición de $G(x)$, debemos probar que $f(x,y) = h(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y)$, es decir, que $f(x,y) \geq f(x,y') \quad \forall y' \in \Gamma(x)$. Efectivamente, dado un $y' \in \Gamma(x)$, por ser Γ l.h.c., existirá una subsucesión $(x_{n_{i_j}})$ de x_{n_i} y una sucesión (y'_j) tales que $y'_j \in \Gamma(x_{n_{i_j}})$ y $y'_j \longrightarrow y'$. Pero como $y_{n_{i_j}} \in G(x_{n_{i_j}})$, tenemos que

$$f(x_{n_{i_j}}, y_{n_{i_j}}) = h(x_{n_{i_j}}) \geq f(x_{n_{i_j}}, y'_j)$$

tomando límite en j y usando la continuidad de la f obtenemos

$$f(x,y) \geq f(x,y').$$

Para ver que h se continua tomaremos una sucesión (x_n) convergente a un x y demostraremos que $\lim h(x_n) = h(x)$. Si definimos $\bar{h} = \overline{\lim} h(x_n)$ y $\underline{h} = \underline{\lim} h(x_n)$ debemos demostra que $\bar{h} = \underline{h}$. Tomemos una subsucesión x_{n_i} tal que $h(x_{n_i}) \longrightarrow \bar{h}$, y una sucesión $y_i \in G(x_{n_i})$, como G es u.h.c, tendremos una subsucesión y_{i_j} convergente a un $y \in G(x)$. Pero

$$f(x_{n_{i_j}}, y_{i_j}) = h(x_{n_i})$$

por lo tanto, tomando límites y usando la continuidad de la f obtenemos que $f(x,y) = \bar{h}$. Pero como $y \in G(x)$ por definición de $G(x)$, tenemos que $f(x,y) = h(x)$. Es decir $h(x) = \bar{h}$. Repitiendo el razonamiento para $\underline{h}$ obtenemos $h(x) = \underline{h}$. En definitica $\underline{h} = h(x) = \hat{h}$. $\square$

OBSERVACIÓN 2 En clase demostramos que G es compacta, demostrando que $G(x)$ es cerrado para todo x, pero este hecho no se usa en la demostración, aunque es destacable en si mismo.

EJERCICIO 3 Demostrar que un subconjunto de un conjunto compacto es compacto si y solo si es cerrado.

EJEMPLO 4 $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = [-1,1]$ y $f(x,y) = xy^2$. Vemos que

$$G(x) = \begin{cases} \{-1,1\}, & \text{si } x > 0; \\ [0,1], & \text{si } x = 0; \\ \{0\}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Así vemos que $G(x)$ es continua para todo $x \neq 0$ pero en $x = 0$ solo es u.h.c..

EJERCICIO 5 Calcular $G(x)$ y decir donde es u.h.c y l.h.c. si $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = [0,4]$ y $f(x,y) = \max\{2 - (y-1)^2, x + 1 - (y-2)^2\}$

Ahora demostraremos que toda solución de (ES) lo es de (EF) y recíprocamente si agregamos una condición extra. Antes de dar las demostraciones, recordaremos dos propiedades que caracterizan al supremo de un conjunto de números reales. Sea A un conjunto no vacío de números reales, entonces s es el supremo de A si y solo si

(S1) $s \geq x \quad \forall x \in A$.
(S2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : s - \varepsilon \leq x$.

TEOREMA 6 La función definida en (ES) verifica la ecuación (EF).

Demostración. Primero demostraremos que $v(x)$ verifica la (S1) de (EF). Efectivamente como $v(x)$ verifica la (S1) de (ES) tenemos que

$$v(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) = F(a_0, a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) = F(x, a_1) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$$

Para cualquier $(a_n) \in \Omega$ tal que $a_0 = x$. Como $v(a_1)$ verifica (S2) de (ES), dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existirá una sucesión $(b_n) \in \Omega$ con $b_0 = a_1$ y $v(a_1) - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(b_n, b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$. Entonces para todo a_0 y $a_1 \in \Gamma(a_0)$ existe (b_n) tal que

$$v(x) \geq F(x, a_1) + \beta(v(a_1) - \varepsilon) \quad \forall a_1 \in \Gamma(x).$$

Haciendo tender ε a cero y cambiando el nombre a_1 por y nos queda que $v(x)$ verifica la propiedad (S1) de (EF).

Para demostrar que $v(x)$ verifica la propiedad (S2), dado $\epsilon > 0$ sabemos que existirá una (a_n) en Ω con $a_0 = x$ y $v(x) - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$ luego

$$v(x) \leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) = \varepsilon + F(a_0, a_1) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} F(a_n, a_{n+1}) \leq \varepsilon + F(x, a_1) + \beta v(a_1)$$

de donde existe $y \in \Gamma(x)$ $(y = a_1)$ tal que $v(x) - \varepsilon \leq F(x, y) + \beta v(y)$, como queríamos demostrar. $\square$

TEOREMA 7 Si v verifica (EF) y si $\forall (a_n) \in \Omega$ se tiene que $\lim \beta^n v(a_n) = 0$, entonces v verifica (ES).

Demostración. Por (S1) de (EF) tenemos que

$$v(a_0) \geq F(a_0, a_1) + \beta v(a_1) \quad \forall a_1 \in \Gamma(a_0)$$

por lo mismo

$$v(a_1) \geq F(a_1, a_2) + \beta v(a_2) \quad \forall a_2 \in \Gamma(a_1)$$

por lo tanto

$$v(a_0) \geq F(a_0, a_1) + \beta \left(F(a_1, a_2) + \beta v(a_2) \right) = F(a_0, a_1) + \beta F(a_1, a_2) + \beta^2 v(a_2)$$

de la misma forma

$$v(a_2) \geq F(a_2, a_3) + \beta v(a_3) \quad \forall a_3 \in \Gamma(a_2)$$

y

$$v(a_0) \geq F(a_0, a_1) + \beta \left(F(a_2, a_3) + \beta v(a_3) \right) = F(a_0, a_1) + \beta F(a_1, a_2) + \beta^2 v(a_2) + \beta^3 v(a_3)$$

repitiendo el razonamiento obtenemos que

$$v(a_0) \geq \sum_{n=0}^{N} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) + \beta^N v(a_N).$$

Tomando limite en N y usando la hipótesis de que el último término tiende a cero obtenemos que

$$v(a_0) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$$

Como la única restricción en los a_n fue que pertenecieran a $\Gamma(a_{n-1})$, tenemos que la desigualdad es válida para cualquier sucesión (a_n) de Ω, lo cual es la propiedad (S1) de (ES).

Para demostrar la propiedad (S2) respecto a (ES) dado $\varepsilon > 0$ tomamos $a_1 \in \Gamma(a_0)$ tal que

$$v(a_0) \leq F(a_0, a_1) + \beta v(a_1) + \varepsilon$$

luego un $a_2 \in \Gamma(a_1)$ tal que

$$v(a_2) \leq F(a_1, a_2) + \beta v(a_2) + \varepsilon$$

sustituyendo obtenemos que existen a_1 y a_2 tales que

$$v(a_0) \leq F(a_0, a_1) + \beta\left(F(a_1, a_2) + \beta v(a_2) + \varepsilon\right) + \varepsilon = F(a_0, a_1) + \beta F(a_1, a_2) + \beta^2 v(a_2) + \beta\varepsilon + \varepsilon$$

De la misma forma existirá un $a_3 \in \Gamma(a_2)$ tal que

$$v(a_3) \leq F(a_2, a_3) + \beta v(a_3) + \varepsilon$$

y sustituyendo obtendremos que

$$v(a_0) \leq F(a_0, a_1) + \beta F(a_1, a_2) + \beta^2 F(a_2, a_3) + \beta^3 v(a_3) + \beta^2\varepsilon + \beta\varepsilon + \varepsilon.$$

En general, para todo N tendremos que

$$v(a_0) \leq \sum_{n=0}^{N} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) + \beta^N v(a_N) + \sum_{n=0}^{N-1} \beta^n \varepsilon.$$

Tomando límite en N y usando nuevamente la hipótesis tenemos que

$$v(a_0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{1-\beta}.$$

Que implica la propiedad (S2) de (ES) ya que $1/(1-\beta)$ es una constante y los a_n fueron elegidos de forma tal que $(a_n) \in \Omega$. $\square$

EJEMPLO 8 Elegir los consumos c_n de forma de maximizar $\sum \beta^n \log(c_n)$ si el capital k_n verifica $k_{n+1} = k_n^\alpha - c_n$ para con $\alpha \in (0,1)$.