Examen Teórico

EJERCICIO 1 Demostrar el Teorema de la contracción, que dice: Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \longrightarrow M$ una contracción de módulo β ($\in (0,1)$) entonces:

1. T posee un punto fijo p.
2. p es el único punto fijo de T.
3. Para todo $a \in M$, $d(T^n a, p) \leq \beta^n d(a, p)$

EJERCICIO 2 Recordando que si A e un conjunto no vacío de números reales, entonces s es el supremo de A si y solo si

(S1) $s \geq x \quad \forall x \in A$.

(S2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : s - \varepsilon \leq x$.

Demostrar que la función definida en

$$u((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n F(a_n, a_{n+1})$$

verifica la ecuación

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta v(y).$$

EJERCICIO 3 Demostrar la desigualdad de Chebyshev:

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$