Examen Práctico. (Resolución)

EJERCICIO 1 Sean (M, d_M) y (N, d_N) dos espacios métricos. Sea $T : M \longrightarrow N$ una función lipschitziana de M a N.
1) Demostrar para toda sucesión de Cauchy (a_n), la sucesión $b_n = f(a_n)$ también es de Cauchy.
2) Encontrar un ejemplo en el cual (b_n) sea de Cauchy pero no lo sea (a_n).
3) Demostrar (con un ejemplo) que si f no es lipschitziana entonces el resultado no siempre se cumple.

Solución: 1) $d_N(f(a_n), f(a_m)) \leq k d_M(a_n, a_m) \leq k(\varepsilon/k) = \varepsilon$ para $n, m \geq N_0$ para cierto N_0 por ser (a_n) de Cauchy.
2) Basta tomar una función f constante y una sucesión (a_n) que no sea de Cauchy, por ejemplo, una no convergente. Un ejemplo sería $M = N = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $(a_n) = ((-1)^n)$.
3) Por ejemplo para $M = (0, +\infty)$ y $N = \mathbb{R}$ si tomamos $f(x) = 1/x$, entonces, f es continua, pero no es lipschitziana, pues $d(f(1/n), f(1/2n)) = n$ que es mayor que toda cota. A su vez la sucesión $(a_n) = ((1/n))$ es de Cauchy, pero $(f(a_n)) = n$ no converge y por lo tanto no es de Cauchy.

EJERCICIO 2 Considere el problema de programación dinámica

$$\sup \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \sqrt{c_n}$$

donde el capital k_n verifica $k_{n+1} = k_n/2 - c_n$ para $n \geq 0$ siendo c_n el consumo y k_0 dado.
1) Plantear la ecuación de Bellman.
2) Hallar una constante A para que la función $v(k) = A\sqrt{k}$ verifique la ecuación de Bellman.

Solución: 1) La ecuación de Bellman es::

$$v(k) = \max_{0 \leq c \leq k/2} \sqrt{c} + \beta v(k/2 - c).$$

2) Para que $v(k) = A\sqrt{k}$, hallamos el máximo en

$$\max_{0 \leq c \leq k/2} \sqrt{c} + \beta A\sqrt{k/2 - c}.$$

Primero derivamos con respecto a c:

$$\frac{1}{2}c^{-1/2} + \beta A \frac{1}{2}(k/2 - c)^(- 1/2)(-1) = 0$$

de donde podemos despejar c:

$$c^{-1/2} = \beta A(k/2 - c)^{-1/2}$$

$$c = (\beta A)^{-2}(k/2 - c)$$
$$(\beta A)^2 c = k/2 - c$$
$$c = \frac{k}{2 + 2(\beta A)^2}.$$

Como dicho c es menor que $k/2$, tenemos que el máximo vale

$$\sqrt{\frac{k}{2 + 2(\beta A)^2}} + \beta A \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{k}{2 + 2(\beta A)^2}}$$

que es

$$\sqrt{k}\left(\frac{1 + \beta A\sqrt{(\beta A)^2}}{\sqrt{2 + 2(\beta A)^2}}\right) = \sqrt{k}\frac{\sqrt{1 + (\beta A)^2}}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en la ecuación de Bellman tenemos la condición

$$A\sqrt{k} = \sqrt{k}\frac{\sqrt{1 + (\beta A)^2}}{\sqrt{2}}.$$

De la cual podemos despejar A como

$$A = \frac{1}{2 - \beta^2}.$$

EJERCICIO 3 Hallar $u(t)$ usando el método del Hamiltoniano, para el siguiente problema:

$$\text{máx} \int_0^{+\infty} \frac{u(t)}{t+1} dt$$

sujeto a:

1. $x(0) = 12$.
2. $\dot{x} = -u^2$ con $0 \leq u \leq 3$.

Solución: El hamiltoniano será $H = \frac{u}{t+1} + \lambda(-u^2)$. Como $H_x = 0$, entonces $\lambda = c$ constante a determinar. Para maximizar H con respecto a u planteamos la condición de primer orden:

$$H_u = \frac{1}{t+1} - 2cu = 0$$

de donde $u = \frac{1}{2c(t+1)}$. Para que se dé el máximo allí y no en 1, dicho valor debe ser menor que 1, es decir

$$\frac{1}{2c(t+1)} < 3.$$

lo cual sucede si $t > t_1 = \frac{1}{6c} - 1$. En definitiva

$$u(t) = \begin{cases} 3, & \text{si } t \leq t_1; \\ \frac{1}{2c(t+1)}, & \text{si } t > t_1. \end{cases}$$

Para hallar la constante c usamos la condición $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\lambda x=0$, de donde

$$x_0+\int_0^{+\infty}-u^2=0$$

o sea

$$4+\int_0^{t_1}3-\int_{t_1}^{+\infty}\frac{1}{4c^2(t+1)^2}=0$$

Es decir

$$12+3\left(\frac{1}{6c}-1\right)-\left.\frac{-1}{4c^2(t+1)}\right|_{t_1}^{+\infty}=0$$

haciendo cuentas:

$$12+\frac{1}{2c}-3-\left.\frac{-1}{4c^2(t+1)}\right|_{t_1}^{+\infty}=0$$

$$9+\frac{1}{2c}-\frac{1}{4c^2(t_1+1)}=0$$

$$9+\frac{1}{2c}-\frac{1}{4c^2(\frac{1}{6c})}=0$$

$$9+\frac{1}{2c}-\frac{3}{2c}=0$$

$$9+-\frac{2}{2c}=0$$

de donde $c=1/9$, $t_1=1/2$.

EJERCICIO 4 Se tira un dado equilibrado. Si sale 4 o 6 se vuelve a tirar una vez más. Sea ξ la variable aleatoria que indica el valor de la última tirada.
1) Hallar cuantos elementos tiene el espacio muestral.
2) Hallar la distribución de probabilidades de ξ.
3) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya tirado dos veces el dado si se sabe que ξ es par?

Solución: 1) tiene $4+6+6=16$ elementos.
2)

$$P(\xi=x)=\begin{cases}1/6+2/6^2=2/9, & \text{para } x\neq 4,6;\\ 2/6^2=1/18, & \text{para } x=4,6.\end{cases}$$

3) Usando Bayes, si A es el suceso que se tire dos veces y B que es ξ sea par, tenemos

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}=\frac{(2/6)(1/2)}{1/6+(4/6)(1/4)}=1/2$$