Lección 1

Curso 2005

1. Motivación

Hallar el máximo (o el mínimo) de una función real $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es un tema de interés para los economistas.

Al atacar dicho problema, que a veces se escribe

$$\max_{x \in D} f(x)$$

nos enfrentamos con las siguientes interrogantes:

1. ¿Tiene f algún máximo? O ¿posee f un valor supremo que nunca llega a alcanzar dentro del dominio D?
2. En caso afirmativo ¿es dicho máximo único? y
3. ¿Qué procedimiento o algoritmo conocemos para hallarlo?
4. ¿Cómo varia dicho máximo al variar f o al variar D?

Para contestar la primera pregunta solemos estudiar las propiedades de la f o de D o de ambos. Un ejemplo de contestación es: si f es continua y D es compacto, entonces f posee algún máximo. Para decidir tanto si f es continua como si D es compacto, necesitamos saber como medir distancias en D. Cuando en un conjunto tenemos una distancia, le llamamos espacio métrico.

2. Espacios Métricos

2.1. Definición y ejemplos de espacios métricos. Una *métrica* en un conjunto M es una función $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que le asocia a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M$ un número real $d(x, y)$ llamado *distancia de x a y*, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones para cualesquiera x, y, $z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;
d2) Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$;
d3) $d(x, y) = d(y, x)$;(simetría)
d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdad triangular)

De d1) y d2) vemos que $d(x, y) \geq 0$ y que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Un *espacio métrico* será un par (M, d) donde M es un conjunto no vacío y d es una métrica en M. Normalmente hablaremos del "espacio métrico M" en lugar de "(M, d)" dejando sobrentendida la métrica d, salvo que hubieran otras métricas en juego. Los elementos de un espacio métrico pueden ser de diversas índoles, números, vectores, funciones, conjuntos, etc, pero los llamaremos siempre *puntos de M*.

EJEMPLO 1 Los reales. $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x, y) = |x - y|$. Verificamos las propiedades:
d1) $|x - x| = |0| = 0$;
d2) si $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow |x - y| > 0$.
d3) $|x - y| = |-(-x + y)| = |-x + y| = |y - x|$.
d4) $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

EJEMPLO 2 Métricas en $\mathbb{R}^n$: tenemos la usual d o d_2 (o euclidiana),

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

La d_1 o de Manhattan:

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

y la d_∞

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Por ejemplo:
$d_1((1,5),(3,9)) = 2 + 4 = 6$ y $d_\infty((1,5),(3,9)) = 4$.

EJERCICIO 3 Hallar α de modo que
$d_2((1,1,1),(2,\alpha,3)) = 10$.
Hacer lo mismo para d_1 y d_∞.

EJERCICIO 4 Demostrar que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$$

EJEMPLO 5 Distancia en un grafo. Un grafo es un conjunto de vértices unidos por "aristas". Se suelen representar gráficamente como puntos unidos por curvas. La distancia entre dos vértices es la longitud del camino más corto entre ellos, donde la longitud de un camino es la cantidad de aristas por las que pasa.

EJEMPLO 6 Métrica cero uno, se puede definir sobre cualquier conjunto M, del siguiente modo:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

EJEMPLO 7 Funciones acotadas con la distancia del supremo: Sea

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{acotada}\ \}$$

Una función es acotada si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < K \quad \forall x \in X$. Definimos la distancia entre dos funciones f y g como

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Por ejemplo si $X = [0,1]$, $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, tenemos que $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \left|x - x^2\right|$ como la función $h(x) = x - x^2$ es no negativa en $[0,1]$ y posee su máximo en $x = 1/2$, entonces $d(f,g) = 1/4$.

EJERCICIO 8 Para $X = [0,1]$, $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$.
1) Hallar $d(f,g)$.
2) Hallar α para que $d(\alpha x, e^x) = 10$.

Formas de obtener espacios métricos

EJEMPLO 9 Espacios vectoriales normados. Distancia asociada a una norma. Si M es un espacio vectorial una norma en M es cualquier función $\|\ \| : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique:
n1) si $x \neq 0$ entonces $\|x\| \neq 0$.
n2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\,\forall \lambda \in \mathbb{R} x \in M$.
n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

De estas propiedades surge que si definimos $d(x,y) = \|x - y\|$ la función d así definida es una métrica. Por ejemplo en $\mathbb{R}^n$ se define la norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(verificarlo). La métrica asociada a $\| \|_2$ no es más que la métrica euclidiana definida antes.

De manera análoga se define una norma del supremo $\|x\|_\infty$ y una $\|x\|_1$ cuyas métricas asociadas son d_∞ y d_1. Lo mismo sucede para la métrica definida en $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Hay otra observación interesante al respecto de $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ y es que si tomamos $X = \{1, 2, 3\}$ obtenemos un espacio igual a $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$, efectivamente, toda función $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la podemos representar por el vector $v_f = (f(1), f(2), f(3))$ y se tendrá que $\|f\|_\infty = \|v_f\|_\infty$. Y recíprocamente todo vector en $\mathbb{R}^3$ puede pensarse como una función con dominio $\{1, 2, 3\}$.

EJEMPLO 10 Espacios vectoriales con producto interno. Norma asociada a un producto interno. Dado un producto interno $<, >$, se asocia la norma $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ y a esta la distancia $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >}$. Nuevamente podemos reobtener la métrica euclidiana a través del producto definido por $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Sin embargo, se demuestra que no se puede hacer lo mismo para las otras métricas vista.

EJEMPLO 11 Producto cartesiano de espacios métricos. Dados dos espacios métricos (M_1, d_1) y (M_2, d_2) podemos construir un tercer usando como base el producto cartesiano de ambos $(M_1 \times M_2, d)$. Donde d puede ser $d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$. Hay otras formas de definir d, pero suelen generar métricas equivalentes en un sentido que precisaremos más adelante.

EJERCICIO 12 Verificar que la función d definida en el ejemplo anterior es efectivamente una métrica.

EJEMPLO 13 Otra forma de definir una métrica sobre un conjunto X es dar una función inyectiva $f : X \longrightarrow M$ siendo M un espacio con una métrica d_M. Para medir distancias entre dos puntos de X, medimos la distancia en M de sus imágenes a través de f:

$$d_X(x, y) = d_M(f(x), f(y)).$$

OBSERVACIÓN 14 La condición de que f sea inyectiva es para que la distancia entre puntos distintos sea positiva. Si esto no se cumpliera, obtendríamos lo que se denomina *premétrica*. Las premétricas son de utilidad y suelen aparecer con frecuencia.

Lección 2

Curso 2005

EJEMPLO 15 *Subespacios* Otra forma de construir espacios métricos es tomando subconjuntos de un espacio métrico dado. Formalmente, si (M, d) es un espacio métrico y $A \subset M$ un subconjunto de M, podemos definir una distancia d_A en A diciendo que la distancia entre dos puntos de A es la distancia entre esos puntos vistos como puntos de M, es decir:

$$\forall x, y \in A, \quad d_A(x, y) = d(x, y).$$

Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{N}$ tenemos que $d_N(n, m) = |n - m|$ aún cuando $n - m$ no pertenezca a $\mathbb{N}$.

Otro ejemplo puede ser el siguiente, consideremos un grafo cuyos vértices N, P, L, M, T representen las ciudades de Nueva York, Paris, Londres, Montevideo y Tokio. Y con aristas $NP1$, $NT3$, $PT1$, $PL2$, $LM1$, $MT3$ donde la arista XYi una X con Y a un precio i. El significado es que existen vuelos entre X e Y a precio i. La distancia $d(X, Y)$ será el menor precio posible de una "conexión" entre X e Y. Por ejemplo $D(N, T) = 2$ ya que si bien hay un vuelo a precio 3 entre dichas ciudades, se puede hacen una conexión más barata a través de París. En este caso la función distancia puede representarse matricialmente de la siguiente forma:

d	N	P	L	M	T
N	0	1	3	4	2
P	1	0	2	3	1
L	3	2	0	1	1
M	4	3	1	0	2
T	2	1	1	2	0

Si estamos interesados solo en las ciudades T, M, N podemos considerar el subconjunto $A = \{T, M, N\}$ y obtener un subespacio con una métrica inducida por el espacio anterior. Tendríamos la siguiente matriz:

d_A	N	M	T
N	0	4	2
M	4	0	2
T	2	2	0

Vemos que la distancia entre N y T sigue siendo 2 aún cuando no tengamos París entre los puntos del espacio. Esto puede confundir, pero es estrictamente lo que sucede si tenemos en cuenta la definición de subespacio.

2.2. Bolas y esferas. Sea $a \in M$ y $r > 0$ un número real positivo, definimos la *bola (abierta) de centro a y radio r* como el conjunto

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}.$$

Cuando se quiere resaltar que se está en el espacio M se puede escribir $B_M(a; r)$. [1] Análogamente definimos la *bola cerrada de centro a y radio r* y la *esfera* de mismo centro y radio como los conjuntos

$$B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \le r\}.$$

[1]Esto no fue aclarado en clase.

y

$$S(a;r) = \{x \in M : d(x,a) = r\}.$$

EJEMPLO 16 En el caso de las ciudades, $B(N;3) = \{N,T,P\}, S(N;3) = \{L\}$ y $B[N;3] = \{N,T,P,L\} = B(N;3) \cup S(N;3)$.

Esta última igualdad se verifica en general:

OBSERVACIÓN 17

1. $B(a;r) = B(a;r) \cup S(a;r)$
2. si $X \subset M$ entonces $B_X(a;r) = B_M(a;r) \cap X$.[1]
3. Las bolas nunca son vacías ya que siempre contienen a su centro.

Cuando una bola contiene solamente a su centro, entonces decimos que su centro es un punto aislado, es decir un punto $a \in M$ se dice *aislado* si existe $r > 0$: $B(a;r) = \{a\}$. Un espacio métrico se dice *discreto* si todos sus puntos son aislados.

EJEMPLO 18 1) El conjunto de ciudades visto antes es discreto.
2) Los naturales son un espacio discreto.
3) El subespacio $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$ es discreto.

EJERCICIO 19 Demostrar que si (M,d) es un espacio métrico con M finito, entonces es discreto.

EJERCICIO 20 Demostrar que todo espacio (M,d) con la métrica cero-uno es discreto.

OBSERVACIÓN 21 Si $M = \mathbb{R}$ las bolas serán los intervalos abiertos, más concretamente $B(a,r) = (a-r, a+r)$.

EJERCICIO 22 Considere el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_1)$. Dibujar $S(\vec{0};1)$, $B[\vec{0};1]$, $B[\vec{0};2]$, $B[(1,1);1]$,

EJERCICIO 23 Sea $(\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ el espacio de las funciones reales acotadas con dominio $[0,1]$ con la métrica del supremo. Sea $f(x) = x^2$. Hallar una función $g(x) \neq f(x)$ y tal que $g(x) \in B(f;1)$. Hallar otra en $h(x) \in S(f;1)$.

PROPOSICIÓN 24 Si $a, b \in M$ y $a \neq b$ entonces $\exists, r, s > 0 : B(a;r) \cap B(b;s) = \varnothing$.

Demostración. Basta tomar $r = s = d(a;b)/2$, luego, si existiera un $z \in B(a;r) \cap B(b;s)$ tendríamos que $d(z;a) < r$ y $d(z,b) < s$ por lo que $d(z;a) + d(z;b) < r + s = d(a;b)$. Pero por la desigualdad triangular $d(a;b) \leq d(a;z) + d(z;b) = d(z;a) + d(z;b)$, lo cual nos daría un absurdo $(d(a;b) < d(a;b))$. $\square$

EJERCICIO 25 Si $a, b \in M$ y $a \neq b$ entonces $\exists\, r, s > 0 : B[a;r] \cap B[b;s] = \varnothing$.

2.3. Conjuntos acotados. $X \subset M$ se dice *acotado* si existe $K > 0 : d(x,y) < K$ para todo $x, y \in X$.

EJEMPLO 26 $\forall x, y \in B(a;r), \quad d(x;y) \leq 2r$.

PROPOSICIÓN 27 X es acotado si y solo si existen $r > 0$ y $a \in M$ tales que $X \subset B(a;r)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Basta tomar cualquier $a \in X$ y $r = K$. Efectivamente, $\forall x \in X, d(a;x) < K = r$ por lo tanto $x \in X$. Recíprocamente, basta tomar $K = 2r$ y verificar que $\forall x, y \in X, d(x;y) \leq d(x;a) + d(a;y) < r + r = 2r = K$. □

Dado un conjunto acotado X, al supremo de las distancias posibles a la cual pueden estar dos puntos de X se le llama *diámetro* de X. Es decir

$$\mathrm{diam} X = \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}.$$