Lección 7

5.3. Teorema de la contracción. Un *punto fijo* de una función $f : A \longrightarrow A$ es cualquier $p \in A$ tal que $f(p) = p$). Definimos f^n como f compuesta con misma n veces. Para $n = 0$ ponemos $f^0 = id_A$ la función identidad en A ($id_A(x) = x \forall x$)) y $f^1 = f$.

EJEMPLO 97 Si $A = \mathbb{R}$ y

- $f(x) = x + 1$ entonces f no tiene puntos fijos.
- $f(x) = 1 - x$ entonces f tiene un único punto fijo en $1/2$.
- $f(x) = x^2 + 1$ entonces f posee dos puntos fijos uno en 0 y otro en 1. Además $f^n(1/2) \longrightarrow 0$) y $f^n(2) \longrightarrow +\infty$.

TEOREMA 98 Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T : M \longrightarrow M$ una contracción de módulo β ($\in (0, 1)$) entonces:

1. T posee un punto fijo p.
2. p es el único punto fijo de T.
3. Para todo $a \in M$, $d(T^n a, p) \leq \beta^n d(a, p)$

Demostración. Sea $a \in M$ y $x_n = T^n a$ para $n \leq 1$. Demostraremos que x_n se de Cauchy y que converge a un punto fijo de T y que éste es único.

1. $d(x_n, x_m) = d(T^n a, T^m a) \leq \beta d(T^{n-1} a, T^{m-1} a)$ aplicando el mismo razonamiento llegamos a que $d(x_n, x_m) \leq \beta^n d(a, T^{m-n} a)$. Al crecer n β^n se hace pequeño, por lo que habría que demostrar que $d(a, T^{m-n} a)$ está acotado. Efectivamente si definimos $d_k = d(a, T^k a)$ entonces $d_k \leq d(T^k a, T^{k-1} a) + d(a, T^{k-1} a) \leq \beta^{k-1} d(Ta, a) + d_{k-1}$ es decir $d_k - d_{k-1} \leq \beta^{k-1} d_1$. Sumando estas desigualdades tenemos $d_k - d_0 \leq \sum_{i=1}^{k} \beta^{i-1} d_1 = (1 - \beta^k)/(1 - \beta) d_1$ que tiene a $1/(1 - \beta) d_1$ al crecer k. Al ser x_n de Cauchy, y M completo, x_n convergerá a un elemento p. Para ver que p es efectivamente un punto fijo tomamos límites en la igualdad $x_n = T x_{n-1}$ entonces $\lim x_n = \lim T x_{n-1}$ pero $\lim x_n = p$ y $\lim T x_{n-1} = T \lim x_{n-1}$ por se T continua.
2. Unicidad de p: si $p' = Tp' \Rightarrow d(p, p') = d(Tp, Tp') \leq \beta d(p, p') \Rightarrow (1 - \beta) d(p, p') \leq 0 \Rightarrow d(p, p') \leq 0 \Rightarrow d(p, p') = 0 \Rightarrow p = p'$.
3. Sale de la desigualdad $d(x_n, x_m) \leq \beta^n d(a, T^{m-n} a)$ al tomar límite en m y usando la continuidad de la función distancia.

□

EJEMPLO 99 $M = \mathbb{R}$ y $f(x) = 1 - x/10$.

EJERCICIO 100 Sea (M, d) un espacio métrico y $T : M \longrightarrow M$ una contracción con punto fijo p. Demuestre que si $S \subset M$ se un subconjunto cerrado de M, tal que $T(S) \subset S$ entonces $p \in S$.

EJERCICIO 101 Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{si } x \leq 1; \\ 2x - 3/2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2; \\ x/2 + 5/4, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Graficar f, hallar sus puntos fijos y hallar el límite de $x_n = f^n(a)$ discutiendo según el valor de a.

EJERCICIO 102 En las condiciones del teorema anterior demostrar que para cualquier a es tiene que $d(T^n a, p) \leq d(T^{n+1}a, T^n a)/(1-\beta)$

Sin la hipótesis de contracción se puede demostrar el siguiente teorema

TEOREMA 103 En $\mathbb{R}^n$ toda función continua con dominio y codominio una bola cerrada dada tendrá un punto fijo.

Dadas dos funciones $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ escribiremos $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x) \forall x \in X$.

TEOREMA 104 *Condiciones suficientes de Blackwell* Sea $M = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ y $A \subset M$ tal que si $f \in A$ entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + \alpha \in A$. Entonces toda función $T : M \longrightarrow M$ que cumpla las siguientes dos hipótesis:

1. $\forall f, g \in M$ si $f \leq g$ entonces $Tf \leq Tg$ *(monotonía)*
2. $\exists \beta \in (0,1) : T(f+a) \leq Tf + \beta a$ para todo real $a \geq 0$

es una contracción de módulo β.

Demostración. Como $f(x) \leq g(x) + \|f-g\|$ por lo tanto $f \leq g + \|f-g\|$, luego, aplicando 1) tenemos que $Tf \leq T(g + \|f-g\|)$. Pero por 2) $T(g + \|f-g\|) \leq Tg + \beta \|f-g\|$, luego $Tf(x) - Tg(x) \leq \beta \|f-g\|)$ para todo x . Razonando del mismo modo pero intercambiando los papeles de f por g tenemos que $Tg(x) - Tf(x) \leq \beta \|g-f\|)$. Como $\|g-f\|) = \|f-g\|)$ tenemos que $|Tg(x) - Tf(x)| \leq \beta \|f-g\|)$ de lo cual sale que $\|Tg - Tf\| \leq \beta \|f-g\|$ es decir $d(Tf, Tg) \leq \beta d(f,g))$.

□

EJEMPLO 105 Sea M un espacio métrico compacto y considere $C_0(M, \mathbb{R})$ el espacio de la funciones continuas de M en R. Dada una función continua $F : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ y un número real $\beta \in (0,1)$, definimos la siguiente función T de $C_0(M, \mathbb{R})$ en si mismo:

$$(Tf)(x) = \max_{y \in M} |F(x,y) + \beta f(y)|$$

Demostramos que cumple las condiciones de Blackwell.

EJERCICIO 106 Demostrar que si (M, d) es un espacio métrico y $T : M \longrightarrow M$ es tal que para algún N, la función T^N es una contracción de módulo β ($\in (0,1)$) entonces:

1. T posee un único punto fijo p.
2. $\forall a \in M$, $d(T^{nN}a, p) \leq \beta^n d(a,p)$

EJERCICIO 107 En los siguientes casos averiguar si T es o no una contracción:

1. $M = [0, +\infty)$ y $Tx = e^{-x} + x$.
2. $M = \mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ y $(Tf)(x) = (1 + f(x))/2$.
3. $M = \mathcal{B}(\{0, 1, 2, \ldots, 100\}, \mathbb{R})$ y

$$(Tf)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \max\{x, f(x+1)/2\}, & 0 < x < 100; \\ \max\{x, f(x)/2\}, & x = 100. \end{cases}$$