Lección 6

5.1. **Espacios de Banach y de Hilbert.** Si V es un espacio vectorial normado, entonces tanto $\mathcal{B}(X,V)$ como $\mathcal{C}_0(M,V)$ son espacios vectoriales normados. Si un espacio vectorial normado es completo se lo llama *Espacio de Banach*. Cuando la norma proviene de un producto interno se llama *espacio de Hilbert*. Otro ejemplo importante de espacio de Banach es el espacio $\mathcal{L}(E,F)$ de funciones lineales continuas de un espacio de Banach E a otro F con la norma

$$\|f\| = \sup_{S(0;1)} |f|$$

Para demostrarlo no podemos usar directamente que $\mathcal{B}(E,R)$ es completo, ya que las transformaciones lineales no son acotadas (salvo la nula). Sin embargo, como las trasformaciones lineales son acotadas en $S_1 = S(0;1)$ podemos considerar el conjunto $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(S_1,F)$ de funciones de la esfera S_1 en E a F que son la restricción de alguna transformación lineal de $\mathcal{L}(E,F)$. Dicho conjunto si es completo y si T_n es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$ entonces la sucesión $T_n|_{S_1}$ será de Cauchy en $\mathcal{L}_0$. Ésta última convergerá a una función f. Si consideramos la función $F(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$, es fácil ver que pertenece a $\mathcal{L}(E,F)$ y que T_n converge a ella.

5.2. **Espacios métricos compactos.** Un subconjunto K de un espacio métrico se dice *compacto* si de todo cubrimiento de K por conjuntos abiertos, se puede extraer un cubrimiento finito. Por ejemplo, la recta real no es compacta porque si la cubro con los intervalos $(n-3/4, n+3/4)$ no puedo prescindir de ninguno ya que los enteros son cubiertos por uno solo de dichos intervalos. Se puede demostrar que

PROPOSICIÓN 88 En $\mathbb{R}^n$ los compactos son lo conjuntos cerrado y acotados.

En espacios más generales dicha proposición es falsa aunque si vale el directo.

PROPOSICIÓN 89 Todo compacto es cerrado y acotado.

Demostración. Acotado: basta cubrirlo con bolas de un mismo centro y radios cada vez más grandes. Al extraer un cubrimiento finito, la bola con mayor radio cubrirá ella sola todo el conjunto.
Cerrado: Si un punto no pertenece al compacto podemos cubrir el espacio con los complementos de las bolas cerradas con centro dicho punto. Al haber un cubrimiento finito, habrá uno de los conjunto que incluya al resto y su complemento será una bola cerrada de centro el punto y contenida en el exterior del compacto. □

LEMA 90 La imagen de una función continua con dominio compacto es un compacto.

Demostración. Si cubrimos la imagen con abiertos, las preimágenes de los mismos serán abiertos que cubren el dominio, por lo que podemos extraer un subcubrimiento finito. Luego los abiertos correspondientes cubrirán el recorrido. □

COROLARIO 91 Toda función real continua con dominio compacto posee máximo y mínimo.

PROPOSICIÓN 92 Un espacio métrico es compacto si y solo si toda sucesión posee una subsucesión convergente

Demostración. Solo demostraremos el directo. Dada una sucesión cualquiera, para cada punto del espacio existirá una bola con centro dicho punto y que posee solo un número finito de elementos de la sucesión. Dichas bolas cubren el espacio, por lo que extrayendo un cubrimiento finito tendríamos que la sucesión original tendría solo un número finito de puntos. □

PROPOSICIÓN 93 En todo espacio de Hilbert de dimensión infinita, las bolas cerradas no son compactos.

Demostración. Dado un conjunto infinito linealmente independiente podemos obtener un conjunto ortonormal infinito $\{e_1, e_2, \ldots\}$. La distancia entre dichos puntos es raíz de dos, entonces la sucesión (e_n) no podría ser de Cauchy, porque si lo fuera, a partir de un n todos los elemento estarían a distancia menor estricta que raíz de dos. □

OBSERVACIÓN 94 En la demostración no usamos que que el espacio fuera completo. El resultado es válido para espacios de Banach.

EJERCICIO 95 Demostrar que un espacio métrico discreto es compacto si y solo si es finito.

EJERCICIO 96 Demostrar que dado un punto fuera de un compacto, existe dos abiertos disjuntos uno cubriendo el punto y el otro cubriendo el compacto.

EJERCICIO 97 Dado dos compactos disjuntos K_1 y K_2, demostrar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que:

$$d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2$$

donde la distancia entre los compactos es la definida para el EJERCICIO 10.