Lección 5

PROPOSICIÓN 78 *Unicidad del limite* Si x_n converge a a y a b entonces $a = b$.

EJERCICIO 79 Una función $f : M \longrightarrow N$ es continua en $a \in M$ si y solo si para toda sucesión $x_n \longrightarrow a$ entonces $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

PROPOSICIÓN 80 Si una sucesión x_n converge, entonces $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ cuando $m, n \longrightarrow +\infty$. Formalmente queremos decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m, n > n = 0$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

La propiedad que se menciona en la proposición anterior no la cumplen todas las sucesiones. Aquellas que si la cumplen se llaman *de Cauchy*. Por otra parte el recíproco de dicha proposición no siempre es cierto, pero hay espacios métricos en los cuales si lo es, a dichos espacios se los llama *completos*. Es decir un espacio métrico completo es aquel donde toda sucesión de Cauchy es convergente.

Veamos dos ejemplos de espacios que no son completos:

EJEMPLO 81 $M = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$. En dicho espacio la sucesión $(1/n)$ es de Cauchy pero no converge, ya que al converger a 0 en $\mathbb{R}$ es de Cauchy por la proposición anterior. Si es de Cauchy en $\mathbb{R}$ lo será en M. Por otro lado si convergiera a un punto a de M debería convergen también a a en $\mathbb{R}$, pero por la unicidad del límite tendríamos que $0 = a \in M$ absurdo.

EJEMPLO 82 Sea $M = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ polinomio}\}$ con la métrica del supremo. Consideremos la sucesión $f_n = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$. Dicha sucesión converge a e^x en $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ pero $e^x \notin M$, por lo tanto razonando igual que en el ejemplo anterior, f_n es de Cauchy pero no es convergente.

EJERCICIO 83 Demostrar que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo como subespacio métrico.

TEOREMA 84 Si (M, d) es completo entonces $\mathcal{B}(X, M)$ también lo es sea cual fuere X.

Demostración. Dada una sucesión (f_n) de Cauchy en $\mathcal{B}(X, M)$ debemos demostrar que es convergente. Para ello haremos tres cosas: primero definir una función f candidata a límite de la sucesión (f_n). Segundo demostrar que f es acotada. Tercero demostrar que (f_n) converge a f. 1) Como (f_n) ese de Cauchy, $\forall x \in X$, $a_n = f_n(x)$ será de Cauchy en M. Como M es completo, a_n convergerá a un elemento a en M. Definamos $f : X \longrightarrow M$como $f(x) = a = lim f_n(x)$.
2) f acotada: al ser (f_n) de Cauchy será acotada, por tanto existirá $c \in \mathbb{R}$ tal que $d(f_0, f_n) < c$ por lo que $d(f_0(x), f_n(x)) < c$ para todo x, tomando límites tenemos que

$$\lim d(f_0(x), f_n(x)) = d(f_0(x), \lim f_n(x)) = d(f_0(x), f(x)) < c$$

donde la última igualdad se debe a la continuidad de la función distancia. Por otro lado, como f_0 es acotada, entonces existe $a \in M$ tal que$d(f_0(x), a) < c' \quad \forall x \in X$ y tenemos que

$$d(f(x), a) \leq d(f(x), f_0(x)) + d(f_0(x), a) < c + c' \quad \forall x \in X.$$

3) (f_n) converge a f en $\mathcal{B}(X, M)$: como f_n ese de Cauchy para todo ε existe N tal

que $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ por lo tanto, para todo x $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$. Tomando limite en n y usando la continuidad de la función distancia:

$$d(f_n(x), f(x)) = d(f_n(x), \lim f_m(x)) = \lim d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

tomando supremos tenemos que

$$\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

es decir, $d(f_n, f) < \varepsilon$ para $n > N$. □

COROLARIO 85 Si N es completo entonces $\mathcal{C}_0(M, N)$ también lo es.

Demostración. Basta verificar que $\mathcal{C}_0(M, N)$ es cerrado en $\mathcal{B}(M, N)$. Sea f un punto límite de $\mathcal{C}_0(M, N)$ y f_n que converja a f. Debemos demostrar que f pertenece a $\mathcal{C}_0(M, N)$, es decir, que es continua. Efectivamente para cualquier $a \in M$, dado $\varepsilon > 0$,

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3.$$

Pues $d(f(x), f_n(x)) < \sup_{x \in M} d(f(x), f_n(x)) = d_{\mathcal{B}(M,N)}(f, f_n) < \varepsilon/3$ para cierto $n > n_0$ por ser $\lim f_n = f$ en $\mathcal{B}(M, N)$. Lo mismo vale para $d(f_n(a), f(a))$. Por último, $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$ para $d(x, a) < \delta$ por la continuidad de f_n en $x = a$. Por lo tanto si $d(x, a) < \delta$ se cumplirá lo esperado para f.

□

EJERCICIO 86

1. Si a_n converge entonces $\lim d(x, a_n) = d(x, \lim a_n)$
2. Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente ella misma lo es.
3. Toda sucesión de Cauchy es acotada.
4. Si f_n es convergente (de Cauchy) en $\mathcal{B}(X, M)$ entonces $\forall x \in X, a_n = f_n(x)$ es convergente (resp. de Cauchy) en M.
5. Demostrar que no vale el recíproco para la afirmación anterior, encontrando contraejemplos.
6. Estudiar la convergencia y condición de Cauchy de la sucesión $f_n = x^n$ en
   a) $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$.
   b) $\mathcal{B}([0, 1/2], \mathbb{R})$.
   c) $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.