Lección 4

PROPOSICIÓN 60 Sean $M_1 = (M, d_1)$ y $M_2 = (M, d_2)$ dos espacios métricos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $d_1 \succ d_2$.
2. La aplicación $i_{12} : M_1 \longrightarrow M_2$ definida por $i_{12}(x) = x$ es continua.
3. Toda función con dominio M y continua según d_2 será continua según d_1.

COROLARIO 61 Sean $M_1 = (M, d_1)$ y $M_2 = (M, d_2)$ dos espacios métricos con el mismo conjunto base M. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $d_1 \sim d_2$.
2. La aplicación $i_{12} : M_1 \longrightarrow M_2$ definida por $i_{12}(x) = x$ es un homeomorfismo.
3. Toda función con dominio M es continua según d_2 si y solo si lo es según d_1.

EJERCICIO 62 Demostrar que en la parte 3 de la proposición anterior, alcanza con considerar funciones con codominio los reales.

EJERCICIO 63 Sean d_1 y d_2 métricas en M y considere las métricas d y δ definida como

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y), \qquad \delta(x, y) = \text{máx}\{d_1(x, y), d_2(x, y)\},$$

1) Demuestre que d y δ son ambas más finas que d_1 y d_2.
2) Demuestre que d_1 y d_2 son equivalentes si y solo si la cuatro métricas lo son.

4. Lenguaje básico de la Topología

Sea (M, d) un espacio métrico y $X \subset M$ un subconjunto de M. Un punto $a \in X$ se dice *punto interior* a X si existe una bola de centro a contenida en X. Al conjunto de puntos interiores de X se le llama *interior* de X y se lo denota $intX$. Un punto es *exterior* a X si es interior a $M - X$. Los puntos que no son ni interiores ni exteriores se dicen *puntos frontera*. Al conjunto de puntos fronteras de X lo llamaremos *frontera de* X y se denota ∂X.

EJEMPLO 64 Sea $M = \mathbb{R}$ y $X = [0, 1)$ entonces $intX = (0, 1)$, $X^{ext} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y $\partial X = \{0, 1\}$.

OBSERVACIÓN 65 $a \in \partial X$ si y solo si, toda bola de centro a posee puntos en X y puntos en $M - X$. Si un punto $a \in X$ es tal que toda bola de centro a posee puntos de X, entonces a se llama *punto adherente* de X y al conjunto de dichos puntos *adherencia o clausura* de X y es lo denota $\overline{X}$. Xi $\overline{X} = M$, entonces X se dice que es *denso* en M. Si un punto $a \in X$ es tal que toda bola de centro a posee puntos de $X - \{a\}$, entonces a se dice *punto límite* de X y al conjunto de dichos puntos, *conjunto derivado* de X y se lo denota X'.

Un conjunto se llamará *abierto* si coincide con su interior. A su vez será *cerrado* si su complemento es abierto ($intM - X = M - X$).

PROPOSICIÓN 66 Las bola abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

COROLARIO 67 El interior de un conjunto siempre es abierto.

PROPOSICIÓN 68 En un espacio métrico M se cumple que

1. Tanto M como $\varnothing$ son abiertos.
2. La intersección de un número finito de abiertos es un abierto.
3. La unión de una cantidad cualquiera de abiertos es abierta.

Los espacios topológicos son aquellos en donde se especifica cuales son los conjuntos abiertos sin hacer mención a ninguna métrica, pero con la condición de que la colección de conjuntos abiertos cumpla las tres propiedades de la proposición anterior, es decir, que el vacío y el propio espacio sean abiertos, que la intersección finita de abiertos esa un abierto y la cualquier unión de abiertos sea también un conjunto abierto.

EJEMPLO 69 En los espacios discretos todos los conjuntos son abiertos y cerrados.

EJEMPLO 70 La intersección de una cantidad infinita de abiertos puede no ser abierto, por ejemplo en $\mathbb{R}$, la intersección de las bolas de centro 0 y radio $r > 0$ es $\{0\}$.

EJEMPLO 71 Existen funciones continuas no acotadas definidas en conjuntos cerrados y acotados.

EJERCICIO 72 Encontrar funciones continuas acotadas definidas en conjuntos cerrados y acotados, que no posean ni máximos ni mínimos.

PROPOSICIÓN 73 Una función es continua si las preimágenes de abiertos son abiertos.

COROLARIO 74 Si f y g son dos funciones continuas, entonces $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

EJERCICIO 75 Demostrar que dos métricas son equivalentes si definen los mismos conjuntos abiertos.

5. Sucesiones y Límites

Una *sucesión* en un conjunto M es cualquier función $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$con dominio los naturales y codominio M. A los valores de x se los denota x_n en lugar de $x(n)$. Otras notaciones que se usan son $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente (x_n).

El recorrido de la sucesión será el conjunto $x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

EJEMPLO 76 Si $x_n = (-1)^n$, su recorrido es $\{-1, 1\}$.

Una *subsucesión* de la sucesión x_n será cualquier sucesión de la forma x_{n_j} donde n_j es a su vez una sucesión creciente de naturales: $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$.

EJEMPLO 77 La sucesión $x_n = a^n$ es acotada si y solo si $|a| \leq 1$.

Una secuencia (x_n) de un espacio métrico M, se dice que posee límite a y se escribe $\lim x_n = a$ si para toda bola de centro a existe un n_0 tal que x_n pertenece a dicha bola para todo $n \geq n_0$. En ese caso se dice que x_n tiende a a, se escribe también $x_n \longrightarrow a$ y se dice que la sucesión es *convergente*. Si el límite no existe se dice que la sucesión es *divergente*, no importando si oscila o tiende a “infinito”.