Lección 3

3.3. Propiedades elementales de las funciones continuas.

PROPOSICIÓN 43 La composición de funciones continuas es continua.

COROLARIO 44 La restricción de una función continua es continua.

PROPOSICIÓN 45 Sean M es un espacio métrico, E un espacio vectorial normado y $f, g : M \longrightarrow E$, $\alpha, \beta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones continuas con $\beta(x) \neq 0 \forall x$, entonces las funciones $f + g$, $\alpha \cdot f$ y $\alpha \cdot \beta$ serán continuas.

EJEMPLO 46 Sea F un espacio vectorial normado y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ una transformación lineal, entonces f es continua

EJEMPLO 47 *Funcional lineal discontinuo* Si E es el conjunto de polinomios reales de una variable y consideramos la norma $\|p\| = \sup |p([0,1])|$, el funcional lineal $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(p) = p(2)$ no es continuo.

EJERCICIO 48 Sean E y F dos espacios vectoriales normados y $f : E \longrightarrow F$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es continua en 0.
3. $\exists c > 0$, tal que $\|f(x)\| \leq c \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E$.

OBSERVACIÓN 49 Este ejercicio demuestra que las transformaciones lineales continuas $f : E \longrightarrow F$ (entre esp. vect. normados) son las que permanecen acotadas cuando se restringen a la bola unidad. Es más, forman un espacio vectorial denotado $\mathcal{L}(E, F))$ al cual se le puede introducir una norma definiendo:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F .$$

EJERCICIO 50 Sean M y N dos espacios métricos y $f, g : M \longrightarrow N$ continuas en $a \in M$ y tales que $f(a) \neq g(a)$. Demostrar que existe una bola B de centro a tal que $f(B) \cap g(B) = \varnothing$.

EJERCICIO 51 Sea M un espacio métrico y $f : M \longrightarrow M$ continua. Para cada entero $n \geq 0$, esa $f^n : M \longrightarrow M$ definida por $f^0 = id$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Demostrar que si en $a \in M$ sucede que $f^m \neq f^n(a))$ para todo $m \neq n$, entonces para todo $p \in \mathbb{N}$existe una bola B, de centro a, tal que $f^i(B) \cap f^j(B) = \varnothing$ para todo $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq p$.

EJERCICIO 52 Sean $f : M \longrightarrow N$ continua y $Y \subset N$ no vacío. Sea $a \in M$ y tal que $d(f(a), Y) > 0$, entonces existe una bola B, de centro a, tal que $x \in B \Rightarrow d(f(x), Y) > 0$.

3.4. Homeomorfismos. Dados dos espacios métricos M y N un *homeomorfismo* de M en N es cualquier biyección continua $f : M \longrightarrow N$ cuya inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ es también continua. En este caso M y N se dicen *homeomorfos*.

EJERCICIO 53 La composición de dos homeomorfismo es un homeomorfismo.

EJEMPLO 54 Toda circunferencia es homeomorfa a cualquier elipse (ambas como subespacios de $\mathbb{R}^2$)

EJERCICIO 55 Si $f : M \longrightarrow N$ es un homeomorfismo y M es discreto, entonces N también lo será.

EJERCICIO 56 Demostrar que toda bola abierta de un espacio vectorial normado es homeomorfa a todo el espacio.

3.5. Métricas equivalentes. Sean d_1 y d_2 dos métricas para un mismo conjunto M. Designemos con M_1 y M_2 a los correspondientes espacios métricos. Es decir, $M_1 = (M, d_1)$ y $M_2 = (M, d_2)$. Diremos que d_1 es *más fina* que d_2 y escribiremos $d_1 \succ d_2$ si *toda bola abierta según d_2 contiene una bola según d_1 con el mismo centro*. Dos métricas d_1 y d_2 son *equivalentes* si cada una de ellas es más fina que la otra. En ese caso escribiremos $d_1 \sim d_2$.

EJEMPLO 57 Las métricas del EJEMPLO 3 son equivalentes.

EJEMPLO 58 Sea $\mathcal{C}_0([a, b], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas acotadas $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere las siguientes dos normas:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Entonces $\| \, \|_\infty \succ \| \, \|_1$ pero que no son equivalentes.

PROPOSICIÓN 59 Si existe $c > 0$ tal que $d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y)$ para todo $x, y \in M$, entonces $d_1 \succ d_2$.