Lección 2

2.4. Conjuntos acotados. $X \subset M$ se dice *acotado* si existe $c > 0 : d(x, y) < c$ para todo $x, y \in X$. Al menor c posible se le llama *diámetro* de X. Por la definición tenemos que

$$\mathrm{diam} X = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Cuando X no es acotado escribimos $\mathrm{diam} X = \infty$. Cuando X no es acotado, entonces para todo $c > 0, \exists\, x_c, y_c \in X :\ d(x_c, y_c) > c$.

EJEMPLO 23 $\mathrm{diam} B(a; r) \leq 2r$

EJERCICIO 24 a) Hallar M, a y r tales que: $\mathrm{diam} B(a; r) < 2r$
b) Ídem pero para la igualdad $\mathrm{diam} B(a; r) = 2r$)

EJEMPLO 25 El diámetro es invariante por isometrías.

EJERCICIO 26 X es acotado si y solo si existen $r > 0$ y $a \in M$ tales que $X \subset B(a; r)$.

EJERCICIO 27 Si X y Y son acotados entonces lo son $X \cup Y$ y $X \cap Y$.

Una función $f : X \longrightarrow M$ se dice *acotada* si su imagen $f(X) = \{f(x) : x \in M\}$ lo es.

Definimos $\mathcal{B}(X, M) = \{f : X \longrightarrow M : f \text{ acotada}\}$ con

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

A esta métrica se la conoce como *métrica del supremo* o de la *convergencia uniforme*.

OBSERVACIÓN 28 En el caso de que M sea un espacio vectorial normado, podemos dotar a $\mathcal{B}(X, M)$ de dicha estructura ya que $\mathcal{B}(X, M)$ es cerrado bajo la suma y el producto por escalares y la métrica del supremo nos da la norma $\|f\| = d(f, 0) = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

2.5. Distancia de un punto a un conjunto. Para $\varnothing \neq X \subset M$ y $a \in M$ definimos la distancia de a a X como

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, X)$$

De esta forma tenemos que

OBSERVACIÓN 29

1. $d(a, X) \leq d(a, x) \forall x \in X$.
2. Si $d(a, X) < c$ entonces existe $x \in X : d(a, x) < c$.
3. Si $a \in X$ entonces $d(a, X) = 0$.
4. Pero si $d(a, X) = 0$ entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : d(a, x) < \varepsilon$.
5. Si $X \subset Y$ entonces $d(a, Y) \leq d(a, X)$.
6. Si $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ finito entonces $d(a, X) = \min\{d(a, x_1), d(a, x_2), \ldots, d(a, x_n)\}$.

PROPOSICIÓN 30 Si $\varnothing \neq X \subset M$ entonces $|d(a,X) - d(b,X)| \leq d(a,b))$.

COROLARIO 31 $|d(a,x) - d(b,x)| \leq d(a,b))$.

Se define la *distancia entre dos subconjuntos* no vacíos $X, Y, \subset M$como

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

EJERCICIO 32 a) Cuando $X \cap Y \neq \varnothing$ entonces $d(X,Y) = \varnothing$, pero el recíproco no vale: de un contraejemplo.
b) La distancia entre subconjuntos así definida no es una métrica. Halle que propiedades de una métrica cumple y cuales no.

EJERCICIO 33 Dado un espacio métrico (M,d), sea $\Phi(M)$ una colección de subconjuntos $X \subset M$ que sean acotados, no vacíos y que cumplan la siguiente condición: $d(a,X) = 0 \Leftrightarrow a \in X$. Dados $X, Y \in \Phi(M)$, definimos $\rho(X,Y)$ como el mayor de los dos números siguientes:

$$\sup_{x \in X} d(x,Y) \qquad \sup_{y \in X} d(y,X)$$

Demostrar que ρ define una métrica en $\Phi(M)$ (A esta métrica se la conoce como la *distancia Hausdorff* entre conjuntos)

3. Funciones continuas

3.1. Definición y ejemplos. Una función $f : M \longrightarrow N$ de un espacio métrico M a otro N será *continua en un punto* $a \in M$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_M(x,a) < \delta$ entonces $d_N(f(x), f(x)) < \varepsilon$. La función f se dice *continua* si lo es en todos los puntos de M.

Equivalentemente, f será continua en a si para toda bola $B_{f(a)} \subset N$ abierta de centro $f(a)$ existe una bola $B_a \subset M$ con centro en a tal que $f(B_a) \subset B_{f(a)}$.

EJEMPLO 34 Sea V un espacio vectorial con producto interno $< \, , \, >$ y $c \in V$ un vector fijo de V, entonces $T_c : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_c(x) =< c, x >$ es continua. Por ejemplo, si $V = C([0,1], \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones reales continuas con dominio el intervalo $[0,1]$. Dicho conjunto es un espacio vectorial con producto interno si definimos $< f, g >= \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$. En ese caso la función $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$ es continua, pues $I = T_c$ siendo c la función constante igual a 1 ($c(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$).

EJERCICIO 35 Considere el conjunto $M = C([0,1])$ de las funciones reales continuas con dominio el intervalo $[0,1]$ y con la métrica del supremo. La función $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$ es continua.

EJERCICIO 36 En las condiciones del ejemplo anterior, considere una función fija $c \in M$ y defina la aplicación $I_c : M \longrightarrow \mathbb{R}$ como $I_c(f) = \int_0^1 c(x) \cdot f(x) dx$. Demostrar que I_c también es continua.

EJEMPLO 37 *Funciones lipschitzianas* Sea $f : M \longrightarrow N$ una función que cumpla que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$$

para cierta constante $c > 0$ y para cualesquiera $x, y \in M$. Entonces f es continua. Una tal función se dice *aplicación lipshitziana* y al número c *constante de Lipschitz* de f. Cuando $M = N$ y $c < 1$ f se llama *contracción* y a c se le llama *módulo* de la contracción.

EJERCICIO 38 Demostrar que toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y con derivada acotada es lipschitziana.

Una función f es *localmente lipschitziana* si para todo punto a de su dominio, existe una bola de centro a tal que f es lipchitziana en dicha bola.

EJERCICIO 39 Demostrar que toda función localmente lipschitziana es continua.

EJEMPLO 40 *Contracciones débil.* Son las lipschitziana con constante de lipschtiz $c = 1$, es decir, una función $f : M \longrightarrow N$ será una contracción débil si

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

1. Las constantes
2. Las inmersiones isométricas
3. La distancia a un conjunto.
4. La norma en un espacio vectorial normado.
5. Las proyecciones de $M_1 \times M_2$ en M_i.
6. Las métricas

EJEMPLO 41 Toda aplicación con dominio un espacio discreto es continua.

3.2. Propiedades elementales.

PROPOSICIÓN 42 La composición de funciones continuas es continua.