Lección 1

1. Motivación

Hallar el máximo (o el mínimo) de una función real $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es un tema de interés para los economistas.

Al atacar dicho problema, que a veces se escribe

$$\max_{x \in D} f(x)$$

nos enfrentamos con las siguientes interrogantes:

1. ¿Tiene f algún máximo? O ¿posee f un valor supremo que nunca llega a alcanzar dentro del dominio D?
2. En caso afirmativo ¿es dicho máximo único? y
3. ¿Qué procedimiento o algoritmo conocemos para hallarlo?
4. ¿Cómo varia dicho máximo al variar f o al variar D?

Para contestar la primera pregunta solemos estudiar las propiedades de la f o en D o en ambos. Un ejemplo de contestación es: si f es continua y D es compacto, entonces f posee algún máximo. O si f es diferenciable y D es abierto, entonces f solo puede poseer máximos en donde se anula su gradiente.

En este curso nuestro domino D ya no será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sino de un espacio más general, como el conjunto de sucesiones o un conjunto de funciones. Es decir que nuestras "x"s ya no serán vectores sino funciones. Más formalmente si vemos $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial de dimensión finita, lo que estamos diciendo es que ahora nos interesa trabajar con espacios de dimensión infinita. En este caso tanto las sucesiones como las funciones siguen siendo vectores, pero de un espacio vectorial de dimensión infinita.

Los teoremas que veremos son válidos en espacios más generales que los vectoriales, los llamados espacios métricos.

2. Espacios Métricos

2.1. Definición y ejemplos de espacios métricos. Una *métrica* en un conjunto M es una función $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que le asocia a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M$ un número real $d(x, y)$ llamado *distancia de x a y*, de modo que se satisfagan las siguientes condiciones para cualesquiera x, y, $z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;
d2) Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$;
d3) $d(x, y) = d(y, x)$;(simetría)
d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (desigualdad triangular)

De d1) y d2) vemos que $d(x, y) \leq 0$ y que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Un *espacio métrico* será un par (M, d) donde M es un conjunto no vacío y d es una métrica en M. Normalmente hablaremos del "espacio métrico M" en lugar de "(M, d)" dejando sobrentendida la métrica d, salvo que hubieran otras métricas en juego. Los elementos de un espacio métrico pueden ser de diversas índoles, números, vectores, funciones, conjuntos, etc, pero los llamaremos siempre *puntos de M.*

EJEMPLO 1 Métrica cero uno

EJEMPLO 2 Subespacios y métrica inducida: Dado un espacio métrico (M, d), todo subconjunto $S \subset M$ puede ser considerado como un espacio métrico al tomar la restricción de d al conjunto $S \times S$. En este caso diremos que S es un *subespacio* de M y a la métrica de S *inducida* por la de M.

EJEMPLO 3 Métricas en $\mathbb{R}^n$: d o d_2 (o euclidiana), d_1 (o de Manhattan), d_∞

EJERCICIO 4 Demostrar que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$$

EJEMPLO 5 $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ = funciones acotadas con la distancia del supremo.

EJEMPLO 6 Espacios vectoriales normados. Distancia asociada a una norma.

EJEMPLO 7 Espacios vectoriales con producto interno. Norma asociada a un producto interno.

EJEMPLO 8 Producto cartesiano de espacios métricos.

EJERCICIO 9 Demuestre que $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = (x-y)^2$ no es una métrica.

EJERCICIO 10 Muestre que los siguientes son espacios métricos

a) El conjunto M de las funciones reales continuas y estrictamente crecientes en $[a,b]$ con

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$

b) El conjunto M de las funciones reales continuas y acotadas en $[0,+\infty)$ con

$$d(x,y) = \int_0^{+\infty} |x(t) - y(t)|\, e^{-t} dt$$

c) El conjunto de las sucesiones reales acotadas con

$$d((x_n),(y_n)) = \sup_{n\in N} |x_n - y_n|$$

2.2. Isometrías. Sean M y N dos espacios métricos. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se llama *inmersión isométrica* cuando $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in M$. También se dice que f preserva distancias.

OBSERVACIÓN 11 Toda inmersión isométrica es inyectiva.

Una *isometría* es una inmersión isométrica sobreyectiva.

EJERCICIO 12 La composición de isometrías es una isometría. La inversa de una isometría lo es.

OBSERVACIÓN 13 Una forma de definir una métrica sobre un conjunto X es dar una función inyectiva $f : X \longrightarrow M$ siendo M un espacio métrico, y definiendo $d_X(x,y) = d_M(f(x), f(y)$. La métrica d_X se llama *métrica inducida* por f. Por ejemplo la métrica inducida en un subconjunto de un espacio métrico es la dada por la función de inclusión.

2.3. Bolas y esferas. Sea $a \in M$ y $r > 0$ un número real positivo, definimos la *bola abierta de centro a y radio r* como el conjunto

$$B(a;r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}.$$

Análogamente definimos la *bola cerrada de centro a y radio r* y la *esfera* de mismo centro y radio como los conjuntos

$$B[a;r] = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}.$$

y

$$S(a;r) = \{x \in M : d(x,a) = r\}.$$

OBSERVACIÓN 14

1. $B(a;r) = B(a;r) \cup S(a;r)$
2. si $X \subset M$ entonces $B_X(a;r) = B_M(a;r) \cap X$

EJERCICIO 15 Sea M con la métrica cero-uno, hallar: $B(a,2)$, $B(a,1/2)$, $S(a,2)$, $S(a,1)$ y en general $B(a,r)$ discutir según r.

EJEMPLO 16 Si $M = \mathbb{R}$ entonces $B(a,r) = (a-r, a+r)$

EJERCICIO 17 Dibujar las $B(a,r)$ en $M = \mathbb{R}^2$ para las métricas del EJEMPLO 3

EJERCICIO 18 Para $M = \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ hallar $S(x^2,1)$

Un punto $a \in M$ se dice *aislado* si el mismo es un bola abierta de M, o esa si existe $r > 0$: $B(a;r) = \{a\}$. Por el contrario, si $a \in M$ no es aislado, entonces $\forall r > 0 \ \exists x_r : \ 0 < d(a,x_r) < r$. Un espacio métrico se dice *discreto* si todos sus puntos son aislados. Un subconjunto $X \subset M$ se dice *discreto* si lo es como subespacio de M (es decir con la métrica inducida).

EJEMPLO 19 El conjunto de lo enteros $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida como subconjunto de los reales es discreto.

EJEMPLO 20 Hallar los puntos aislados del subconjunto $P = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 21 Si $a, b \in M$ y $a \neq b$ entonces $\forall\, r, s > 0 : r + s \leq d(a,b)$ se tiene que $B(a;r) \cap B(b;s) = \varnothing$

EJERCICIO 22 Si $a, b \in M$ y $a \neq b$ entonces $\forall\, r, s > 0 : r + s < d(a,b))$ se tiene que $B[a;r] \cap B[b;s] = \varnothing$