Solución Práctico 1

1.1.a) *Dilema del Prisionero*:

		Capitalista	
		Invertir	No invertir
Trabajador	Trabajar duro	$4,4$	$1,6$
	No trabajar duro	$6,1$	$2,2$

Es un DP porque para el dueño de la empresa "No invertir" es una estrategia dominante y para el trabajador lo es "No trabajar duro". Por lo tanto existe un equilibrio en estrategias dominadas que es Pareto-inferior a (Trabajar duro, Invertir).

Juego de Aseguramiento:

		Capitalista	
		Invertir	No invertir
Trabajador	Trabajar duro	$4,4$	$1,3$
	No trabajar duro	$3,1$	$2,2$

En este caso hay 2 equilibrios de Nash, uno de los cuales [(Trabajar duro, Invertir)] es Pareto-superior al otro [(No trabajar duro, No invertir

Asumiendo que "Trabajar duro" e "Invertir" son las estrategias Paloma, los equilibrios de Nash (que también son óptimos de Pareto) son aquellos en los que los individuos adoptan estrategias dispares (Trabajar duro, No invertir) y (No trabajar duro, Invertir).

1.2. *Dilema del Prisionero*: como se mencionó el equilibrio de nash del DP es (No trabajar duro, No invertir). No trabajar duro es una estrategia dominante para el trabajador: Si el empresario invierte, al trabajador le conviene no trabajar duro, y ganar 6, antes que trabajar duro y ganar 4. Si el empresario no invierte, al trabajador le conviene no trabajar duro y ganar 2 , antes que trabajar duro y ganar 1. Por la misma razón, ya que el juego es simétrico, al empresario le conviene no invertir, cualquiera sea la estrategia que adopte el trabajador.

Juego de Aseguramiento: los equilibrios de Nash son [(Trabajar duro, Invertir)] y [(No trabajar duro, No invertir)], y se puede obtener razonando de forma similar al párrafo anterior.

Juego del Halcón y la Paloma: los equilibrios de Nash son (Trabajar duro, No invertir) y (No trabajar duro, Invertir).

1.3 *Dilema del Prisionero*: Todos menos el equilibrio de Nash. Ninguno de ellos es un equilibrio en estrategias dominantes, ninguno de ellos es un equilibrio de Nash.

Juego de Aseguramiento: (Trabajar duro, Invertir). No es un equilibrio en estrategias dominantes, pero es uno de los equilibrios de Nash.

Juego del Halcón y la Paloma: Todos son óptimos de pareto, excepto (No trabajadar duro, No inveritir). Los resultados con las estrategias dispares (Trabajar duro, No invetir) y (No trabajar duro, Invertir) son equilibrios de Nash.

Ejercicio 2

a)

		Persona 1	
		Concurrir	No concurrir
Persona 2	Concurrir	$-0,5,-0,5$	$2,0$
	No concurrir	$0,2$	$0,5,0,5$

b) Este es un Juego - Halcon Paloma. Notar que los equilibrios de Nash del juego (que son también los óptimos de Pareto) son aquellos en los que los jugadores adoptan estrategias contrarias.

c) No, hay dos equilibrios de Nash, los resultados en donde uno concurre y el otro no. Para verlo: si 1 concurre, a 2 le conviene no concurrir (gana 0 en lugar de perder 0,5 si concurre). Si 1 no concurre, a 2 le conviene concurrir (gana 2 en lugar de 0,5 si no concurre).

d) Bajo estas condiciones no hay una manera racional de actuar. No hay ninguna estrategia que sea dominante y no hay forma de saber qué va a hacer la otra persona.

EJERCICIO 3

a) Es un DP. El equilibrio de nash en estrategias dominantes (Abajo, Derecha) es único, y es Pareto-inferior.

b)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$15,15$	$10,14$
Abajo	$14,10$	$12,12$

Esta matriz transformada que describe los beneficios de los individuos cuando a éstos les interesa no sólo su propio beneficios sino también el del otro (en un 50% menos que el propio), descrie un juego de aseguramiento. Hay dos equilibrios de Nash [(Arriba,Izquierda) y (Abajo, Derecha)], el primero de los cuales es Pareto superior.

c)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$0, 0$	$-8, 8$
Abajo	$8, -8$	$0, 0$

Notar que, en este caso, la estrategia "Abajo" es una esrategia dominante para el jugador fila y que la estrategia "Derecha" es una estrategia dominante para el jugador Columna. (Comprobarlo). Por lo tanto el resultado (Abajo,Derecha) es el equilibrio de Nash de este juego, el cual es Pareto óptimo, al igual que cualquiera de los cuatro resultados posibles. Dada la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias dominantes, que es Pareto óptimo podríamos decir que es un juego del tipo de la Mano Invisible, a excepción de que existen otros resultados posibles en que individualmente uno de los dos jugadores podría estar mejor (esto no sucedía en el ejemplo del texto, en donde cuando uno plantaba tomates y el otro papas ambos obtenía el mayor beneficio individual posible).

d)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$10, 10$	$0, 8$
Abajo	$8, 0$	$8, 8$

Este en un Juego de Aseguramiento. Notar que hay dos resultados que son equilibrios de Nash [(Arriba, Izquierda) y (Abajo,Derecha)]. Notar también que el resultado (Arriba, Izquierda) es Pareto-superior al (Abajo, Derecha). Como todo juego de coordinación, no hay una manera de jugarlo si los jugadores no pueden saber lo que va a hacer el otro a priori. No hay una manera racional de jugarlo si es un juego no-cooperativo, por más que parezca "obvio" que el fila tiene que jugar Arriba y el Columna tiene que jugar Izquierda, y por más que en la realidad, si hacemos un experimento entre dos individuos que no se connocen ni se van a ver, pero conocen la matriz, estos juegan Arriba e Izquierda.

e)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$20, 20$	$16, 16$
Abajo	$16, 16$	$16, 16$

Este es un juego que es tipo un Juego de la Mano Invisible en estrategias débilmente dominantes. Arriba es débilmente dominante para fiila, al igual que lo es Izquierda para Columna. este equilibrio de Nash en estrategias (débilmente) dominantes es el único óptimo de Pareto.

EJERICIO 4

a) Una estrategia A es una EEE contra otra estrategia B si y solo si

$$\pi(A,A) > \pi(B,A) \text{ o si}$$

$$\begin{aligned} \pi(A,A) &= \pi(B,A) \text{ pero} \\ \pi(A,B) &> \pi(B,B) \end{aligned}$$

b) Usando las matrices de pagos del Ejercicio 1:

Dilema del Prisionero:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	$4,4$	$1,6$
No cooperar	$6,1$	$2,2$

Obviamente, la única EEE es No cooperar porque Cooperar no es una mejor respuesta contra Cooperar, mientras que No cooperar es una mejor respuesta contra No cooperar (es una estrategia dominante, es más).

Juego de Aseguramiento:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	$4,4$	$1,3$
No cooperar	$3,1$	$2,2$

En este caso, ambas son EEE ya que siempre es mejor respuesta jugar lo mismo que el otro.

Juego del Halcón y la Paloma

	Paloma	Halcón
Paloma	$3,3$	$0,6$
Halcón	$6,0$	$-1,-1$

En este caso no hay ninguna EEE ya que nunca es una mejor respuesta jugar la misma estrategia que el otro. Siempre es mejor jugar la estrategia contraria.

c) Una estrategia A es viable evolutivamente contra otra estrategia B, si individuos que jueguen A pueden invadir una población de Bs. O sea que viabilidad evolutiva es lo contrario que EEE. Por lo tanto, diremos que una estrategia A es evolutivamente viable contra otra estrategia B si y solo si

$$\pi(A,B) > \pi(B,B) \text{ o si}$$

$$\begin{aligned} \pi(A,B) &= \pi(B,B) \text{ pero} \\ \pi(A,A) &> \pi(B,A) \end{aligned}$$

d) Como los conceptos de EEE y estrategia incialmente viable son "inversos" es fácil ver que las estrategias EE no pueden ser invadidas por lo tanto la otra estrategia no es inicialmente viable, y las estrategias que no son EE pueden ser invadidas, por lo tanto las otras son inicialmente viables. Por ejemplo, en el DP habíamos visto que No cooperar era EEE, por lo tanto no puede ser invadida por Cooperar, por lo tanto Cooperar no es incialmente viable. Por la misma razón, en un Juego de Aseguramiento ninguna es inicialmente viable, y en el juego de Halcone y Paloma ambas son inicialmente viables.

EJERCICIO 5

a) Los dos halcones se pelean por una presa o un premio que tiene valor v. Pero al hacerlo la presa o el premio se rompe (si es una preza podemos ´pensar que ambos tiran de la presa y ésta se raja y pierde algunas partes), perdiendo un valor de c.Por lo que al final de la pelea el valor neto de la presa es $(v-c)$. Como un halcón gana con probabilidad $1/2$, el valor esperado de la pelea es $1/2(v-c)$.

b) El beneficio esperado para una Halcón es:

$$b_H(p) = p[1/2(v-c)] + (1-p)v = v - 1/2p(v+c)$$

El beneficio esperado de un Paloma es

$$b_D(p) = p \times 0 + (1-p)v/2 = (1-p)v/2$$

c)

$$b_H(v/c) = v - 1/2v/c(v+c) = v - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}$$

$$b_D(v/c) = (1-\frac{v}{c})\frac{v}{2} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}$$

d) $p = v/c$ es un equilibrio estable si $\frac{\partial \Delta p}{\partial p} < 0$. El signo de $\frac{\partial \Delta p}{\partial p}$ depende del signo de $\frac{\partial [b_H - b_D]}{\partial p}$. Por lo tanto tenemos que investigar si $\frac{\partial [b_H - b_D]}{\partial p} < 0$.

$$\frac{\partial\left[b_H - b_D\right]}{\partial p} = \frac{\partial\left[v - 1/2p(v+c)\right]}{\partial p} - \frac{\partial\left[(1-p)v/2\right]}{\partial p}$$

$$= -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}c < 0$$

Por lo tanto $p^* = v/c$ es un equilibrio estable.

e) Para probar que esta estrategia mixta (a la que llamaremos M) es una EEE debemos ver si M es una mejor respuesta contra sigo misma.

$$\pi\left(M,M\right) = f\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right] + (1-f)\left[f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}\right]$$
$$\frac{f^2}{2}(v-c) + (1-f)v + (1-f)^2\frac{v}{2} = \frac{f^2}{2}(v-c) + (1-f)v\left[\frac{3}{2} - \frac{f}{2}\right]$$

$$\pi(H,M) = f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v$$

$$\pi(D,M) = f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}$$

$\pi(M,M) > \pi(H,M)$ sí y sólo sí

$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right] + (1-f)\left[f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}\right] > f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v$$
$$(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > (1-f)\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right]$$
$$\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right]$$
$$\left[-(1-f)\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{1}{2}(v-c)\right]$$
$$\left[-\frac{v}{2} + f\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{v}{2} - f\frac{c}{2})\right]$$
$$\left[-\frac{v}{2}\right] > \left[-f\frac{c}{2})\right]$$
$$[-v] > [-fc]$$
$$[v] < [fc]$$
$$\frac{v}{c} < f$$

$\pi(M,M) > \pi(D,M)$ sí y sólo sí

$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right]+(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > (1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right] > (1-f)\frac{v}{2}-(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right]$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right] > f(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)\right] > f(1-f)\frac{v}{2}-f(1-f)v$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)\right] > -f(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\frac{1}{2}(v-c) > -(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f(v-c) > -(1-f)v$$
$$fv-fc > -v+fv$$
$$-fc > -v$$
$$f < \frac{v}{c}$$

Obviamente, las dos cosas no pueden ser al mismo tiempo, por lo que esta estretaegia mixta no puede ser una EEE contra D y H al mismo tiempo. Sin embargo, nos queda averiguar qué pasa cuando $f = v/c$. Cuando $f = v/c$,

$$\pi(H,M) = \frac{v}{c}\frac{1}{2}(v-c)+(1-\frac{v}{c})v = \frac{1}{2c}v\,(c-v)$$

$$\pi(D,M) = (1-\frac{v}{c})\frac{v}{2} = \frac{1}{2c}v\,(c-v)$$

O sea que cuando $f = v/c, \pi(H,M) = \pi(D,M)$. Como $\pi\,(M,M) = f\,[\pi(H,M)]+ (1-f)\,[\pi(D,M)]\,, \pi(M,M) = \pi(H,M) = \pi(D,M)$. Por lo tanto, si $\pi(M,D) > \pi(D,D)$ y $\pi(M,H) > \pi(H,H)$, cuando $f = v/c$,entonces M es una EEE.

$$\pi(M,H) > \pi(H,H) \text{ implica}$$
$$f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)\times 0 > \frac{1}{2}(v-c)$$
$$f\frac{1}{2}(v-c) > \frac{1}{2}(v-c)$$
$$f < 1 \text{ porque } \frac{1}{2}(v-c) \text{ es un número negativo}$$

$$\pi(M, D) > \pi(D, D)$$
$$fv + (1-f)\frac{v}{2} > \frac{v}{2}$$
$$fv + \frac{v}{2} - f\frac{v}{2} > \frac{v}{2}$$
$$f\frac{v}{2} > 0$$
$$f > 0$$

Conclusión, cuando $f = v/c$, M es una EEE.