SOLUCION PARCIAL MICROECONOMÍA
MASTER DE ECONOMÍA
25/5/06

(1) No hay Química. Considere el siguiente problema de coordinación genérico: dos individuos (Minúsculas y Mayúsculas) con funciones de utilidad simétricas

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \beta a + \gamma A + \delta a A + \lambda a^2 \\ U &= \alpha + \beta A + \gamma a + \delta a A + \lambda A^2 \end{aligned}$$

donde a y A son las acciones tomadas por los dos individuos y $\lambda < 0$ para asegurar concavidad.

1. ¿Cuáles son las condiciones para que la externalidad sea positiva o negativa y para que las dos estrategias sean sustitutas o complementarias en el equilibrio de Nash (a^*, A^*)?

Para que la externalidad sea negativa:

$$\begin{aligned} u_A &= \gamma + \delta a < 0 \\ U_a &= \gamma + \delta A < 0 \end{aligned}$$

Y > 0 *para que la externalidad sea positiva.*

En el equilibrio de Nash ambos responden de la mejor manera. La función de mejor respuesta de Minúsculas sale de la c.p.o. del siguiente problema:

$$\max_a u = \alpha + \beta a + \gamma A + \delta a A + \lambda a^2$$

La c.p.o. es $u_a = \beta + \delta A + 2\lambda a = 0$, *de donde sale la f.m.r* $a = -(\beta + \delta A)/2\lambda$. *El problema para mayúsculas es simétrico, por lo que el EN es*

$$\begin{aligned} a^* &= -\frac{(\beta + \delta A^*)}{2\lambda} \\ A^* &= -\frac{(\beta + \delta a^*)}{2\lambda} \end{aligned}$$

Dado que $\lambda < 0$, *las estrategias serán sustitutas si* $\delta < 0$ *y complementarias si* $\delta > 0$. *Notar que* δ *es también* $u_{aA} = U_{aA}$, *que es otra forma de verlo.*

2. ¿Cuál es la condición de primer orden para una asignación Pareto-eficiente simétrica? Use esta condición (asumiendo que la condición de segundo orden se cumple) y las expresiones de (a^*, A^*) para mostrar que a^* y A^* exceden los niveles Pareto-eficientes si y solo si la externalidad es negativa. Explique por qué esto es así.

La condición de primer orden para una asignación Pareto-eficiente simétrica sale del siguiente problema:

$$\max_{a,A} u(a,A) \text{ sujeto a } U(A,a) = \overline{U}$$

El Lagrangeano asociado a este problema es

$$L(a,A,\zeta) = u(a,A) + \zeta(U(A,a) - \overline{U})$$

Las c.p.o. para una solución interior son:

$$\begin{aligned} L_a &= u_a + \zeta U_a = 0 \\ L_A &= u_A + \zeta U_A = 0 \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\frac{u_a}{u_A} = \frac{U_a}{U_A}$$

que dice que las tasas marginales de sustitución son iguales. Si las externalidades son negativas, $U_a < 0$. Dado que ζ tiene que ser positivo, tenemos que en a^*, $L_a < 0$. Por lo que $a^* > a^{OP}$. Lo mismo sucede con A^*.

Para este problema, la condición equivale a

$$\frac{\beta + \delta A + 2\lambda a}{\gamma + \delta a} = \frac{\gamma + \delta A}{\beta + \delta a + 2\lambda A}$$

Si es simétrica,

$$\beta + \delta a + 2\lambda a = \gamma + \delta a$$

$$a^{OP} = \frac{\gamma - \beta}{2\lambda}$$

Por su parte, teníamos que $a^* = -\frac{\beta + \delta A^*}{2\lambda}$. Como las funciones de mejor respuesta son simétricas, $a^* = A^*$,

$$a^* = -\frac{\beta + \delta a^*}{2\lambda} = \frac{-\beta}{(2\lambda + \delta)} = A^*$$

Por lo tanto, la externalidad negativa implica

$$\gamma - \frac{\delta\beta}{(2\lambda + \delta)} < 0$$

Probar que $a^* > a^{OP}$ equivale a probar que

$$\begin{aligned} \frac{-\beta}{(2\lambda + \delta)} &> \frac{\gamma - \beta}{2\lambda} \\ \frac{-2\lambda\beta}{(2\lambda + \delta)} + \beta &> \gamma \\ \frac{-2\lambda\beta + \beta\,(2\lambda + \delta)}{(2\lambda + \delta)} &> \gamma \\ \frac{\beta\delta}{(2\lambda + \delta)} &> \gamma \\ \gamma - \frac{\beta\delta}{(2\lambda + \delta)} &< 0 \end{aligned}$$

que es la condición de que la externalidad sea negativa.

3. Asumiendo que el equilibrio de Nash es en estrategias puras, muestre que siempre va a existir una ventaja por mover primero y que el que mueva segundo va a estar peor (en relación al equilibrio de Nash) si las estrategias son sustitutas y mejor si las estrategias son complementarias. Explique por qué esto es así.

Si Minúsculas mueve primero, por ejemplo, lo que va a hacer es incorporar la f.m.r. de mayúsculas en su problema:

$$\max_a u(a, A(a))$$

La c.p.o. de este problema es

$$du/da = u_a + u_A A'(a) = 0$$

En el caso de externalidades negativas ($u_A < 0$) *y estrategias sustitutas* ($A'(a) < 0$), *minúsculas elige en este caso un a mayor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) > 0$. *Para explicar por qué minúsculas está mejor y mayúsculas peor es útil pensar en un ejemplo de un problema de coordinación de este tipo: la tragedia de los pescadores. En este caso minúsculas (el que mueve primero) está mejor porque puede salir a pescar más y aumenta su captura y su utilidad* ($du/da(a^*) > 0$) *y mayúsculas está peor (el* A *que puede elegir es menor y* $U_A > 0$).

En el caso de externalidades negativas ($u_A < 0$) *y estrategias complementarias* ($A'(a) > 0$),*estamos en el caso de consumo conspicuo. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a menor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) < 0$. *Como consecuencia minúsculas está mejor* ($du/da(a^*) < 0$) *y mayúsculas también está mejor ya que el consumo (el* A*) que puede elegir es menor y* $U_A(A^*) < 0$).

En el caso de externalidades positivas ($u_A > 0$) *y estrategias sustitutas* ($A'(a) < 0$),*estamos en el caso de trabajo en equipo. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a (esfuerzo) menor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) < 0$. *Como consecuencia minúsculas está mejor (el esfuerzo es costoso) y mayúsculas está peor ya que elige un nivel de esfuerzo mayor.*

En el caso de externalidades positivas ($u_A > 0$) *y estrategias complementarias* ($A'(a) > 0$),*estamos en el caso de competencia fiscal. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a (impuesto) mayor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) > 0$ *y mayúsculas también porque elige un impuesto* (A) *mayor también.*

4. Dos agricultores adyacentes eligen si usar un pesticida químico o un enfoque menos intensivo en químicos que usa depredadores naturales para controlar las pestes que amenazan sus cultivos (manejo integrado de pestes). El uso de plaguicidas químicos genera externalidades negativas (los químicos matan a los depredadores naturales además de matar a las pestes), mientras que el manejo integrado de pestes genera externalidades positivas (los depredadores naturales no respetan los límites de las propiedades de los agricultores y cazan las pestes en toda el area). Específicamente,

el incremento en el uso de químicos incrementa el producto del usuario pero también baja el producto e incrementa el producto marginal de usar plaguicidas del otro agricultor para cualquier nivel de los otros inputs. Siendo a y A el nivel de plaguicidas químicos usados por uno y otro, de los valores de los parámetros de las funciones de utilidad de arriba que describen la interacción.

Externalidad negativa

$$\begin{aligned} u_A &= \gamma + \delta a < 0 \\ U_a &= \gamma + \delta A < 0 \end{aligned}$$

Producto marginal positivo propio

$$\begin{aligned} u_a &= \beta + \delta A + 2\lambda a > 0 \\ U_A &= \beta + \delta a + 2\lambda A > 0 \end{aligned}$$

Complementariedad estrategica (el incremento en el uso de químicos baja el producto marginal de usar plaguicidas del otro agricultor):

$$u_{aA} = U_{aA} = \delta > 0$$

5. Suponga que los individuos difieren en algún rasgo que influencia los salarios por hora y que eligen cuántas horas trabajar (h) para maximizar una función de utilidad, los argumentos de la cual son ocio (normalizado a $1-h$) y que llamamos consumo efectivo c^*, definido como su propio nivel de consumo (c) menos una constante v multimplicado por el nivel de consumo de un grupo de referencia con ingresos mayores, $\widetilde{c}$. Es conveniente pensar en cada individuo como perteneciente a un grupo de ingresos homogéneos que toma al siguiente grupo en la escala de ingresos como su grupo de referencia (el grupo más rico no tiene grupo de refencia). Conjuntamente, el grupo de referencia y la constante v (exógenos) miden la naturaleza y la intensidad de las compraciones sociales. Los individuos no ahorran, por lo que $c = wh$, donde w es la tasa salarial. Por lo tanto, para un individuo que no esté en el grupo más rico tenemos que

$$u = u(c^*, h) = u((wh - v\widetilde{c}), h)$$

donde u es creciente y cóncava en su primer argumento y decreciente y convexa en el segundo. El ocio y el consumo son complementos, por lo que $u_{c^*h} < 0$. (Nota: este caso difiere en el del punto 1. en que no es simétrico). Muestre que la externalidad del grupo de referencia es negativa y que el efecto del consumo del grupo de referencia es incrementar las horas de trabajo de los grupos menos favorecidos.

La externalidad es negativa: $u_{\widetilde{c}} = -u_c v < 0$
El efecto del consumo del grupo de referencia es incrementar las horas de trabajo de los grupos menos favorecidos. Dado que diferenciando c.r.a. $\widetilde{c}$ *no*

podemos ponerle un signo a la expresión, la solución sale simplemente de $u_{c^*h} < 0$. *Si* $\widetilde{c}$ *aumenta,* c^* *disminuye y* u_h *aumenta. Como la utilidad marginal del trabajo aumenta, los pobres eligen trabajar más.*

(2) Cumbia y Coase. Considere dos vecinos con hábitos nocturnos en conflicto con las funciones de utilidad (a uno le gusta escuchar cumbia hasta tarde y a otro le gusta acostarse temprano).

$$\begin{aligned} u &= y - \alpha(a-x)^2 \\ v &= -y - \beta(b-x)^2 \end{aligned}$$

donde α y β son constantes positivas que expresan la importancia del toque de queda en relación al ingreso en el bienestar de cada uno. Normalice la hora del toque de queda x talque $x \in [0,1]$ (piense en 0 como un toque de queda a las 6 P.M. y 1 a las 6 A.M.), y sea $a = 1/4$ y $b = 3/4$ (i.e., 9 P.M. y 3 A.M. respectivamente). Asuma que a ambos les importa igualmente la hora a la que se fija el toque de queda, $\alpha = \beta = 1$.

1. Muestre que el planificador social interesado en maximizar la suma de utilidades de los dos individuos fijará $x^* = 1/2$. (medianoche).

$$\max_x Utot = y - (a-x)^2 - y - (b-x)^2 = -(a-x)^2 - (b-x)^2$$

C.P.O

$$\begin{aligned} 2(a-x) + 2(b-x) &= 0 \\ 2a + 2b &= 4x \\ \frac{a+b}{2} &= x^* \\ x^* &= 1/2 \end{aligned}$$

Suponga ahora que el toque de queda se fija a las 3 A.M. (la hora que prefiere el "cumbiero"), y que el cumbiero puede diseñar una oferta del tipo "tómalo o déjalo" al otro individuo prometiendo (asumiremos creíblemente) apagar la música más temprano a cambio de un pago (igual a $-y$).

2. ¿Qué oferta hará el cumbiero? Explique por qué el toque de queda voluntario es idéntico al óptimo social.

$x = 3/4$

La utilidad del cumbiero (antes del pago) es $v = -(3/4 - 3/4)^2 = 0$

La utilidad del buen vecino (antes del pago) es $u = -(1/4 - 3/4)^2 = -(-1/2)^2 = -1/4$

El cumbiero va a maximizar su utilidad eligiendo el y *y el* x *tal que* $u = -1/4$. *Su problema de maximización es*

$$\max_{x,y,\lambda} L = -y - (3/4 - x)^2 + \lambda\left(y - (1/4 - x)^2 + 1/4\right)$$

C.P.O.

$$
\begin{aligned}
(1)\frac{\partial L}{\partial x} &= 2(3/4-x)+\lambda\left(2\left(1/4-x\right)\right)=0 \\
(2)\frac{\partial L}{\partial y} &= -1+\lambda=0 \\
(3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y-\left(1/4-x\right)^2+1/4=0
\end{aligned}
$$

De (2) sabemos que $\lambda = 1$. *Sustituyendo en (1) obtenemos* $x = \frac{1}{2}$. *Sustituyendo en (3) obtenemos* $y = -\frac{3}{16}$

El toque de queda voluntario es idéntico al óptimo social porque en $x = 3/4$ *la desutilidad marginal de disminuir el toque de queda para el cumbiero es* $2(3/4-3/4) = 0$ *porque está en su óptimo, pero la utilidad marginal de hacerlo para el buen vecino es* $2\left(1/4-3/4\right) = -1$. *Por lo tanto habrá posibilidad de negociar hasta que ambas utilidades marginales sean iguales, cosa que sucede en el óptimo, a partir de donde el buen vecino ya no podrá compensar al cumbiero porque la utilidad marginal de bajar el toque de queda para el primero es menor que la desutilidad marginal de hacerlo para el cumbiero.*

3. Explique por qué, si se hubiera fijado el toque de queda incial en 1/4 (la hora preferida por el "buen vecino") el resultado x de la negociación Coaseana hubiera sido el mismo que resulta de la hora del cumbiero o el óptimo del planificador social.

Hubiera sido el mismo porque el argumento anterior es idéntico. La negociación "para" en $x = 1/2$.

Si $x = 1/4$, *la utilidad del cumbiero (antes del pago) es* $v = -(3/4-1/4)^2 = -1/4$ *y la utilidad del buen vecino (antes del pago) es* $u = -(1/4-1/4)^2 = 0$. *El buen vecino resolvería el problema*

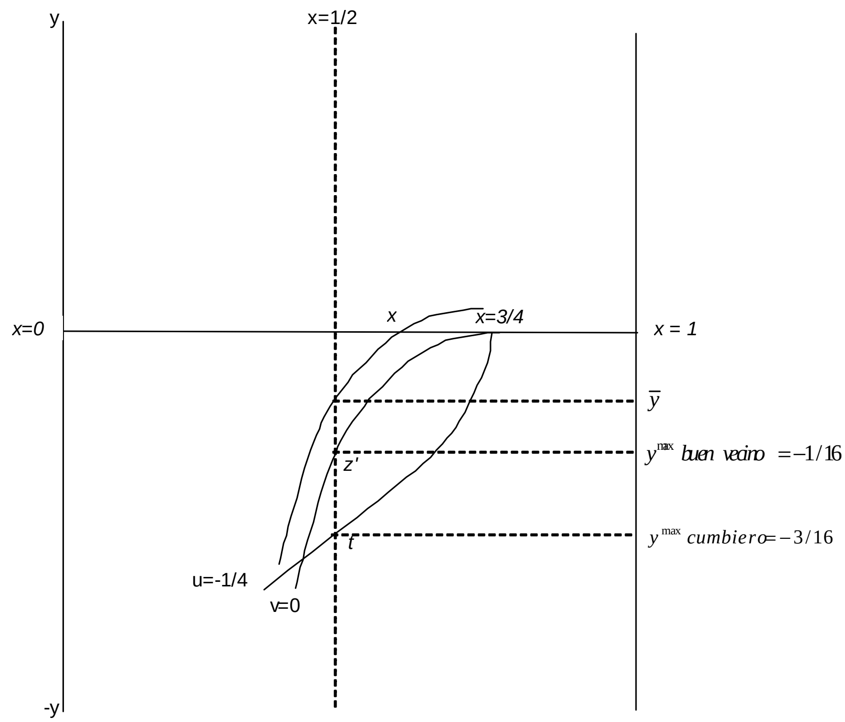
$$\max_{x,y,\lambda} L = y-\left(1/4-x\right)^2+\lambda\left(-y-(3/4-x)^2+1/4\right)$$

C.P.O.

$$
\begin{aligned}
(1)\frac{\partial L}{\partial x} &= 2\left(1/4-x\right)+\lambda\left(2(3/4-x)\right)=0 \\
(2)\frac{\partial L}{\partial y} &= 1+-\lambda=0 \\
(3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -y-\left(3/4-x\right)^2+1/4=0
\end{aligned}
$$

De (2) sabemos que $\lambda = 1$. *Sustituyendo en (1) obtenemos* $x = \frac{1}{2}$. *Sustituyendo en (3) obtenemos* $y = \frac{3}{16}$. *La única diferencia es que ahora el cumbiero le tiene que pagar al buen vecino.*

Asuma que el buen vecino tiene recursos limitados y no puede hacer un pago al cumbiero que supere $y^{\max}$.



4. ¿Cuál es el menor valor de $y^{\max}$ que induce al cumbiero a implementar el óptimo social asumiendo, como arriba, que él está en condiciones de hacer un oferta "tómalo o déjalo"?.

*La situación inicial sigue siendo $x = 3/4$, $v = 0$ y $u = -1/4$. Si el cumbiero está en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo" va a exigir aquel y tal que $u = y - (1/4 - 1/2)^2 = -1/4$. La solución es $y = -\frac{3}{16}$,*la misma que antes. (*Notar que esto no es lo mínimo que estaría dispuesto a aceptar el cumbiero bajo otras normas de negociación. De hecho esta cantidad es la máxima que le puede extraer al buen vecino. El punto t de la gráfica de abajo)*

5. Asuma ahora que es el buen vecino en lugar del cumbiero el que está en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo. (El toque de queda oficial es todavía 3 A.M.). ¿Cuál es el mayor valor de $y^{\max}$ que el buen vecino ofrecerá pagarle al cumbiero para que se implemente el óptimo social? ¿Por qué sus respuestas a esta punto y al anterior difieren?

El pago máximo que el buen vecino ofrecerá siendo el que tiene todo el poder de negociación es aquel que deja al cumbiero indiferente entre $x = 3/4$ sin pago *y $x = 1/2$ con pago. Es decir, el y tal que $v = -y - (3/4 - 1/2)^2 = 0$. La solución es $y = -\frac{1}{16}$. Este es un punto como el punto z' del gráfico de arriba.*

Las respuestas a este punto y al otro difieren porque en el primer caso el que tiene el poder de negociación es el cumbiero y como mínimo va a aceptar aquel $-y$ que lo deje en el nivel de utilidad preferido (el actual, cuando $x = 3/4$). Le va a extraer todo el excedente al buen vecino. En cambio en el segundo caso sucede lo contrario. Es el buen vecino el que está en condiciones de sacarle todo el excedente de la negociación al cumbiero.

Suponga que la cantidad de dinero que tiene el buen vecino para hacerle un pago al cumbiero es positiva pero demasiado pequeña como para hacer posible una negociación entre ambos que resulte en el toque de queda óptimo.

6. Muestre que existe algún toque de queda oficial (más temprano que 3 A.M. pero más tarde que el óptimo social) que, si impuesto por el planificador social, permitiría que la negociación entre ambos de acuerdo a una de las reglas de arriba resultara en la implementación del óptimo social.

La letra nos dice que el ingreso del buen vecino es inferior a cualquier pago que él le pueda hacer al cumbiero bajo cualquier institución que gobierne la negociación. Esto quiere decir que el ingreso del buen vecino es menor $y^{\max}$ que él ofrecería si estuviera en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo". Esto es, el ingreso del vecino es menor a 1/16. Dado esto, ¿cuál tiene que ser el valor de x fijado por el regulador para que, suponiendo que el buen vecino es el que hace la oferta "tómalo o déjalo" (este va a ser el x más alejado de 1/2 que pueda fijar el regulador), el cumbiero la acepte y se fije $x = 1/2$? En este valor de x el nivel de utilidad del cumbiero es $v(x, y) = v(x, 0)$. En el punto en que el buen vecino le da todo su ingreso para que el cumbiero acepte apagar la música a medianoche se da que $v(x, y) = v(1/2, \overline{y})$, donde $\overline{y}$ es el nivel de ingresos del buen vecino (ver gráfico arriba). Tenemos entonces:

$$v(x, 0) = -(3/4 - x)^2 = -\overline{y} - 1/16 = v(1/2, \overline{y})$$

de donde sale

$$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{16\overline{y} + 1}$$

7. ¿Por qué el planificador social más la negociación Coaseana logran conjuntamente lo que la negociación Coaseana no puede lograr sola en este caso?

Porque con la negociación coaseana el óptimo queda fuera del set de negociación posible (porque el vecino es pobre). Lo que hace el planificador social es cambiar las normas (los derechos de propiedad) para inlcuir el óptimo dentro del set.