SOLUCIÓN PRACTICO N° 3

EJERCICIO 1

Función de Producción: $Q = f(L)$, $f_L > 0$, $f_{LL} < 0$.
Función de Utilidad: $u = u(L, y)$, $u_L < 0$, $u_y > 0$, $u_{LL} > 0$, $u_{yy} < 0$

1.1. Si el agricultor es el demandante residual de su cultivo va a elegir el trabajo que maximiza su utilidad

$$\max_L u = u(L, f(L))$$

Las condición de primer orden de su problema será

$$u_L + u_y f'(L) = 0$$

o

$$\boxed{f'(L) = -\tfrac{u_L}{u_y}}$$

lo que implícitamente define L^{DR}, el nivel de empleo del agricultor cuando es demandante residual.

1.2. En este caso (trabajo contratable) el dueño de la tierra que contrata al agricultor maximizará su beneficio:

$$\max_{L,w} f(L) - wL$$
$$s.a. u(L, wL) = z$$

El Lagrangeano de este problema es

$$Lg = f(L) - wL + \lambda\left[u(L, wL) - z\right]$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\begin{aligned}
(i)\frac{\partial Lg}{\partial L} &= f'(L) - w + \lambda\left(u_L + u_y w\right) = 0 \\
(ii)\frac{\partial Lg}{\partial w} &= -L + \lambda u_y L = 0 \\
(iii)\frac{\partial Lg}{\partial \lambda} &= u(L, wL) - z = 0
\end{aligned}$$

De (ii) sabemos que $\lambda = 1/u_y$. Sustituyendo en (i) obtenemos

$$\boxed{f'(L) + u_L/u_y = 0}$$

. La condición es la misma a la del punto anterior y por lo tanto el contrato que ofrecerá el dueño de la tierra implementará el mismo nivel de trabajo.

1.3. $y = sQ$
1.3.1 Ahora el agricultor

$$\max_{L} u = u(L, sf(L))$$

Su condición de primer orden será:

$$u_L + u_y sf'(L) = 0$$

O

$$\boxed{f'(L) = -\frac{u_L}{su_y}}$$

lo que define implicitamente $L^s = L(s)$

1.3.2. Si el dueño de la tierra mueve primero resolverá el siguiente problema

$$\max_{s} f(L(s)) - sf(L(s)) = \boxed{(1-s)f(L(s))}$$

1.3.3. La CPO de este problema es:

$$-f(L(s)) + (1-s)f_L L'(s) = 0$$

O

$$\boxed{f(L(s)) = (1-s)f_L L'(s)}$$

1.3.4 Comparamos el nivel de trabajo cuando es demandante residual, L^{DR}, con el nivel de trabajo en aparcería, L^A. Para hacerlo comparamos ambas condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} f'(L^{DR}) &\equiv -\frac{u_L}{u_y} \\ f'(L^A) &\equiv -\frac{u_L}{su_y} \end{aligned}$$

Dado que $s \in (0,1)$, $f'(L^{DR}) < f'(L^A)$. Dado que $f_{LL} < 0$ esto implica que $L^{DR} > L^A$. El nivel de trabajo es mayor cuando el campesino es demandante residual de lo que produce.

1.3.5 La única forma de que el agente (el campesino) implemente el nivel eficiente de trabajo es hacerlo demandante residual de su esfuerzo. Reconociendo esto el único contrato que el dueño de la tierra podrá escribir para que esto suceda es aquel que establece una renta fija de la tierra, independiente del nivel de producción. En este caso el campesino maximizará una función de utilidad de la forma $u(L, f(L) - R)$, donde R es la renta fija que debe pagar por usar la tierra. Es fácil ver que esta constante desaparecerá al derivar y la CPO será la que implementa L^{DR}.

1.4. (i) La alternativa es aparcería: Sea X lo máximo que el dueño de la tierra va a pagar para alquilar el dispositivo, $X = \pi_{contratable} - \pi_{aparcería} = f(L^{DR}) - wL^{DR} - (1-s)f(L^s)$

1.4. (ii) La alternativa es el contrato eficiente del punto 3.5. Lo máximo que va a estar dispuesto a pagar el dueño por el dispositivo es $X = \pi_{contratable} - R = f(L^{DR}) - wL^{DR} - R$

EJERCICIO 2

2.1.

$$\begin{aligned} Q &= \alpha a - k \\ y &= Q \\ & \max_a u(a, \alpha a - k) \end{aligned}$$

CPO

$$\boxed{u_a + u_y \alpha = 0}$$

2.2. En este caso,

$$\begin{aligned} Q &= \alpha \sum a_i - k \\ y &= Q/n \\ & \max_{a_i} u_i(a_i, \alpha \sum a_i - k) \end{aligned}$$

CPO

$$\boxed{u^i_{a_i} + u^i_{y_i} \tfrac{\alpha}{n} = 0}$$

2.3. Cuando $n = 2$ el óptimo de Pareto puede ser caracterizado por la solución del siguiente problema

$$\max_{a_1, a_2, y_1, y_2} u^1(a_1, y_1)$$
$$s.a.$$
$$u^2(a_2, y_2) = \overline{u}^2 = z$$
$$y_1 + y_2 = \alpha(a_1 + a_2) - k$$

El lagrangeano de este problema es:

$$L = u^1(a_1, y_1) + \lambda \left[u^2(a_2, y_2) - z\right] + \beta \left[y_1 + y_2 - \alpha(a_1 + a_2) + k\right]$$

CPO:
(*i*) $\frac{\partial L}{\partial a_1} = u^1_{a_1} - \alpha\beta = 0$
(*ii*) $\frac{\partial L}{\partial a_2} = \lambda u^2_{a_2} - \alpha\beta = 0$
(*iii*) $\frac{\partial L}{\partial y_1} = u^1_{y_1} + \beta = 0$
(*iv*) $\frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda u^2_{y_2} + \beta = 0$
(*v*) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$
(*vi*) $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$

(*i*) y (*iii*) implican $u^1_{a_1} + u^1_{y_1}\alpha = 0$, mientras que (*ii*) y (*iv*) implican $u^2_{a_2} + u^2_{y_2}\alpha = 0$. Por lo tanto podemos establecer las CPO para un OP como

$$\boxed{-\frac{u^1_{a_1}}{u^1_{y_1}} = -\frac{u^2_{a_2}}{u^2_{y_2}} = \alpha}$$

En el caso del equilibrio de Nash con $y_i = Q/2$, la persona 1

$$\max_{a_1} u^1(a_1, \frac{\alpha(a_1 + a_2) - k}{2})$$

CPO

$$u^1_{a_1} + u^1_{y_1}\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\boxed{-\frac{u^1_{a_1}}{u^1_{y_1}} = \frac{\alpha}{2}}$$

La persona 2 resuelve un problema idéntico, por lo que en el Equilibrio de Nash tendremos

$$-\frac{u^1_{a_1}}{u^1_{y_1}} = -\frac{u^2_{a_2}}{u^2_{y_2}} = \frac{\alpha}{2}$$

Es facil ver que en el EN se violan las CPO del OP.

2.4.1 En este caso,

$$y = \alpha \sum a_i - k - c$$

por lo que cada miembro del equipo resuelve el siguiente problema

$$\max_{a_i} u_i(a_i, \alpha \sum a_i - k - c)$$

CPO

$$u^i_{a_i} + u^i_{y_i}\alpha_i = 0$$

esto es cierto para todo i, por lo que, si, por ejemplo, $n = 2$, se cumplirá que $-\frac{u^1_{a_1}}{u^1_{y_1}} = -\frac{u^2_{a_2}}{u^2_{y_2}} = \alpha$. El contrato implementará el OP.

2.4.2 Lo especial del contrato es que deja a los trabajadores como demandantes residuales de su esfuerzo. Por lo que éstos implementan el nivel de esfuerzo del OP.

2.4.3 Un empleador que maximice beneficios elegirá el c que le deja a él todo el excedente:

$$u^i(a_i, Q - c) = z$$

EJERCICIO 3

3.1.1. Definimos $\overline{y} = Y\pi(e) + y[1 - \pi(e)]$ como el beneficio esperado. Como $\pi(e) = e$, $\overline{y} = Ye + y - ye$. La función de utilidad del agente es $u(\overline{y}, e) = \overline{y} - e^2 = Ye + y - ye - e^2$.Cuando el agente maximiza su utilidad respecto a e su CPO es

$$\boxed{Y - y - 2e = 0}$$

3.1.2. Por lo tanto el e que maximiza la utilidad cuando es dueño

$$\boxed{e^{\max} = \tfrac{Y-y}{2}}$$

3.2.1.

$$u = We + (1 - e)w - e^2 + z$$

CPO

$$W - w - 2e = 0$$

$$\boxed{e = \tfrac{W-w}{2}}$$

Esta es la función de mejor respuesta del agente.

3.2.2. El empleador minimiza

$$\frac{W + w}{e}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$e = \frac{W - w}{2}$$

O sea que minimiza

$$\frac{2(W + w)}{(W - w)}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{2(W - w) + 2(W + w)}{(W - w)^2}$$

Esta expresión es mayor que 0 para todo w. Por consiguiente, el empleador va a querer fijar el w más bajo que pueda. El agente no va a aceptar un w tal que su utilidad sea menos que la utilidad de reserva, cero. Igualando a cero la utilidad esperada del agente y sustituyendo e por su fmr, obtenemos $\boxed{w = -z}$. Como sucede que el agente pierde su riqueza si no llega a un acuerdo con el empleador, éste le fijará w, la "paga" en el estado malo tal que en este estado también pierde toda su riqueza.

3.3. La restricción de participación del agente es

$$u = We + (1-e)w - e^2 + z \geq 0$$

Sustituyendo $w = -z$

$$\begin{gathered} We + (1-e)(-z) - e^2 + z \geq 0 \\ e(W+z) \geq e^2 \\ \boxed{W + z \geq e} \end{gathered}$$

3.4.1

$$\begin{aligned} \max_W B(W) &= eY + (1-e)y - eW - (1-e)w \\ \text{s.a. } e &= \frac{W-w}{2} \end{aligned}$$

O

$$\max_W B(W) = \left(\frac{W-w}{2}\right) Y + (1 - \frac{W-w}{2})y - \frac{W-w}{2}W - (1 - \frac{W-w}{2})w$$

CPO:

$$B'(W) = \frac{Y}{2} - \frac{y}{2} - W + w = 0$$

3.4.2

$$\boxed{W^* = \tfrac{Y-y}{2} + w}$$

Dado que $w = -z$

$$\boxed{W^* = \tfrac{Y-y}{2} - z}$$

3.4.3 $e^* = \frac{Y-y}{4}$

3.4.4

$$\begin{gathered} W^* + z \geq e^* \\ \frac{Y-y}{2} - z + z \geq \frac{Y-y}{4} \\ \frac{Y-y}{2} > \frac{Y-y}{4} \end{gathered}$$

Se cumple.

3.4.5 Cuando el agente es dueño del proyecto $e^{\max} = \frac{Y-y}{2}$. El nivel del esfuerzo es el doble de cuando no es el dueño.

3.5. Acabamos de ver que $e^* < e^{\max}$, por lo que el esquema de pagos del principal no implementa el OP $e^{\max}$. La razón es que el dueño del proyecto se queda con todo el excedente. Siendo e costoso para el agente, esto implica que el beneficio marginal del esfuerzo se iguala al costo marginal de esfuerzo para un nivel de e menor.

3.6. No porque $e = \frac{Y-y}{4}$, lo que no depende de z.

3.7. Este punto es similar al punto 3.5 del ejercicio 1. Por lo tanto, siendo el agente el demandante residual de Y e y, el principal debe fijar una renta fija. Esto es cierto siempre que y no sea menor a $-z$, ya que en ese caso el agente no será el demandante residual completo de las pérdidas. En este caso elegirá un nivel ineficiente de esfuerzo. Todavía tendremos un contrato "incompleto". El principal no ofrecerá un contrato de este tipo en este caso.

3.8. Cuanto más grande sea z, mayores serán las pérdidas que podrá soportar el agente si el proyecto saliera mal. Asimismo, como

$$W^* = \frac{Y-y}{2} - z$$

cuanto mayor sea z, menor sera el salario que el principal le deberá pagar al agente en el estado bueno para inducirlo a realizar el mismo esfuerzo. Por esto, el principal preferirá hacer negocios con los agentes ricos.