Solución Práctico 1

EJERCICIO 1
i) *Dilema del Prisionero*:
(a) Matriz de beneficios (ejemplo)

		Capitalista	
		Invertir	No invertir
Trabajador	Trabajar duro	$4, 4$	$1, 6$
	No trabajar duro	$6, 1$	$2, 2 \leftarrow EN$

(b) (No trabajar duro, No invertir) es el único Equilibrio de Nash en este juego. Es el único de los 4 resultados posibles en el cuál ambos están respondiendo de la mejor manera, dado lo que está haciendo el otro. Es además, un equilibrio en estrategias dominantes: No trabajar duro es una estrategia dominante para el trabajador: Si el empresario invierte, al trabajador le conviene no trabajar duro, y ganar 6, antes que trabajar duro y ganar 4. Si el empresario no invierte, al trabajador le conviene no trabajar duro y ganar 2 , antes que trabajar duro y ganar 1. Por la misma razón, ya que el juego es simétrico, al empresario le conviene no invertir, cualquiera sea la estrategia que adopte el trabajador.

(c) Los restantes tres resultados del juego [(Trabajar duro, Invertir), (Trabajar duro, No invertir) y (No trabajar duro, Invertir)] son óptimos de Pareto.

(d) y (e) Ninguno de ellos es un equilibrio.

(f) Existe un **único Equilibrio de Nash en estrategias dominantes** (No trabajar duro, No invertir) **que es Pareto-inferior** a (Trabajar duro, Invertir).

(ii) *Juego de Certeza*:

(a) Matriz de beneficios (ejemplo):

		Capitalista	
		Invertir	No invertir
Trabajador	Trabajar duro	$4, 4$	$1, 3$
	No trabajar duro	$3, 1$	$2, 2$

(b) En este caso hay 2 equilibrios de Nash: (Trabajar duro, Invertir) y (No trabajar duro, No invertir)

(c) (Trabajar duro, Invertir) es el único Óptimo de Pareto.

(d) No hay equilibrios en estrategias dominantes.

(e) (Trabajar duro, Invertir)

(f) Existen dos EN, uno de los cuales es el único Óptimo de Pareto. El otro es por ende Pareto Inferior.

iii) *Juego del Halcón y la Paloma*:

(a) Matriz de beneficios (ejemplo):

		Capitalista	
		Invertir	No invertir
Trabajador	Trabajar duro	$2, 2$	$0, 4$
	No trabajar duro	$4, 0$	$-1, -1$

(b) Los equilibrios de Nash son aquellos en los que los individuos adoptan estrategias dispares (Trabajar duro, No invertir) y (No trabajar duro, Invertir).

(c) (Trabajar duro, No invertir), (Trabajar duro, Invertir) y (No trabajar duro, Invertir) son Óptimos de Pareto).

(d) No. No hay estrategias dominantes en un juego HP.

(e) (Trabajar duro, No invertir) y (No trabajar duro, Invertir).

(f) Un juego HP es un juego en que existen dos EN (cuando adoptan estrategias dispares) que también son óptimos de Pareto. existe también otro OP que no es un equilibrio.

EJERCICIO 2

a)

		Persona 1	
		Concurrir	No concurrir
Persona 2	Concurrir	$-0,5, -0,5$	$2, 0$
	No concurrir	$0, 2$	$0,5, 0,5$

b) Este es un Juego Halcón-Paloma. Notar que los equilibrios de Nash del juego (que son también los óptimos de Pareto) son aquellos en los que los jugadores adoptan estrategias contrarias.

c) No, hay dos equilibrios de Nash, los resultados en donde uno concurre y el otro no. Para verlo: si 1 concurre, a 2 le conviene no concurrir (gana 0 en lugar de perder 0,5 si concurre). Si 1 no concurre, a 2 le conviene concurrir (gana 2 en lugar de 0,5 si no concurre).

d) Bajo estas condiciones no hay una manera racional de actuar. No hay ninguna estrategia que sea dominante y no hay forma de saber qué va a hacer la otra persona.

EJERCICIO 3

a) Es un DP. El equilibrio de Nash en estrategias dominantes (Abajo, Derecha) es único, y es Pareto-inferior.

b)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$15, 15$	$10, 14$
Abajo	$14, 10$	$12, 12$

Esta matriz transformada que describe los beneficios de los individuos cuando a estos les interesa no sólo su propio beneficio sino también el del otro (en un 50% menos que el propio), describe un **juego de la certeza**. Hay dos equilibrios de Nash [(Arriba,Izquierda) y (Abajo, Derecha)], el primero de los cuales es Pareto superior.

c)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$0, 0$	$-8, 8$
Abajo	$8, -8$	$0, 0$

Notar que, en este caso, la estrategia "Abajo" es una estrategia dominante para el jugador fila y que la estrategia "Derecha" es una estrategia dominante para el jugador Columna. (Comprobarlo). Por lo tanto el resultado (Abajo,Derecha) es el equilibrio de Nash de este juego, el cual es Pareto óptimo, al igual que cualquiera de los cuatro resultados posibles. Dada la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias dominantes, que es Pareto óptimo podríamos decir que es un juego del tipo de la **Mano Invisible**, a excepción de que existen otros resultados posibles en que individualmente uno de los dos jugadores podría estar mejor (esto no sucedía en el ejemplo del texto, en donde cuando uno plantaba tomates y el otro papas ambos obtenía el mayor beneficio individual posible).

d)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$10, 10$	$0, 8$
Abajo	$8, 0$	$8, 8$

Este en un **Juego de la certeza**. Notar que hay dos resultados que son equilibrios de Nash [(Arriba, Izquierda) y (Abajo,Derecha)]. Notar también que el resultado (Arriba, Izquierda) es Pareto-superior al (Abajo, Derecha). Como todo juego de coordinación, no hay una manera de jugarlo si los jugadores no pueden saber lo que va a hacer el otro a priori. No hay una manera racional de jugarlo si es un juego no-cooperativo, por más que parezca "obvio" que el fila tiene que jugar Arriba y el Columna tiene que jugar Izquierda, y por más que en la realidad, si hacemos un experimento entre dos individuos que no se connocen ni se van a ver, pero conocen la matriz, estos muy probablemente juegan Arriba e Izquierda.

e)

	Izquierda	Derecha
Arriba	$20, 20$	$16, 16$
Abajo	$16, 16$	$16, 16$

Este es un juego que es tipo un Juego de la **Mano Invisible** en estrategias débilmente dominantes. Arriba es débilmente dominante para fila, al igual que lo es Izquierda para Columna. Éste equilibrio de Nash en estrategias (débilmente) dominantes es el único óptimo de Pareto.

Estrictamente hablando, también se podría definir como un Juego de la Certeza.

EJERICIO 4

a) Una estrategia A es una EEE contra otra estrategia B si y solo si

$$\pi(A, A) > \pi(B, A) \text{ o si}$$

$$\begin{aligned} \pi(A, A) &= \pi(B, A) \text{ pero} \\ \pi(A, B) &> \pi(B, B) \end{aligned}$$

b) Usando las matrices de pagos del Ejercicio 1:

Dilema del Prisionero:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	$4, 4$	$1, 6$
No cooperar	$6, 1$	$2, 2$

Obviamente, la única EEE es No cooperar porque Cooperar no es una mejor respuesta contra Cooperar, mientras que No cooperar es una mejor respuesta contra No cooperar (es una estrategia dominante, es más).

Juego de Aseguramiento:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	$4, 4$	$1, 3$
No cooperar	$3, 1$	$2, 2$

En este caso, ambas son EEE ya que siempre es mejor respuesta jugar lo mismo que el otro.

Juego del Halcón y la Paloma

	Paloma	Halcón
Paloma	$3, 3$	$0, 6$
Halcón	$6, 0$	$-1, -1$

En este caso no hay ninguna EEE ya que nunca es una mejor respuesta jugar la misma estrategia que el otro. Siempre es mejor jugar la estrategia contraria.

c) Una estrategia A es viable evolutivamente contra otra estrategia B, si individuos que jueguen A pueden invadir una población de Bs. O sea que viabilidad evolutiva es lo contrario que EEE. Por lo tanto, diremos que una estrategia A es evolutivamente viable contra otra estrategia B si y solo si

$$\pi(A, B) > \pi(B, B) \text{ o si}$$

$$\begin{aligned} \pi(A, B) &= \pi(B, B) \text{ pero} \\ \pi(A, A) &> \pi(B, A) \end{aligned}$$

d) Como los conceptos de EEE y estrategia incialmente viable son "inversos" es fácil ver que las estrategias EE no pueden ser invadidas por lo tanto la otra estrategia no es inicialmente viable, y las estrategias que no son EE pueden ser invadidas, por lo tanto las otras son inicialmente viables. Por ejemplo, en el DP habíamos visto que No cooperar era EEE, por lo tanto no puede ser invadida por Cooperar, por lo tanto Cooperar no es incialmente viable. Por la misma razón, en un Juego de Aseguramiento ninguna es inicialmente viable, y en el juego de Halcone y Paloma ambas son inicialmente viables.

EJERCICIO 5

a) Los dos halcones se pelean por una presa o un premio que tiene valor v. El costo de la pelea es $1/2c$ para cada uno. Como un halcón gana con probabilidad $1/2$, el valor esperado de la pelea es $1/2(v - c)$.

b) El beneficio esperado para una Halcón es:

$$b_H(p) = p[1/2(v - c)] + (1 - p)v = v - 1/2p(v + c)$$

El beneficio esperado de un Paloma es

$$b_D(p) = p \times 0 + (1 - p)v/2 = (1 - p)v/2$$

c)

$$b_H(v/c) = v - 1/2v/c(v + c) = v - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}$$
$$b_D(v/c) = (1 - \frac{v}{c})\frac{v}{2} = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c}$$

d) $p = v/c$ es un equilibrio estable si $\frac{\partial \Delta p}{\partial p} < 0$. El signo de $\frac{\partial \Delta p}{\partial p}$ depende del signo de $\frac{\partial [b_H - b_D]}{\partial p}$. Por lo tanto tenemos que investigar si $\frac{\partial [b_H - b_D]}{\partial p} < 0$.

$$\frac{\partial [b_H - b_D]}{\partial p} = \frac{\partial [v - 1/2p(v + c)]}{\partial p} - \frac{\partial [(1 - p)v/2]}{\partial p}$$

$$= -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}c < 0$$

Por lo tanto $p^* = v/c$ es un equilibrio estable.

No existe ningún otro equilibrio estable.

e) Para probar que esta estrategia mixta (a la que llamaremos M) es una EEE debemos ver si M es una mejor respuesta contra si misma.

$$\pi\left(M, M\right) = f\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right] + (1-f)\left[f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}\right]$$

$$\frac{f^2}{2}(v-c) + (1-f)v + (1-f)^2\frac{v}{2} = \frac{f^2}{2}(v-c) + (1-f)v\left[\frac{3}{2} - \frac{f}{2}\right]$$

Por su parte, los beneficios de jugar H y D contra M son:

$$\pi(H, M) = f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v$$

$$\pi(D, M) = f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}$$

$\pi(M, M) > \pi(H, M)$ sí y sólo sí

$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right] + (1-f)\left[f \times 0 + (1-f)\frac{v}{2}\right] > f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v$$

$$(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > (1-f)\left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right]$$

$$\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{1}{2}(v-c) + (1-f)v\right]$$

$$\left[-(1-f)\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{1}{2}(v-c)\right]$$

$$\left[-\frac{v}{2} + f\frac{v}{2}\right] > \left[f\frac{v}{2} - f\frac{c}{2})\right]$$

$$\left[-\frac{v}{2}\right] > \left[-f\frac{c}{2})\right]$$

$$[-v] > [-fc]$$

$$[v] < [fc]$$

$$\frac{v}{c} < f$$

$\pi(M,M) > \pi(D,M)$ sí y sólo sí

$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right]+(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right] > (1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right] > (1-f)\frac{v}{2}-(1-f)\left[(1-f)\frac{v}{2}\right]$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)v\right] > f(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)\right] > f(1-f)\frac{v}{2}-f(1-f)v$$
$$f\left[f\frac{1}{2}(v-c)\right] > -f(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f\frac{1}{2}(v-c) > -(1-f)\frac{v}{2}$$
$$f(v-c) > -(1-f)v$$
$$fv-fc > -v+fv$$
$$-fc > -v$$
$$f < \frac{v}{c}$$

Obviamente, las dos cosas no pueden ser al mismo tiempo, por lo que esta estrategia mixta no puede ser una EEE contra D y H al mismo tiempo. Sin embargo, nos queda averiguar qué pasa cuando $f = v/c$. Cuando $f = v/c$,

$$\pi(H,M) = \frac{v}{c}\frac{1}{2}(v-c)+(1-\frac{v}{c})v = \frac{1}{2c}v\,(c-v)$$

$$\pi(D,M) = (1-\frac{v}{c})\frac{v}{2} = \frac{1}{2c}v\,(c-v)$$

O sea que cuando $f = v/c, \pi(H,M) = \pi(D,M)$. Como $\pi\,(M,M) = f\,[\pi(H,M)]+ (1-f)\,[\pi(D,M)]\,,\ \pi(M,M) = \pi(H,M) = \pi(D,M)$. Por lo tanto, para que M sea una EEE se tiene que cimplir que (la segunda defición de EEE) si $\pi(M,D) > \pi(D,D)$ y $\pi(M,H) > \pi(H,H)$, cuando $f = v/c$,entonces M es una EEE.

$$\pi(M,H) > \pi(H,H) \text{ implica}$$
$$f\frac{1}{2}(v-c)+(1-f)\times 0 > \frac{1}{2}(v-c)$$
$$f\frac{1}{2}(v-c) > \frac{1}{2}(v-c)$$
$$f < 1 \text{ porque } \frac{1}{2}(v-c) \text{ es un número negativo}$$

$$\pi(M, D) > \pi(D, D)$$
$$fv + (1 - f)\frac{v}{2} > \frac{v}{2}$$
$$fv + \frac{v}{2} - f\frac{v}{2} > \frac{v}{2}$$
$$f\frac{v}{2} > 0$$
$$f > 0$$

Conclusión, cuando $f = v/c$, M es una EEE.