9. Aversidad a la Inequidad y Reciprocidad (Cap.3)

Considere un individuo i que interactúa con un sólo individuo j. Las preferencias de i están dadas por

$$U_i = \pi_i - \delta_i \max(\pi_j - \pi_i, 0) - \alpha_i \max(\pi_i - \pi_j, 0)$$

con π_i y π_j siendo los ingresos o riqueza material de ambos individuos y $\delta_i \geq \alpha_i$ y $\alpha_i \in [0,1]$.

(a) Ahora suponga que $\delta_i = 3/4$ y $\alpha_i = 1/2$. ¿Cuánto sería la oferta más chica que este individuo i aceptaría en un Juego Ultimatum que divide \$1? Justifique su respuesta.

Cuando el individuo i rechaza la oferta su utilidad es 0. *Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar es aquella que le reporta* 0 *de utilidad. Cuando* $\alpha_i = 1/2$, $U_i = 1/2$ *para todo* $\pi_i - \pi_j > 0$. *La utilidad de i no alcanzará cero si él es el más beneficiado con la oferta, no importa cuán beneficiado sea. Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar la encontraremos cuando la oferta lo desfavorece:* $\pi_j - \pi_i > 0$. *En este caso*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(\pi_j - \pi_i)$$

Haciendo uso de $\pi_i + \pi_j = 1$, *y operando*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(1 - 2\pi_i) = \frac{5}{2}\pi_i - \frac{3}{4}$$

Se puede ver claramente que si la oferta lo desfavorece $(\pi_j - \pi_i > 0)$, *el individuo i estará mejor cuanto mayor su tajada* π_i. *Llamando* $\pi_i^{\min}$ *a la oferta mínima que i aceptará, por lo dicho arriba se debe cumplir que*

$$U_i = \frac{5}{2}\pi_i^{\min} - \frac{3}{4} = 0$$
$$\pi_i^{\min} = \frac{3}{10}$$

Parte II: Reciprocidad

Dos individuos están considerando contribuir con su esfuerzo personal e_i y e_j, ambos $\in [0,1]$, a un proyecto común cuyo producto es $e_i + e_j$, el cuál se repartirá en partes iguales entre ambos individuos. Las preferencias del individuo i son descritas por la siguiente función de utilidad

$$U_i = \pi_i + \beta_{ij}\pi_j$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{a_i + \lambda_i a_j}{1 + \lambda_i}$$

con a_i y $a_j \in [-1,1]$ y $\lambda_i \geq 0$. El parámetro a_i es el nivel incondicional de buena o mala voluntad (altruismo o envidia) de i con respecto a j y

a_j es lo que i cree es el nivel de altruismo o envidia de j. Por último, λ_i es el peso que i le otorga a las creencias acerca de la voluntad de j en la importancia que le da al bienestar de j $\left(\beta_{ij}\right)$. La función de utilidad de j es idéntica (cambiando los sub-índices i por j y viceversa). Suponga que el costo subjetivo del esfuerzo, $c(e)$, es $3/4 \times e$ y $a_i = \lambda_i = 1/2$ para cada individuo. La creencia acerca de la buena voluntad del otro (a_j) es simplemente la cantidad que cada uno cree que el otro aportará de esfuerzo al proyecto. (Por ejemplo, si i piensa que j aportará 1 al proyecto, $a_j = 1$.)

(b) Identifique los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.

$$
\begin{aligned}
U_i &= \pi_i + \beta_{ij}\pi_j = \left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_i(e_i)\right] + \beta_{ij}\left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_j(e_j)\right] \\
&= \frac{e_i + e_j}{2}\left(1 + \beta_{ij}\right) - c_i(e_i) - \beta_{ij} c_j(e_j) \\
&= (e_i + e_j)\left(\frac{2}{3} + \frac{a_j}{6}\right) - \frac{3}{4}e_i - \left(\frac{2}{3} + \frac{a_j}{6}\right)\frac{3}{4}e_j \\
\frac{\partial U_i}{\partial e_i} &= \frac{2}{3} + \frac{a_j}{6} - \frac{3}{4} = \frac{-1 + 2a_j}{12}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

Si $a_j > 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i > 0$: *el individuo i pone* 1 *de esfuerzo.*
Si $a_j \leq 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i < 0$: *el individuo i pone* 0 *de esfuerzo.*

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
&Si\ a_i > 1/2,\ e_j = 1 \\
&Si\ a_i \leq 1/2,\ e_j = 0
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, los equilibrios de Nash de este juego serán:

$$
\begin{aligned}
(e_i, e_j) &= (1,1)\,,\ a_i \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,0)\,,\ a_i \text{ y } a_j \leq 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (1,0)\,,\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,1)\,,\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2
\end{aligned}
$$

(c) Indique cuáles son estables

Las elecciones de esfuerzo por parte de los individuos no dependen del nivel de esfuerzo del otro sino de las creencias de cada uno acerca del tipo de individuo que es el otro. Por lo tanto todos los equilibrios serán estables a cambios exógenos, idiosincráticos en los niveles de esfuerzo.

Podemos también estudiar la estabilidad de los equilibrios antes cambios en las creencias a_i *y* a_j*. Para cambios muy pequeños de* a_i *y* a_j *los equilibrios van* *a ser estables, excepto en el entorno de a_i y $a_j = 1/2$.En esos casos, pequeños cambios en las creencias pueden hacer que éstas pasen de ser mayores a 1/2 a ser menores a 1/2. Con lo que el equilibrio cambiaría.*

(d) De los valores críticos de las creencias iniciales a_i y a_j tal que el resultado Pareto-superior puede ser sostenido como un equilibrio de Nash.

El valor de las utilidades en cada uno de los equilibrios de Nash es:

$$(1,1) : \left\{ {U_i = \frac{5a_j+2}{24} > 0 \atop U_j = \frac{5a_i+2}{24} > 0} \right\},\ a_i \ y \ a_j > 1/2$$
$$(0,0) : \left\{ {U_i = 0 \atop U_j = 0} \right\},\ a_i \ y \ a_j \leq 1/2$$
$$(1,0) : \left\{ {U_i = \frac{4a_j-2}{24} > 0 \atop U_j = \frac{4+a_i}{24} > 0} \right\},\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2$$
$$(0,1) : \left\{ {U_i = \frac{4+a_j}{24} > 0 \atop U_j = \frac{4a_i-2}{24} > 0} \right\},\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2$$

Todos los EN son PO excepto por el $(0,0)$.

Comparando el $(1,1)$ con el $(1,0)$ (o $(0,1)$ que es lo mismo), vemos que $(1,1)$ será pareto-superior a $(1,0)$ si y solo si:

$$U_i(1,1) + U_j(1,1) = \frac{5a_j + 5a_i + 4}{24} > \frac{4a_j + a_i + 2}{24} = U_i(1,0) + U_j(1,0)$$

Ó

$$\underbrace{5a_j + 5a_i + 4}_{a_i \text{ y } a_j > 1/2} > \underbrace{4a_j + a_i + 2}_{a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es > 9, mientras que el lado derecho es $< 6,5$. Por lo tanto el EN Pareto-superior es $(e_i, e_j) = (1,1)$, lo que ocurre cuando a_i y $a_j > 1/2$.