Practico 1
2009

1. The language of Game Theory (1)

1.1 Suponga que la tabla de beneficios siguiente es la de un jugador fila en un juego simétrico entre dos personas. Indique las restricciones en el valor de estos beneficios que son necesarios y suficientes en casa caso para que el juego sea Halcón y Paloma, Dilema del Prisionero y Juego de la Certeza.

	Cooperar (Paloma)	**No – cooperar (Halcón)**
Cooperar (Paloma)	$(\mathbf{b}, \mathbf{b})$	$(\mathbf{d}, \mathbf{a})$
No – coperar (Halcón)	$(\mathbf{a}, \mathbf{d})$	$(\mathbf{c}, \mathbf{c})$

Para que este juego sea un DP se tiene que dar que

(1) $a > b > c > d$, *y de que*

(2) $a + d < 2b$, *para asegurar de que "la torta se maximiza" con la cooperación.*

Para que sea un Juego de la Certeza:

(1) $b > a$ *y* $c > d$ *(para que ambos C y NC sean una mejor respuesta contra si mismo)*

(2) $b > c$ *(para que* (C, C) *sea Pareto-superior)*

Para que sea Halcón y Paloma:

(1) $a > b$ *y* $d > c$ *(para que la mejor respuesta a uno sea el otro)*

1.2 Usando 3 matrices de beneficios separadas para los 3 juegos, envuelva en un círculo cualquier EN y subraye todos los OP.

Dilema del Prisionero

	Cooperar (Paloma)	*No – cooperar (Halcón)*
Cooperar (Paloma)	$(b, b)^{OP}$	$(d, a)^{OP}$
No – coperar (Halcón)	$(a, d)^{OP}$	$(c, c)^{EN}$

Juego de la Certeza

	Cooperar (Paloma)	*No – cooperar (Halcón)*
Cooperar (Paloma)	$(b, b)^{EN,OP}$	(d, a)
No – coperar (Halcón)	(a, d)	$(c, c)^{EN}$

Halcón y Paloma

	Cooperar (Paloma)	*No − cooperar (Halcón)*
Cooperar (Paloma)	$(b,b)^{OP}$	$(d,a)^{EN,OP}$
No − coperar (Halcón)	$(a,d)^{EN,OP}$	(c,c)

Dos agricultores consideran plantar un cultivo (Plantar) ó no plantar y en su lugar intentar robar el cultivo que plante el otro (Robar). La matriz de beneficios de este juego no cooperativo es la siguiente

Juego Plantar/Robar No-cooperativo

	Plantar	**Robar**
Plantar	**1,1**	**-1,1/2**
Robar	**1/2,-1**	**0,0**

1.3 Suponga que usted es el jugador fila y le asigna una probabilidad p a la posibilidad de que el jugador columna juegue Plantar (y $(1-p)$ a la probabilidad de juegue No plantar). ¿Cuál es el mínimo valor de p que hará que usted plante?

Beneficio esperado de plantar:

$$p \times 1 + (1-p) \times (-1) = p - 1 + p = 2p - 1$$

Beneficio esperado de robar:

$$p \times \frac{1}{2} + (1-p) \times 0 = \frac{p}{2}$$

Yo voy a plantar siempre que la primera expresión sea mayor o igual a la segunda. Por ende, el mínimo valor de p que haría que yo plantara es el que hace

$$2p - 1 = \frac{p}{2}$$

de donde

$$p^{\min} = \frac{2}{3}$$

1.4 Defina *estrategia dominante en riesgo* y *equilibrio dominante en riesgo,* y diga cuál (si alguno) de los equilibrios es dominante en riesgo.

Estrategia dominante en riesgo: aquella con menor factor de riesgo.

Equilibrio dominante en riesgo: aquel en que todos están respondiendo de la mejor manera con la estrategia dominante en riesgo.

Factor de riesgo de Plantar para Fila: 2/3

Factor de riesgo de Robar para Fila: 1/3

Factor de riesgo de Plantar para Columna: 2/3 (el juego es simétrico)

Factor de riesgo de Robar para Columna: 1/3

Equilibrio dominante en riesgo: (Robar, Robar)

2. Name de Game (Cap. 1)

A y U son dos paises linderos, cuyas fronteras están separadas por un río. El bienestar de los habitantes de cada uno de estos países depende de las acciones de los habitantes del otro país: existen externalidades negativas (contaminación transfronteriza). Suponga que cada país tiene dos estrategias posibles: Emitir o Abatir emisiones. La forma reducida de los beneficios de ambos países en función de los niveles de emisión de cada uno es $\pi^i = \pi^i(e^i, e^j)$, donde e es el nivel de emisiones (0 o 1) y los supra-índices i y j refieren a A y U.

(a) Modele este problema como un Dilema del Prisionero, Juego de Aseguramiento y Halcón y Paloma ilustrando cada una de estas posibilidades en un matriz de beneficios. Explique en cada caso por qué el juego sería una ilustración razonable de la interacción.

La matriz genérica del juego es la siguiente:

	No emitir	*Emitir*
No emitir	(b, b)	(d, a)
Emitir	(a, d)	(c, c)

Para que este juego sea un ***DP*** *se tiene que dar que*

$$(1)\ a > b > c > d$$

$$(2)\ a + d < 2b$$

Para que este juego sea un ***Juego de Aseguramiento*** *se tiene que dar que*

(1) $b > a$ y (2) $c > d$ para que haya dos equilibrios en estrategias puras

(3) $b > c$ para que uno de estos dos equilibrios Pareto-domine al otro.

Si los dos no emiten se maximiza el bienestar agregado por calidad ambiental. Si ambos emiten, ambos están peor. El ahorro de costos de abatimiento no compensa el daño por mayores emisiones. La mejor respuesta a no emitir es no emitir. Para que ello suceda, los costos de emitir (daños por contaminación) tienen que ser mayores que los beneficios de emitir (ahorro de costos de abatimiento). Las emisiones no son "rentables". La mejor respuesta a emitir es emitir. Para que ello suceda, cuando el otro emite la ecuación anterior ya no es válida. Ahora, el incremento en los daños por las emisiones propias son menores que el ahorro de costos por emitir.

Para que este juego sea un ***Juego de Halcón y Paloma*** *se tiene que dar que*

$$a > b$$

$$d > c$$

El juego puede ser una buena descripción de la interaccón siempre que se entienda que el medio ambiente es una presa y ambos países se comporten como halcones (busquen conflicto, emitan, contaminen todo el medio ambiente) *cuando el otro no y entiendan que cuando el otro emite es costos buscar conflicto y emitir y por lo tanto no lo hacen. En este caso los costos de un conflicto (netos del ahorro de costos de abatimiento) superan a los costos de no emitir (netos de los beneficios por mayor calidad ambiental).*

(b) Suponga que la función de beneficios de A tiene la forma

$$\pi^i = \alpha e^i + \beta e^j + \gamma e^i e^j$$

y que la función de U es idéntica (cambiando los supra-índices). Halle los valores de los parámetros de esta función de beneficios que hace a cada uno de los tres juegos el modelo apropiado para la interacción.

Beneficios:

$$\pi^A\left(e^A, e^B\right) = \alpha e^A + \beta e^B + \gamma e^A e^B$$
$$\pi^B\left(e^A, e^B\right) = \alpha e^B + \beta e^A + \gamma e^B e^A$$

Matriz de beneficios (A es el jugador fila)

	$e=0$	$e=1$
$e=0$	$\pi^A(0,0)=0, \pi^B(0,0)=0$	$\pi^A(0,1)=\beta, \pi^B(0,1)=\alpha$
$e=1$	$\pi^A(1,0)=\alpha, \pi^B(1,0)=\beta$	$\pi^A(1,1)=\alpha+\beta+\gamma, \pi^B(1,1)=\alpha+\beta+\gamma$

Para que este juego sea un ***DP*** *se tiene que dar que*

$$(1)\alpha > 0 > \alpha+\beta+\gamma > \beta$$
$$(2)\ \alpha+\beta < 0$$

Para que sea un ***Juego de la Certeza*** *se tiene que dar que*

$$(1)\ 0 > \alpha \text{ y } (2)\ \alpha+\beta+\gamma > \beta \text{ o lo que es lo mismo } \alpha+\gamma > 0$$
$$(3)\ 0 > \alpha+\beta+\gamma$$

Para que sea un Juego de Halcón y Paloma se tiene que dar que

$$\alpha > 0$$

$$\beta > \alpha+\beta+\gamma, \text{o lo que es lo mismo } \alpha+\gamma < 0$$

3. Monitoring and Working

3.1. Mostrar que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $\sigma = c/(2c+w)$ y $\mu = e/w$.

Hay dos formas de resolver ésto. Una es eligiendo las probabilidades que maximizan la utilidad esperada para cada jugador, dada la probabildad del otro (o, dicho de otro modo, para cualquier probabilidad que juegue el otro).

La otra forma de resolver esto es igualando los beneficios esperados de jugar ambas acciones para ambos jugadores. Esto obedece a que en un Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas, para que el empleador juegue ambas Monitorear y No Monitorear, los beneficios esperados de Monitorear tienen que ser iguales a los beneficios esperados de No Monitorear. (Teorema Fundamental de la Existencia del Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas). ¿Por qué deben ser iguales? Para verlo, suponga que no fuera cierto. Que el valor esperado de jugar Monitorear sea mayor al valor esperado de No Monitorear. En ese caso, el empleador podría incrementar los beneficios esperados de su estrategia mixta jugando cumplir con una probabilidad más alta. Por lo que, por contradicción, no estaríamos en una estrategia mixta óptima.

Empecemos por el primer caso. Los ***beneficios esperados del empleador*** *son:*

$$E(\pi_E) = \mu\left[(1-\sigma)(y-w-c)+\sigma(-c)\right]+(1-\mu)\left[(1-\sigma)(y-w)+\sigma(-w)\right]$$

Por su parte, los ***beneficios esperados del trabajador*** *son:*

$$E(\pi_T) = (1-\sigma)\left[\mu(w-e)+(1-\mu)(w-e)\right]+\sigma\left[\mu(0)+(1-\mu)(w)\right]$$

Si derivamos $E(\pi_E)$ *con respecto a* σ*, e igualamos a cero:*

$$\frac{\partial E(\pi_E)}{\partial \mu} = \left[(1-\sigma)(y-w-c)+\sigma(-c)\right]-\left[(1-\sigma)(y-w)+\sigma(-w)\right]=0$$

Notar que esta condición equivale a el beneficio esperado de Monitorear (primer término entre paréntesis cuadrados) con el de No Monitorear (segundo término). Haciendo cuentas:

$$\begin{aligned} -c+\sigma w &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^* &= \frac{c}{w} \end{aligned}$$

Notar que maximizando $E(\pi_E)$ *con respecto a* μ *obtenemos* σ^**, la estrategia mixta óptima del trabajador.*

Similarmente, derivando $E(\pi_T)$ *con respecto a* μ*, o igualando los beneficios esperados del trabajador de Trabajar con los de No trabajar, dada* σ*, obtenemos* μ^* *:*

$$\begin{aligned} \mu(w-e)+(1-\mu)(w-e) &= (1-\mu)(w) \\ \mu w - e &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}^* &= \frac{e}{w} \end{aligned}$$

3.2. *En equilibrio, el trabajador No Trabaja con probabilidad* c/w*. Es decir que, cuanto mayor el salario, menor la probabilidad que no trabaje. Obviamente,* *esto sucede porque un mayor salario aumenta el beneficio esperado de trabajar en* 1*, mientras que aumenta el de no trabajar en* $1 - \mu < 1$.

En equilibrio, la probabilidad de que el empleador opte por monitorear al trabajador es e/w*. Es decir, crece con la desutilidad del esfuerzo del trabajador,* e*. Esto sucede porque cuanto mayor* e *mayor el incentivo a no trabajar (menor el beneficio esperado de trabajar).*

3.3. *El Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas hallado es* $(\sigma^*, \mu^*) = \left(\frac{c}{w}, \frac{e}{w}\right)$*. La mejor forma de ver que el EN no es estricto es evaluando el beneficio esperado del trabajador*

$$E(\pi_T) = (1-\sigma)\left[\mu\,(w-e) + (1-\mu)\,(w-e)\right] + \sigma\left[\mu\,(0) + (1-\mu)\,(w)\right]$$

cuando $\mu^* = e/w$**:**

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma)\left[\frac{e}{w}\,(w-e) + \left(1-\frac{e}{w}\right)(w-e)\right] + \sigma\left[\left(1-\frac{e}{w}\right)(w)\right] \\
& (1-\sigma)\left[(w-e)\right] + \sigma\left[(w-e)\right] \\
E(\pi_T) \quad = \quad & w-e
\end{aligned}$$

En otras palabras, el trabajador obtendrá el mismo beneficio esperado adoptando cualquier $\sigma \in [0,1]$ *siempre y cuando el regulador adopte una probabilidad de monitoreo* $\mu^* = e/w$*. En otras palabras,* $\sigma^* = c/w$ *no es una mejor respuesta en términos estrictos a* $\mu^* = e/w$*. Es decir, el Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas hallado no es estricto.*

3.4 Por convención, si ambos pueden hacer las cuentas anteriores.