Universidad de Montevideo
Master de Economía
Solución Parcial de Microeconomía I
Prof. Marcelo Caffera

1. Bienes Públicos y Recursos de Propiedad Común

La estructura de incentivos de los problemas de bienes públicos y recursos de propiedad común es la siguiente:

Un grupo de n miembros tiene un proyecto en común. Cada miembro puede contribuir con esfuerzo al proyecto común, de lo que se benefician todos. Siendo $e_j \geq 0$ el esfuerzo puesto en el projecto por el individuo j, su función de utilidad (idéntica para todos los individuos del grupo) es

$$u_j = b \times e_j + c \times \gamma \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \right) - \delta\left(e_j\right)$$

La oferta total del bien público, γ, es creciente en la suma de las contribuciones ($\gamma' > 0$). La desutilidad del esfuerzo, $\delta\left(e_j\right)$, es creciente y convexa.

1.1 ¿Puede el individuo ser excluido de este bien? ¿Por qué?

El individuo no puede ser excluido del bien porque aún cuando contribuye $e_j = 0$ recibe un beneficio de $c\gamma > 0$.

1.2. Explique qué aspecto del modelo capta la no-rivalidad en el consumo.

El bien es no-rival porque dada la cantidad γ producida, el beneficio que recibe j (la cuota - parte de esa cantidad total producida que recibe j, c) es independiente de la cantidad de gente que lo consuma (es una constante).

1.3 ¿Qué restricción en el valor de los parámetros (es uno sólo en realidad) tiene que cumplirse para que estemos en el caso de un bien público? ¿Y para un mal público?

El bien es es un bien público si $c > 0$ y es un mal público si $c < 0$.

1.4 ¿Qué restricción en el valor de los parámetros tiene que cumplirse para que estemos en el caso de un bien privado?

$c = 0$ y $b > 0$.

1.5. Asuma que el bien es un bien público puro ($b = 0$ y $c > 0$). Demuestre que si los individuos con esta función de utilidad actúan no cooperativamente van a proveer una cantidad de bien público sub-óptima.

Asumiendo que todos los individuos son idénticos (tienen la misma función de utilidad), podemos dejar de lado los sub-índices y escribir la suma de las utilidades de todos los individuos como

$$\omega = n\left(c\gamma(ne) - \delta\left(e\right)\right)$$

Derivando con respecto a e para maximizar esta expresión obtenemos la siguiente condición: $cn\gamma' = \delta'$. Cada individuo, sin embargo, fijando e para maximizar u_j arriba, va a ir hasta que $c\gamma' = \delta'$. Esto significa que contribuye un nivel de esfuerzo menor al que maximiza la suma agregada de las utilidades *ya que esto requiere que contribuya hasta que $nc\gamma' = \delta'$. El individuo va a proveer esfuerzo hasta que la desutilidad marginal del esfuerzo sea igual a $c\gamma'$. Sin embargo, la maximización de la utilidad total requiere que el individuo ponga esfuerzo hasta el nivel en que la desutilidad marginal alcance $nc\gamma'$.Dado la desutilidad del esfuerzo es creciente y convexa, un mayor δ' equivale a un mayor e.*

1.6. Recursos Comunes: Ahora asuma que

$$u_j = s_j(e_j) \times \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) - \delta\left(e_j\right)$$

donde $s_j(e_j)$ es el porcentaje del bien que logra el individuo j. La función s es creciente en el esfuerzo y la misma para todos los individuos. La función γ es ahora creciente y luego decreciente en su argumento. Demuestre que si los individuos con esta función de utilidad actúan no cooperativamente el recurso va a ser sobre-explotado.

Haciendo uso nuevamente del suspuesto que los individuos son idénticos y por ende van a poner el mismo nivel de esfuerzo, e, la utilidad total en este caso es

$$\omega = \gamma(ne) - n\delta\left(e\right)$$

El óptimo social requiere un nivel de esfuerzo tal que $\gamma' = \delta'$, la utilidad marginal del esfuerzo sera igual a la desutilidad marginal. Pero el individuo, actuando no cooperativamente para maximizar u_j en e_j, elige el e_j que hace $s_j'\gamma + s_j\gamma' = \delta_j'$. El nivel de esfuerzo en ambas situaciones será diferente siempre que haya más de un individuo explotando el recurso. Por lo que los individuos actuando descentralizadamente con producirán el óptimo social. ¿Podemos decir algo más? Dados los supuestos sobre la forma de δ, el nivel de esfuerzo que hace $\delta' = \gamma'$ será mayor al nivel de esfuerzo que hace $\delta_j' = s_j'\gamma + s_j\gamma'$ si $s_j'\gamma + s_j\gamma' < \gamma'$. Si $\gamma' < 0$, se cumple que $s_j'\gamma + s_j\gamma' < \gamma'$ porque $s_j'\gamma + (s_j - 1)\gamma' < 0$. Esto quiere decir que $e^* = 0$, porque $\partial\omega/\partial e = \gamma' - \delta' < 0$, pero $e_j^* > 0$, Por lo que el recurso será sobre-explotado. Nada asegura que no podamos estar en el segmento $\gamma' > 0$ (depende de la forma de δ), en cuyo caso no poremos decir más que la situación es sub-óptima.

2. Solidaridad en cualquier momento

Suponga que los costos de ser miembro de un sindicato son c y los beneficios materiales son b, un bien público que disfrutan todos los trabajadores (miembros o no) en proporción al grado de sindicalización $d = n/N$ y $b = \beta d$, donde n es el número de miembros del sindicato, N el total de trabajadores y $\beta > c > \beta/N > 0$. El sentimiento de solidaridad (o el grado de convencionalismo) es alto. Por ende, ser miembro entre no-miembros es incómodo, como lo es no pertenecer al sindicato cuando la mayoría está afiliado. Consecuentemente, la utilidad de un miembro $u^m = b - c + \gamma(d - 1/2)$, mientras que la utilidad de un no-miembro es $u^n = b + \gamma(1/2 - d)$, con γ (el grado de convencionalismo, o solidaridad) > 0. Asumiendo que los miembros de la fuerza laboral cambian de status (miembro / no-miembro) de acuerdo a la utilidad que brinda cada status, las siguientes preguntas tienen que ver con el valor estacionario de d, esto es, d^*.

2.1. De los valores de los parámetros para los cuales ser miembro del sindicato es una EEE, y para los cuales no ser miembro es una EEE.

Ser miembro es una EEE si

$$\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) > \pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro})$$

ó

$$\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) = \pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro})$$

y

$$\pi\,(\text{ser miembro, no ser miembro}) > \pi\,(\text{no ser miembro, no ser miembro})$$

$$\begin{aligned}
\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) &= \\
\pi\,(\text{ser miembro cuando todos son miembros}) &= \\
u^m &= b - c + \gamma(d - 1/2) \\
&= \beta - c + \gamma(1 - 1/2) \\
&= \beta - c + \gamma(1/2)
\end{aligned}$$

Por su parte

$$\begin{aligned}
\pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro}) &= \\
\pi\,(\text{no ser miembro cuando todos son miembros}) &= \\
u^n &= b + \gamma(1/2 - d) \\
&= \beta + \gamma(-1/2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ser miembro será una EEE si

$$\beta - c + \gamma(1/2) > \beta + \gamma(-1/2)$$

O lo que es lo mismo,

$$-c + \gamma(1/2) > -\gamma(1/2)$$

$$\gamma > c$$

Ser miembro es una EEE si el grado de convencionalismos (o solidaridad) es mayor que el costo de afiliarse.

Por ende, no ser miembro será una EEE si sucede lo contrario.

2.2. ¿Qué aspecto de la modelización del problema tiene en cuenta o permite la posibilidad de equilibrios estables múltiples?

Que la existencia de un sentimiento de convencionalismo que depende del grado de sindicalización te lleva a que los incentivos de los trabajadores a afiliarse o no dependan qué es lo que está haciendo la mayoría. Si $d > 1/2$*, afiliarse* *trae beneficios positivos por convencionalismo (o solidaridad). Mientras que si $d < 1/2$, el convencionalismo es un sentimiento que te incentiva a no afiliarte.*

3. Reciprocidad

Dos individuos están considerando contribuir con su esfuerzo personal e_i y e_j, ambos $\in [0,1]$, a un proyecto común cuyo producto es $e_i + e_j$, el cuál se repartirá en partes iguales entre ambos individuos. Las preferencias del individuo i son descritas por la siguiente función de utilidad

$$U_i = \pi_i + \beta_{ij}\pi_j$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{a_i + \lambda_i a_j}{1 + \lambda_i}$$

con a_i y $a_j \in [-1, 1]$ y $\lambda_i \geq 0$. El parámetro a_i es el nivel incondicional de buena o mala voluntad (altruismo o envidia) de i con respecto a j y a_j es lo que i cree es el nivel de altruismo o envidia de j. Por último, λ_i es el peso que i le otorga a las creencias acerca de la voluntad de j en la importancia que le da al bienestar de j $\left(\beta_{ij}\right)$. La función de utilidad de j es idéntica (cambiando los sub-índices i por j y viceversa). Suponga que el costo subjetivo del esfuerzo, $c(e)$, es $3/4 \times e$ y $a = \lambda = 1/2$ para cada individuo. La creencia acerca de la buena voluntad del otro es simplemente la cantidad que cada uno cree que el otro aportará de esfuerzo al proyecto. (Por ejemplo, si i piensa que j aportará 1 al proyecto, $a_j = 1$.)

3.1 Identifique los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.

$$\begin{aligned}
U_i &= \pi_i + \beta_{ij}\pi_j = \left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_i(e_i)\right] + \beta_{ij}\left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_j(e_j)\right] \\
&= \frac{e_i + e_j}{2}\left(1 + \beta_{ij}\right) - c_i(e_i) - \beta_{ij}c_j(e_j) = (e_i + e_j)\left(\frac{2}{3} + \frac{a_j}{6}\right) - \frac{3}{4}e_i - \left(\frac{1}{3} + \frac{a_j}{3}\right)\frac{3}{4}e_j \\
\frac{\partial U_i}{\partial e_i} &= \frac{2}{3} + \frac{a_j}{6} - \frac{3}{4} = \frac{-1 + 2a_j}{12}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

Si $a_j > 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i > 0 :$ *el individuo i pone* 1 *de esfuerzo.*
Si $a_j \leq 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i < 0 :$ *el individuo i pone* 0 *de esfuerzo.*

Similarmente,

Si $a_i > 1/2$, $e_j = 1$
Si $a_i \leq 1/2$, $e_j = 0$

Por consiguiente, los equilibrios de Nash de este juego serán:

$$\begin{aligned}
(e_i, e_j) &= (1,1)\,,\ a_i \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,0)\,,\ a_i \text{ y } a_j \leq 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (1,0)\,,\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,1)\,,\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2
\end{aligned}$$

3.2 Indique cuáles son estables

Las elecciones de esfuerzo por parte de los individuos no dependen del nivel de esfuerzo del otro sino de las creencias de cada uno acerca del tipo de individuo que es el otro. Por lo tanto todos los equilibrios serán estables a cambios exógenos, idiosincráticos en los niveles de esfuerzo.

Podemos también estudiar la estabilidad de los equilibrios antes cambios en las creencias a_i y a_j. Para cambios muy pequeños de a_i y a_j los equilibrios van a ser estables, excepto en el entorno de a_i y $a_j = 1/2$.En esos casos, pequeños cambios en las creencias pueden hacer que éstas pasen de ser mayores a $1/2$ a ser menores a $1/2$. Con lo que el equilibrio cambiaría.

3.3 De los valores críticos de las creencias iniciales a_i y a_j tal que el resultado Pareto-superior puede ser sostenido como un equilibrio de Nash.

El valor de las utilidades en cada uno de los equilibrios de Nash es:

$$\begin{gathered}
(1,1) : \left\{ {}^{U_i = \frac{5a_j+2}{24} > 0}_{U_j = \frac{5a_i+2}{24} > 0} \right\},\ a_i \text{ y } a_j > 1/2 \\
(0,0) : \left\{ {}^{U_i = 0}_{U_j = 0} \right\},\ a_i \text{ y } a_j \leq 1/2 \\
(1,0) : \left\{ {}^{U_i = \frac{4a_j-2}{24} > 0}_{U_j = \frac{4+a_i}{24} > 0} \right\},\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2 \\
(0,1) : \left\{ {}^{U_i = \frac{4+a_j}{24} > 0}_{U_j = \frac{4a_i-2}{24} > 0} \right\},\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2
\end{gathered}$$

Todos los EN son PO excepto por el $(0,0)$.

Comparando el $(1,1)$ con el $(1,0)$ (o $(0,1)$ que es lo mismo), vemos que $(1,1)$ será pareto-superior a $(1,0)$ si y solo si:

$$U_i(1,1) + U_j(1,1) = \frac{5a_j + 5a_i + 4}{24} > \frac{4a_j + a_i + 2}{24} = U_i(1,0) + U_j(1,0)$$

Ó

$$\underset{a_i \text{ y } a_j > 1/2}{5a_j + 5a_i + 4} > \underset{a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2}{4a_j + a_i + 2}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es > 9, mientras que el lado derecho es $< 6,5$. Por lo tanto el EN Pareto-superior es $(e_i, e_j) = (1,1)$, lo que ocurre cuando a_i y $a_j > 1/2$.