Universidad de Montevideo
Master de Economía
Solución Parcial de Microeconomía 2007
Prof. Marcelo Caffera

10/5/07

1. Una firma contaminante debe decidir si cumplir con una regulación ambiental o no. Cuando no cumple con la regulación experimenta un nivel de beneficios π^u. Cuando cumple con la regulación la firma experimenta un costo c adicional. Es decir, cuando cumple con la regulación sus beneficios son $\pi < \pi^u$, tal que $c = \pi^u - \pi$. La regulación es fiscalizada por un regulador que puede monitorear (inspeccionar) a la firma a un costo m. Si la firma cumple con la legislación la calidad ambiental mejora y el regulador obtiene un beneficio $y > 0$ (y puede ser la satisfacción del deber cumplido, un retorno político por la mejor calidad ambiental, el beneficio social que el regulador quiere implementar, etc.). Suponga que la firma elige entre cumplir o no con la normativa de manera aleatoria, jugando "no cumplir" con probabilidad σ y "cumplir" con probabilidad $1 - \sigma$. De forma similar, suponga que el regulador inspecciona a la firma con probabilidad p, o no la inspecciona. Si el regulador inspecciona a la firma y encuentra que ésta no está cumpliendo la sanciona con una multa f.

1.1. Confeccione la matriz de beneficios de este juego.

		Regulador	
		Inspecciona	No inspecciona
Empresa	Cumple	$\pi, y - m$	π, y
	No cumple	$\pi^u - f, f - m$	$\pi^u, 0$

Notar que la multa f aparece como un ingreso del regulador ambiental. Esto equivale a suponer que la multa que recauda el regulador ambiental no va a "rentas generales", si no que financia directamente a la agencia ambiental. Suponer lo contrario degenera el ejercicio.[1]

1.2. Obtenga el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Hay dos formas de resolver ésto. Una es eligiendo las probabilidades que maximizan la utilidad o beneficio esperado, dada la probabildad del otro (o, dicho de otro modo, para cualquier probabilidad que juegue el otro).

[1] Si suponemos que el beneficio de inspeccionar cuando la firma no cumple es sólo $-m$, no obtenemos un solución interior (Un equilibrio de Nash en estretategias mixtas tal que ambas probabilidades son positivas).

La otro forma de resolver esto es igualando los beneficios esperados de jugar ambas acciones para ambos jugadores. En otras palabras, para que la empresa juegue ambas Cumplir y No Cumplir, los beneficios esperados de cumplir tienen que ser iguales a los beneficios esperados de no cumplir.

Empecemos por el primer caso. Los beneficios esperados de la empresa son:

$$E(\pi_E) = (1-\sigma)\left[p\pi + (1-p)\,\pi\right] + \sigma\left[p\,(\pi^u - f) + (1-p)\,\pi^u\right]$$

Por su parte, los beneficios esperados del regulador son:

$$E(\pi_R) = p\left[(1-\sigma)\,(y-m) + \sigma\,(f-m)\right] + (1-p)\left[(1-\sigma)\,y + \sigma\,(0)\right]$$

Si derivamos $E(\pi_E)$ con respecto a σ, e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\pi_E)}{\partial \sigma} &= -\pi - pf + \pi^u = 0 \\ p^* &= \frac{\pi^u - \pi}{f} = \frac{c}{f}\end{aligned}$$

Para que esto tenga sentido, se tiene que cumplir que $c, f > 0$ y $c < f$. Notar que maximizando $E(\pi_E)$ con respecto a σ obtenemos p^*, la estrategia mixta óptima del regulador. Este procedimiento equivale a igualar el benficio esperado de ambas acciones (Cumplir y No cumplir) para la empresa. (Ver que derivar e igualar a cero equivale a esto). ¿Por qué deben ser iguales en un Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas. (Teorema Fundamental de la Existencia del Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas): Para verlo, suponga que no fuera cierto. Que el valor esperado de jugar Cumplir sea mayor al valor esperado de jugar No cumplir. En ese caso, la empresa podría incrementar los beneficios esperados de su estrategia mixta jugando cumplir con una probabilidad más alta. Por lo que, por contradicción, no estaríamos en una estrategia mixta óptima.

Similarmente, derivando $E(\pi_R)$ con respecto a p, o igualando los beneficios esperados del regulador de Inspeccionar con los de No Inspeccionar, dada σ, obtenemos σ^* :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\pi_R)}{\partial p} &= -m + \sigma f = 0 \\ \sigma^* &= \frac{m}{f}\end{aligned}$$

De nuevo, para que esto tenga sentido, se tiene que cumplir que $m, f > 0$ y $m < f$.

1.3. ¿Existe alguna relación entre la probabilidad de que la firma cumpla con la normativa y la multa? ¿Cuál es? Explique (o demuestre).

Probabilidad de Cumplir en el equilibrio

$$1 - \sigma^* = 1 - \frac{m}{f}$$

la que es claramente creciente en el monto de la multa f, para todo $m > 0$. Cuanto mayor la multa, mayor el incentivo a cumplir (mayor la probabilidad óptima de jugar "Cumplir"). Esto es un resultado intuituvo. Notar que el impacto depende del costo de la inspección:

$$\frac{\partial\left(1-\sigma^{*}\right)}{\partial f}=\frac{m}{f^{2}}>0$$

Cuanto mayor el costo de la inspección m, mayor el impacto de un incremento de la multa sobre la probabilidad de cumplir, lo cual no es tan intuitivo.

1.4. ¿Existe alguna relación entre el la probabilidad de inspección y los costos de cumplir? ¿Cuál es? Explique (o demuestre).

Probabilidad de Inspeccionar en el equilibrio

$$p^{*}=\frac{c}{f}$$

la que es claramente creciente en c, para toda multa $f > 0$.

Cuanto mayor el costo de cumplir con la legislación, mayor debe ser la probabilidad con la ue el regulador debe inspeccionar a la firma en equilibrio.

1.5. Defina un Equilibrio de Nash en sentido estricto.

Un Equilibrio de Nash es una situación en la que todos los jugadores están respondiendo de la mejor manera a lo que juega el resto. Una mejor respuesta se puede definir de la siguiente manera: Sea n el número de jugadores y S_j el conjunto de estrategias para el jugador j, $j = 1, ..., n$.Suponga que el jugador j selecciona una estrategia determinada s de su conjunto de estrategias S_j. Sea s_{-j} el conjunto de estrategias adoptadas por el resto de los jugadores (elegidas de sus respectivos conjuntos de estrategias S_{-j}). Por último, sea $\pi\left(s, s_{-j}\right)$ el beneficio de j cuando se juega $\left(s, s_{-j}\right)$. La estrategia s es una mejor respuesta a s_{-j} si:

$$\pi\left(s, s_{-j}\right) \geq \pi\left(s', s_{-j}\right) \text{ para todo } s' \in S_j, s' \neq s$$

El conjunto de estrategias $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ será un Equilibrio de Nash si se cumple lo anterior para todo s_j, $j = 1, ...n$. Si la desigualdad es *estricta* ($>$) *estaremos frente a un Equilibrio de Nash estricto.*

1.6. ¿Es estricto el Equilibrio de Nash hallado en 1.2.?

El Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas hallado es $(\sigma^*, p^*) = \left(\frac{m}{f}, \frac{c}{f}\right)$.

La mejor forma de ver que el EN no es estricto es viendo que

$$E(\pi_E) = (1-\sigma)\left[p\pi + (1-p)\pi\right] + \sigma\left[p\left(\pi^u - f\right) + (1-p)\pi^u\right]$$

evaluado en $p^* = \frac{c}{f}$, y *luego de unas sencillas cuentas se transforma en*

$$E(\pi_E) = \pi$$

En otras palabras, la firma obtendrá el mismo beneficio esperado adoptando cualquier $\sigma \in [0,1]$ *siempre y cuando el regulador adopte una probabilidad de inspección* $p^* = c/f$. *De una forma similar podemos concluir que el regulador obtendrá el mismo beneficio esperado inspeccionado con cualquier probabilidad* $p \in [0,1]$ *siempre y cuando la empresa juegue* $\sigma^* = m/f$. *En otras palabras,* $p^* = c/f$ *no es una mejor respuesta en términos estrictos a* $\sigma^* = m/f$, *y viceversa. Es decir, el Equilibrio de nash en Estrategias Mixtas hallado no es estricto.*

2. En el modelo de segregación residencial visto en clase, donde las preferencias eran

$$\begin{aligned} p_a(f) &= 1/2(f+\delta) - 1/2(f+\delta)^2 + p \\ p_v(f) &= 1/2(f-\delta) - 1/2(f-\delta)^2 + p \end{aligned}$$

2.1. Muestre que para $\delta = 1/4$ el resultado con barrios completamente segregados ($f = 1,\ f = 0$) proporciona el mismo nivel de precios de las casas que el que proporcionan barrios completamente integrados ($f = 1/2$).

Valor de las casas en un barrio de verdes:

$$\begin{aligned} p_a(1) &= 1/2(5/4) - 1/2(5/4)^2 + p = 5/8 - 25/32 + p = -5/32 + p \\ p_v(1) &= 1/2(3/4) - 1/2(3/4)^2 + p = 3/8 - 9/32 + p = 3/32 + p \end{aligned}$$

Todas las casas están ocupadas por verdes. Las disposición a pagar de los verdes es mayor. Ésta es el precio de las casas.

Valor de las casas en un barrio de azules: (Sólo calculamos $p_a(0)$*)*

$$\begin{aligned} p_a(0) &= 1/2(1/4) - 1/2(1/4)^2 + p = 1/8 - 1/32 + p = 3/32 + p \\ p_v(0) &= 1/2(-1/4) - 1/2(-1/4)^2 + p = -1/8 - 1/32 + p = -5/32 + p \end{aligned}$$

Todas las casas están ocupadas por azules. Las disposición a pagar de éstos es mayor. Ésta es el precio de las casas.

Valor de las casas en un barrio perfectamente integrado:

$$\begin{aligned} p_a(1/2) &= 1/2(3/4) - 1/2(3/4)^2 + p \\ p_v(1/2) &= 1/2(1/4) - 1/2(1/4)^2 + p \end{aligned}$$

Se puede ver antes de resolver que $p_a(1/2) = p_a(0)$. *Por su parte, haciendo cuentas, vemos que* $p_v(1/2) = 3/32 + p$. *Q.E.D.*

2.2. Para $\delta < 1/4$ muestre que existe un $\varepsilon > 0$ tal que una ley que permita ventas de casas sólo si $f \in [1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon]$ implementa un resultado que es Pareto superior al equilibrio competitivo.

En equilibrio competitivo interior (inestable), $p_a(f) = p_v(f)$. *Esto ocurre cuando* $f = 1/2$. *(Para cualquier* δ*). En este punto,*

$$p_a(1/2) = p_v(1/2) = 1/8 - \frac{\delta^2}{2} + p$$

Por su parte, haciendo cuentas

$$p_a(1/2 - \epsilon) = 1/8 - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon\delta + p = p_v(1/2 + \epsilon)$$

Tenemos que probar que

$$p_a(1/2) = p_v(1/2) = 1/8 - \frac{\delta^2}{2} + p < p_a(1/2 - \epsilon) = 1/8 - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon\delta + p = p_v(1/2 + \epsilon)$$

De nuevo, haciendo cuentas llegamos a esta desigualdad se cumple cuando

$$\epsilon < 2\delta$$

Dado que $f = 1/2$, ϵ *no puede ser mayor que* $1/2$, *por lo que*

$$0 < \epsilon < 2\delta < 1/2$$

De donde sale que con un $\delta < 1/4$, *existe un* ϵ *entre* 0 *y* $1/2$ *que cumple la desigualdad.*

2.3. Suponga que las preferencias de los verdes continúan siendo como las de arriba, pero los azules son ahora indiferentes entre cualquier distribución racial en los barrios. Más precisamente, suponga que los azules le otorgan un valor de 1.1 a los hogares ($p_v = 1.1$).Indique todos los equilibrios del mercado inmobiliario resultante e indique cuáles son estables.

Los equilibrios del mercado son aquellos que hacen la ecuación del replicador

$\Delta f = \beta f(1 - f)\left[p_v(f) - p_a(f)\right] = 0$. *Esto ocurre cuando* $f = 0$, $f = 1$, *y* $p_v(f) - p_a(f)$. *En este caso, esta última solución interna será*

$$1/2(f - \delta) - 1/2(f - \delta)^2 + p = 1,1$$

O

$$f^* = \delta + 1/2 \pm \sqrt{2p - 1,95}$$

De donde sale que las soluciones son $f_1^* = \delta + 1/2 + \sqrt{2p - 1,95}$ *y* $f_2^* = \delta + 1/2 - \sqrt{2p - 1,95}$. *Para que estas soluciones sean números reales se debe cumplir que* $2p > 1,95$, *o* $p > 1,95/2$.

Un equilibrio es estable si $\frac{\partial \Delta f}{\partial f} < 0$. *En el equilibrio interior,*

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial f} = \beta f(1 - f)\left[p_v'(f) - p_a'(f)\right]$$

En este caso, como p_a *es una constante*

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial f} = \beta f(1 - f)\left[p_v'(f)\right]$$

Por lo que

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial f} < 0 \Leftrightarrow p_v'(f) < 0$$

$$p_v'(f) = 1/2 - f + \delta < 0 \Leftrightarrow f^* > 1/2 + \delta$$

Dado un $p > 1,95/2$, *vemos que* f_1^* *es estable, pero* f_2^* *no lo es.*

De la misma forma, $f^* = 0$ es inestable y $f^* = 1$ es estable.

3.

3.1. Muestre que el valor interior estacionario de p (la fracción de la población de Halcones) en el Juego Halcón y Paloma no es Pareto - óptimo, y explique qué explica la falla de coordinación.

Sabemos que

$$\begin{aligned} b_h(p) &= p(v - c)/2 + (1 - p)v \\ b_d(p) &= (1 - p)v/2 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} b_h'(p) &= (v - c)/2 - v \\ b_d(p) &= -v/2 \end{aligned}$$

Es fácil ver que ambos beneficios esperados son decrecientes en p. Por lo tanto $p^* = v/c$ *no es PO. La falla de coordinación existe porque ni halcones ni palomas tienen en cuenta los efectos de sus acciones sobre los demás, alterando el nivel de p.*

3.2. Imagine que en una población de Halcones y Palomas se propone una ley que prohíbe a los Halcones. La ley será aprobada e implementada sin costo si la mayoría de la población vota por ella en un referendum. Asuma que la población se distribuye de acuerdo a la proporción de equilibrio. ¿La ley será apoyada por la mayoría? Explique.

La ley será votada por las palomas, siempre. Para que la ley sea votada por los $p^* = v/c$ halcones se tiene que dar que $b_h(v/c) < b_d(0)$. Pero esto siempre se da, porque $b_d(p)$ es decreciente en p, por lo que cualquier punto de corte entre $b_d(p)$ y $b_h(p)$ se da para un $b_d(p) = b_h(p) < b_d(0)$. La ley será aprobada por unanimidad.