LETRAS Y SOLUCIONES EJERCICIOS BOWLES

Marcelo Caffera

1. The language of Game Theory (1)

1.1 Suponga que la tabla de beneficios siguiente es la de un jugador fila en un juego simétrico entre dos personas. Indique las restricciones en el valor de estos beneficios que son necesarios y suficientes en casa caso para que el juego sea Halcón y Paloma, Dilema del Prisionero y Juego de la Certeza.

	$Cooperar$ $(Paloma)$	$No-cooperar$ $(Halcón)$
$Cooperar$ $(Paloma)$	(b,b)	(d,a)
$No-coperar$ $(Halcón)$	(a,d)	(c,c)

Para que este juego sea un ***DP*** *se tiene que dar que*

(1) $a>b>c>d$, *y de que*

(2) $a+d<2b$, *para asegurar de que "la torta se maximiza" con la cooperación.*

Para que sea un ***Juego de la Certeza****:*

(1) $b>a$ *y* $c>d$ *(para que ambos C y NC sean una mejor respuesta contra si mismo)*

(2) $b>c$ *(para que* (C,C) *sea Pareto-superior)*

Para que sea ***Halcón y Paloma****:*

(1) $a>b$ *y* $d>c$ *(para que la mejor respuesta a uno sea el otro)*

1.2 Usando 3 matrices de beneficios separadas para los 3 juegos, envuelva en un círculo cualquier EN y subraye todos los OP.

Dilema del Prisionero

	$Cooperar$ $(Paloma)$	$No-cooperar$ $(Halcón)$
$Cooperar$ $(Paloma)$	$(b,b)^{OP}$	$(d,a)^{OP}$
$No-coperar$ $(Halcón)$	$(a,d)^{OP}$	$(c,c)^{EN}$

Juego de la Certeza

	$Cooperar$ $(Paloma)$	$No-cooperar$ $(Halcón)$
$Cooperar$ $(Paloma)$	$(b,b)^{EN,OP}$	(d,a)
$No-coperar$ $(Halcón)$	(a,d)	$(c,c)^{EN}$

Halcón y Paloma

	$Cooperar$ $(Paloma)$	$No-cooperar$ $(Halcón)$
$Cooperar$ $(Paloma)$	$(b,b)^{OP}$	$(d,a)^{EN,OP}$
$No-coperar$ $(Halcón)$	$(a,d)^{EN,OP}$	(c,c)

Dos agricultores consideran plantar un cultivo (Plantar) ó no plantar y en su lugar intentar robar el cultivo que plante el otro (Robar). La matriz de beneficios de este juego no cooperativo es la siguiente

Juego Plantar/Robar No-cooperativo

	Plantar	Robar
Plantar	1,1	-1,1/2
Robar	1/2,-1	0,0

1.3 Suponga que usted es el jugador fila y le asigna una probabilidad p a la posibilidad de que el jugador columna juegue Plantar (y $(1-p)$ a la probabilidad de juegue No plantar). ¿Cuál es el mínimo valor de p que hará que usted plante?

Beneficio esperado de plantar:

$$p \times 1 + (1-p) \times (-1) = p - 1 + p = 2p - 1$$

Beneficio esperado de robar:

$$p \times \frac{1}{2} + (1-p) \times 0 = \frac{p}{2}$$

Yo voy a plantar siempre que la primera expresión sea mayor o igual a la segunda. Por ende, el mínimo valor de p que haría que yo plantara es el que hace

$$2p - 1 = \frac{p}{2}$$

de donde

$$p^{\min} = \frac{2}{3}$$

1.4 Defina *estrategia dominante en riesgo* y *equilibrio dominante en riesgo,* y diga cuál (si alguno) de los equilibrios es dominante en riesgo.

Estrategia dominante en riesgo: aquella con menor factor de riesgo.

Equilibrio dominante en riesgo: aquel en que todos están respondiendo de la mejor manera con la estrategia dominante en riesgo.

Factor de riesgo de Plantar para Fila: 2/3

Factor de riesgo de Robar para Fila: 1/3

Factor de riesgo de Plantar para Columna: 2/3 (el juego es simétrico)

Factor de riesgo de Robar para Columna: 1/3

Equilibrio dominante en riesgo: (Robar, Robar)

2. Name de Game (Cap. 1)

A y U son dos paises linderos, cuyas fronteras están separadas por un río. El bienestar de los habitantes de cada uno de estos países depende de las acciones de los habitantes del otro país: existen externalidades negativas (contaminación transfronteriza). Suponga que cada país tiene dos estrategias posibles: Emitir o Abatir emisiones. La forma reducida de los beneficios de ambos países en función de los niveles de emisión de cada uno es $\pi^i = \pi^i(e^i, e^j)$, donde e es el nivel de emisiones $(0$ o $1)$ y los supra-índices i y j refieren a A y U.

(a) Modele este problema como un Dilema del Prisionero, Juego de Aseguramiento y Halcón y Paloma ilustrando cada una de estas posibilidades en un matriz de beneficios. Explique en cada caso por qué el juego sería una ilustración razonable de la interacción.

La matriz genérica del juego es la siguiente:

	No emitir	*Emitir*
No emitir	(b, b)	(d, a)
Emitir	(a, d)	(c, c)

*Para que este juego sea un **DP** se tiene que dar que*

$$(1)\ a > b > c > d$$

$$(2)\ a + d < 2b$$

*Para que este juego sea un **Juego de Aseguramiento** se tiene que dar que*

(1) $b > a$ y (2) $c > d$ para que haya dos equilibrios en estrategias puras

(3) $b > c$ para que uno de estos dos equilibrios Pareto-domine al otro.

Si los dos no emiten se maximiza el bienestar agregado por calidad ambiental. Si ambos emiten, ambos están peor. El ahorro de costos de abatimiento no compensa el daño por mayores emisiones. La mejor respuesta a no emitir es no emitir. Para que ello suceda, los costos de emitir (daños por contaminación) tienen que ser mayores que los beneficios de emitir (ahorro de costos de abatimiento). Las emisiones no son "rentables". La mejor respuesta a emitir es emitir. Para que ello suceda, cuando el otro emite la ecuación anterior ya no es válida. Ahora, el incremento en los daños por las emisiones propias son menores que el ahorro de costos por emitir.

*Para que este juego sea un **Juego de Halcón y Paloma** se tiene que dar que*

$$a > b$$

$$d > c$$

El juego puede ser una buena descripción de la interaccón siempre que se entienda que el medio ambiente es una presa y ambos países se comporten *como halcones (busquen conflicto, emitan, contaminen todo el medio ambiente) cuando el otro no y entiendan que cuando el otro emite es costos buscar conflicto y emitir y por lo tanto no lo hacen. En este caso los costos de un conflicto (netos del ahorro de costos de abatimiento) superan a los costos de no emitir (netos de los beneficios por mayor calidad ambiental).*

(b) Suponga que la función de beneficios de A tiene la forma

$$\pi^i = \alpha e^i + \beta e^j + \gamma e^i e^j$$

y que la función de U es idéntica (cambiando los supra-índices). Halle los valores de los parámetros de esta función de beneficios que hace a cada uno de los tres juegos el modelo apropiado para la interacción.

Beneficios:

$$\pi^A \left(e^A, e^B\right) = \alpha e^A + \beta e^B + \gamma e^A e^B$$

$$\pi^B \left(e^A, e^B\right) = \alpha e^B + \beta e^A + \gamma e^B e^A$$

Matriz de beneficios (A es el jugador fila)

	$e = 0$	$e = 1$
$e = 0$	$\pi^A(0,0) = 0, \pi^B(0,0) = 0$	$\pi^A(0,1) = \beta, \pi^B(0,1) = \alpha$
$e = 1$	$\pi^A(1,0) = \alpha, \pi^B(1,0) = \beta$	$\pi^A(1,1) = \alpha + \beta + \gamma, \pi^B(1,1) = \alpha + \beta + \gamma$

Para que este juego sea un ***DP*** *se tiene que dar que*

$$(1) \alpha > 0 > \alpha + \beta + \gamma > \beta$$

$$(2)\ \alpha + \beta < 0$$

Para que sea un ***Juego de la Certeza*** *se tiene que dar que*

$$(1)\ 0 > \alpha \text{ y } (2)\ \alpha + \beta + \gamma > \beta \text{ o lo que es lo mismo } \alpha + \gamma > 0$$

$$(3)\ 0 > \alpha + \beta + \gamma$$

Para que sea un Juego de ***Halcón y Paloma*** *se tiene que dar que*

$$\alpha > 0$$

$$\beta > \alpha + \beta + \gamma, \text{o lo que es lo mismo } \alpha + \gamma < 0$$

3. Monitoring and Working (Cap.1)

Ejemplos empíricos de estrategias mixtas no son muy comunes, pero aleatorizar las acciones de uno (esto es, adoptar una estrategia mixta) por lo general tien sentido en situaciones en las que una parte está monitoreando el esfuerzo en el trabajo, el cumplimiendo de la ley, la reducción de emisiones, o la limitación de armas de otro. He aquí un ejemplo. Un empleador acuerda pagar un salario w a un trabajador que puede entonces Trabajar, incurriendo en un costo subjetivo de esfuerzo $e,$ o No trabajar, siendo el pago del salario condicional a que el trabajador, si inspeccionado, no haya sido descubierto No trabajando. El empleador puede determinar si el trabajador trabajó pagando un costo de inspección $c.$ Si el trabajador Trabaja, los ingresos para el empleador son $y.$ Suponga que el trabajador aleatoriza sus acciones, eligiendo la estrategia mixta: No trabajar con probabilidad σ (y Trabajar con probabilidad $1-\sigma$). El empleador, por su parte, elige la estrategia Monitorear con probabilidad μ (y No monitorear con probabilidad $1-\mu$. El equilibrio de Nash en estrategias mixtas es el par (σ^*, μ^*) tal que ni el empleador ni el trabajador podrían obtener beneficios esperados mayores adoptando una estraegia diferente.

El Juego de Monitorear y Trabajar
Empleador

Trabajador	Monitorear	No monitorear
No trabajar	$0, -c$	$w, -w$
Trabajar	$w-e, y-w-c$	$w-e, y-w$

3.1. Mostrar que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $\sigma^* = c/w$ y $\mu^* = e/w.(Pista:$ Hay dos formas de resolver ésto. Una es eligiendo las probabilidades que maximizan la utilidad esperada para cada jugador, dada la probabildad del otro (o, dicho de otro modo, para cualquier probabilidad que juegue el otro). La otra forma de resolver esto es igualando los beneficios esperados de jugar ambas acciones para ambos jugadores).

Hay dos formas de resolver ésto. Una es eligiendo las probabilidades que maximizan la utilidad esperada para cada jugador, dada la probabildad del otro (o, dicho de otro modo, para cualquier probabilidad que juegue el otro).

La otra forma de resolver esto es igualando los beneficios esperados de jugar ambas acciones para ambos jugadores. Esto obedece a que en un Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas, para que el empleador juegue ambas Monitorear y No Monitorear, los beneficios esperados de Monitorear tienen que ser iguales a los beneficios esperados de No Monitorear. (Teorema Fundamental de la Existencia del Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas). ¿Por qué deben ser iguales? Para verlo, suponga que no fuera cierto. Que el valor esperado de jugar Monitorear sea mayor al valor esperado de No Monitorear. En ese caso, el empleador podría incrementar los beneficios esperados de su estrategia mixta jugando cumplir con una probabilidad más alta. Por lo que, por contradicción, no estaríamos en una estrategia mixta óptima.

Empecemos por el primer caso. Los ***beneficios esperados del empleador*** *son:*

$$E(\pi_E) = \mu\left[(1-\sigma)(y-w-c) + \sigma(-c)\right] + (1-\mu)\left[(1-\sigma)(y-w) + \sigma(-w)\right]$$

Por su parte, los ***beneficios esperados del trabajador*** *son:*

$$E(\pi_T) = (1-\sigma)\left[\mu(w-e) + (1-\mu)(w-e)\right] + \sigma\left[\mu(0) + (1-\mu)(w)\right]$$

Si derivamos $E(\pi_E)$ con respecto a σ, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial E(\pi_E)}{\partial \mu} = \left[(1-\sigma)(y-w-c) + \sigma(-c)\right] - \left[(1-\sigma)(y-w) + \sigma(-w)\right] = 0$$

Notar que esta condición equivale a el beneficio esperado de Monitorear (primer término entre paréntesis cuadrados) con el de No Monitorear (segundo término). Haciendo cuentas:

$$\begin{aligned} -c + \sigma w &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^* &= \frac{c}{w} \end{aligned}$$

Notar que maximizando $E(\pi_E)$ con respecto a μ obtenemos σ^*, la estrategia mixta óptima del trabajador.

Similarmente, derivando $E(\pi_T)$ con respecto a μ, o igualando los beneficios esperados del trabajador de Trabajar con los de No Trabajar, dada σ, obtenemos μ^* :

$$\begin{aligned} \mu(w-e) + (1-\mu)(w-e) &= (1-\mu)(w) \\ \mu w - e &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}^* &= \frac{e}{w} \end{aligned}$$

3.2. Explique por qué el nivel de equilibrio de la probabilidad de No trabajar varía inversamente con el salario y el nivel de equilibrio de la probabilidad de Monitorear varía con el costo subjetivo del esfuerzo.

En equilibrio, el trabajador No Trabaja con probabilidad c/w. Es decir que, cuanto mayor el salario, menor la probabilidad que no trabaje. Obviamente, esto sucede porque un mayor salario aumenta el beneficio esperado de trabajar en 1, mientras que aumenta el de no trabajar en $1-\mu<1$.

En equilibrio, la probabilidad de que el empleador opte por monitorear al trabajador es e/w. Es decir, crece con la desutilidad del esfuerzo del trabajador, e. Esto sucede porque cuanto mayor e mayor el incentivo a no trabajar (menor el beneficio esperado de trabajar).

3.3. Defina equilibrio de Nash estricto y muestre que (σ^*, μ^*) no puede ser estricto. Muestre que al trabajador le iría igual de bien adoptando *cualquier* estrategia, esto es elegir cualquier σ entre $[0,1]$ siempre y cuando el empleador juege la estrategia del equilibrio de Nash, y que la afirmación análoga es cierta para el empleador.

El Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas hallado es $(\sigma^*, \mu^*) = \left(\frac{c}{w}, \frac{e}{w}\right)$. *La mejor forma de ver que el EN no es estricto es evaluando el beneficio esperado del trabajador*

$$E(\pi_T) = (1-\sigma)\left[\mu\,(w-e) + (1-\mu)\,(w-e)\right] + \sigma\left[\mu\,(0) + (1-\mu)\,(w)\right]$$

cuando $\mu^* = e/w$:

$$\begin{aligned} & (1-\sigma)\left[\frac{e}{w}(w-e) + \left(1-\frac{e}{w}\right)(w-e)\right] + \sigma\left[\left(1-\frac{e}{w}\right)(w)\right] \\ & (1-\sigma)\left[(w-e)\right] + \sigma\left[(w-e)\right] \\ E(\pi_T) &= w-e \end{aligned}$$

En otras palabras, el trabajador obtendrá el mismo beneficio esperado adoptando cualquier $\sigma \in [0,1]$ *siempre y cuando el regulador adopte una probabilidad de monitoreo* $\mu^* = e/w$. *En otras palabras,* $\sigma^* = c/w$ *no es una mejor respuesta en términos estrictos a* $\mu^* = e/w$. *Es decir, el Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas hallado no es estricto.*

3.4 ¿Por qué, sin embargo, uno podría esperar observar valores en el entorno de σ^* y μ^*?

Porque es un *EN*. Si uno de los dos jugadores no juega con la estrategia mixta de equilibrio, sabe que el otro jugador ya no responderá con su estrategia mixta de equilibrio ya que ésta no será una mejor respuesta. Entonces, cada jugador espera que el otro responda con la estrategia del equilibrio de Nash si él hace lo propio. Es un equilibrio por *convención*.

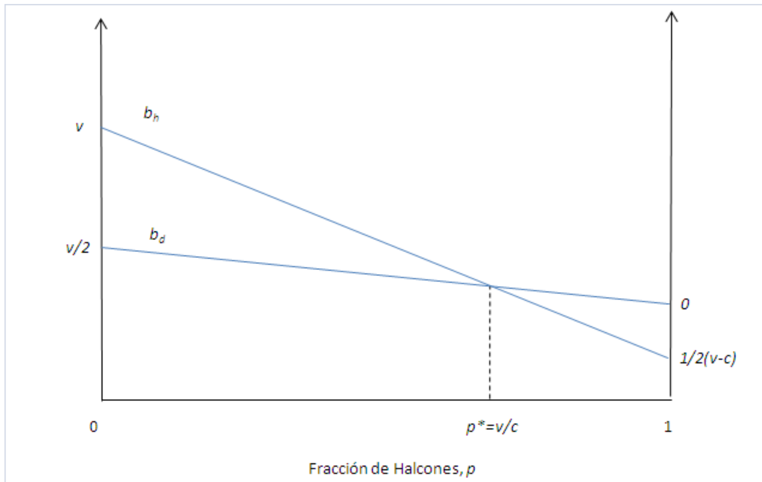
7.CONSPIRACY OF DOVES, BOUGEOIS INVASION (Cap. 2)

7.1. Muestre que el valor estacionario interior de p (fracción de la población de halcones) en el juego de Halcón-Paloma no es un óptimo de Pareto, y explique que genera esta falla de coordinación.

La matriz de beneficios de este juego es:

Beneficios de Fila

	Halcón	Paloma
Halcón	$(v-c)/2$	v
Paloma	0	$v/2$



Para hallar el valor estacionario de p, es necesario igualar los beneficios esperados de ambas estrategias. Los beneficios esperados cuando la fracción de Hs es p, son

$$\begin{aligned} b_h(p) &= p(v-c)/2 + (1-p)v \\ b_d(p) &= p0 + (1-p)v/2 \end{aligned}$$

Resolviendo, $p^* = v/c$.

Se puede probar facilmente que $p^* = v/c$ no es un óptimo de Pareto calculando

$$\begin{aligned} \frac{db_h(p)}{dp} &= (v-c)/2 - v = -\frac{1}{2}(c+v) < 0 \\ \frac{db_d(p)}{dp} &= -v/2 < 0 \end{aligned}$$

Ambas expresiones son negativas. Esto es, un aumento en la proporción de halcones (p) perjudica a ambos halcones y palomas, para todo valor de p. Dicho de otra forma, en una población con $p^* = v/c$ se redujeran por alguna razón la proporción de halcones, ambos halcones y palomas estarían mejor. Por ende, $p^* = v/c$ no puede ser un OP. Esto se puede ver fácilmente en la siguiente gráfica, donde se ve claramente que los beneficios esperados de ambos halcones y palomas crecen a medida que decrece p :

Lo que genera la falla de coordinación es el hecho de que Paloma no es una EEE contra Halcón (una población de palomas puede ser invadida por un halcón; éstos tiene beneficios esperados mayores para todo $p < p^* = v/c$). Sin embargo, cuanto mayor es la proporción de halcones, menor el beneficio esperado de halcones por mayor costo esperado de las peleas. Éstas son un costo para la sociedad (por eso es la razon que ambos beneficios esperados decrecen en p)

que los halcones no tienen en cuenta a la hora de responder de la mejor manera (la pelea es una externalidad, una ineficiencia).

7.2. Las capacidades humanas para la acción colectiva a menudo nos permiten hacer caso omiso de las tendencias evolutivas que predominan en otros animales. Imagine que en una población humana, jugando el juego H-P, se propuso una ley que prohíbe jugar halcón, su aprobación dependiendo de la mayoría de votos (y su coste de implementación se supone que es cero). Supongamos que los jugadores están inicialmente distribuidos según la frecuencia de equilibrio de halcones, v/c, y pueden cambiar sus estrategias, ya sea en respuesta a la ley o (dentro de los límites establecidos por la ley) según el diferencial de pagos. ¿Podría la mayoría de los población apoyar proponer la ley? Explique por qué o por qué no. Si pasaje requiere la unanimidad, ¿podría ser aprobar la ley?

En el punto 1 se demostró que las palomas están mejor en todo $p < p^* = v/c$. esto incluye a $p = 0$, por lo que las palomas votarán por la ley. En cuanto a los halcones, si se aprueba la ley, su beneficio esperado en $p = 0$ va a ser igual al de las palomas, $v/2$. Por lo tanto estos votarán por la ley si $v/2$ es mayor que $b_h(p^*)$. Esto es si

$$\begin{aligned} v/2 &> v/c(v-c)/2 + (1 - v/c)v \\ v/2 &> -\frac{v^2}{2c} + \frac{v}{2} \\ 0 &> -\frac{v^2}{2c} \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple por lo que los halcones estarán de acuerdo en votar la ley. La ley será apoyada por unanimidad.

7.3. Suponga que un yate arriba con unos pocos burgueses en las costas de la Isla Hobbes cuya población (grande) se distribuye de acuerdo las fracciones de quilibrio v/c halcones y $(1 - v/c)$ Palomas. ¿Pueden los burgueses invadir la población mixta de la isla de Hobbes?

Una población de halcones y palomas se puede asimilar a una estrategia mixta (EM) jugando halcón con probabilidad v/c y jugando paloma con probabilidad (1-v/c). Debemos probar si la estrategia mixta es EE contra B. Esto será así si $\pi(EM, EM) > \pi(B, EM)$. Sabemos que

$$\pi(EM, EM) = b_h(\frac{v}{c}) = b_d(\frac{v}{c}) = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{v}{2}$$

En cuanto a $\pi(B, EM)$, con probabilidad 1/2 el B es propietario y juega H, contra otro H con probabilidad v/c, y contra una paloma con probabilidad $1 - v/c$. Algo similar cuando no es propietario y juega paloma.

$$\pi(B, EM) = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}\pi(H, H) + \left(1 - \frac{v}{c}\right)\pi(H, D)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}\pi(D, H) + \left(1 - \frac{v}{c}\right)\pi(D, D)\right]$$

$$\pi(B, EM) = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}\left(\frac{v-c}{2}\right) + \left(1-\frac{v}{c}\right)v\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}0 + \left(1-\frac{v}{c}\right)\frac{v}{2}\right]$$

$$\pi(B, EM) = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}\left(\frac{v-c}{2}\right) + \left(1-\frac{v}{c}\right)v\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c-v}{c}\right)\frac{v}{2}\right]$$

$$\pi(B, EM) = \left(1-\frac{v}{c}\right)\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{v}{c}\left(\frac{v-c}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c-v}{c}\right)\frac{v}{2}\right]$$

$$\pi(B, EM) = \left(1-\frac{v}{c}\right)\frac{v}{2}$$

Por lo tanto, se cumple que $\pi(EM, EM) = \pi(B, EM)$, EM no es una mejor respuesta estricta en contra si misma en relación a B. Sin embargo, aún puede darse que EM sea EE contra B si se da que $\pi(EM, B) > \pi(B, B)$.

$$\pi(EM, B) = \frac{v}{c}\left[\frac{1}{2}\pi(H, H) + \frac{1}{2}\pi(H, D)\right] + \left(1-\frac{v}{c}\right)\left[\frac{1}{2}\pi(D, H) + \frac{1}{2}\pi(D, D)\right]$$

$$\pi(EM, B) = \frac{v}{c}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v-c}{2}\right) + \frac{1}{2}v\right] + \left(1-\frac{v}{c}\right)\left[\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{v}{2}\right]$$

$$\pi(EM, B) = \frac{v^2}{4c} - \frac{v}{4} + \frac{v^2}{2c} + \frac{v}{4} - \frac{v^2}{4c}$$

$$\pi(EM, B) = \frac{v^2}{2c}$$

Mientras que, por el texto sabemos que

$$\pi(B, B) = \frac{v}{2}$$

O sea que EM será una EEE contra B si se cumple que

$$\frac{v^2}{2c} > \frac{v}{2}$$

lo que equivale a

$$\frac{v}{c} > 1$$

Sabemos que esto **no** se cumple ya que $0 < \frac{v}{c} < 1$. Por lo tanto conlcuimos que EM **no** es una EEE contra B, o sea B puede invadir una isla de Hs y Ps en equilibrio.

7.4. Explique por qué el pago esperado de un Halcón invasor en una población grande de Burgueses Contestatarios esta dado como señala el texto, y cheque que para $\mu = 1$, $\pi(B(\mu), B(\mu)) = \pi(H, H)$, mientras que para $\mu = 0$, $\pi(B(\mu), B(\mu)) = \pi(D, D)$.

Un Burgués Contestatario es un Burgués que cuando es intruso una fracción del tiempo $\mu \in [0,1]$ equivocadamente cree que es propietario, o idiosincráticamente juega como propietario, y juega Halcón en lugar de jugar Paloma, mientras que en el caso de que es propietario siempre juega Halcon como antes. El beneficio esperado de un halcón contra un Burgues Contestatario es

$$\pi\left[H, BC\right] = 1/2\left[(1-\mu)v + \mu 1/2(v-c)\right] + 1/2\left[1/2(v-c)\right]$$

Esto es, con probabilidad 1/2 el Halcón se cruza con un intruso que con probabilidad $1-\mu$ se comporta "correctamente" como una paloma y por tanpo el H obtiene v, y con probabilidad μ el intruso "se equivoca" y juega H. El último sumando es el caso en que el B es propietario y siempre se comprta como un H.

Recordando que (ver texto)

$$\pi\left[BC, BC\right] = \left[B\left(\mu\right), B\left(\mu\right)\right] = \frac{1}{2}(v - \mu c)$$

es facil ver que uando $\mu = 1$:

$$\pi\left[B\left(1\right), B\left(1\right)\right] = \frac{1}{2}(v-c) = \pi\left(H, H\right)$$

y cuando $\mu = 0$,

$$\pi\left(B\left(0\right), B\left(0\right)\right) = \frac{v}{2} = \pi\left(D, D\right)$$

8. Solidaridad en cualquier momento (Cap. 2)

Suponga que los costos de ser miembro de un sindicato son c y los beneficios son b. Este beneficio es bien público que disfrutan todos los trabajadores, miembros o no del sindicato, en proporción al grado de sindicalización, d. Es decir, $b = \beta d$, con $d = n/N$, $n =$ número de miembros del sindicato, $N =$ total de trabajadores y $\beta > c > \beta/N > 0$. El grado de convencionalismo es "alto". Por ende, ser miembro entre no-miembros es incómodo, como lo es no pertenecer al sindicato cuando la mayoría está afiliado. Consecuentemente, la utilidad de un miembro $u^m = b - c + \gamma(d - 1/2)$, mientras que la utilidad de un no-miembro es $u^n = b + \gamma(1/2 - d)$, con γ (el grado de convencionalismo) > 0. Asumiendo que los miembros de la fuerza laboral cambian de status (miembro / no-miembro) de acuerdo a la utilidad que brinda cada status, las siguientes preguntas tienen que ver con el valor estacionario de d, esto es, d^*.

1. De los valores de los parámetros para los cuales ser miembro del sindicato es una EEE, y para los cuales no ser miembro es una EEE.

Ser miembro es una EEE si

$$\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) > \pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro})$$

ó

$$\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) = \pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro})$$

pero

$$\pi\,(\text{ser miembro, no ser miembro}) > \pi\,(\text{no ser miembro, no ser miembro})$$

$$\begin{aligned}
\pi\,(\text{ser miembro, ser miembro}) &= \\
\pi\,(\text{ser miembro cuando todos son miembros } (d=1)) &= \beta - c + \gamma(1 - 1/2) \\
&= \beta - c + \gamma(1/2)
\end{aligned}$$

Por su parte

$$\pi\,(\text{no ser miembro, ser miembro}) = \pi\,(\text{no ser miembro cuando todos son miembros})$$

En este caso, n, el numero de afiliados al sindicato, es $N-1$, por lo que $d = (N-1)/N$. Por lo tanto, $u^n = b + \gamma(1/2 - d)$ es

$$u^n = \beta\frac{N-1}{N} + \gamma(1/2 - \frac{N-1}{N})$$

Por lo tanto, ser miembro será una EEE si

$$\begin{aligned}
\beta - c + \frac{\gamma}{2} &> \beta\frac{N-1}{N} + \frac{\gamma}{2} - \gamma\frac{N-1}{N} \\
\beta - c &> \beta\frac{N-1}{N} - \gamma\frac{N-1}{N} \\
\beta\left(1 - \frac{N-1}{N}\right) - c &> -\gamma\frac{N-1}{N} \\
\beta\left(\frac{1}{N}\right) - c &> -\gamma\frac{N-1}{N}
\end{aligned}$$

En el caso en que N sea un número grande, como es el supuesto siempre en estos ejercicios, la desigualdad anterior tiende a

$$\gamma > c$$

que es el mismo resultado que se obtiene si suponemos $d = 1$.

Ser miembro es una EEE si el grado de convencionalismo es mayor que el costo de afiliarse.

Por su parte, no ser miembro será una EEE si

$$\pi\,(\text{no ser miembro, no ser miembro}) > \pi\,(\text{ser miembro, no ser miembro})$$

ó

π (no ser miembro, no ser miembro) $= \pi$ (ser miembro, no ser miembro)

y

π (no ser miembro, ser miembro) $> \pi$ (ser miembro, ser miembro)

π (no ser miembro, no ser miembro) $= \pi$ (no ser miembro cuando nadie es miembro)

En este caso en número de afiliados al sindicato es cero, por lo que $d = 0$, y

$$u^n = \gamma \times 1/2$$

Por su parte

π (ser miembro, no ser miembro) $= \pi$ (ser miembro cuando se el el único miembro)

En este caso, si seguimos suponiendo que $d = 0$, $u^m = b - c + \gamma(d - 1/2)$ queda

$$u^m = -c - \frac{\gamma}{2}$$

Por lo tanto, no ser miembro será una EEE si

$$\frac{\gamma}{2} > -c - \frac{\gamma}{2}$$

ó

$$\gamma > -c$$

Por lo tanto, siempre que exista un grado de convencionalismo positivo o cero esta desigualdad se cumplirá y no se miembro será siempre una EEE.

En suma, si $\gamma > c > 0$, ambas ser y no ser miembro serán EEE.[1]

2. ¿Cuál es el valor estacionario interior de d?

Hallamos el valor estacionario interior de d igualando ambas utilidades:

$$\begin{aligned} u^m &= \beta d - c + \gamma(d - 1/2) = \; u^n = \beta d + \gamma(1/2 - d) \\ -c + \gamma d - \gamma/2 &= \gamma/2 - \gamma d \\ 2\gamma d &= \gamma + c \\ d^* &= \frac{\gamma + c}{2\gamma} \end{aligned}$$

3. ¿Es estable el equilibrio hallado en el punto anterior?

[1] En el caso de que la población (N) no sea "grande" (d no sea igual a 1 o a 0 sino que sea igual a $1/N$), $\beta > c > \beta/N > 0$ *y* $N > 2$ se suman a las anteriores condiciones para que ambas estrategias sean EEE. Esto se puede chequear fácilmente.

Para investigar la estabilidad de este equilibrio, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{d\left[u^m(d^*)-u^n(d^*)\right]}{dd} &= \frac{d\left[\beta d-c+\gamma(d-1/2)-\beta d-\gamma(1/2-d)\right]}{dd} \text{ en } d^* \\ \frac{d\left[-c+\gamma(d-1/2)-\gamma(1/2-d)\right]}{dd} &= \gamma+\gamma=2\gamma>0 \text{ para todo } d\end{aligned}$$

Por consiguiente d^* es un equilibrio inestable.

4. ¿Qué aspecto de la modelización del problema tiene en cuenta o permite la posibilidad de equilibrios estables múltiples?

El aspecto de la modelización del problema que hace posible dos equilibrios estables, $d = 0$ y $d = 1$, es la existencia de un sentimiento de convencionalismo alto ($\gamma > c > 0$).

No ser miembro es siempre una EEE en caso de existencia de un grado de convencionalismo ($\gamma > 0$). Sin embargo, ser miembro puede no ser una EEE. Lo será solamente si $\gamma > c > 0$. Si este es el caso, ambos extremos ($d = 0$ y $d = 1$) serán equilibrios estables, mientras que el equilibrio interior no lo será. Esto se puede ver claramente en un gráfico, en donde, aún cuando la pendiente de u^n sea positiva (la utilidad de ser miembro aumente con d), $d = 1$ será un equilibrio estable si $\gamma > c > 0$.

5. Observe el siguiente gráfico

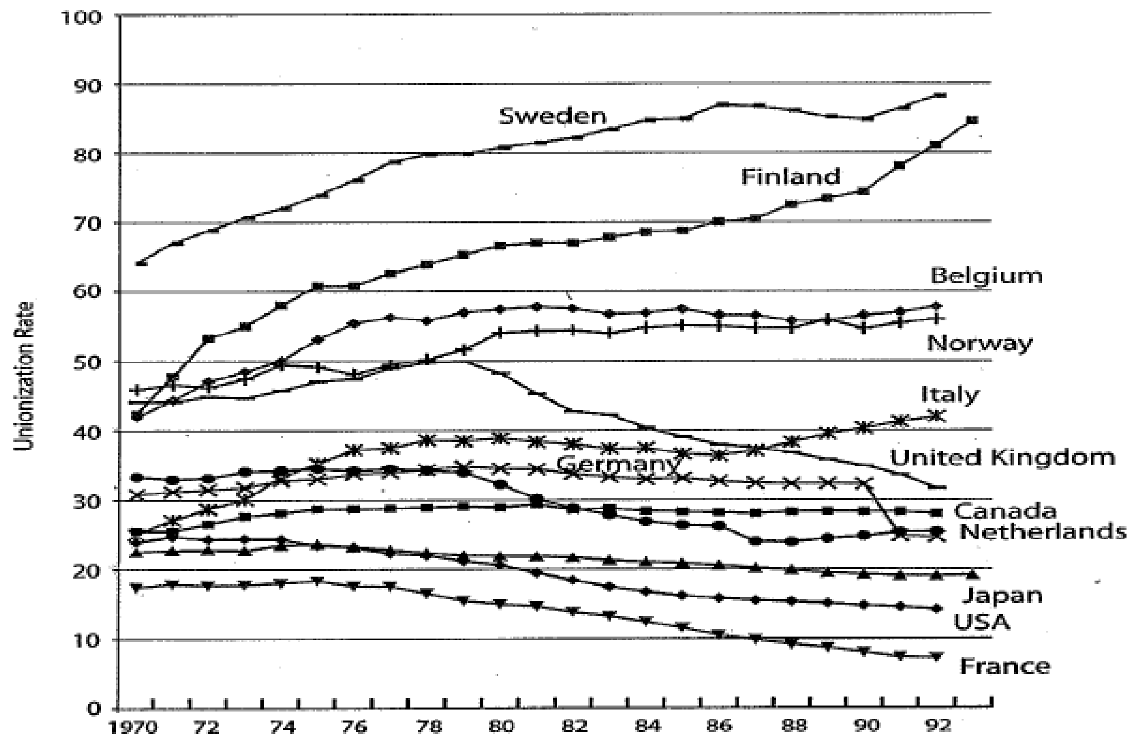


Figure A Divergent development of union densities 1970–1992. (Source: Luxembourg Income Study data set)

¿Qué puede estar explicando la evolución divergente de Italia, que arranca de un nivel de sindicalización "bajo" en 1970, y éste sube en lugar de bajar? Construya una explicación plausible dentro de este modelo.

Una explicación sencilla es que el d^* de Italia está a la izquierda de $\approx 25\%$ (el punto de partida de Italia en 1970). Como d^* aumenta con c, una explicación posible de un d^* bajo es una costo de afiliación bajo. También, como d^* baja con γ, es factible una explicación donde el grado convencionalismo es alto. Sin embargo, como d^* tiende a $0,5$ cuando $\gamma \to \infty$, y se necesita $d^* < 0,25$. Esta desigualdad se cumle cuando $-c > \gamma/2$. Lo que quiere decir que afiliarse al sindicato no sólo no tiene costo sino que está subsidiado (se recibe un ingreso o premio), o un grado de convencionalismo negativo (ser miembro entre no miebros produce utilidad, lo mismo que ser no miembro entre miembros).

9. Aversidad a la Inequidad y Reciprocidad (Cap.3)

Considere un individuo i que interactúa con un sólo individuo j. Las preferencias de i están dadas por

$$U_i = \pi_i - \delta_i \max(\pi_j - \pi_i, 0) - \alpha_i \max(\pi_i - \pi_j, 0)$$

con π_i y π_j siendo los ingresos o riqueza material de ambos individuos y $\delta_i \geq \alpha_i$ y $\alpha_i \in [0, 1]$.

(a) Demuestre que si ambos individuos fueran a dividir \$1 ($\pi_i + \pi_j = 1$) y $\alpha_i > 1/2$, $dU_i/d\pi_i < 0$ para todas las divisiones tal que $\pi_i - \pi_j > 0$. ¿Cómo preferiría dividir el peso el individuo i en ese caso?

Si $\pi_i - \pi_j > 0$, $U_i = \pi_i - \alpha_i(\pi_i - \pi_j, 0)$. *En este caso,* $dU_i/d\pi_i = 1 - \alpha_i$. *Es claro que si* $\alpha_i > 1/2$, $dU_i/d\pi_i < 0$. *En este caso el individuo preferiría dividir el peso en partes iguales ya que cualquier incremento en su tajada le disminuye su utilidad.*

(b) Ahora suponga que $\delta_i = 3/4$ y $\alpha_i = 1/2$. ¿Cuánto sería la oferta más chica que este individuo i aceptaría en un Juego Ultimatum que divide \$1? Justifique su respuesta.

Cuando el individuo i rechaza la oferta su utilidad es 0. *Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar es aquella que le reporta* 0 *de utilidad. Cuando* $\alpha_i = 1/2$, $U_i = 1/2$ *para todo* $\pi_i - \pi_j > 0$. *La utilidad de i no alcanzará cero si él es el más beneficiado con la oferta, no importa cuán beneficiado sea. Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar la encontraremos cuando la oferta lo desfavorece:* $\pi_j - \pi_i > 0$. *En este caso*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(\pi_j - \pi_i)$$

Haciendo uso de $\pi_i + \pi_j = 1$, *y operando*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(1 - 2\pi_i) = \frac{5}{2}\pi_i - \frac{3}{4}$$

Se puede ver claramente que si la oferta lo desfavorece $(\pi_j - \pi_i > 0)$, *el individuo i estará mejor cuanto mayor su tajada* π_i. *Llamando* $\pi_i^{\min}$ *a la oferta mínima que i aceptará, por lo dicho arriba se debe cumplir que*

$$U_i = \frac{5}{2}\pi_i^{\min} - \frac{3}{4} = 0$$
$$\pi_i^{\min} = \frac{3}{10}$$

Parte II: Reciprocidad

Dos individuos están considerando contribuir con su esfuerzo personal e_i y e_j, ambos $\in [0, 1]$, a un proyecto común cuyo producto es $e_i + e_j$, el cuál se repartirá en partes iguales entre ambos individuos. Las preferencias del individuo i son descritas por la siguiente función de utilidad

$$U_i = \pi_i + \beta_{ij}\pi_j$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{a_i + \lambda_i a_j}{1 + \lambda_i}$$

con a_i y $a_j \in [-1, 1]$ y $\lambda_i \geq 0$. El parámetro a_i es el nivel incondicional de buena o mala voluntad (altruismo o envidia) de i con respecto a j y a_j es lo que i cree es el nivel de altruismo o envidia de j. Por último, λ_i es el peso que i le otorga a las creencias acerca de la voluntad de j en la importancia que le da al bienestar de j (β_{ij}). La función de utilidad de j es idéntica (cambiando los sub-índices i por j y viceversa). Suponga que el costo subjetivo del esfuerzo, $c(e)$, es $3/4 \times e$ y $a = \lambda = 1/2$ para cada individuo. La creencia acerca de la buena voluntad del otro es simplemente la cantidad que cada uno cree que el otro aportará de esfuerzo al proyecto. (Por ejemplo, si i piensa que j aportará 1 al proyecto, $a_j = 1$.)

(c) Identifique los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.

$$\begin{aligned}
U_i &= \pi_i + \beta_{ij}\pi_j = \left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_i(e_i)\right] + \beta_{ij}\left[\frac{e_i + e_j}{2} - c_j(e_j)\right] \\
&= \frac{e_i + e_j}{2}\left(1 + \beta_{ij}\right) - c_i(e_i) - \beta_{ij}c_j(e_j) \\
&= (e_i + e_j)\left(\frac{2}{3} + \frac{a_j}{6}\right) - \frac{3}{4}e_i - \left(\frac{2}{3} + \frac{a_j}{6}\right)\frac{3}{4}e_j \\
\frac{\partial U_i}{\partial e_i} &= \frac{2}{3} + \frac{a_j}{6} - \frac{3}{4} = \frac{-1 + 2a_j}{12}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

Si $a_j > 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i > 0$: *el individuo* i *pone* 1 *de esfuerzo.*
Si $a_j \leq 1/2$, $\partial U_i/\partial e_i < 0$: *el individuo* i *pone* 0 *de esfuerzo.*

Similarmente,

$$\begin{gathered}
\text{Si } a_i > 1/2,\ e_j = 1 \\
\text{Si } a_i \leq 1/2,\ e_j = 0
\end{gathered}$$

Por consiguiente, los equilibrios de Nash de este juego serán:

$$\begin{aligned}
(e_i, e_j) &= (1, 1),\ a_i \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0, 0),\ a_i \text{ y } a_j \leq 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (1, 0),\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0, 1),\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2
\end{aligned}$$

(d) Indique cuáles son estables

Las elecciones de esfuerzo por parte de los individuos no dependen del nivel de esfuerzo del otro sino de las creencias de cada uno acerca del tipo de individuo que es el otro. Por lo tanto todos los equilibrios serán estables a cambios exógenos, idiosincráticos en los niveles de esfuerzo.

Podemos también estudiar la estabilidad de los equilibrios antes cambios en las creencias a_i y a_j. Para cambios muy pequeños de a_i y a_j los equilibrios van a ser estables, excepto en el entorno de a_i y $a_j = 1/2$.En esos casos, pequeños cambios en las creencias pueden hacer que éstas pasen de ser mayores a $1/2$ a ser menores a $1/2$. Con lo que el equilibrio cambiaría.

(e) De los valores críticos de las creencias iniciales a_i y a_j tal que el resultado Pareto-superior puede ser sostenido como un equilibrio de Nash.

El valor de las utilidades en cada uno de los equilibrios de Nash es:

$$(1,1) : \left\{ {}^{U_i=\frac{5a_j+2}{24}>0}_{U_j=\frac{5a_i+2}{24}>0} \right\},\ a_i \text{ y } a_j > 1/2$$
$$(0,0) : \left\{ {}^{U_i=0}_{U_j=0} \right\},\ a_i \text{ y } a_j \leq 1/2$$
$$(1,0) : \left\{ {}^{U_i=\frac{4a_j-2}{24}>0}_{U_j=\frac{4+a_i}{24}>0} \right\},\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2$$
$$(0,1) : \left\{ {}^{U_i=\frac{4+a_j}{24}>0}_{U_j=\frac{4a_i-2}{24}>0} \right\},\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2$$

Todos los EN son PO excepto por el $(0,0)$.

Comparando el $(1,1)$ *con el* $(1,0)$ *(o* $(0,1)$ *que es lo mismo), vemos que* $(1,1)$ *será pareto-superior a* $(1,0)$ *si y solo si:*

$$U_i(1,1) + U_j(1,1) = \frac{5a_j + 5a_i + 4}{24} > \frac{4a_j + a_i + 2}{24} = U_i(1,0) + U_j(1,0)$$

Ó

$$\underset{a_i \text{ y } a_j > 1/2}{5a_j + 5a_i + 4} > \underset{a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2}{4a_j + a_i + 2}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es > 9, *mientras que el lado derecho es* $< 6,5$. *Por lo tanto el EN Pareto-superior es* $(e_i, e_j) = (1,1)$, *lo que ocurre cuando* a_i *y* $a_j > 1/2$.

10. No Hay Química (Cap. 4)

Considere el siguiente problema de coordinación genérico: dos individuos (Minúsculas y Mayúsculas) con funciones de utilidad simétricas

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \beta a + \gamma A + \delta a A + \lambda a^2 \\ U &= \alpha + \beta A + \gamma a + \delta a A + \lambda A^2 \end{aligned}$$

donde a y A son las acciones tomadas por los dos individuos y $\lambda < 0$ para asegurar concavidad.

1. **¿Cuáles son las condiciones para que la externalidad sea positiva o negativa y para que las dos estrategias sean sustitutas o complementarias en el equilibrio de Nash** (a^*, A^*)?

Para que la externalidad sea negativa:

$$
\begin{aligned}
u_A &= \gamma + \delta a < 0 \\
U_a &= \gamma + \delta A < 0
\end{aligned}
$$

$Y > 0$ para que la externalidad sea positiva.

En el equilibrio de Nash ambos responden de la mejor manera. La función de mejor respuesta de Minúsculas sale de la c.p.o. del siguiente problema:

$$\max_a u = \alpha + \beta a + \gamma A + \delta a A + \lambda a^2$$

La c.p.o. es $u_a = \beta + \delta A + 2\lambda a = 0$, de donde sale la f.m.r $a = -(\beta + \delta A)/2\lambda$. El problema para mayúsculas es simétrico, por lo que el EN es

$$
\begin{aligned}
a^* &= -\frac{(\beta + \delta A^*)}{2\lambda} \\
A^* &= -\frac{(\beta + \delta a^*)}{2\lambda}
\end{aligned}
$$

Dado que $\lambda < 0$, **las estrategias serán sustitutas si $\delta < 0$ y complementarias si $\delta > 0$.** *Notar que δ es también $u_{aA} = U_{aA}$, que es otra forma de verlo.*

2. **¿Cuál es la condición de primer orden para una asignación Pareto-eficiente simétrica? Use esta condición (asumiendo que la condición de segundo orden se cumple) y las expresiones de (a^*, A^*) para mostrar que a^* y A^* exceden los niveles Pareto-eficientes si y solo si la externalidad es negativa. Explique por qué esto es así.**

La condición de primer orden para una asignación Pareto-eficiente simétrica sale del siguiente problema:

$$\max_{a,A} u(a, A) \text{ sujeto a } U(A, a) = \overline{U}$$

El Lagrangeano asociado a este problema es

$$L(a, A, \zeta) = u(a, A) + \zeta(U(A, a) - \overline{U})$$

Las c.p.o. para una solución interior son:

$$
\begin{aligned}
L_a &= u_a + \zeta U_a = 0 \\
L_A &= u_A + \zeta U_A = 0
\end{aligned}
$$

De donde obtenemos

$$\frac{u_a}{u_A} = \frac{U_a}{U_A}$$

que dice que las tasas marginales de sustitución son iguales. Si las externalidades son negativas, $U_a < 0$*. Dado que* ζ *tiene que ser positivo, tenemos que en* a^*, $L_a < 0$*. Por lo que* $a^* > a^{OP}$*. Lo mismo sucede con* A^**.*

Para este problema, la condición equivale a

$$\frac{\beta + \delta A + 2\lambda a}{\gamma + \delta a} = \frac{\gamma + \delta A}{\beta + \delta a + 2\lambda A}$$

Si es simétrica, esto equivale a

$$\beta + \delta a + 2\lambda a = \gamma + \delta a$$

$$a^{OP} = \frac{\gamma - \beta}{2\lambda}$$

Por su parte, teníamos que $a^* = -\frac{\beta + \delta A^*}{2\lambda}$. Como las funciones de mejor respuesta son simétricas, $a^* = A^*$,

$$a^* = -\frac{\beta + \delta a^*}{2\lambda} = \frac{-\beta}{(2\lambda + \delta)} = A^*$$

Por lo tanto, la externalidad negativa implica

$$\gamma - \frac{\delta\beta}{(2\lambda + \delta)} < 0$$

Probar que $a^* > a^{OP}$ *equivale a probar que*

$$\frac{-\beta}{(2\lambda + \delta)} > \frac{\gamma - \beta}{2\lambda}$$

$$\frac{-2\lambda\beta}{(2\lambda + \delta)} + \beta > \gamma$$

$$\frac{-2\lambda\beta + \beta\,(2\lambda + \delta)}{(2\lambda + \delta)} > \gamma$$

$$\frac{\beta\delta}{(2\lambda + \delta)} > \gamma$$

$$\gamma - \frac{\beta\delta}{(2\lambda + \delta)} < 0$$

que es la condición de que la externalidad sea negativa.

3. **Asumiendo que el equilibrio de Nash es en estrategias puras, muestre que siempre va a existir una ventaja por mover primero y que el que mueva segundo va a estar peor (en relación al equilibrio de Nash) si las estrategias son sustitutas y mejor si las estrategias son complementarias. Explique por qué esto es así.**

Si Minúsculas mueve primero, por ejemplo, lo que va a hacer es incorporar la f.m.r. de mayúsculas en su problema:

$$\max_a u(a, A(a))$$

La c.p.o. de este problema es

$$du/da = u_a + u_A A'(a) = 0$$

En el caso de externalidades negativas ($u_A < 0$) *y estrategias sustitutas* ($A'(a) < 0$), *minúsculas elige en este caso un a mayor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) > 0$. *Para explicar por qué minúsculas está mejor y mayúsculas peor es útil pensar en un ejemplo de un problema de coordinación del tipo de la tragedia de los pescadores. En este caso minúsculas (el que mueve primero) está mejor porque puede salir a pescar más y aumenta su captura y su utilidad* ($du/da(a^*) > 0$). *Mayúsculas está peor porque* $dU = U_A \times dA + U_a \times da$, en el EN $U_A = 0$, por lo que queda $dU = U_a \times da$. Acabamos de decir que $da > 0$ y estamos asumiendo que la externalidad es negativa ($U_a < 0$), por lo que $dU < 0$.

En el caso de externalidades negativas ($u_A < 0$) *y estrategias complementarias* ($A'(a) > 0$),*estamos en el caso de consumo conspicuo. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a menor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) < 0$. *Como consecuencia minúsculas está mejor* ($du/da(a^*) < 0$). *Mayúsculas también está mejor ya que* $dU = U_a \times da > 0$.

En el caso de externalidades positivas ($u_A > 0$) *y estrategias sustitutas* ($A'(a) < 0$),*estamos en el caso de trabajo en equipo. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a (esfuerzo) menor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) < 0$. *Como consecuencia minúsculas está mejor (el esfuerzo es costoso) y mayúsculas está peor ya que* $dU = U_a \times da < 0$.

En el caso de externalidades positivas ($u_A > 0$) *y estrategias complementarias* ($A'(a) > 0$),*estamos en el caso de competencia fiscal. Minúsculas (el que mueve primero) elige un a (impuesto) mayor al* a^* *ya que* $u_A A'(a) > 0$ *y mayúsculas también porque* $dU = U_a \times da > 0$ *(elige un impuesto (A) mayor también).*

4. **Dos agricultores adyacentes eligen si usar un pesticida químico o un enfoque menos intensivo en químicos que usa depredadores naturales para controlar las pestes que amenazan sus cultivos (manejo integrado de pestes). El uso de plaguicidas químicos genera externalidades negativas (los químicos matan a los depredadores naturales además de matar a las pestes), mientras que el manejo integrado de pestes genera externalidades positivas (los depredadores naturales no respetan los límites de las propiedades de los agricultores y cazan las pestes en toda el area). Específicamente, el incremento en el uso de químicos incrementa el producto del usuario pero también baja el producto e incrementa el producto marginal de usar plaguicidas del otro agricultor para cualquier nivel de los otros inputs. Siendo a y A**

el nivel de plaguicidas químicos usados por uno y otro, proporcione los valores de los parámetros de las funciones de utilidad de arriba que describen la interacción.

Externalidad negativa

$$\begin{aligned} u_A &= \gamma + \delta a < 0 \\ U_a &= \gamma + \delta A < 0 \end{aligned}$$

Producto marginal positivo propio

$$\begin{aligned} u_a &= \beta + \delta A + 2\lambda a > 0 \\ U_A &= \beta + \delta a + 2\lambda A > 0 \end{aligned}$$

Complementariedad estrategica (el incremento en el uso de químicos baja el producto marginal de usar plaguicidas del otro agricultor):

$$u_{aA} = U_{aA} = \delta > 0$$

5. **Suponga que los individuos difieren en algún rasgo que influencia los salarios por hora y que eligen cuántas horas trabajar (h) para maximizar una función de utilidad, los argumentos de la cual son ocio (normalizado a $1 - h$) y lo que llamamos consumo efectivo c^*, definido como su propio nivel de consumo (c) menos una constante v multiplicada por el nivel de consumo de un grupo de referencia con ingresos mayores, $\widetilde{c}$. Es conveniente pensar en cada individuo como perteneciente a un grupo de ingresos homogéneos que toma al siguiente grupo en la escala de ingresos como su grupo de referencia (el grupo más rico no tiene grupo de refencia). Conjuntamente, el grupo de referencia y la constante v (exógenos) miden la naturaleza y la intensidad de las comparaciones sociales. Los individuos no ahorran, por lo que $c = wh$, donde w es la tasa salarial. Por lo tanto, para un individuo que no esté en el grupo más rico tenemos que**

$$u = u(c^*, h) = u((wh - v\widetilde{c}), h)$$

donde u es creciente y cóncava en su primer argumento y decreciente y convexa en el segundo. El ocio y el consumo son complementos, por lo que $u_{c^*h} < 0$. (Nota: este caso difiere en el del punto 1. en que no es simétrico). Muestre que la externalidad del grupo de referencia es negativa y que el efecto del consumo del grupo de referencia es incrementar las horas de trabajo de los grupos menos favorecidos.

La externalidad es negativa: $u_{\widetilde{c}} = -u_c v < 0$

El efecto del consumo del grupo de referencia es incrementar las horas de trabajo de los grupos menos favorecidos. Dado que diferenciando c.r.a. $\widetilde{c}$ *y*

h no podemos ponerle un signo a la expresión, la solución sale simplemente de $u_{c^*h} < 0$. Si $\widetilde{c}$ aumenta, c^* disminuye y u_h aumenta. Como la utilidad marginal del trabajo aumenta, los pobres eligen trabajar más.

11. Tragedia de los Pescadores (Cap. 4)

Dos pescadores, Mayúscula y Minúscula, pescan en el mismo lago usando su trabajo y redes. Consumen su pesca. No comercian ni acuerdan entre sí como pescar. Pero la actividad de uno afecta la del otro: cuánto más pesca uno menos hay para el otro. Más específiamente,

$$\begin{aligned} y &= \alpha\left(1-\beta E\right)e \\ Y &= \alpha\left(1-\beta e\right)E \end{aligned}$$

donde $y, Y =$ la cantidad pescada por min. y may. en un período de tiempo determinado, α es una constante positiva reflejando la tecnología (el tamaño de las redes); β es un coeficiente positivo que mide el efecto adverso de la pesca de uno sobre la del otro, y $e, E =$ la cantidad de tiempo (fracción de un día) que min. y may. destinan a pescar. Cada uno de los pescadores experimentan utilidad al comer pescado y desutilidad en el esfuerzo:

$$\begin{aligned} u &= y-e^2 \\ U &= Y-E^2 \end{aligned}$$

(11.1) Asuma una situación inicial en la que ambos tienen libre acceso al lago y pescan en los niveles del Equilibrio de Nash. Dada esta situación inicial, diga cómo determinaría Usted el máximo que Min. estaría dispuesto a pagar a May. para comprar derechos de propiedad en el lago, asumiendo que la propiedad permitiría a Min. regular el acceso de May al lago.

11.1 En la situación original ambos están en el EN. $Min.$ maximiza su utilidad:

$$u = \alpha\left(1-\beta E\right)e - e^2$$

Diferenciando con respecto a e e igualando a cero, nos da la CPO:

$$u_e = \alpha\left(1-\beta E\right) - 2e = 0$$

Resolviendo la CPO para e obtenemos la fmr de Min.:

$$e^*(E) = \frac{\alpha\left(1-\beta E\right)}{2}$$

La fmr de May. se deriva de la misma forma.

Sabemos que en un equilibrio de Nash todos tienen que estar respodiendo de la mejor manera. Por lo tanto, para hallarlo sustituimos la expresión de la fmr $E^* = E^*(e)$ en la expresión de arriba. Como el problema para May. es análogo al problema de Min., las fmr son iguales y por ende en el EN ambos responden de la misma manera. Por lo que sustituyendo $E = e$ obtenemos el equilibrio de Nash que es:

$$e^N = \frac{\alpha}{2 + \alpha\beta} = E^N$$

Si $Min.$ adquiere el lago, puede hacer dos cosas: excluir a May del mismo o regular la cantidad de horas que May puede pescar. En el segundo caso, Min puede a su vez, emplear a May por un salario o venderle un permiso de pesca. En cualquier caso Min maximizará su utilidad eligiendo conjuntamente e y E.

Por lo tanto, para determinar lo máximo que Min estaría dispuesto a pagar habría que calcular la utilidad neta de Min en cada una de estas tres opciones, determinar en cuál de éstas Min obtiene la mayor utilidad neta (de la compensación a May). La máxima disposición a pagar sería la diferencia entre este valor máximo y la utilidad que obtiene en el EN.

Vimos que en este problema a Min nunca le convendrá fijar $E = 0$ (excluir a May del lago). O sea que esta opción queda descartada.

Con respecto a las otras dos, vimos en el texto que las utilidades de Min en el caso de la venta de un permiso de pesca y en el caso de emplear a May es la misma. En el texto, en ambos casos Min terminaba maximizando la suma de las utilidades netas del esfuerzo, dejando a May en $U = 0$ (pagándole un salario igual a su desutilidad del esfuerzo o cobrándole un precio igual a su utilidad neta de la pesca). En este caso, la única diferencia es que ahora es que Min debe dejar a May con un nivel de utilidad igual al nivel que May logra con el EN, y no ya igual a cero.

Por lo tanto, la máxima disposición a pagar será la diferencia entre lo que obtiene Min cuando es el dueño del lago y emplea a May o le vende un permiso tal que lo deja a May con el nivel de utilidad del EN (U_N), y la utilidad que obtiene él (Min) en el EN (u_N).

El problema de Min en el caso de venderle un permiso al precio F sería:

$$\max_{e,E} \omega = \alpha(1 - \beta E)e - e^2 + F$$
$$\text{sujeto a } \alpha(1 - \beta e)E - E^2 - F \geq U_N$$

Asumimos que la restricción de participación se cumple como igualdad. Sustituyendo,

$$\max_{e,E} \omega = \alpha(1 - \beta E)e - e^2 + \alpha(1 - \beta e)E - E^2 - U_N$$

Las CPO de Min son:

$$\begin{aligned} \omega_e &= \alpha(1-\beta E) - 2e - \alpha\beta E = 0 \\ \omega_E &= \alpha(1-\beta e) - 2E - \alpha\beta e = 0 \end{aligned}$$

Recordando una vez más que estas condiciones tienen una solución tal que $e = E$,

$$\widetilde{e} = \frac{\alpha}{2+2\alpha\beta} = \widetilde{E}$$

Se puede ver fácilmente que estos niveles son menores a los del *EN*. Por lo tanto, es una mejora de Pareto sobre el EN y es Pareto-óptimo, según habíamos concluído antes. Es el punto ρ en la Figura 4.5. Pero los niveles de utilidad son diferentes.

(11.2) Considere las asignaciones: (i) el Equilibrio de Nash, (ii) el óptimo social, (iii) los dos son altruistas con $a \in (0,1)$ (recordar que en el modelo con altruismo la función de utilidad de Min. era $u = y - e^2 + aU$, donde U es la utilidad de May., y la de May. se construía similarmente) y se obtiene el equilibrio de Nash, y cuando Min. (iv) es el primero en mover y (v) hace una oferta del tipo tómalo o déjalo. (Éstas son 5 asignaciones diferentes). ¿Qué pares puede usted rankear en términos de Pareto?

(i) **Equilibrio de Nash***:* (del punto anterior)

$$e^N = \frac{\alpha}{2+\alpha\beta} = E^N$$

(ii) **Óptimo Social***:*

$$\max_{e,E} \omega = \alpha(1-\beta E)e - e^2 + \alpha(1-\beta e)E - E^2$$

CPO:

$$\begin{aligned} \omega_e &= \alpha(1-\beta E) - 2e - \alpha\beta E = 0 \\ \omega_E &= \alpha(1-\beta e) - 2E - \alpha\beta e = 0 \end{aligned}$$

Recordando que la solución a estas ecuaciones implica $e = E$:

$$\alpha(1-\beta e) - 2e - \alpha\beta e = 0$$
$$\boldsymbol{e}^{OS} = \frac{\alpha}{2+2\alpha\beta}$$

Otra forma útil de verlo

$$\max_{e,E} v(e,E) + V(e,E)$$

CPO

$$\begin{aligned} v_e + V_e &= 0 \\ v_E + V_E &= 0 \end{aligned}$$

Ó

$$\frac{v_e}{v_E} = \frac{V_e}{V_E}$$

(iii) **Altruismo***:*

$$\max_{e,E} \omega = \alpha \left(1 - \beta E\right) e - e^2 + a \left[\alpha \left(1 - \beta e\right) E - E^2\right]$$

CPO (una)

$$\omega_e = \alpha \left(1 - \beta E\right) - 2e - a\alpha\beta E = 0$$

No es OP para $a < 1$. Si $a = 1$ sí.
En el equilibrio simétrico:

$$\alpha \left(1 - \beta e\right) - 2e - a\alpha\beta e = 0$$

$$\boldsymbol{e}^{Alt} = \frac{\alpha}{2 + \left(a + 1\right) \alpha\beta}$$

Vemos de nuevo que los niveles de esfuerzo serán menores al del EN, pero mayores que los del OS para todo $a \in \left(0, 1\right)$. Sólo si $a = 1$, entonces los niveles de esfuerzo coinciden con los del OS. Podemos de otra forma también que el altruismo tampoco será un $OP:$ *las* CPO del problema serán

$$\begin{aligned} v_e + aV_e &= 0 \\ av_E + V_E &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{v_e}{V_E} = a^2 \frac{V_e}{V_E}$$

Donde se ve claramente que sólo si $a = 1$ esta condición coincide con las del OP.

(iv) **Min mueve primero***:*

$$\max_{e} \alpha \left(1 - \beta E\right) e - e^2$$

$$\text{s.a. } E(e) = \frac{\alpha \left(1 - \beta e\right)}{2}$$

la fmr de May que vimos al comienzo.Sustituyendo

$$\max_{e} \alpha \left(1 - \beta \left[\frac{\alpha \left(1 - \beta e\right)}{2}\right]\right) e - e^2 = \alpha e - \frac{\alpha^2 \beta e}{2} + \frac{\left(\alpha\beta e\right)^2}{2} - e^2$$

$$CPO : \alpha - \frac{\alpha^2 \beta}{2} + \left(\alpha\beta\right)^2 e - 2e = 0$$

$$\boxed{\frac{\alpha(2-\alpha\beta)}{2\left[2-(\alpha\beta)^2\right]} = e^{Stack}}$$

¿Es un OP este equilibrio? Lo que hace Min es $\max_e u(e, E(e))$, por lo que la CPO es $u_e + u_E * E\acute{}(e) = 0$, ó $-\frac{u_e}{u_E} = E\acute{}(e)$. Esto nos dice que el equilibrio del juego en el que Min mueve primero es el punto en que la pendiente de la fmr de May es tangente a la curva de indiferencia de Min (ambas pendientes se igualan).

(v) Tómalo o déjalo: En este caso, Min tiene el poder para decirle a May. "yo pesco e y tu E, si no lo aceptas jugamos Nash", o cualquier otra cosa que Min pueda imponer. En este caso Min resuelve:

$$\max_{e,E} \ \alpha\left(1-\beta E\right)e-e^2$$
$$\text{s.a. } \alpha\left(1-\beta e\right)E-E^2\geq K$$

Se puede ver claramente este tipo de problemas conducen a un OP.

Utilizando estos resultados, a continuación Pareto-rankeamos los distintos equilibrios de a pares, cuando es posible.

(1) *EN vs. Óptimo Social:* El EN es Pareto-inferior al óptimo social. En el EN no se da la igualdad $\frac{v_e}{v_E}=\frac{V_e}{V_E}$, ya que $V_E=0$ y $v_e=0$ (mientras que $V_e<0$ y $v_E<0$). Por lo que en lugar de ser tangentes las curvas de indiferencia son perpendiculares en el EN.

(2) *EN vs. uno mueve primero:* El EN no se puede rankear respecto al equilibrio cuando Min *mueve primero* ya que éste va a estar mejor y May va a estar peor (o mejor, ver parte c).

(3) *EN vs. Tómalo o déjalo:* El EN es Pareto-inferior al del *Tómalo o déjalo* ya que el que hace la oferta (Min) va a estar mejor y el que la recibe no va a estar peor (siempre puede rechazar la oferta y mantener el mismo nivel de utilidad que en la situación original (EN)).

(4) *EN vs. altruismo:* El EN es Pareto-inferior al equilibrio del modelo con *altruismo*, ya que aún pescando los niveles de Nash, ambos obtienen mayor utilidad por la utilidad del otro.

(5) *Óptimo Social vs. uno mueve primero:* El equilibrio del juego donde uno *mueve primero* no es comparable con el *óptimo social* si nos damos cuenta que el que mueve segundo no siempre está peor (parte c). Si mantenemos los supuestos del modelo original ($\beta<0$), no vamos a alcanzar un óptimo de Pareto, por lo que el equilibrio será pareto-inferior.

(6) *Óptimo Social vs. tómalo o déjalo:* El equilibrio de una oferta *tomalo o déjalo* es un óptimo de Pareto. El que hace la oferta compensa al otro respecto a su fallback y maximiza el resto del excedente. Por lo tanto es un *óptimo social* también. En tal sentido, no se pueden comparar tampoco.

(7) *Óptimo Social vs. altruismo:* El equilibrio del modelo con *altruismo* (con $a<1$) está sobre la linea de 45^o entre el *óptimo social* y el EN.

(8) *Uno mueve primero vs. tómalo o déjalo:* El equilibrio en que uno *mueve primero* no es comparable con el equilibrio en que uno hace la oferta *tómalo o déjalo* si nos damos cuenta que el que mueve segundo no siempre está peor (parte c). Si mantenemos los supuestos del modelo original ($\beta<0$), no vamos

a alcanzar un óptimo de Pareto, por lo que el equilibrio será pareto-inferior al del *tómalo o déjalo,* el cual es un OP.

(9) *Uno mueve primero vs. altruismo:* El equilibrio del modelo con *altruismo* y el del modelo donde uno *mueve primero* tampoco se pueden comparar porque el que mueve primero está mejor y el que mueve segundo está peor que en un EN con altruismo.

(10) *Altruismo vs. Tómalo o déjalo:* El equilibrio del juego cuando Min hace una oferta del tipo tómalo o déjalo es un OP, como acabamos de ver. Por otro lado, cuando el altruismo no es "completo" ($a < 1$), como supusimos, el altruismo no alcanza para implementar un OP. Por lo tanto el equilibrio de altruismo es Pareto-inferior al de tómalo o déjalo.

(c) ¿Cómo puede transformarse en algo ventajoso (relativo al Equilibrio de Nash) ser el segundo en mover? (Pista: transforme la Tragedia de los Pescadores en una Cacería del Ciervo asumiendo $\beta < 0$ (pescar es una actividad grupal y la captura de uno varía positivamente con el nivel de esfuerzo de los otros).

(d) Asuma que los dos pescadores tienen funciones de utilidad que expresan su preocupación por el bienestar del otro, condicional a su comportamiento. De esta forma, la función nueva función de utilidad de Min., w, sería

$$w = u + U\frac{a + \lambda(1 - E)}{1 + \lambda}$$

donde u y U son las funciones de utilidad originales del problema, $\lambda \in [0, 1]$, y la función de utilidad modificada de May. es análoga. Derive la función de mejor respuesta de Min. y muestre que no existe nivel de λ (en el intervalo unitario) que resultará en el óptimo social

$$\widetilde{e} = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha\beta} = \widetilde{E}$$

(la solución del permiso de pesca) si $a = 0$, mientras que $a = 1$ (con $\lambda = 0$) implementa el óptimo social. ¿Que quieren decir los valores de λ y a que implementan el óptimo social?

Solución

(c) El problema de May, que mueve segundo es el de siempre:

$$\max_{E} U = \alpha\,(1 - \beta e)\,E - E^2$$

Vemos que ahora, asumiendo $\beta < 0$, $U_e = -\alpha\beta E > 0$. Cuanto más pesca Min, mejor está May. Pescar es una actividad grupal y la captura de uno varía positivamente con el nivel de esfuerzo de los otros. Hemos transformado Tragedia de los Pescadores en una Cacería del Ciervo. Como consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial E} &= \alpha\,(1-\beta e) - 2E = 0 \\ E(e) &= \frac{\alpha\,(1-\beta e)}{2} \end{aligned}$$

con $E'(e) = -\alpha\beta/2 > 0$. Las estrategias son ahora complementarias. O, dicho de otro modo, existe complementariedad estratégica.

Para Min, que mueve primero, las CPO son ahora:

$$\underbrace{\alpha(1-\beta E(e))\overbrace{-\alpha\beta E'(e)e}^{>0}} = 2e$$

El lado izquierdo de la igualdad se hace más grande que en el caso en que los dos mueven al mismo tiempo (EN). El e va a tener que ser mayor que en el

equilibrio de Nash. Por lo tanto, como $U_e > 0$, el mayor nivel de May en este equilibrio le sube el nivel de utilidad a May con respecto al que obtenía en el EN. Le es ventajoso mover segundo.

(d) Min.:

$$\begin{aligned} \max_e w &= u + U\frac{a+\lambda(1-E)}{1+\lambda} \\ \max_e w &= \alpha\,(1-\beta E)\,e - e^2 + \left[\alpha\,(1-\beta e)\,E - E^2\right]\frac{a+\lambda(1-E)}{1+\lambda} \\ CPO &: \alpha\,(1-\beta E) - 2e - \alpha\beta E\frac{a+\lambda(1-E)}{1+\lambda} = 0 \end{aligned}$$

De aquí sale que la fmr de $Min : e = \frac{\alpha(1-\beta E)\frac{a+\lambda(1-E)}{1+\lambda}}{2}$.

Comparando las CPO de este problema con las del EN, vemos que para que el equilibrio de Nash resulte en el óptimo social se tiene que dar que $\frac{a+\lambda(1-E)}{1+\lambda} = 1 \Leftrightarrow a + \lambda(1-E) = 1+\lambda$. Esto nunca se va a cumplir para $a = 0$ porque esto significaría $\lambda(1-E) = 1+\lambda$. En el óptimo $E > 0$, por lo que $\lambda(1-E) < \lambda$. Al mismo tiempo $1+\lambda > \lambda$, por lo que la igualdad no se cumple.

Si $a = 1$ y $\lambda = 0, CPO : \alpha\,(1-\beta E) - 2e - \alpha\beta E = 0$,la cual es la misma implementa el óptimo social.

12. Competencia Fiscal (Cap. 4)

Considere dos países, Mínúsculas y Mayusculás, cuyos gobiernos eligen un nivel de impuestos. El problema que tienen ambos países es que el nivel de empleo depende del stock de capital y, siendo movible entre ambos países, éste último varía inversamente con el nivel de los impuestos. Los niveles de impuestos en cada país, t y T, son fijados como una fracción del ingreso producido en cada país y varían entre 0 y 1. El ingreso producido en cada país (y e Y) es el producto entre

un nivel exógeno de productividad (q **y** Q) **y el nivel de empleo** (n **y** N). **Esto es** $Y = QN$ **e** $y = qn$. **El gasto público (o recaudación) en cada país es entonces** $g = tqn$ **y** $G = TQN$. **Cada país desea elegir el nivel de impuestos que maximiza este gasto/recaudación. El nivel de empleo en Minúsculas depende del nivel de impuestos de acuerdo a la siguiente ecuación**

$$n = \underline{n}\left(1 + m\left(T - t\right) - rt\right)$$

donde $\underline{n}, r$ **y** m **son constantes positivas, la última de las cuales refleja el grado de apertura de la economía. La ecuación para Mayúsculas es análoga.**

(a) Asumiendo que $0 < m < \infty$, **derive las funciones de mejores respuestas de ambos países y grafíquelas.**

Mínúsculas resuelve el siguiente problema:

$$\max_{t} g = tqn = tq\underline{n}\left(1 + m\left(T - t\right) - rt\right) = q\underline{n}\left(t + tmT - \left(m + r\right)t^2\right)$$

La CPO de este problema es

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 + mT - 2(m + r)t = 0$$

de donde sale que la fmr de Minúsculas es

$$t(T) = \frac{1 + mT}{2(m + r)}$$

Por su parte, *Mayúsculas resuelve el siguiente problema:*

$$\max_{T} G = TQN = TQ\underline{N}\left(1 + m\left(t - T\right) - rT\right) = Q\underline{N}\left(T + tmT - \left(m + r\right)T^2\right)$$

La CPO de este problema es

$$\frac{\partial G}{\partial T} = 1 + mt - 2(m + r)T = 0$$

de donde sale que la fmr de Mayúsculas es

$$T(t) = \frac{1 + mt}{2(m + r)}$$

(b) De una expresión explícita para el efecto de las variaciones de T **sobre** t

$$\frac{\partial t(T)}{\partial T} = \frac{m}{2(m + r)}$$

(c) ¿Tiene la información suficiente para determinar si un cambio en la apertura de la propia economía aumenta, disminuye o deja constante la forma en que el nivel del impuesto óptimo varía ante cambios en el impuesto del otro?. Si no tiene la información, explique por qué no.

Entendiendo por impuesto óptimo a la mejor respuesta:

$$\frac{\partial t(T)/\partial T}{\partial m}=\frac{2(m+r)-m\times 2}{4(m+r)^2}=\frac{r}{2(m+r)^2}>0$$

Cuanto mayor la apertura de la economía, mayor es el incremento en t que provoca un incremento en T.

(d) ¿Cuál es el equilibrio de Nash si $m=0,75$ y $r=0,75$ para ambos países?

$$\begin{aligned} t(T) &= \frac{1+mT}{2(m+r)}=\frac{1+0.75T}{3} \\ T(t) &= \frac{1+mt}{2(m+r)}=\frac{1+0.75t}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{1+0.75\frac{1+0.75t}{3}}{3} \\ \mathbf{t}^* &= \mathbf{0.444\,44} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^*=\frac{1+0.75\times 0.444\,44}{3}=\mathbf{0.444\,44}$$

Equilibrio de Nash es $(t^N,T^N)=(0.44444,\ 0.44444)$

(e) Muestre que en el equilibrio de Nash existe algún incremento en ambos niveles de impuesto que es una mejora de Pareto.

$$\begin{aligned} dg &= g_t dt+g_T dt \\ dG &= G_t dt+G_T dT \end{aligned}$$

$$g_T=\frac{\partial\left[tq\underline{n}\left(1+m\left(T-t\right)-rt\right)\right]}{\partial T}=tq\underline{n}m>0$$

Por lo tanto, como $g_t=G_T=0$ (porque los países maximizan) y al mismo tiempo $g_T>0$ y $G_t>0$, un pequeño aumento en t y T aumentará la recaudación de ambos países. Es una mejora de Pareto. QED

(f) ¿Cuál sería el valor óptimo del impuesto común si ambas naciones acordaran en adoptarlo? (siga asumiendo que $m=0,75$ y $r=0,75$ y que no hay costos de negociación).

Los países actúan coordinadamente y maximizan la recaudación agregada.

$$\max_{t,T} g+G = tqn+TQN = tq\underline{n}\left(1+m\left(T-t\right)-rt\right)+TQ\underline{N}\left(1+m\left(t-T\right)-rT\right)$$

Las CPO de este problema son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(g+G\right)}{\partial t} &= \frac{\partial\left(tq\underline{n}\left(1+m\left(T-t\right)-rt\right)+TQ\underline{N}\left(1+m\left(t-T\right)-rT\right)\right)}{\partial t} \\
&= \underline{n}q+\underline{N}QTm+Tm\underline{n}q-2m\underline{n}qt-2\underline{n}qrt=0 \\
\frac{\partial\left(g+G\right)}{\partial T} &= \frac{\partial\left(tq\underline{n}\left(1+m\left(T-t\right)-rt\right)+TQ\underline{N}\left(1+m\left(t-T\right)-rT\right)\right)}{\partial T} \\
&= \underline{N}Q-2\underline{N}QTm-2\underline{N}QTr+\underline{N}Qmt+m\underline{n}qt=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{n}q+\underline{N}QT\times 0.75+T\times 0.75\times\underline{n}q-2\times 0.75\times\underline{n}qt-2\underline{n}q\times 0.75\times t &= 0 \\
\underline{N}Q+\underline{N}Q\times 0.75\times t+t\times 0.75\times\underline{n}q-2\times 0.75\times\underline{N}QT-2\underline{N}Q\times 0.75\times T &= 0
\end{aligned}$$

Asumiendo que los dos países tienen la misma productividad ($q=Q$) y el mismo nivel exógeno de empleo ($\underline{n}=\underline{N}$):

$$\begin{aligned}
\underline{n}q+\underline{n}qT\times 0.75+T\times 0.75\times\underline{n}q-2\times 0.75\times\underline{n}qt-2\underline{n}q\times 0.75\times t &= 0 \\
\underline{n}q+\underline{n}q\times 0.75\times t+t\times 0.75\times\underline{n}q-2\times 0.75\times\underline{n}qT-2\underline{n}q\times 0.75\times T &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1+T\times 0.75+T\times 0.75-2\times 0.75\times t-2\times 0.75\times t &= 0 \\
1+0.75\times t+t\times 0.75-2\times 0.75\times T-2\times 0.75\times T &= 0
\end{aligned}$$

Cuya solución es $[\mathbf{T=0.666\,67,t=0.666\,67}]$

(g) Compare su respuesta en (f) con el nivel de impuestos óptimo de una economía cerrada. Explique por qué son similares o por qué difieren.

Para una economía cerrada ($m=0$), el problema es:

$$\max_{t} g = tqn = tq\underline{n}\left(1-rt\right)$$

CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= q\underline{n}-2q\underline{n}rt=0 \\
&= 1-2rt=0 \\
t &= \frac{1}{2r}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

El monto del impuesto de una economía cerrada coincide con el monto del impuesto de las economías coordinadas. La razón es simple: hemos supuesto que *ambos países son iguales. Por lo tanto, si se comportan de forma coordinada se comportarán como una sola economía cerrada. Al ser la función de recaudación una función lineal del producto, el nivel del impuesto óptimo es el mismo.*

(h) Imagine que Mayúsculas es un país poderoso y que puede fijar la política impositiva y que Minúsculas obedece porque cree en la amenaza de Mayusculas de adoptar el nivel de impuestos del equilibrio de Nash si Minúsculas no cumple. ¿Que problema de optimización resolverá Mayúsculas para determinar el nivel de impuestos a imponer a Minúscula y el que adoptará para sí?

Mayúsculas resolverá el siguiente problema:

$$\max_{t,T} G(T,t)$$
$$\text{sujeto a } g(T,t) \geq g(T^N, t^N) = g^N$$

(i) ¿Son estos niveles de impuestos Pareto-óptimos? Explique por que sí, por qué no o por qué no se puede decir.

Estos niveles de impuestos son obviamente Pareto-óptimos:

$$\max_{t,T} L = G(T,t) + \lambda \left[g(T,t) - g(T^N, t^N) \right]$$

Las condiciones necesarias para un máximo interior son:

$$\begin{aligned} L_T &= G_T + \lambda g_T = 0 \\ L_t &= G_t + \lambda g_t = 0 \\ L_\lambda &= g(T,t) - g(T^N, t^N) = 0 \end{aligned}$$

De la primera y la segunda sale que

$$\frac{G_T}{G_t} = \frac{g_T}{g_t}$$

La que es la condición de un óptimo de Pareto.

(j) Usando cualquier tipo de razonamiento (gráfico, numérico, etc.) elabore un ranking de las diferentes situaciones (Nash, Impuesto común, un país poderoso) de acuerdo al nivel de recaudación/gasto para cada país.

Los niveles de impuestos para cada país en cada situación son:

	Nash	Coordinación	Cerrada
May	4/9	2/3	2/3
Min	4/9	2/3	2/3

Las recaudaciones correspondientes son:

	Nash	Coordinación	Cerrada
May	$G = 0.296\,30\underline{N}Q$	$G = \frac{\underline{N}Q}{3}$	$G = \frac{\underline{N}Q}{3}$
Min	$g = 0.296\,30\underline{n}q$	$g = \frac{\underline{n}q}{3}$	$g = \frac{\underline{n}q}{3}$

Es fácil ver que los países recaudan más si se coordinan que si no (Nash). Con respecto a qué pasa cuando uno de los dos tiene el poder para fijar ambos impuestos, lo más fácil es verlo a través de un análisis gráfico (la solución numérica del problema es muy complicada).

Lo que ilustra el gráfico es lo siguiente: En el equilibrio de Nash (el punto donde ambas curvas de iso-recaudación se cruzan g_N y G_N) ambos impuestos son menores que en caso de la coordinación, el punto en ambas son tangentes. En otras palabras, $(T^N, t^N) < (T^{COOP}, t^{COOP})$. En la situación en que May tiene el poder de fijar ambos impuestos, lo que hace May es fijar el par de impuestos en el punto en que una de las curvas de iso-recaudación suya se hace tangente a g_N de Min.En este punto, el impuesto de May es menor al que fijaba cuando coordinaban y el de Min es mayor. Esto se debe a que

(k) Cuando sea posible, Pareto-rankee las situaciones

El equilibrio de Nash es Pareto-inferior a las otras dos soluciones. Con respecto a Corrdinación vs. un país poderoso no podemos compararlos en términos de Pareto ya que Min está peor en la segunda situación.

13. Asymmetric Nash bargaining (Cap. 5)

La mayoría de las negociaciones no son simétricas: empleadores y empleados tienen diferentes conjuntos de estrategias y opciones externas. Típicamente, existen diferencias en oportunidades para mejorar el poder de negociación o diferencias en preferencias debido a diferencias en riqueza.

Poder de negociación endógeno. Suponga dos individuos que participan en un proceso de producción conjunto ofreciendo ambos una unidad de un insumo y produciendo un producto (neto de costo) γ. Han acordado en una negociación de Nash del excedente conjnunto resultante. Como en el texto, tanto Mayúscula como Minúscula tienen una posición de reserva de Z y z respectivamente, y el poder de negociación de Mayúscula está dado por α. La oferta del insumo no es verificable y Minúsculas (pero no Mayúsculas) descubre que gastando una fracción μ de su insumo para mejorar su poder de negociación (empleando abogados, teóricos de juegos, etc.) más que en producción, α puede aumentar. Como resultado, $\alpha = \alpha(\mu)$, con $\alpha' > 0$ y $\alpha'' < 0$. Por spuesto, desviando recursos hacia un uso no productivo baja el excedente conjunto, el cual asumimos es la suma de los insumos dedicados a la producción, o $2 - \mu$.

13.1. De la condición de primer orden para la elección de μ por parte de minúsculas y explique qué significa.

El problema para minúsculas es

$$\max_{\mu} v = z + \alpha(\mu)(2 - \mu)$$

(De acuerdo a la negociación de Nash, minúsculas se llevará su posición de reserva más una proporción del excedente conjunto que depende de su poder de negociación).

CPO:

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \alpha' (\mu) (2 - \mu) - \alpha (\mu) = 0$$

Minúsculas invierte en abogados y teóricos de juegos para mejorar su poder de negociación hasta que el beneficio marginal de hacerlo ($\alpha' (\mu) (2 - \mu)$: el incremento en su tajada producto del incremento en su poder de negociación) es igual al costo marginal $\alpha (\mu)$: la disminución de la parte del excedente conjunto que se apropia prodcto de que este disminuye porque él destina una unidad menos del insumo a la producción).

13.2 Si $\alpha = 1/2 + \sqrt{\mu}$ para $\mu < 0,7$, de la elección de μ por parte de minúsculas, el nivel del excedente conjunto, y la división del excedente conjunto entre los dos.

De 13.1 sabemos que

$$2 - \frac{\alpha (\mu)}{\alpha' (\mu)} = \mu^*$$

Si $\alpha = 1/2 + \sqrt{\mu}$,

$$2 - \frac{1/2 + \sqrt{\mu}}{1/2\sqrt{\mu}} = \mu^*$$

Haciendo cuentas,

$$3\mu^* + \sqrt{\mu^*} - 2 = 0$$

de donde

$$\mu^* = 0,4444$$

(la raiz $\mu^* = 1$ se rechaza por la letra $\alpha = 1/2 + \sqrt{\mu}$ **para** $\mu < 0,7$).

El nivel del excedente conjunto es

$$2 - 0.4444 = 1.5556$$

y la división del excedente conjunto es

$$\alpha = 1/2 + \sqrt{0.4444} = 1.1666$$

Como α no puede ser mayor que 1, $\alpha^* = 1$.

Bienestar y poder de negociación: Considere la negociación de Nash entre minúsculas y Mayúsculas dada por la ecuación 5.1. **Suponga que para la gente relativamente pobre la utilidad marginal del premio decrece fuertemente en el tamaño del premio, mientras que para la gente que está relativamente mejor la función de utilidad es más lineal. (Alguna evidencia sobre este efecto se da en el Capítulo 9). Reflejando este supuesto, sea Mayúsculas el miembro rico del par, y sea la función de utilidad de Minúsculas la siguiente transformación de la función de utilidad de Mayúsculas**

$$v(x) = g(V(1 - x))$$

con $g' > 0$ y $g'' \leq 0$.

13.3 Muestre que Minúsculas recibirá menos de la mitad del premio en la negociación de nash si $g'' \leq 0$ y que se repartirán el premio en partes iguales si $g'' = 0$.

Suponga que al comienzo de esta historia los dos tenían la misma función de utilidad; $v(x) = V(1-x)$. En este caso es facil de ver que la condición

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{V'(1-x)}{V(1-x)}$$

implica que ambos se preparten la tora en partes iguales.

Vemos que:

$$\frac{\partial \frac{v'(x)}{v(x)}}{\partial x} = \frac{v''(x)v(x) - v'(x)}{v(x)^2} < 0$$

lo que significa que $\frac{v'(x)}{v(x)}$ tiene pendiente negativa.

Por su parte

$$\frac{\partial \frac{V'(1-x)}{V(1-x)}}{\partial x} = \frac{-V''(1-x)V(1-x) + \left[V'\left(1-x\right)\right]^2}{\left[V\left(1-x\right)\right]^2} > 0$$

lo que significa que $\frac{V'(1-x)}{V(1-x)}$ tiene pendiente positiva.

Graficamente:

Lo que muestra la gráfica es que cuando las dos funciones de utilidad son iguales se reparten la torta en partes iguales. Ahora suponga que minúsculas se vuelve más pobre (relativamente màs averso al riesgo). Ahora $\frac{v'(x)}{v(x)}$ se transforma en $\frac{g'[V]\times V'()}{g[V]}$ que es la misma curva de antes pero trasladada hacia abajo, como muestra la figura. Esto es, $\frac{g'[V]\times V'()}{g[V]} < \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{V'(1-x)}{V(1-x)}$. Probar esto implica probar

$$\frac{g'\left[V\right]}{g\left[V\right]} < \frac{1}{V(1-x)}$$

ó $g'\left[V\right] < \frac{g[V]}{V}$, lo cual es obvio geometricamente (ver figura siguiente)

Utilizando cálculo, vemos que $V \times g'(V) = g(V)$ cuando $V = 0$. A su vez, $\left[V \times g'(V)\right]' = g' + V \times g'' < g'$ si $g'' < 0$. O sea, si $g'' < 0$, $V \times g'(V)$ crece más lentamente que g; $V \times g'(V) < g$ o $g\prime(V) < g/V$ para todo $V > 0$ $(x < 1)$. Con esto queda demostrado que la curva $\frac{g'[V]\times V'()}{g[V]}$ es una traslación hacia abajo de la curva $\frac{v'(x)}{v(x)}$. Por lo que la solución de Nash que hace $\frac{g'[V]\times V'()}{g[V]} = \frac{V'(1-x)}{V(1-x)}$ va ser para un $x < 1/2$ (el caso en que ambas funciones de utilidad son iguales. QED.

15. Deadheads meet Coase (Cap.6)

Considere dos vecinos con hábitos nocturnos en conflicto: a uno le gusta escuchar cumbia hasta tarde y a otro le gusta acostarse temprano. Las funciones de utilidad del vecino que gusta de acostarse temprano y del vecino cumbiero son, respectivamente:

$$\begin{aligned} u &= y - \alpha(a-x)^2 \\ v &= -y - \beta(b-x)^2 \end{aligned}$$

donde α y β son constantes positivas que expresan la importancia del toque de queda en relación al ingreso en el bienestar de cada uno. Normalice la hora del toque de queda x tal que $x \in [0,1]$ (piense en 0 como un toque de queda a las 6 P.M. y 1 a las 6 A.M.), y sea $a = 1/4$ y $b = 3/4$ (i.e., 9 P.M. y 3 A.M. respectivamente). Asuma que a ambos les importa igualmente la hora a la que se fija el toque de queda, $\alpha = \beta = 1$. Suponga que la negociación toma la forma de un pago y que el cumbiero le hace al tempranero para que éste acepte un toque de queda más tarde del que se anuncia inicialmente, cualquiera sea éste. ($y < 0$ significa un pago de el tempranero hacia el cumbiero por un toque de queda más temprano).

1. Muestre que el planificador social interesado en maximizar la suma de utilidades de los dos individuos fijará $x^* = 1/2$. (medianoche).

Suponga ahora que el toque de queda se fija a las 3 A.M. (la hora que prefiere el "cumbiero"), y que el cumbiero puede diseñar una oferta del tipo "tómalo o déjalo" al otro individuo prometiendo (asumiremos creíblemente) apagar la música más temprano a cambio de un pago (igual a $-y$).

2. ¿Qué oferta hará el cumbiero? Explique por qué el toque de queda voluntario es idéntico al óptimo social.

3. Explique por qué, si se hubiera fijado el toque de queda incial en $1/4$ (la hora preferida por el "buen vecino") el resultado x de la negociación Coaseana hubiera sido el mismo que la oferta del cumbiero o el óptimo del planificador social.

Asuma que el buen vecino tiene recursos limitados y no puede hacer un pago al cumbiero que supere $y^{\max}$.

4. **¿Cuál es el menor valor de $y^{\max}$ que induce al cumbiero a implementar el óptimo social (asumiendo, como arriba, que él está en condiciones de hacer un oferta "tómalo o déjalo").**

5. **Asuma ahora que es el buen vecino en lugar del cumbiero el que está en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo. (El toque de queda oficial es todavía 3 A.M.). ¿Cuál es el menor valor de de $y^{\max}$ que inducirá al buen vecino a implementar el óptimo social? ¿Por qué sus respuestas a este punto y al anterior difieren?**

Suponga que la cantidad de dinero que tiene el buen vecino para hacerle un pago al cumbiero es positiva pero demasiado pequeña como para hacer posible una negociación entre ambos que resulte en el toque de queda óptimo.

6. Muestre que existe algún toque de queda oficial (más temprano que 3 A.M. pero más tarde que el óptimo social) que, si impuesto por el planificador social, permitiría que la negociación entre ambos de acuerdo a una de las reglas de arriba resultara en la implementación del óptimo social.

7. ¿Por qué el planificador social más la negociación Coaseana logran conjuntamente lo que la negociación Coaseana no puede lograr sola en este caso?

Solución

1.
$$\max_x Utot = y - (a-x)^2 - y - (b-x)^2 = -(a-x)^2 - (b-x)^2$$

C.P.O

$$\begin{aligned}
2(a-x) + 2(b-x) &= 0 \\
2a + 2b &= 4x \\
\frac{a+b}{2} &= x^* \\
\mathbf{x}^* &= \mathbf{1/2}
\end{aligned}$$

2. $x = 3/4$

La utilidad del cumbiero (antes del pago) es $v = -(3/4 - 3/4)^2 = 0$

La utilidad del buen vecino (antes del pago) es $u = -(1/4 - 3/4)^2 = -(-1/2)^2 = -1/4$

El cumbiero va a maximizar su utilidad eligiendo el y *y el* x *tal que* $u = -1/4$. *Su problema de maximización es*

$$\max_{x,y,\lambda} L = -y - (3/4 - x)^2 + \lambda \left(y - (1/4 - x)^2 + 1/4 \right)$$

C.P.O.

$$\begin{aligned}
(1)\frac{\partial L}{\partial x} &= 2(3/4 - x) + \lambda \left(2\left(1/4 - x\right)\right) = 0 \\
(2)\frac{\partial L}{\partial y} &= -1 + \lambda = 0 \\
(3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y - (1/4 - x)^2 + 1/4 = 0
\end{aligned}$$

De (2) sabemos que $\lambda = 1$. *Sustituyendo en (1) obtenemos* $x = \frac{1}{2}$. *Sustituyendo en (3) obtenemos* $y = -\frac{3}{16}$

El toque de queda voluntario es idéntico al óptimo social porque en $x = 3/4$ *la desutilidad marginal de disminuir el toque de queda para el cumbiero es* $2(3/4 - 3/4) = 0$ *porque está en su óptimo, pero la utilidad marginal de hacerlo para el buen vecino es* $2\,(1/4 - 3/4) = -1$. *Por lo tanto habrá posibilidad de negociar hasta que ambas utilidades marginales sean iguales, cosa que sucede en el óptimo, a partir de donde el buen vecino ya no podrá compensar al cumbiero porque la utilidad marginal de bajar el toque de queda para el primero es menor que la desutilidad marginal de hacerlo para el cumbiero.*

3. *Hubiera sido el mismo porque el argumento anterior es idéntico. La negociación "para" en* $x = 1/2$.

Si $x = 1/4$, *la utilidad del cumbiero (antes del pago) es* $v = -(3/4 - 1/4)^2 = -1/4$ *y la utilidad del buen vecino (antes del pago) es* $u = -(1/4 - 1/4)^2 = 0$. *El buen vecino resolvería el problema*

$$\max_{x,y,\lambda} L = y - (1/4 - x)^2 + \lambda\left(-y - (3/4 - x)^2 + 1/4\right)$$

C.P.O.

$$\begin{aligned}
(1)\frac{\partial L}{\partial x} &= 2\,(1/4 - x) + \lambda\,(2(3/4 - x)) = 0\\
(2)\frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + -\lambda = 0\\
(3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -y - (3/4 - x)^2 + 1/4 = 0
\end{aligned}$$

De (2) sabemos que $\lambda = 1$. *Sustituyendo en (1) obtenemos* $x = \frac{1}{2}$. *Sustituyendo en (3) obtenemos* $y = \frac{3}{16}$. *La única diferencia es que ahora el cumbiero le tiene que pagar al buen vecino.*

4. **¿Cuál es el menor valor de $y^{\max}$ que induce al cumbiero a implementar el óptimo social (asumiendo, como arriba, que él está en condiciones de hacer un oferta "tómalo o déjalo").** *La situación inicial sigue siendo* $x = 3/4$, $v = 0$ *y* $u = -1/4$. **El menor valor de $y^{\max}$ que induce al cumbiero a implementar el óptimo social es aquel que lo deja indiferente entre recibir** *Si el cumbiero está en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo" el mínimo va a exigir aquel y tal que* $y^{\max}$ y fijar $x = 1/2$ y no recibir nada y dejar $x = 3/4$.*Es decir, el* $y^{\max}$ que hace $v = -y^{\max} - (3/4 - 1/2)^2 = 0$. *La solución es* $y^{\max} = -\frac{1}{16}$. *Este es un punto como el punto* z′ *del gráfico de abajo.*

5. **Asuma ahora que es el buen vecino en lugar del cumbiero el que está en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo. (El toque de queda oficial es todavía 3 A.M.). ¿Cuál es el menor valor de de $y^{\max}$ que inducirá al buen vecino a implementar el óptimo social? ¿Por qué sus respuestas a este punto y al anterior difieren?** Si existe información completa sobre las utilidades, el buen vecino sabrá que toda amenaza que le haga al cumbiero tal que le ofrezca un $y^{\max}$ menor (en términos absolutos) a $-3/16$ por fijar $x = 1/2$ no será creída por el cumbiero ya que $u(y^{\max}, x = 1/2) > u(0, x = 3/4)$ para todo $y^{\max}$ mayor (en términos aboslutos) a $-3/16$. Por lo tanto, el menor valor de $y^{\max}$ que inducirá al buen vecino a implementar el óptimo social es $-3/16$.

Las respuestas a este punto y al otro difieren porque desde una situación inicial incambiada respecto a los derechos de propiedad $(x = 3/4)$ *, en el punto* 4 el mínimo valor de $y^{\max}$ valor es aquel que compensa al cumbiero, y en el punto 5 es aquel que compensa al buen vecino. *Como las preferencias difieren, difieren los pagos.*

6. *La letra nos dice que el ingreso del buen vecino es inferior a cualquier pago que él le pueda hacer al cumbiero bajo cualquier institución que gobierne la negociación. Esto quiere decir que el ingreso del buen vecino es menor* $y^{\max}$ *que él ofrecería si estuviera en condiciones de hacer una oferta del tipo "tómalo o déjalo". Esto es, el ingreso del vecino es menor a* $1/16$. *Dado esto, ¿cuál tiene que ser el valor de* x *fijado por el regulador para que, suponiendo que el buen vecino es el que hace la oferta "tómalo o déjalo" (este va a ser el* x *más alejado de* $1/2$ *que pueda fijar el regulador), el cumbiero la acepte y se fije* $x = 1/2$*? En este valor de* x *el nivel de utilidad del cumbiero es* $v(x, y) = v(x, 0)$. *En el punto en que el buen vecino le da todo su ingreso para que el cumbiero acepte apagar la música a medianoche se da que* $v(x, y) = v(1/2, \overline{y})$, *donde* $\overline{y}$ *es el nivel de ingresos del buen vecino (ver gráfico arriba). Tenemos entonces:*

$$v(x, 0) = -(3/4 - x)^2 = -\overline{y} - 1/16 = v(1/2, \overline{y})$$

de donde sale

$$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{16\overline{y} + 1}$$

7. *Porque con la negociación coaseana el óptimo queda fuera del set de negociación posible (porque el vecino es pobre). Lo que hace el planificador social es cambiar las normas (los derechos de propiedad) para incluir el óptimo dentro del set.*

18. SHARECROPPING (Cap. 7)

Un agricultor produce un cultivo con la función de producción $Q = f(L)$,con f creciente y cóncava en su argumento y L siendo la cantidad de tiempo que trabaja. La función de utilidad del agicultor es la siguiente: $u = y - v(L)$,donde y es su ingreso y v es una función creciente y convexa. En lo que sigue suponga que el precio del bien producido es 1, o que el ingreso está medido en unidades de ese bien.

1. Si el agricultor es el demandante residual de su cultivo, ¿cuánto trabajará? Proporcione las condiciones de primer orden, explicando por qué el agricultor resuelve el problema que usted plantea.

Cuando el agricultor es demandante residual maximiza

$$u(L) = f(L) - v(L)$$

Por lo que trabaja hasta que

$$f'(L) = v'(L)$$

2. Si el agricultor es un asalariado cuya utilidad de reserva es z y L es contratable, muestre que el dueño de la tierra que emplea al agricultor le ofrecerá un contrato que implementará el mismo nivel de trabajo del punto anterior. Explique por qué el dueño de la tierra resuelve el problema que usted plantea.

El dueño de la tierra es ahora demandante residual de la producción. Le ofrecerá un contrato eligiendo el w y el L (contratable) que maximice sus beneficios sujeto a *la restricción de participación. del asalariado. Es decir,*

$$\begin{aligned} \max_{w,L} \pi &= f(L) - wL \\ \text{sujeto a } u &= wL - v(l) \geq z \end{aligned}$$

Haciendo la restricción una igualdad, el problema se transforma en

$$\max_{L} \pi = f(L) - v(l) - z$$

De donde se obtiene la misma CPO que en el punto anterior. Por lo que el trabajador implementará el mismo nivel de trabajo que en el punto anterior.

Suponga ahora que L *no es contratable* y que el dueño de la tierra le ofrece al agricultor un contrato de aparcería, de acuerdo al cual $y = sQ$.

3. ¿Cuánto trabajo pondrá ahora el agricultor como función de su participación en el producto, s. Proporcione las condiciones de primer orden, explicando por qué el trabajador resuelve el problema que usted plantea.

Ahora el agricultor resuelve

$$\max_{L} u = sf(L) - v(L)$$

CPO

$$sf'(L) = v'(L)$$

4. ¿Qué problema de optimización resolverá el dueño de la tierra (siendo el que mueve primero) para maximizar su ingreso neto? Explique y proporcione

las condiciones de primer orden para la elección de s por parte del dueño de la tierra.

El dueño de la tierra elegirá el s que maximiza

$$\pi = (1 - s)f(L(s))$$

donde $L(s)$ *es la función de mejor respuesta del agricultor, que sale de la CPO de arriba,* $sf'(L) = v'(L)$. *CPO son:*

$$\frac{d\pi}{ds} = -f(L(s)) + (1 - s)f'(L)L'(s) = 0$$

5. La cantidad de trabajo ejercida por el agricultor en el equilibrio de Nash, ¿es mayor o menor a la cantidad de equilibrio ejercida cuando el trabajo es contratable? Explique o demuestre, aunque sea gráficamente.

La cantidad de trabajo ejercida por el agricultor en el equilibrio de Nash viene determinada por

$$sf'(L) = v'(L)$$

La cantidad de trabajo ejercida por el agricultor en el caso del trabajo contratable viene determinada por

$$f'(L) = v'(L)$$

Como ambas funciones son crecientes en L *pero* f *es cóncava mientras que* v *es convexa, esto determina que la cantidad de trabajo elegida por el agricultor sea menor en el caso del Equilibrio de Nash. Esto se ve claramente con la ayuda de un gráfico:*

6. ¿Existe un contrato Pareto - eficiente que el dueño de la tierra y empleador le pueda ofrecer al agricultor (asumiendo que el trabajo no es contratable)? Explique cuál es y por qué funcionaría.

El dueño de la tierra le puede ofrecer al agricultor el producto total menos una renta fija por la tierra igual a R. *En este caso la utilidad del agricultor será*

$$u = f(L) - v(L) - R$$

Por lo que optimizando respecto a L *es fácil de ver que el agricultor elegirá el nivel de* L que hace

$$f'(L) = v'(L)$$

el nivel Pareto-óptimo hallado en el punto 1. El contrato funciona justamente porque hace al agricultor demandante residual de su producción.

Imagine que el dueño de la tierra puede alquilar un aparato que hace verificable la información respecto a la cantidad de trabajo que ejerce el agricultor/asalariado.

7. ¿Cuánto será lo máximo que estará dispuesto a pagar por este aparato si la alternativa es (i) aparcería, (ii) el contrato óptimo desarrollado por usted en el punto 6.

En ambos casos lo que estaría dispuesto a pagar como máximo sería la diferencia de beneficios entre el caso de L contratable (que sería la situación si compra la máquina) y el caso de aparcería o con contrato óptimo.

20. Un Equilibrio de Mercado de Trabajo Walrasiano? (Cap. 8)

Contrario al modelo de disciplina laboral del Capítulo 8, asuma que el esfuerzo es contratable. El problema es igual al visto en el Capítulo 8 en el resto de los aspectos: el empleador varía el salario w y h para maximizar beneficios mientras que el trabajador varía e para maximizar el valor presente de su utilidad.

1. ¿Qué tipo de contrato va a ofrecer el empleador?

Si el esfuerzo es contratable, $e = 1$ (el empleador no va a pagar una hora de trabajo h si el trabajador no trabaja toda la hora). A su vez, le va a pagar un salario tal que haciendo $e = 1$; el trabajador esté indiferente entre trabajar y no trabajar. (Hará que la restricción de participación esté activa). Entonces, w será aquel $\underline{w}$ que hace $v(1, \underline{w}) = z$. Con $w = \underline{w}$, el empleador luego maximiza $\pi = y(h) - \underline{w}h$, eligiendo el h, como es clásico, que hace el ingreso marginal $y'(h)$ igual al costo marginal del trabajo, $\underline{w}$.

2. ¿Asuma que la función de utilidad del trabajador es $u = y - e^2$, donde y es el ingreso del trabajador (ya sea el salario en el caso de estar empleado, o los beneficios por desempleo en el caso de estar desempleado). Asuma que la siguiente mejor alternativa para el trabajador es estar desempleado y que el seguro de desempleo es igual a 1, y que si desempleado $e = 0$. ¿Qué salario ofrecerá el empleador?

Cuando $u = y - e^2$ y $b = 1$, $v(1, \underline{w}) = \frac{w-1}{i}$ y $z = \frac{u(b,0)}{i} = \frac{1}{i}$. Por lo tanto, $\underline{w}$ es el que hace $\frac{w-1}{i} = \frac{1}{i}$, de donde $\underline{w} = 2$.

3. Muestre que el nivel de esfuerzo y salario resultantes son Pareto-eficientes y en equilibrio la oferta es igual a la demanda en el mercado de trabajo.

Es facil ver que son Pareto eficientes porque un aumento en w sube u pero baja π, y una disminución en w deja indiferente al trabajador (que se va al seguro de desempleo) pero no al empleador ya que no consigue contratar al trabajador. Mientras que una dismunión en e aumenta u pero baja π.($e = 1$; no puede aumentar).

Para demostrar que el mercado de trabajo está en equilibrio con estos valores, podemos decir simplemente que como los desempleados están indiferentes entre conseguir empleo y no conseguir, porque $v = z$, no puede haber ningún desempleado involuntario (alguien que está desemplado y quiere estar empleado). La oferta es entonces igual a la demanda.

4. El equilibrio Walrasiano es un caso especial del equilibrio competitivo en el modelo de renovación contingente. De los valores de e,

w y v que caracterizan el equilibrio Walrasiano en el modelo de renovación contingente. ¿Bajo qué condiciones se obtendrá asumiendo que e no es contratable?

El equilibrio Walrasiano está caracterizado por $v = z$. Llamemos $\underline{e}$ y $\underline{w}$ a los valores de e y w que hacen $v(\underline{e}, \underline{w}) \equiv z$.Esto quiere decir que el trabajador está indiferente entre estar empleado (recibiendo un salario $\underline{w}$ y realizando un esfuerzo $\underline{e}$) y su siguiente mejor alternativa, z (cuando está desempleado). El nivel de esfuerzo $\underline{e}$ es el que va a elegir realizar el trabajador en ausencia de cualquier estrategia de incentivos realizada por el empleador. Cuando $v = z$,éste nivel es el que hace $u_e = -2e = 0$. Por lo que $\underline{e} = 0$ y $u(w, e) = \underline{w} = iz$. El signo de interrogación en el título del ejercicio se refiere a que parece improbable que haya un mercado de trabajo en este caso en que $e = 0$.

23. Un Subsidio al Salario (Cap.8)

Los subsidios al empleo son una manera de incrementar el empleo muy discutidas en economías sub-desarrolladas con excedente de oferta de trabajo, o en relación a trabajadores poco calificados en economías desarrolladas. Suponga que n firmas idénticas contratan cada una h horas de trabajo idéntico, variando ambos h y w, el salario por hora, para maximizar beneficios. Los beneficios dependen del esfuerzo total del trabajo, el cual es el producto entre los horas contratadas y el esfuerzo por hora, e. Considere dos tipos de subsidio a pagar a los dueños de las firmas: (1) una suma fija s por hora de trabajo contratado, o (2) una fracción fija σ del salario pagado. Puede asumir que los impuestos necesarios para financiar estos subsidios no tienen ningún efecto en el problema. Usando el caso de cero subsidio como comparación, indique el efecto de los dos tipos de subsidio en el salario de equilibrio, el esfuerzo y los niveles de empleo, asumiendo (a) que z, la posición de reserva de cada trabajador es exógena, y (b) que z varía con el nivel de emplo total nh.

23.1. (a) *En el caso (1) en que el gobierno le paga al empresario una suma fija s por hora de trabajo contratado con z exógena, el problema del empresario pasa a ser*

$$\pi = y\left[he\left(w, m; z\right)\right] - \left[\left(w - s\right) + m\right]h$$

Por ende sus CPO pasan a ser

$$(1)\ \pi_h = y'e - [(w - s) + m] = 0$$

$$(2)\ \pi_w = y'e_w - 1 = 0$$

$$(3)\ \pi_m = y'e_m - 1 = 0$$

Como vemos, la única CPO que cambia es la primera. Antes del subsidio el empresario contrataba trabajo (h) tal que $y'e = (w + m)$, el valor del producto marginal de la última hora contratada igualaba su costo marginal, siendo éste *la suma del salario más el monitoreo. Ahora, con el subsidio por cada hora de trabajo contratada, el empresario contrata horas hasta que* $y'e = [(w - s) + m]$. *Dado que la expresión* $[(w - s) + m]$ *es menor que* $[(w + m]$ *el empresario ahora (con el subsidio* s*) contrata más horas. (El costo marginal baja por ende es costo beneficioso seguir contratando horas hasta que el valor del producto marginal (decreciente) sea más bajo). Cuando contrata más horas el producto marginal* y' *baja. Para que la CPO (2) se siga cumpliendo entonces, el salario debe bajar para que suba* e_w*, tal que de nuevo* $y'e_w = 1$. *Con respecto al esfuerzo del trabajador, éste determina su esfuerzo maximizando*

$$v = \frac{u(w,e) + [1 - t(e)v] + t(e)z}{1+i}$$

Su CPO es por ende

$$v_e = 0$$

$$u_e = t_e(v - z)$$

El menor salario produce un menor esfuerzo porque hace disminuir v, *y con él el beneficio marginal de esforzarse.*

En conclusión, el empresario contrata más horas, pero paga menos, y por ende obtiene menos esfuerzo.

23.1.(b) *Si* z *varía con el nivel de empleo total* nh, *un aumento en* h *por parte de cada una de las* n *empresas aumentará* z. *La CPO* $u_e = t_e(v - z)$ *del trabajador se altera. Si* z *aumenta, el beneficio marginal del esfuerzo disminuye, por lo que el trabajador se esforzará menos. Sin embargo, si* e *baja,* e_w *aumenta. La relación entre este aumento y la disminución de* y' *via aumento de* h, *determinará que sucede con* w. *Si* w *aumenta, el esfuerzo aumentará por este motivo, por lo que el nivel neto del esfuerzo dependerá del cambio relativo de* w *vs.* z. *Claro que* h *puede bajar. Si* h *baja, baja* y' *y baja* z. *De acuerdo a la CPO (2),* e_w *debería subir. Dado que la disminuición de* z *hace disminuir* e_w, *para esto suba debe subir* w.*La relación entre el aumento de* w *y la disminución de* z *determina que* e *suba o baje. En definitiva, el salario, el empleo y el esfuerzo pueden subir o bajar.*

23.2.(a) *En el caso (2) en que el gobierno le paga al empresario una fracción fija* σ *del salario pagado con* z *exógena, el problema del empresario pasa a ser*

$$\pi = y\left\{he\left[w, m; z\right]\right\} - \left[\left(1 - \sigma\right)w + m\right]h$$

Por ende sus CPO pasan a ser

$$(1)\ \pi_h = y'e - \left[\left(1 - \sigma\right)w + m\right] = 0$$

$$(2)\ \pi_w = y'e_w + \left(1 - \sigma\right) = 0$$

$$(3)\ \pi_m = y'e_m - 1 = 0$$

Según la CPO (2) el costo marginal de elevar el salario baja (de 1 a $(1 - \sigma)$*).Por ende, el salario que paga el empleador subiría. El mayor salario haría* *que el nivel de esfuerzo aumente. En este caso, según la CPO (1), el beneficio marginal de contratar una hora más de trabajo subiría (sube e). Sin embargo, no podemos concluir que sucede con h ya que no podemos decir si el costo marginal de contratar una hora más de trabajo* $[(1-\sigma)\,w+m]$ *sube o baja. Por ende, no*

podemos decir qué pasa con el salario en primer lugar.

23.2.(b) *De nuevo, si aumenta h (y por ende nh), z va a aumentar. Esto incrementa la posición de reserva del trabajador y actúa negativamente sobre el esfuerzo. El efecto neto sobre el esfuerzo del trabajador depende de la relación entre este efecto negativo y el efecto positivo del aumento del salario, si es que el salario aumenta, ya que ahora también cae el beneficio marginal de aumentar el salario vía una disminución de* e_w*. Todos los efectos son indeterminados.*

30. LA PROPIEDAD DE LA TIERRA Y SUS SINSABORES

Considere un propietario con 10 hectáreas de tierra que no cultiva por su cuenta. Puede ofrecer su tierra en base a dos tipos de contratos: aparcería y trabajo asalariado. Potenciales aparceros, trabjadores asalariados y el propietario compraten una misma función de utilidad $U = y - e^2$, donde y es el ingreso (expresado en unidades de producto agrícola), y e es el esfuerzo en un período determinado. Cada cultivador, cuando trabaja a tiempo completo, cultiva exactamente una hectárea de tierra. No puede cultivas más ni menos. Puede, sin embargo, repartir su tiempo, entre aparcería y el trabajo asalariado. La función de producción de cada hectárea de tierra es simplemente $q = e$, donde q es el nivel de producción agrícola.

Los vecinos de este propietario son idénticos a él y están ofreciendo contratos de aparcería. Pero como son propietarios no residentes en el lugar, no pueden ofrecer contratos para trabajo asalariado porque es necesario monitorear éste y por no vivir allí no pueden hacerlo.

Vamos a suponer que nuestro propietario en cuestión, cuando contrata trabajo asalariado, realiza un monitoreo suficiente tal que el trabajado realiza un esfuerzo $e = 0,5$. Este esfuerzo de monitoreo le cuesta al propietario un esfuerzo $e = 1/8$. Los salarios no son usados para inducir mayoires niveles de esfuezo en el trabajador sino que el salario es el mínimo necesario para asegura la participación de l trabajador (es decir, aquel que asegura que el trabajador logra el mismo nivel de utilidad que lograría en su siguiente mejor alternativa: aparcería).

El propietario está intentado decidis cuánta tierra destinar a aparcería, cuánta a trabajo asalariado, y que contratos ofrecer en cada caso. Es decir, el propietario quiere saber cuánto debe pedir de participación en los contratos de aparcería (s), cuánto debe pagar en los contratos de trabajo asalariado (w) y cuanta tierra cultiva bajo trabajo asalariado (n) y cuánta bajo aparcería ($10-n$). Lo contrata a usted como consultor.

1. ¿Cuál es la función de mejor respuesta del aparcero, $e^* = e(s)$? ¿Qué participación s^* exigirá el propietario si él determina s^* para maximizar su utilidad?

2. Asumiendo que todos los propietarios en el área están ofreciendo s^*, indique el salario que el propietario va a ofrecer, w^*

3. Dado $s^*, e^* = e(s^*)$, y w^*, determine el nivel de n que maximiza la utilidad del propietario. Llame a éste n^*.

4. En el equilibrio s^*, e^*, w^* y n^*, ¿Cuál es el nivel de utilidad de los tres tipos de agentes: propietario, aparcero y trabajador asalariado? ¿Es el resultado (s^*, e^*, w^* y n^*) Pareto - óptimo? Pista: piense si existe alguna oferta que el aparcero o el trabajador le puede hacer al propietario por su tierra tal que, si éste la acepta, constituye una mejora de Pareto.

5. Imagine ahora que los trabajadores y aparceros de la zona se ponen de acuerdo en no aceptar un $s > 0,4$. Como resultado, todos los contratos de aparcería de la zona son re-escritos con $s = 0,4$. Indique los resultantes nuevos valores de equilibrio: e', w', y n'. Compare los niveles de utilidad ganados por los tres tipos de agentes en este nuevo equilibrio con sus niveles de utilidad anteriores a la acción colectiva de los aparceros/trabajadores.

6. Uno de los 10 cultivadores sugiere que todos ocupen la tierra del propietario por la fuerza y que la cultiven por ellos mismo como propietarios de hectáreas individuales. Si la revolución se lleva a cabo, ¿Cuál será el nivel de esfuerzo y los niveles de utilidad resultantes de los cultivadores?

7. El cultivador revolucionario clama que será posible pagarle al (ex) propietario una cantidad suficiente tal que su utilidad luego de la revolución no es menor a la utilidad que obtenía luego de la acción colectiva del punto 5. Si cada cultivador paga un impuesto de suma fija (por período) igual para recolectar la cantidad mínima de dinero necesaria para compensar al (ex) propietario, ¿cuán pagará cada uno?

8. Si la compensación del punto anterior es posible, ¿por qué los cultivadores no compran la tierra, simplemente?

30.1

El aparcero maximiza

$$U(e) = (1-s)e - e^2$$

La CPO es

$$1 - s - 2e = 0$$

De donde sale su fmr

$$\boxed{e^* = e(s) = \tfrac{1-s}{2}}$$

El propietario, por su parte, maximiza

$$U = s\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

Su CPO es

$$\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{s}{2} = 0$$
$$1 - 2s = 0$$
$$\boxed{s^* = \tfrac{1}{2}}$$

30.2

La alternativa de todo potencial trabajador es ser aparcero con el contrato $s^* = \frac{1}{2}$. Con este contrato, el aparcero realiza un esfuerzo $e^* = e(1/2) = (1-1/2)/2 = 1/4$. Su nivel de utilidad es por ende

$$U = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

El propietario le ofrece un salario tal que el trabajador obtenga este nivel de utilidad

$$U = w - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$\boxed{w^* = \tfrac{5}{16}}$$

30.3

La utilidad total que obtiene el propietario es:

$$\begin{aligned} U &= \left[n^*\left(\frac{1}{2} - w^*\right) - \left(\frac{n^*}{8}\right)^2\right] + \left[(10 - n^*)\left(e^* * s^*\right)\right] \\ & n^*\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}\right) - \left(\frac{n^*}{8}\right)^2 + (10 - n^*)\left[\frac{1}{4} * \frac{1}{2}\right] \\ U &= n^*\left(\frac{3}{16}\right) - \left(\frac{n^*}{8}\right)^2 + (10 - n^*) * \frac{1}{8} \end{aligned}$$

CPO:

$$\frac{3}{16} - 2\left(\frac{n^*}{8}\right)\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$
$$\frac{3}{2} - 2\left(\frac{n^*}{8}\right) - 1 = 0$$
$$6 - n^* = 4$$
$$\boxed{n^* = 2}$$

30.4

El propietario:

$$U = U = 2 * \left(\frac{3}{16}\right) - \left(\frac{2}{8}\right)^2 + (10-2) * \frac{1}{8} = \frac{21}{16}$$

El trabajador y el aparcero:

$$U = \frac{1}{16}$$

La utilidad del propietario en cada una de las 8 hectáreas que dedica a aparcería es:

$$U^p_{aparceria} = e^* * s^* = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Si un aparcero le ofreciera $\frac{1}{8}$ al propietario por la hectárea en cuestión y trabajara la hectárea por su cuenta, su tilidad sería

$$U = e - e^2$$

Derivando y despejando

$$\begin{aligned} 1 - 2e &= 0 \\ e &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El ex-aparcero ahora trabajador-propietario obtiene

$$U = 0,25$$

Por lo tanto ofreciéndole $\frac{1}{8}$ al propietario y trabajando la hectárea por su cuenta obtendría un excedente de $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$. Por lo tanto el equilibrio $(s^*, e^*, w^*$ y $n^*)$ no puede ser Pareto - óptimo ya que cada uno de los aparceros podría comprar la tierra, dejar al propietario igual en términos de bienestar y obtener ellos más bienestar $(1/8 > 1/16)$, lo que es una mejora de Pareto.

30.5.

El esfuerzo de los aparceros ahora es

$$e' = e(0,4) = \frac{1-0,4}{2} = 0,3$$

La utilidad que obtienen lo aparceros es

$$U = 0,6 * 0,3 - (0,3)^2 = 0,09$$

por ende, el salario que van a cobrar los asalariados es

$$\begin{aligned} U &= w - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,09 \\ w' &= 0,34 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el propietario ahora obtiene

$$\begin{aligned} U &= \left[n'\left(\frac{1}{2} - w'\right) - \left(\frac{n'}{8}\right)^2\right] + \left[(10-n')\left(e' * s'\right)\right] \\ & n'(0,5-0,34) - \left(\frac{n'}{8}\right)^2 + (10-n')\left[0,3 * 0,4\right] \\ U &= n'(0,16) - \left(\frac{n'}{8}\right)^2 + (10-n') * 0,12 \end{aligned}$$

CPO:

$$0,16 - 2\left(\frac{n'}{8}\right)\frac{1}{8} - 0,12 = 0$$

$$0,04 - \frac{n'}{32} = 0$$

$$1,28 - n' = 0$$

$$\boxed{n' = 1,28}$$

La utilidad total que obtiene el propietario ahora es:

$$\begin{aligned} U &= 1,28 * (0,16) - \left(\frac{1,28}{8}\right)^2 + (10-1,28) * 0,12 \\ U_{propietario} &= 0,2048 - 0,015625 + 1,0464 = 1,235575 \end{aligned}$$

Antes de la acción coletiva la utilidad de los propietarios era $21/16 = 1,3125$, mayor que luego de la acción coletiva. La utilidad de los trabajadores aparceros era $1/16 = 0,0625$, menos que la que obtienen ahora $0,09$. Los trabajadores / aparceros están mejor. Los propietarios están peor.

30.6.

La misma que cuando compran la tierra. Si un aparcero ocupa la tierra y la trabaja por su cuenta su utilidad es

$$U = e - e^2$$

Derivando y despejando

$$\begin{aligned} 1 - 2e &= 0 \\ e &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El ex-aparcero ahora trabajador-revolucionario obtiene

$$U = 0,25$$

30.7.

Los 10 revolucinarios tienen que recolectar $1,235575$ como mínimo. Cada uno tiene que aportar $0,1235575$.

30.8.

Si los trabajadores / aparceros compran la tierra no deben pagar las compensaciones calculadaas en los puntos anteriores ya que éstas son compensaciones por período. En cambio, comprar la tierra significa pagar hoy el valor presente de los beneficios futuros de esa tierra, que es lo que refleja su precio. Lo trabajadores/aparceros puede (a) no tener tal dinero, (b) no poder endeudarse por no tener ingresos esperados por período suficientes, (c) ser aversos al riesgo que significa la compra.

31. COMPARANDO CONTRATOS

Cada agente tiene una función de utilidad idéntica $u(y, e)$, donde y es el ingreso por hora medido en unidades de bienes (todos los pagos se hacen en unidades de bienes) y e es el esfuerzo laboral por hora. La función u es creciente y cóncava en y y decreciente y convexa en e. La cantidad de bienes (Q) que se pueden producir en una hora está dada por la función de producción $Q(E)$, donde E es la suma de esfuerzo puesto en la producción de bienes (ya sea por un trabajador individual o por un equipo de trabajadores). $Q' > 0$ y $Q'' < 0$. El nivel de esfuerzo no es verificable. Los derechos de propiedad consisten en permisos para utilizar la función de producción (no hay otros insumos más que el esfuerzo, pero el uso de la función de producción requiere permiso del dueño). Cuando los derechos de propiedad están en poder de otra persona que no sea el agente (digamos el dueño), puede asumir que el propietario maximiza beneficios. Suponga que para cada agente, la alternativa a trabajar es recibir cero utilidad. Considere las siguientes situaciones:

1. **El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.**

2. **El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.**

3. **El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.**

4. **El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.**

5. **El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.**

6. **El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q - x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.**

7. **El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.**

Para los 7 contratos recién descritos:

(a) Escriba el problema o los problemas de maximización relevantes y derive las condiciones de primer orden que muestran cómo va a ser determinado el nivel de esfuerzo de cada agente. Añada cualquier información que necesite para hacer esto.

1. *El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.*

   $$\max_e u(Q(e), e)$$

   CPO:

   $$\frac{du(Q(e), e)}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
   $$\Rightarrow u_y Q' = -u_e$$

2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.*

   $$\max_e u\left[Q(e)(1-s), e\right]$$

CPO

$$\frac{du\,[Q(e)(1-s),e]}{de} = u_y Q'(1-s) + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y Q'(1-s) = -u_e$$

3. *El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.*

$$\max_e u\,[Q(e)-k,e]$$

CPO

$$\frac{du\,[Q(e)-k,e]}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y Q' = -u_e$$

4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.*

$$\max_e v = \frac{u(w,e) + [1-t(e)]\,v}{1+i}$$

donde t es la probabilidad de no renovación del contrato, que es función del esfuerzo. La CPO es:

$$u_e - t'(e)v = 0$$

5. *El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.*

$$\max_e u(\frac{Q(E)}{n}, e)$$

CPO:

$$\frac{du(\frac{Q(E)}{n}, e)}{de} = u_y \frac{Q'}{n} + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y \frac{Q'}{n} = -u_e$$

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q-x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

$$\max_e u(Q(E)-x, e)$$

CPO:

$$\frac{du(Q(E)-x,e)}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
$$u_y Q' = -u_e$$

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma* B *por el permiso de empezar a trabajar.*

$$\max_e v - B = \frac{u(w,e) + [1 - t(e)]\, v}{1+i} - B$$

donde t *es la probabilidad de no renovación del contrato, que es función del esfuerzo. La CPO es:*

$$u_e - t'(e)v = 0$$

(b) Describa cómo se determinarán los valores de w, s, k, x y B.

2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción* s *del producto le corresponde al dueño, el que también determina* s*. El dueño resuelve:*

$$\max_s sQ\left[e^o(s)\right]$$

donde $e^o(s)$ *es la solución a la CPO del agente, arriba descrita. La CPO de este problema es*

$$Q + sQ'e^{o\prime}(s) = 0$$

- 3. *El agente paga una suma fija* k *por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina* k *tal que*

  $$u\left[Q(e^o) - k, e^o\right] = 0$$

  donde e^o *es la solución a la CPO del agente, arriba descrita.*

  4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario* w*. En cada período, el dueño determina* w *tal que*

  $$\max_w Q(e(w,m) \times n) - we(w,m) \times n - m$$

  donde

  $$\begin{aligned} E &= \sum_i e_i = en \\ w &= \text{salario por hora} \\ n &= \text{número de horas contratadas (o número de trabajadores en esa hora)} \\ m &= \text{costos de monitoreo} \end{aligned}$$

  CPO:

  $$Q'e_w n - en - we_w n = \left(Q'e_w - e - we_w\right) n = 0 \Rightarrow Q'e_w - e - we_w = 0$$

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q-x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

   El principal determina x tal que

$$\max_x \pi = Q(E) - n(Q(E) - x)$$

   Como e no depende de $x, \partial\pi/\partial e = n > 0$. El principal va a fijar el x lo más alto que pueda. Esto es el x que hace

$$u_i(Q(E^o) - x, e^o) = 0$$

   siendo $E^o = \sum_n e_i^o$, y e_i^o es la solución al problema de optimización de cada trabajador, tal cual la CPO arriba descrita.

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.*

   Como e no depende de B, aquí también el principal fija B tal que $v-B=0$, la utilidad del trabajador en su mejor alternativa disponible.

(c) Determine si el nivel de esfuerzo del agente y el ingreso que definen las condiciones de primer orden relevantes son o no son Pareto-óptimo. Explique por qué difieren los resultados.

- 1. *El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.*

     CPO:

$$u_y Q' = -u_e$$

     El nivel de esfuerzo es PO en este contrato porque éste es el caso de Robinson Crusoe: todos los costos y los beneficios del esfuerzo recaen sobre el agente y éste elige la cantidad óptima de esfuerzo.

  2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.*

     CPO:

$$u_y Q'(1-s) = -u_e$$

     Como se puede ver al comprar esta condición con la anterior, el nivel de esfuerzo en este caso no será Pareto-óptimo. Como el agente no podrá hacerse de todos los beneficios marginales de su esfuerzo terminará eligiendo un nivel de esfuerzo menor.

3. *El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.*

   CPO

$$u_y Q' = -u_e$$

   Igual que en el caso 1, el nivel de esfuerzo será el óptimo ya que lo que le cobra el principal no depende del esfuerzo; es una suma fija.

4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.*

   En este caso, la combinación nivel de esfuerzo - nivel de producto resultante no es Pareto-óptimo. (Ver texto por demostración e intuición).

5. *El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.*

   CPO:

$$u_y \frac{Q'}{n} = -u_e$$

   En este cada trabajador se apodera de una enésima parte de su esfuerzo marginal, por lo que el nivel de esfuerzo de cada uno será menor al óptimo. Este contrato no es Pareto-óptimo.

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q-x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

   CPO:

$$u_y Q' = -u_e$$

   El contrato es Pareto-óptimo.

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.*

   CPO:

$$u_e - t'(e)v = 0$$

   Ídem renovación contingente sin bono. No es óptimo.

(d) Considere una población en la que cada miembro es muy rico, tan rico como para ser neutral al riesgo y puede financiar cualquier inversión a un costo subjetivo igual a la tasa de interés libre de riesgo de la economía en su conjunto (la tasa de retorno de un activo sin riesgo). Para mantener las cosas simples, asuma que aunque muy rico, cada miembro le asigna un valor no-decreciente al ingreso adicional que gana. En esta población, ¿cuáles de los contratos arriba descritos, si alguno, espera observar en un equilibrio competitivo? Explique sus respuestas.

Uno obviamente esperaría observar el contrato N° 1, ya que en esta economía habría agente dueños de la función de producción. También esperaría observar que los agentes que no fueran inicialmente dueños de la función de producción la compraran endeudándose a la tasa libre de riesgo (aumiendo que esta actividad genera una rentabilidad mayor a esta tasa, por supuesto). En ese caso, sucedería el contrato 3, *siendo k el precio de venta. El contrato* 2 *no sería observable.*