EXAMEN GENERAL MICROECONOMÍA

Setiembre 2006

Parte I: Marcelo Caffera

EJERCICIO 1 - Aversidad a la Inequidad y Reciprocidad

Considere un individuo i que interactúa con un sólo individuo j. Las preferencias de i están dadas por

$$U_i = \pi_i - \delta_i \max(\pi_j - \pi_i, 0) - \alpha_i \max(\pi_i - \pi_j, 0)$$

con π_i y π_j siendo los ingresos o riqueza material de ambos individuos y $\delta_i \geq \alpha_i$ y $\alpha_i \in [0, 1]$.

(a) Demuestre que si ambos individuos fueran a dividir \$1 ($\pi_i + \pi_j = 1$) y $\alpha_i > 1/2$, $dU_i/d\pi_i < 0$ para todas las divisiones tal que $\pi_i - \pi_j > 0$. ¿Cómo preferiría dividir el peso el individuo i en ese caso?

Si $\pi_i - \pi_j > 0$, $U_i = \pi_i - \alpha_i(\pi_i - \pi_j, 0)$. *En este caso,* $dU_i/d\pi_i = 1 - \alpha_i$. *Es claro que si* $\alpha_i > 1/2$, $dU_i/d\pi_i < 0$. *En este caso el individuo preferiría dividir el peso en partes iguales ya que cualquier incremento en su tajada le disminuye su utilidad.*

(b) Ahora suponga que $\delta_i = 3/4$ y $\alpha_i = 1/2$. ¿Cuánto sería la oferta más chica que este individuo i aceptaría en un Juego Ultimatum que divide \$1? Justifique su respuesta.

Cuando el individuo i rechaza la oferta su utilidad es 0. *Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar es aquella que le reporta* 0 *de utilidad. Cuando* $\alpha_i = 1/2$, $U_i = 1/2$ *para todo* $\pi_i - \pi_j > 0$. *La utilidad de i no alcanzará cero si él es el más beneficiado con la oferta, no importa cuán beneficiado sea. Por lo tanto, la oferta más chica que va a aceptar la encontraremos cuando la oferta lo desfavorece:* $\pi_j - \pi_i > 0$. *En este caso*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(\pi_j - \pi_i)$$

Haciendo uso de $\pi_i + \pi_j = 1$, *y operando*

$$U_i = \pi_i - \frac{3}{4}(1 - 2\pi_i) = \frac{5}{2}\pi_i - \frac{3}{4}$$

Se puede ver claramente que si la oferta lo desfavorece $(\pi_j - \pi_i > 0)$, *el individuo i estará mejor cuanto mayor su tajada* π_i. *Llamando* $\pi_i^{\min}$ *a la oferta mínima que i aceptará, por lo dicho arriba se debe cumplir que*

$$U_i = \frac{5}{2}\pi_i^{\min} - \frac{3}{4} = 0$$
$$\pi_i^{\min} = \frac{3}{10}$$

Parte II: Reciprocidad

Dos individuos están considerando contribuir con su esfuerzo personal e_i y e_j, ambos $\in [0,1]$, a un proyecto común cuyo producto es $e_i + e_j$, el cuál se repartirá en partes iguales entre ambos individuos. Las preferencias del individuo i son descritas por la siguiente función de utilidad

$$U_i = \pi_i + \beta_{ij}\pi_j$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{a_i + \lambda_i a_j}{1+\lambda_i}$$

con a_i y $a_j \in [-1,1]$ y $\lambda_i \geq 0$. El parámetro a_i es el nivel incondicional de buena o mala voluntad (altruismo o envidia) de i con respecto a j y a_j es lo que i cree es el nivel de altruismo o envidia de j. Por último, λ_i es el peso que i le otorga a las creencias acerca de la voluntad de j en la importancia que le da al bienestar de j $\left(\beta_{ij}\right)$. La función de utilidad de j es idéntica (cambiando los sub-índices i por j y viceversa). Suponga que el costo subjetivo del esfuerzo, $c(e)$, es $3/4 \times e$ y $a = \lambda = 1/2$ para cada individuo. La creencia acerca de la buena voluntad del otro es simplemente la cantidad que cada uno cree que el otro aportará de esfuerzo al proyecto. (Por ejemplo, si i piensa que j aportará 1 al proyecto, $a_j = 1$.)

(c) Identifique los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.

$$\begin{aligned}
U_i &= \pi_i + \beta_{ij}\pi_j = \left[\frac{e_i+e_j}{2} - c_i(e_i)\right] + \beta_{ij}\left[\frac{e_i+e_j}{2} - c_j(e_j)\right] \\
&= \frac{e_i+e_j}{2}\left(1+\beta_{ij}\right) - c_i(e_i) - \beta_{ij}c_j(e_j) = (e_i+e_j)\left(\frac{2}{3}+\frac{a_j}{6}\right) - \frac{3}{4}e_i - \left(\frac{2}{3}+\frac{a_j}{6}\right)\frac{3}{4}e_j \\
\frac{\partial U_i}{\partial e_i} &= \frac{2}{3} + \frac{a_j}{6} - \frac{3}{4} = \frac{-1+2a_j}{12}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&Si\ a_j > 1/2,\ \partial U_i/\partial e_i > 0 : \textit{el individuo } i \textit{ pone } 1 \textit{ de esfuerzo.} \\
&Si\ a_j \leq 1/2,\ \partial U_i/\partial e_i < 0 : \textit{el individuo } i \textit{ pone } 0 \textit{ de esfuerzo.}
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
&Si\ a_i > 1/2,\ e_j = 1 \\
&Si\ a_i \leq 1/2,\ e_j = 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, los equilibrios de Nash de este juego serán:

$$\begin{aligned}
(e_i, e_j) &= (1,1)\text{, } a_i \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,0)\text{, } a_i \text{ y } a_j \leq 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (1,0)\text{, } a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2 \\
(e_i, e_j) &= (0,1)\text{, } a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2
\end{aligned}$$

(d) Indique cuáles son estables

Las elecciones de esfuerzo por parte de los individuos no dependen del nivel de esfuerzo del otro sino de las creencias de cada uno acerca del tipo de individuo que es el otro. Por lo tanto todos los equilibrios serán estables a cambios exógenos, idiosincráticos en los niveles de esfuerzo.

Podemos también estudiar la estabilidad de los equilibrios antes cambios en las creencias a_i *y* a_j. *Para cambios muy pequeños de* a_i *y* a_j *los equilibrios van a ser estables, excepto en el entorno de* a_i *y* $a_j = 1/2$.*En esos casos, pequeños cambios en las creencias pueden hacer que éstas pasen de ser mayores a* $1/2$ *a ser menores a* $1/2$. *Con lo que el equilibrio cambiaría.*

(e) De los valores críticos de las creencias iniciales a_i y a_j tal que el resultado Pareto-superior puede ser sostenido como un equilibrio de Nash.

El valor de las utilidades en cada uno de los equilibrios de Nash es:

$$(1,1) : \left\{ {U_i = \frac{5a_j+2}{24} > 0 \atop U_j = \frac{5a_i+2}{24} > 0} \right\},\ a_i \ y \ a_j > 1/2$$
$$(0,0) : \left\{ {U_i = 0 \atop U_j = 0} \right\},\ a_i \ y \ a_j \leq 1/2$$
$$(1,0) : \left\{ {U_i = \frac{4a_j-2}{24} > 0 \atop U_j = \frac{4+a_i}{24} > 0} \right\},\ a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2$$
$$(0,1) : \left\{ {U_i = \frac{4+a_j}{24} > 0 \atop U_j = \frac{4a_i-2}{24} > 0} \right\},\ a_i > 1/2 \text{ y } a_j \leq 1/2$$

Todos los EN son PO excepto por el $(0,0)$.

Comparando el $(1,1)$ *con el* $(1,0)$ *(o* $(0,1)$ *que es lo mismo), vemos que* $(1,1)$ *será pareto-superior a* $(1,0)$ *si y solo si:*

$$U_i(1,1) + U_j(1,1) = \frac{5a_j + 5a_i + 4}{24} > \frac{4a_j + a_i + 2}{24} = U_i(1,0) + U_j(1,0)$$

Ó

$$\underset{a_i \text{ y } a_j > 1/2}{5a_j + 5a_i + 4} > \underset{a_i \leq 1/2 \text{ y } a_j > 1/2}{4a_j + a_i + 2}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es > 9, *mientras que el lado derecho es* $< 6,5$. *Por lo tanto el EN Pareto-superior es* $(e_i, e_j) = (1,1)$, *lo que ocurre cuando* a_i *y* $a_j > 1/2$.

EJERCICIO 2 - COMPARANDO CONTRATOS

Cada agente tiene una función de utilidad idéntica $u(y, e)$, donde y es el ingreso por hora medido en unidades de bienes (todos los pagos se hacen en unidades de bienes) y e es el esfuerzo laboral por hora. La función u es creciente y cóncava en y y decreciente y convexa en e. La cantidad de bienes (Q) que se pueden producir en una hora está dada por la función de producción $Q(E)$, donde E es la suma de esfuerzo puesto en la producción de bienes (ya sea por un trabajador individual o por un equipo de trabajadores). $Q' > 0$ y $Q'' < 0$.

El nivel de esfuerzo no es verificable. Los derechos de propiedad consisten en permisos para utilizar la función de producción (no hay otros insumos más que el esfuerzo, pero el uso de la función de producción requiere permiso del dueño). Cuando los derechos de propiedad están en poder de otra persona que no sea el agente (digamos el dueño), puede asumir que el propietario maximiza beneficios. Suponga que para cada agente, la alternativa a trabajar es recibir cero utilidad. Considere las siguientes situaciones:

- 1. El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.
  2. El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.
  3. El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.
  4. El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.
  5. El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.
  6. El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q-x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.
  7. El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.

Para los 7 contratos recién descritos:

(a) Escriba el problema o los problemas de maximización relevantes y derive las condiciones de primer orden que muestran cómo va a ser determinado el nivel de esfuerzo de cada agente. Añada cualquier información que necesite para hacer esto.

- 1. *El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.*

  $$\max_{e} u(Q(e), e)$$

  CPO:

  $$\frac{du(Q(e), e)}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
  $$\Rightarrow u_y Q' = -u_e$$

2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.*

$$\max_e u\left[Q(e)(1-s), e\right]$$

CPO

$$\frac{du\left[Q(e)(1-s), e\right]}{de} = u_y Q'(1-s) + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y Q'(1-s) = -u_e$$

3. *El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.*

$$\max_e u\left[Q(e) - k, e\right]$$

CPO

$$\frac{du\left[Q(e) - k, e\right]}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y Q' = -u_e$$

4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.*

$$\max_e v = \frac{u(w, e) + \left[1 - t(e)\right] v}{1+i}$$

donde t es la probabilidad de no renovación del contrato, que es función del esfuerzo. La CPO es:

$$u_e - t'(e)v = 0$$

5. *El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.*

$$\max_e u\left(\frac{Q(E)}{n}, e\right)$$

CPO:

$$\frac{du\left(\frac{Q(E)}{n}, e\right)}{de} = u_y \frac{Q'}{n} + u_e = 0$$
$$\Rightarrow u_y \frac{Q'}{n} = -u_e$$

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q - x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

$$\max_e u(Q(E) - x, e)$$

CPO:

$$\frac{du(Q(E)-x,e)}{de} = u_y Q' + u_e = 0$$
$$u_y Q' = -u_e$$

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.*

$$\max_e v - B = \frac{u(w,e) + [1 - t(e)]\, v}{1+i} - B$$

donde t es la probabilidad de no renovación del contrato, que es función del esfuerzo. La CPO es:

$$u_e - t'(e)v = 0$$

(b) Describa cómo se determinarán los valores de w, s, k, x y B.

1. 2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.*

- 1. *El dueño resuelve:*

$$\max_s sQ\left[e^o(s)\right]$$

donde $e^o(s)$ es la solución a la CPO del agente, arriba descrita. La CPO de este problema es

$$Q + sQ' e^{o\prime}(s) = 0$$

3. *El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k tal que*

$$u\left[Q(e^o) - k, e^o\right] = 0$$

donde e^o es la solución a la CPO del agente, arriba descrita.

4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.*
En cada período, el dueño determina w tal que

$$\max_w Q(e(w,m)\times n) - we(w,m)\times n - m$$

donde

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_i e_i = en \\
w &= \text{salario por hora} \\
n &= \text{número de horas contratadas (o número de trabajadores en esa hora)} \\
m &= \text{costos de monitoreo}
\end{aligned}
$$

CPO:

$$Q' e_w n - en - we_w n = (Q' e_w - e - we_w)\, n = 0 \Rightarrow Q' e_w - e - we_w = 0$$

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q - x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

   El principal determina x tal que

   $$\max_x \pi = Q(E) - n(Q(E) - x)$$

   Como e no depende de $x, \partial\pi/\partial e = n > 0$. El principal va a fijar el x lo más alto que pueda. Esto es el x que hace

   $$u_i(Q(E^o) - x, e^o) = 0$$

   siendo $E^o = \sum_n e_i^o$, y e_i^o es la solución al problema de optimización de cada trabajador, tal cual la CPO arriba descrita.

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.*

   Como e no depende de B, aquí también el principal fija B tal que $v - B = 0$, la utilidad del trabajador en su mejor alternativa disponible.

(c) Determine si el nivel de esfuerzo del agente y el ingreso que definen las condiciones de primer orden relevantes son o no son Pareto-óptimo. Explique por qué difieren los resultados.

- 1. *El agente es dueño de los derechos de uso de la función de producción, trabaja para sí mismo y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante.*

     CPO:

     $$u_y Q' = -u_e$$

     El nivel de esfuerzo es PO en este contrato porque éste es el caso de Robinson Crusoe: todos los costos y los beneficios del esfuerzo recaen sobre el agente y éste elige la cantidad óptima de esfuerzo.

2. *El agente trabaja bajo un contrato donde una fracción s del producto le corresponde al dueño, el que también determina s.*

   CPO:

   $$u_y Q'(1-s) = -u_e$$

   Como se puede ver al comprar esta condición con la anterior, el nivel de esfuerzo en este caso no será Pareto-óptimo. Como el agente no podrá hacerse de todos los beneficios marginales de su esfuerzo terminará eligiendo un nivel de esfuerzo menor.

3. *El agente paga una suma fija k por período al dueño por el permiso de utilizar la función de producción y es el demandante residual (dueño) de la producción resultante. El dueño determina k.*

   CPO

   $$u_y Q' = -u_e$$

   Igual que en el caso 1, el nivel de esfuerzo será el óptimo ya que lo que le cobra el principal no depende del esfuerzo; es una suma fija.

4. *El dueño le ofrece al agente (quien es un miembro de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, con salario w.*

   En este caso, la combinación nivel de esfuerzo - nivel de producto resultante no es Pareto-óptimo. (Ver texto por demostración e intuición).

5. *El agente es uno de un equipo de n agentes idénticos que se reparten en partes iguales el producto que resulta de su esfuerzo.*

   CPO:

   $$u_y \frac{Q'}{n} = -u_e$$

   En este cada trabajador se apodera de una enésima parte de su esfuerzo marginal, por lo que el nivel de esfuerzo de cada uno será menor al óptimo. Este contrato no es Pareto-óptimo.

6. *El dueño emplea un equipo de trabajadores, ofreciéndole a cada trabajador un pago $Q - x$ por período, donde x es una constante positiva cualquiera.*

   CPO:

   $$u_y Q' = -u_e$$

   El contrato es Pareto-óptimo.

7. *El dueño le ofrece al agente (uno de un equipo de trabajadores idénticos) un contrato de renovación contingente, cobrándole por única vez una suma B por el permiso de empezar a trabajar.*

   CPO:

   $$u_e - t'(e)v = 0$$

   Ídem renovación contingente sin bono. No es óptimo.

(d) Considere una población en la que cada miembro es muy rico, tan rico como para ser neutral al riesgo y puede financiar cualquier inversión a un costo subjetivo igual a la tasa de interés libre de riesgo de la economía en su conjunto (la tasa de retorno de un activo sin riesgo). Para mantener las cosas simples, asuma que aunque muy rico, cada miembro le asigna un valor no-decreciente al ingreso adicional que gana. En esta población, ¿cuáles de los contratos arriba descritos, si alguno, espera observar en un equilibrio competitivo? Explique sus respuestas.

Uno obviamente esperaría observar el contrato N° 1, ya que en esta economía habría agente dueños de la función de producción. También esperaría observar que los agentes que no fueran inicialmente dueños de la función de producción la compraran endeudándose a la tasa libre de riesgo (aumiendo que esta actividad genera una rentabilidad mayor a esta tasa, por supuesto). En ese caso, sucedería el contrato 3*, siendo k el precio de venta. el contrato* 2 *no sería observable.*