EJERCICIOS

MICROECONOMIA SUPERIOR I

4º ECONOMIA

DEPARTAMENTO DE
FUNDAMENTOS DEL ANALISIS ECONOMICO I

Profesores:

Carmen Carrera
Elena Huergo
Covadonga de la Iglesia
Manuel Morán
Lourdes Moreno
Rafael Salas
Julio Segura

Información adicional en: http://www.ucm.es/info/anaeco/index.html

***TEMAS 2 y 3*.** **Las preferencias del consumidor: axiomática y función de utilidad. Teoría de la demanda. Equilibrio del consumidor. Funciones de demanda marshallianas. Propiedades de las funciones de demanda.**

1) Suponga que la relación de preferencias R, definida en $\Re^2_+$ es reflexiva, completa, transitiva y monótona.

a) Demuestre que la hipótesis de transitividad impide que los conjuntos de indiferencia se corten.
b) Demuestre que la hipótesis de monotonía implica que los conjuntos de indiferencia son curvas en $\Re^2_+$
c) Suponga que se define la función U(0,0)= 0, U(1,1)=1, U(A,A)=A, A>0, y que se compara cualquier vector $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ con el vector de la diagonal $x^{0D} = (x_1^{0D}, x_2^{0D})$ al que el vector x^0 es indiferente. Suponga que una función U asigna a x^{0D} el valor $U(x_1^{0D}, x_2^{0D}) = x_1^{0D}$ (que es el valor del componente de x^{0D} sobre el eje de abscisas). Si hacemos esto con todos los vectores del espacio $\Re^2_+$ tendremos definida una función de utilidad. Verifíquelo.

2) Demuestre que si U(x), $x \in \Re^2_+$ es una función de utilidad que representa unas preferencias dadas, y f es una función creciente, entonces v(x)=f(U(x)) es también una función de utilidad válida para representar tales preferencias. Demuestre que la transformación anterior no afecta a la relación marginal de sustitución entre cualquier par de bienes (suponga que las funciones U y f son diferenciables).

3) Represente gráficamente las curvas de indiferencia de las siguientes hipotéticas funciones de utilidad. En cada caso, diga si la ordenación subyacente es convexa o estrictamente convexa.

$$
\begin{aligned}
&a)\ U(x_1,x_2) = x_1x_2\\
&b)\ U(x_1,x_2) = \log x_1 + \log x_2\\
&c)\ U(x_1,x_2) = x^a{}_1 x^b{}_2, a,b>0\\
&d)\ U(x_1,x_2) = (x_1-a_1)^b(x_2-a_2)^{1-b}, b>0, x_i>a_i\\
&e)\ U(x_1,x_2) = (x_1-a_1)^b+(x_2-a_2)^{1-b}, b>0, x_i>a_i\\
&f)\ U(x_1,x_2) = x_1 + ax_2, a>0\\
&g)\ U(x_1,x_2) = \mathrm{Min}(ax_1, bx_2), a,b>0\\
&h)\ U(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2\\
&i)\ U(x_1,x_2) = ax_1 + x_2^{1/2}\\
&j)\ U(x_1,x_2) = -a/x_1 - b/x_2
\end{aligned}
$$

Sean p_1 y p_2 los precios de los bienes x_1 y x_2. Para las funciones de utilidad dadas, indique en qué casos se puede asegurar la existencia y unicidad de solución al problema de elección del consumidor. ¿Son las cantidades demandadas siempre positivas? Calcule las funciones de demanda asociadas a cada una de las funciones de utilidad dadas.

4) Dada la función de utilidad de un individuo $U(x) = x_1 x_2$.

a) Compruebe que la función $U(X)$ es estrictamente cuasi-cóncava.
b) Calcule las funciones de demanda ordinaria y la función indirecta de utilidad.
c) Compruebe si la utilidad marginal de la renta es creciente o decreciente.
d) Compruebe si se cumple la identidad de Roy.
e) Defina la ecuación de Slutsky y establezca las relaciones de carácter bruto y neto entre ambos bienes.
f) Compruebe si las demandas ordinarias cumplen las restricciones de la teoría de la demanda.
g) Calcule las funciones de demanda compensada y de gasto.
h) Compruebe que la función de gasto cumple las propiedades usuales.

5) Considere la función de utilidad: $U(x_1,x_2)=x_1-(1/x_2)$ y la restricción presupuestaria $p_1x_1+ p_2 x_2 = M$, siendo $M>(p_1p_2)^{1/2}$.

a) Demuestre que $U(x_1,x_2)$ es estrictamente cuasi-cóncava.
b) Halle las funciones de demanda y determine si los bienes son sustitutivos o complementarios brutos.
c) Verifique que las funciones de demanda obtenidas son homogéneas de grado cero, satisfacen la ley de Walras, agregación de Engel y agregación de Cournot. Verifique asimismo que la matriz de efectos sustitución es semidefinida negativa.

6) Un consumidor dispone de una renta M y unas preferencias representadas por la función de utilidad:

$$U = \alpha x_1^{1/2} + x_2$$

donde (x_1, x_2) representan las cantidades de los dos bienes consumidos y $\alpha \geq 0$.

a) Calcule el efecto sobre la cantidad demandada del bien 1 de un cambio infinitesimal del precio del bien 2 y el efecto sobre la cantidad demandada del bien 2 de un cambio infinitesimal del precio del bien 1. ¿Tienen el mismo signo?
b) Calcule el efecto sobre la demanda compensada del bien 1 de un cambio infinitesimal del precio del bien 2 y el efecto sobre la demanda compensada del bien 2 de un cambio infinitesimal del precio del bien 1. ¿Tienen el mismo signo?
c) ¿Se trata de bienes sustitutos o complementarios? ¿Son bienes normales o inferiores?

7) Considere las funciones: $x_i = x_i(p_1,p_2,M) = a_i M^{c_i} / b_i p_i \quad i = 1,2.$

Encuentre las relaciones que deben satisfacer los parámetros a_i y b_i, $i=1,2$, para que las funciones anteriores puedan ser consideradas funciones de demanda. (Indicación: suponga que se cumplen las predicciones de la teoría de la demanda y aplíquelo a las funciones dadas).

8) Suponga un consumidor maximizador de utilidad que sólo consume dos bienes, x_1 y x_2. El porcentaje de renta que destina al gasto del bien x_1 es siempre el 30%.

a) Establezca las restricciones que la teoría impone a las funciones de demanda marshalliana en términos de elasticidades. Explique su significado económico.

b) Utilice dichas restricciones para completar los siguientes datos.

$s_1 =$	$s_2 =$	$\varepsilon^d_{11} = -0{,}8$	$\varepsilon^d_{12} =$	$\varepsilon^d_{1y} = 0{,}6$
$\varepsilon^d_{21} =$	$\varepsilon^d_{22} =$	$\varepsilon^d_{2y} =$		

c) Comente las relaciones brutas y netas entre ambos bienes.

9) Considere un individuo cuyas preferencias de consumo entre n bienes son representables mediante la función de utilidad de Stone-Geary:

$$U(x)=U(x_1,x_2)=(x_1-c_1)^a(x_2-c_2)^{1-a},\quad 0<a<1,\ c_i>0,\ i=1,2.$$

a) Halle las funciones de demanda. (Indicación: use las obtenidas para el caso Cobb-Douglas, haciendo el cambio de variable $y_i = (x_i - c_i)$; es más fácil).

b) Demuestre que las funciones de utilidad Stone-Geary siempre representan preferencias monótonas y estrictamente convexas. (Nótese que sólo están bien definidas si $x_i > c_i$).

c) Demuestre que los dos bienes son normales para este consumidor.

d) Demuestre que son bienes complementarios brutos.

e) Demuestre que todas las demandas son rígidas (inelásticas), es decir que la elasticidad precio de todos los bienes es inferior a uno.

f) Si consideramos $x_i > c_i$, pudiendo ser ahora $c_i < 0$ o $c_i > 0$, ¿Siguen siendo los bienes complementarios brutos? ¿Y normales? ¿Siguen siendo las demandas rígidas? .

***<u>TEMA 4</u>*. Dualidad: función indirecta de utilidad y función de gasto. Propiedades. Ecuación de Slutsky.**

10) Considere la función de utilidad: $U(x_1,x_2)=\alpha \log x_1+(1-\alpha)\log x_2$, $0<\alpha<1$

a) Calcule las demandas compensadas $x^c_i(p_1,p_2,u^0)$, i=1,2, y la función de gasto $G(p_1,p_2,u^0)$ asociada. Verifique que la función de gasto es homogénea de grado uno en precios y que se cumple el lema de Hotelling (Teorema de la envolvente).

b) Calcule $\partial^2 G/\partial p_i \partial p_j$ (j=1,2) y verifique que la función de gasto es cóncava en precios (estrictamente cóncava en este caso). Use este resultado para probar que los efectos sustitución propios son negativos.

c) Calcule las demandas marshallianas $x_i(p_1,p_2,M)$, i=1,2, y la función indirecta de utilidad $V(p_1,p_2,M)$ asociada. Verifique que la función indirecta de utilidad es homogénea de grado cero en precios y renta, y que se verifica la identidad de Roy.

11) La función indirecta de utilidad de un consumidor es $V(\bar{p},M)=\frac{M}{p_1}+2\ln 2p_1-2\ln p_2-2$, donde M, p_1 y p_2 son la renta del consumidor y los precios de los bienes x_1 y x_2, respectivamente.

a) Calcule la función de gasto y explique su significado económico.
b) Calcule las funciones de demandas marshallianas y hicksianas.
c) Explique, en términos de la ecuación de Slutsky, la relación que existe entre ambas demandas.
d) Comente las relaciones brutas y netas entre ambos bienes.
e) Demuestre que las demandas marshallianas verifican la restricción de agregación de Engel. Comente su significado económico

12) Considere una economía con n bienes de consumo y el problema de elección de un consumidor con renta M y preferencias representables por la función de utilidad U dos veces diferenciable. Sean $(p,...,p_n)$, los precios de dichos bienes.

a) Establezca las relaciones existentes entre las funciones directa e indirecta de utilidad y la función de gasto. Explique como puede obtenerse cada una de ellas a partir de cada una de las restantes.
b) Establezca las relaciones existentes entre las funciones de demanda ordinarias y compensadas. Use estas relaciones para demostrar la ecuación de Slutsky.

13)

a) Usando la ecuación de Slutsky, dé condiciones precisas para que los bienes x_1 y x_2 sean simultáneamente sustitutivos brutos y complementarios brutos. Exprese dichas condiciones en términos de $\partial x_j^c/\partial p_i$, siendo x_j^c la demanda compensada de bien j.
b) Demuestre que si los bienes x_i y x_j son normales (inferiores) y complementarios (sustitutivos) netos entonces los bienes x_j y x_i son también complementarios (sustitutivos) brutos.

14) Suponga que las preferencias entre dos bienes vienen representadas por la siguiente función de utilidad $U(x_1,x_2)=x_1-(1/x_2)$. La renta es M=360 y $p_2=100$.

a) Derive a partir de las funciones de demanda la variación de los consumos al pasar el precio de x_1 de $p_1=4$ a $p_1'=9$.¿Cuál será el valor de p_1 que anule el consumo de x_1?
b) Derive las funciones de demanda compensadas, la función de gasto y la función indirecta de utilidad.
c) Verifique el lema de Shepard y la identidad de Roy.

15) Un individuo tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $U(x_1,x_2)=\ln x_1 + x_2$.

a) Compruebe si la función anterior es estrictamente cuasicóncava. ¿Qué interpretación económica tiene esta condición? ¿Qué implicaciones tiene el cumplimiento de esta condición?
b) Calcule las demandas hicksianas de los bienes y la función de gasto.

c) Haciendo uso de la teoría de la dualidad, calcule las demandas marshallianas. Justifique los resultados obtenidos.

Si la renta del individuo es $M = 100$, y el precio de ambos bienes es $p_1=p_2=2$.

d) Demuestre que el mínimo gasto del problema dual coincide con la renta del problema primal.

16) Considere la función indirecta de utilidad:

$$V(p_1,p_2,M) = (p_1^r + p_2^r)^{-r} M^{r^2}, \ \ 0 < r < 1$$

a) Compruebe que $V(p_1,p_2,M)$ es no creciente y cuasi-convexa en precios.
b) Encuentre las funciones de demanda de ambos bienes.
c) Calcule las elasticidades renta de las demandas encontradas en el apartado (b).
d) Verifique que las funciones de demanda obtenidas son homogéneas de grado cero y satisfacen la ley de Walras, la agregación de Engel y la agregación de Cournot.
e) Halle la matriz de efectos sustitución, compruebe que es simétrica y que su determinante es cero.
f) Demuestre que existe un única función de utilidad cuasicóncava $U(x_1,x_2)$ cuya función indirecta es $V(p_1,p_2,M)$. Demuestre que $U(x_1,x_2)$ representa preferencias monótonas y convexas.

***<u>TEMAS 5 Y 6</u>*. Teoría de la preferencia revelada. Propiedades de la función de demanda. Medidas de variación del bienestar individual: excedente, variaciones equivalente y compensada. Índices de precios, de coste de la vida y reales.**

17) Sea la función de utilidad $U = \ln x_1 + \ln x_2$. Si los precios de los bienes son unitarios:

a) Determinar las condiciones de primer orden de las cuales se obtendrían las demandas hicksianas de ambos bienes.
b) Justificar qué implicaciones tiene en la teoría del consumo que la función de utilidad sea estrictamente cuasicóncava.
c) Suponiendo que la función de utilidad dada es estrictamente cuasicóncava, justificar analítica y gráficamente, <u>utilizando la teoría de la preferencia revelada</u> que el efecto sustitución de un cambio en el precio del bien 1 sobre la cantidad demandada de este bien es siempre negativo.

18) Conteste a los siguientes apartados:

a) Utilice la función de gasto $G(p_1,p_2,U)$ para definir las variaciones compensada (*VC)* y equivalente (*VE*) asociadas a un incremento del precio del bien x_2 (Δp_2).

b) Demuestre que la *VC* y la *VE* definidas en el apartado anterior pueden expresarse en términos de las demandas compensadas (hicksianas). Apóyese en representaciones gráficas.
c) Defina la variación del excedente del consumidor (V_{EC}) asociada al cambio de precios indicado. Justifique en qué casos *VC*, *VE* y V_{EC} coinciden y cuando difieren.

Suponga que las funciones de demanda marshallianas y compensadas (hicksianas) de los bienes x_1 *y* x_2 de un consumidor son:

$$x_1^m = \frac{M}{2p_1} \qquad x_2^m = \frac{M}{2p_2} \qquad x_1^h = \left(\frac{Up_2}{p_1}\right)^{1/2} \qquad x_2^h = \left(\frac{Up_1}{p_2}\right)^{1/2}$$

donde M es la renta del consumidor. Partiendo de una situación inicial de equilibrio con $p_1^0 = p_2^0 = 1$ y $U_0 = 100$, se produce un incremento de p_2 que pasa a ser $p_2' = 4$.

d) Calcule la variación compensada, la variación equivalente y la variación en el excedente del consumidor asociadas al aumento de precio. Compare los resultados obtenidos y represéntelos gráficamente.

19)

a) Defina el Axioma Débil de Preferencia Revelada. ¿Qué propiedades de la función de demanda de bienes pueden demostrarse a partir de este axioma?
b) Un individuo consume dos bienes x_1 y x_2. A los precios $p_1^0 = p_2^0 = 10$ adquirió la cesta de consumo $x_1^0 = x_2^0 = 15$. A los precios $p_1^1 = 20,\ p_2^1 = 5$, adquirió la cesta $x_1^1 = x_2^1 = 8$. Analice si este individuo cumple el axioma débil de preferencia revelada. Justifique la respuesta analítica y gráficamente.
c) Utilizando los índices de precios, comente como ha variado el bienestar del individuo al modificar su cesta de consumo.

20) La función de gasto de un consumidor es $G(U,p_1,p_2) = \frac{3}{2^{2/3}}\left(Up_1^2p_2\right)^{1/3}$. Su renta es $M = 3$ y el vector de precios inicial es $\overline{p}^0 = (1,1)$. Suponga que el vector de precios cambia a $\overline{p}^1 = (1,2)$:

a) *Defina* y calcule los índices de precios de Laspeyres y de Paasche.
b) A partir de la función de gasto, *defina* y calcule el índice de coste de la vida (variación compensada).
c) ¿Qué le pasaría al bienestar del consumidor con relación a la situación inicial si se le indicia su renta con el índice de Laspeyres? ¿Y si se utiliza el índice de Paasche? ¿Cuál de los tres indicadores le parece más adecuado para indiciar la renta? Justifique su respuesta.

21) Las preferencias de un consumidor entre los dos bienes de la economía x_1 y x_2 vienen dadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1,x_2)=x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$$

a) Ordene desde el punto de vista de la utilidad máxima (e indique los valores de utilidad de) las siguientes cuatro situaciones (M,p_1,p_2): (10,1,1); (10,3,1); (5,3,1) y (20,3,1) donde M representa la renta y p_1 y p_2, los precios de los dos bienes. Calcule la función indirecta de utilidad.
b) Ordene desde el punto de vista del gasto mínimo (e indique sus valores) las cuatro situaciones anteriores y calcule las funciones de gasto.
c) Calcule el índice de precios de Laspeyres y el índice de precios basado en la variación compensatoria de renta, del paso de una situación inicial (10,1,1) a una final de (10,3,1) ¿Qué índice preferirá el consumidor como referencia para indiciar sus rentas? Justifique la respuesta.

22) La función de utilidad del único consumidor de una economía de dos bienes x_1 y x_2 es:

$$U(x_1,x_2) = \text{Min}\,(x_1,x_2)$$

a) Obtenga las funciones de demanda ordinaria de x_1 y x_2, la función de máxima utilidad dados los precios y la renta; y la función de mínimo gasto dados los precios y la utilidad.
b) Inicialmente la renta del individuo es M=10 y los precios son $p_1=p_2=1$. Si se eleva el precio de x_1 hasta $p_1'=3$. Calcule las variaciones equivalentes, compensatorias y del excedente del consumidor de tal elevación del precio de x_1.
c) Existe la posibilidad de la indiciación de las rentas del consumidor de acuerdo a un índice de precios de Laspeyres o con un índice de precios basado en la variación compensatoria de renta ¿Qué preferirá el consumidor?

23) Suponga que todos los consumidores tienen la función de utilidad:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i$$

donde x_i es la cantidad consumida del bien i=1,...,n y α_i es un parámetro no negativo tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

a) Deduzca la función de gasto y la proporción del gasto total que los individuos se gastan en el bien i.
b) El gobierno plantea duplicar el precio del gasóleo. Para compensarlo decide introducir rebajas fiscales en el impuesto sobre la renta. Si la renta es exógena ¿Cuál tendría que ser la rebaja, en porcentaje de la renta inicial, para que los consumidores no empeorasen?
c) Si los pensionistas gastaran un 20% más de su renta en gasóleo que el resto, ¿necesitaría en consecuencia una compensación que fuera un 20% mayor en proporción a sus rentas?

24) Un consumidor tiene una función de utilidad: $U(x_1,x_2) = a \log x_1 + x_2$, y se enfrenta a la restricción presupuestaria $p_1x_1 + p_2 x_2 = M$. Suponga que inicialmente $p_1=1$ y que como resultado de un impuesto el precio pasa a ser $p_1=1+t$. Considere dos posibles medidas de pérdida de bienestar de este consumidor debido al impuesto: (i) la variación equivalente y (ii) la variación del excedente del consumidor. Explique por qué en este caso estas dos medidas coinciden.

25) Un consumidor tiene unas preferencias representadas mediante la función de utilidad:

$$U(x_1,x_2)=x_1+2\sqrt{x_2}$$

y se enfrenta a la restricción presupuestaria $p_1x_1+p_2x_2=M$, siendo $Mp_2>p_1^2$.

a) Encuentre, en el orden que estime oportuno: (i) la función indirecta de utilidad; (ii) la función de gasto; (iii) las funciones de demanda de bienes; (iv) las funciones de demanda compensada.
b) Inicialmente los precios son $p_1=2$, $p_2=1$ y $M=10$. Suponga que el Estado se hace cargo de la mitad del gasto efectuado por el consumidor en el bien x_1. Calcule la variación compensada, la variación equivalente y la variación del excedente del consumidor. ¿El aumento de bienestar es mayor o menor que el coste de la subvención?

26) Las funciones de demanda hicksiana y marshalliana del bien x_1 de cierto individuo son respectivamente:

$$x_1^c=(Up_2/p_1)^{1/2} \qquad x_1^d=M/2p_1$$

siendo p_1, p_2 los precios de los dos únicos bienes de consumo, M la renta del individuo y U un cierto nivel de utilidad. Partiendo de una situación inicial de equilibrio, con $p_1^0=p_2^0=1$ y M=20, se produce un aumento del precio del bien x_2 siendo éste ahora $p_2^1=4$.

a) Si se desea mantener constante el nivel de utilidad del individuo, ¿en qué proporción se debería incrementar su renta? Exprese dicha proporción como función de la variación compensada.
b) Suponga que ante el aumento del precio p_2 el Estado le incrementa la renta en la proporción LP, siendo LP el índice de precios de Laspeyres, es decir la nueva renta sería $M^1=(LP)M^0$. ¿Mejorará el individuo?
c) Suponga que $M^1=(PP)M^0$, siendo PP el índice de precios de Paasche. ¿Mejorará el individuo?

27) La función de gasto del único consumidor de una economía de dos bienes x_1 y x_2 es:

$$G(U,p_1,p_2) = 2U(p_1+p_2)$$

Inicialmente la renta del individuo es M=10 y los precios son $p_1=p_2=1$. Si se eleva el precio de x_1 hasta $p_1'=3$

a) Calcule las variaciones equivalentes, compensatorias y del excedente del consumidor de tal elevación del precio de x_1.
b) Calcule la variación del índice de precios según los índices de Paasche, Laspeyres y los basados en las variaciones compensatoria y equivalente de renta.

28) Un consumidor tiene una utilidad indirecta:

$$V(p_1,p_2,M) = a^a(1-a)^{1-a}p_1^{-a}p_2^{-(1-a)}M,\ \ 0 < a < 1$$

Se observa que este consumidor siempre gasta el 80% de su renta en el bien 2. Inicialmente, los precios son $p_1^0 = 1, p_2^0 = 2$; La renta del consumidor es M =100.

a) Calcule, integrando la función de demanda compensada, la variación equivalente (VE) de la renta de un consumidor debida al cambio del precio del bien 1 desde $p_1^0 = 1, p_1^1 = 2$.
b) Compare el resultado obtenido en (a) con el obtenido a partir de la función de gasto.
c) Repita el ejercicio usando la variación compensada (VC) como medida de la variación de bienestar.
d) Compare los resultados obtenidos en los apartados anteriores con la variación del excedente del consumidor.
e) Suponga que el cambio en el precio se debe a un impuesto. A la diferencia entre VC y la recaudación obtenida con el impuesto la llamaremos "exceso de gravamen del impuesto". ¿Cuál es?. Si devolviesen al consumidor la recaudación íntegra del impuesto, ¿podría alcanzar el nivel de utilidad inicial (cuando $p_1^0 = 1$). ¿Cómo se calcularía la pérdida de eficiencia (o exceso de gravamen del impuesto) si sólo se conocen las funciones de demanda marshallianas? ¿En que difiere este cálculo del realizado en los apartados anteriores?

<u>TEMA 7</u>. **Elección bajo condiciones de incertidumbre. Hipótesis de la utilidad esperada. Medidas de aversión al riesgo. Modelo de aseguramiento: selección adversa. Modelo de selección de cartera.**

29)

a) Defina los conceptos de aversión, neutralidad y amor al riesgo. ¿Cómo son las funciones de utilidad del individuo en cada uno de los casos? Ponga un ejemplo de cada una de ellas y represéntela gráficamente.

Un consumidor puede elegir entre dos loterías:

1. la lotería l_1 le proporciona 4000 unidades de renta con probabilidad 0,8 y nada con probabilidad 0,2. l_1=(4000, 0; 0,8, 0,2)
2. la lotería l_2 le proporciona 3000 unidades de renta en todos los estados (3000; 1)

b) Suponga que el individuo es neutral al riesgo, ¿Cuál de las dos loterías elegiría?
c) Suponga que un individuo averso al riesgo ha elegido la lotería l_2. Para ser consistente en su comportamiento, ¿Cuál de las dos siguientes loterías preferirá?

   l_3 =(4000, 0; 0,2, 0,8)

   l_4 =(3000, 0; 0,25, 0,75)

30) La compañía aseguradora "DuermaTranquilo" ofrece contratos de seguros a dos individuos que quieren cubrirse frente a la eventualidad de un robo en su casa. Ambos individuos tienen la misma riqueza W=1000 u.m.. Además, los dos viven en el mismo inmueble y tienen sus pisos valorados en la misma cuantía R=657. El individuo A tiene unas preferencias sobre riqueza cierta definidas por la función de utilidad $U_A(w)=w^{1/3}$, mientras que el individuo B tiene unas preferencias representadas por la función $U_B(w)=2w$. El individuo A tiene instalada una alarma en su casa, por lo que estima que la probabilidad de que le roben es de 0,2. Sin embargo, el individuo B no tiene ningún sistema de seguridad, por lo que estima que la probabilidad de que le roben es de 0,4.

a) Determine si los individuos son amantes, neutrales o aversos al riesgo. Calcule su grado de aversión al riesgo (índice de Pratt).
b) Formule de forma genérica el problema de optimización que resolverían ambos individuos.
c) Si la entidad aseguradora fija para ambos individuos una prima γ=0,3, calcule el capital asegurado *K* por cada uno de los individuos y el beneficio esperado de la empresa aseguradora.
d) Si la compañía de seguros decide fijar una prima justa a cada uno de los individuos, ¿cuál será el capital asegurado por cada uno de ellos?
e) A partir de los resultados del apartado anterior, comente qué tipo de problemas podría surgir si la empresa no tiene información suficiente para distinguir qué individuo tiene mayor probabilidad de robo.

31) Un individuo que posee una riqueza de W_0, puede invertir exclusivamente en dos activos financieros. Un activo es seguro y, con independencia de la situación económica, le proporciona una rentabilidad del 20%. El otro ofrece una rentabilidad del 50% si la economía está en expansión y conlleva una pérdida del 50% en situación recesiva. Con probabilidad Π la economía se encuentra en una fase expansiva. El individuo maximiza la utilidad esperada de la riqueza.

a) Si X es la cantidad invertida en el activo con riesgo, analice y represente la restricción presupuestaria del individuo.
b) Si su función de utilidad de la riqueza cierta es U(w)=ln w, determine el valor de Π de manera que el individuo invierta la cuarta parte de su riqueza en el activo seguro.
c) Si la función de utilidad de la riqueza cierta del individuo es U(w)=2w, determine para qué valores de Π el individuo invierte toda su riqueza en el activo seguro (X=0).

32) En el mercado de seguros de accidentes de automóviles hay dos clases de conductores, los buenos conductores (que causan un accidente al año con probabilidad 0,1 y ningún accidente, con probabilidad 0,9) y los malos conductores (que causan un accidente con probabilidad 0,2 y ningún accidente, con probabilidad 0,8). Los costes de reparación de vehículos involucrados en los accidentes (en media) es de 300.000 u.m. La proporción de buenos y malos conductores es de 2 a 1. La utilidad de los conductores, que maximizan la utilidad esperada, es igual a $U(w)=w^{1/2}$ y sus riquezas iniciales son de 500.000 u.m.

a) Calcule la cuota mínima que las compañías de seguros estarían dispuestas a ofrecer, suponiendo que son neutrales con respecto al riesgo y que no pueden distinguir entre los dos tipos de conductores.
b) ¿Qué tipo de conductores subscribiría una póliza de seguros a la cuota del apartado a)?¿Cuáles son las cuotas máximas que cada tipo de conductor está dispuesto a pagar?
c) Suponiendo que las empresas conocen qué tipo de conductores contratarían los seguros a cada cuota, aunque siguen sin poder distinguirlos, calcula la cuota de equilibrio competitivo, es decir las cuotas mínimas que las empresas estarían dispuestas a ofrecer en este contexto. ¿Qué tipo de conductores las contratarán? [Se supone que no existen costes administrativos en la gestión de los seguros por parte de las empresas].

33) Un consumidor se enfrenta a la opción de invertir toda su riqueza W=100.000 entre dos activos financieros, A_1 y A_2. Se estima que el primer activo A_1 tendrá un rendimiento del 21% si la economía presenta una fase favorable y el segundo activo A_2 tendrá un rendimiento del 44% en este caso. En el caso de que la economía presente una fase desfavorable los rendimientos esperados son del 0% para A_1 y unas pérdidas del 19% para el A_2. La probabilidad de que la economía pase por una fase desfavorable (favorable) es del 50%. La utilidad del consumidor, que maximiza la utilidad esperada, es igual a $U(w)=w^{1/2}$.

a) Si se mide el riesgo de un activo por la prima de riesgo, determine que activo incorpora un mayor riesgo. ¿Cuál preferirá el consumidor?
b) Si una institución financiera ofrece dos fondos de inversión. El primero F_1, se constituye con un 60% del activo A_1 y con un 40% del A_2. El segundo fondo, F_2 se compone de un 90% de A_1 y de un 10% de A_2 ¿Qué fondo preferirá el consumidor? ¿Cuál incorpora más riesgo? Dé una explicación de los resultados obtenidos.
c) Suponga que ahora el consumidor puede invertir su riqueza en la combinación de A_1 y A_2 que considere más conveniente ¿Qué combinación elegirá el consumidor?

34) Un individuo tiene unas preferencias representables por la función de utilidad $U(w) = w^{1/2}$, donde w es su riqueza. Se le ofrece una lotería L=(4, 9; 0.2, 0.8), donde las ganancias están expresadas en millones de u.m. Determine el equivalente de certeza y la prima de riesgo para ese individuo si su riqueza inicial es 0 millones, 50 millones y 100 millones de u.m. ¿Y si su función de utilidad esperada fuera $U(w) = \ln w$? Compare y comenta los resultados. ¿Cuál es la relación entre la riqueza y el grado de aversión al riesgo según el coeficiente de aversión relativa de Arrow-Pratt?

35) Un consumidor posee una casa valorada en 25 millones de u.m.. La probabilidad de que ésta sea totalmente destruida por un incendio (en cuyo caso perdería todo su valor) es de 0,01.

a) Si las preferencias están representadas por la función de utilidad $U(w)=w^{1/2}$, donde w es la riqueza del consumidor al final del año, ¿aceptaría el consumidor asegurar completamente la casa por 300.000 u.m.?

b) Suponiendo que el riesgo del incendio es el mismo para todos los consumidores, ¿sería ésta una cuota de seguro aceptable para una compañía de seguros? (Suponga que la compañía es neutral con respecto al riesgo).¿Cuál es la cuota máxima de seguro que está dispuesto a pagar el consumidor?¿Y la cuota mínima que está dispuesto a ofrecer la compañía?¿Qué relación hay entre estas cuotas, el equivalente de certeza y la prima de riesgo de la lotería que representa la propiedad de la casa sin seguro?

36) Al decidir aparcar en una zona prohibida la probabilidad de ser multado es p=0,25 y la multa es de 25000 u.m. Para aparcar en una zona permitida es necesario sacar una tarjeta que cuesta 10.000 u.m.. Nuestro individuo tiene una función de utilidad $U(w)=w^{1/2}$, siendo w la riqueza. Actualmente W =1.000.000 u.m.

a) Determine el plan de consumos contingentes de este individuo.
b) ¿Aparcará en la zona prohibida? ¿Y si la tarjeta costase 5000?
c) Analice qué sería más eficaz para estimular la compra de tarjetas: doblar la probabilidad de ser sorprendido (aumentando los efectivos de control) o doblar la multa a pagar.

37) Suponga dos individuos que tienen funciones de utilidad U(w) y g(w)=f(U(w)), donde $f'>0$ y $f''<0$. Demuestre que si el primer individuo es averso al riesgo entonces el segundo lo es en mayor medida y tiene asociado un mayor premio al riesgo. (Indicación: demuestre que el segundo individuo tiene mayor aversión absoluta y relativa al riesgo).

38) Considere el modelo simple de determinación de la cartera individual óptima de activos en condiciones de incertidumbre, con dos estados del mundo, s=1,2, que ocurren con probabilidades π y $(1-\pi)$ respectivamente. Existen tan solo dos activos. Uno de ellos es seguro (bonos del Estado) con rendimiento r independiente del estado del mundo, mientras que el activo alternativo tiene un rendimiento aleatorio e_1 en s=1 y e_2 en s=2, siendo $e_1>r>e_2$. Suponga que un individuo averso al riesgo tiene una riqueza inicial W_0, y puede invertirla en la compra (por valor X) de activos con riesgo y/o en la compra (por valor (W_0-X)) de bonos.
Halle las demandas óptimas de bonos y acciones cuando la función de utilidad del agente es U(w) = log w. Estudie asimismo como cambia la demanda de activos con riesgo del agente cuando varía su riqueza inicial. ¿Puede demostrar que, cuando (como aquí) el coeficiente de aversión absoluta al riesgo del agente decrece con el valor de la riqueza inicial, entonces se cumple que $\partial X/\partial W_0 > 0$?.

39) Un individuo tiene una función de utilidad de la forma $U(w)=w^{1/2}$, una riqueza inicial de 4 u. m. y un boleto de lotería que se convertirá en 12 u.m. con probabilidad 1/2 y en cero con probabilidad 1/2 ¿Qué precio aceptaría el individuo por la lotería? Muestre que cuanto más alta sea la riqueza inicial del individuo mayor será el precio anterior. ¿Será mayor que 6 en algún caso?

40) Demuestre que la máxima cantidad que pagaría un individuo por cubrirse completamente ante el posible robo de L u.m., lo cual ocurre con probabilidad p, es r+pL (r es el premio al riesgo para el individuo). Demuestre que el beneficio esperado por la compañía aseguradora es en este caso de r u.m. ¿Qué cantidad cede, en promedio, el individuo a la aseguradora a cambio de que ésta asuma los riesgos?

41) Cierto individuo acaba de comprarse una casa por la cantidad de 160.000 u.m. Su riqueza actual es de 300.000 u.m., incluyendo la propiedad de la casa. Una compañía de seguros le ofrece la posibilidad de asegurar riesgo en cualquier proporción, exigiendo la prima θ por unidad de capital asegurada. En caso de siniestro (incendio, inundación,...) la compañía devuelve la cantidad asegurada. La probabilidad de siniestro se estima de π=0.1

a) Encuentre la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el individuo. Represéntela gráficamente.
b) Considere las siguientes funciones de utilidad de la riqueza.
   (i) U(w)=log w; (ii) $U(w)=w^{1/2}$; (iii) U(w)=aw, a>0.

Encuentre, en cada caso, los valores de la prima para los que se asegura totalmente ¿Cuándo decide no asegurarse? Calcule la cantidad de capital asegurada si π=0.15.

c) Si al individuo anterior le tocan 100.000 u.m. en la lotería de Navidad, ¿cómo variarían sus decisiones de seguro?
d) Conteste a todos los apartados anteriores si la compañía de seguros cobra una prima justa $\theta = \pi$, pero sólo devuelve el 80% del capital asegurado en caso de siniestro.