Microeconomía II

Alexander Galetovic [1]

Esta versión: semestre primavera 2002

---

[1] Este apunte fue preparado en colaboración con Pamela Arellano.

Índice General

Índice de Figuras

Índice de Ejemplos

Capítulo 1

Introducción a la teoría de juegos

1.1 Introducción

¿Qué es *teoría de juegos*? Hay muchas definiciones posibles, pero tal vez la mejor es la que dice que la teoría de juegos es *el estudio de las decisiones interdependientes.*

¿Qué son *decisiones interdependientes*? Tres ejemplos:

Ejemplo 1: El escalador de la montaña
Quien escala una montaña se enfrenta a un medio ambiente pasivo, es decir, a un medio ambiente que no se ajusta a las acciones del escalador. El problema que éste resuelve (¿qué ruta seleccionar para llegar a la cima?) puede incorporar incertidumbre, pero esta incertidumbre es *exógena. Hay sólo una decisión óptima.*

Ejemplo 2: El agricultor y cuántas hectáreas de tomates plantar
El agricultor toma el precio de los tomates (o su proceso estocástico) y decide cuánto plantar. Si agregamos las decisiones de todos los agricultores que plantan tomates, éstas, junto con la demanda por tomates, determinan su precio. Sin embargo, las decisiones de cada agricultor particular no afectan las del resto. Por esto se dice que cada agricultor toma precios.

1. Dado el precio, hay sólo una decisión óptima.
2. Cada agricultor necesita saber sólo el precio; no necesita conocer los costos, preferencias, costos de producción, etc. del resto de los productores, ni las preferencias de los consumidores.

En este caso estamos frente a un problema en que la incertidumbre es *endógena a nivel de mercado y exógena para el agricultor.*

Ejemplo 3: El multicarrier
Consideremos el problema de Entel. Una de sus variables de decisión es qué precios cobrar por las llamadas.

1. ¿Qué tan altas son las utilidades de Entel si cobra a \$250/minuto a Estados Unidos? La respuesta dependerá de cuánto cobren VTR, Bell South, CTC, etc.

   Notar que, en general, no hay un curso de acción independiente de qué hacer para cada uno de los competidores de Entel. Esto difiere del ejemplo 1 en que allí sí habría un curso de acción óptimo. Difiere del ejemplo 2 en que la acción óptima de Entel depende de lo que haga cada uno de sus competidores.

2. Esto último implica que la decisión que tome Entel dependerá de lo que Entel espere que haga cada uno de sus competidores. En este sentido, las decisiones de Entel dependen de las decisiones de cada uno de sus competidores.

3. Pero también ocurre que Entel reconoce que lo que decidan sus competidores depende de lo que ellos esperan sobre las acciones que tome Entel. Más aún, los competidores reconocen que Entel decidirá en base a lo que espera que cada uno haga. De ahí que se diga que la teoría de juegos estudia decisiones *interdependientes*.

Entonces, las decisiones son interdependientes cuando:

1. El pago de quien decide depende de las decisiones de *cada uno* del resto de los jugadores (no del conjunto).
2. Los jugadores están conscientes de esta dependencia y actúan *en consecuencia*.

La teoría de juegos reconoce 1. y nos da las herramientas para modelar 2. Supone que *actuar en consecuencia* significa actuar racionalmente. Racionalidad significa:

1. Preferencias del tipo VNM.
2. Conjeturas sobre lo que el resto de los jugadores va a hacer son consistentes *entre sí*.

1.1.1 ¿Qué es un juego?

Un *juego* es una *representación formal* de una situación en que las decisiones son interdependientes. Es importante recordar esto:

1. Es una *representación*, no es la situación misma.
2. Es *formal*, es decir, aquí tratamos con objetos matemáticos que van a ser manipulados con reglas precisas.

Luego, hay que distinguir entre el aparato formal y la situación que se está modelando.

Para representar formalmente una situación debemos conocer cuatro cosas:

1. Los *jugadores*.

2. Las *reglas del juego*:
    - Quién mueve y cuándo.
    - Qué saben los jugadores cuando mueven.
    - Qué pueden hacer cada vez que les corresponde mover (qué acciones están disponibles).
3. Los *resultados* posibles del juego para cada combinación posible de acciones.
4. Las *preferencias* de los jugadores sobre cada posible resultado del juego. En este curso siempre supondremos que las preferencias son del tipo VNM (racionales).

1.1.2 Formas de representar un juego

Las dos formas más usadas para *representar un juego* son la *forma normal* y la *forma extensiva.* Ahora bien, todo juego puede representarse de una u otra forma. Sin embargo, los *juegos estáticos* (juegos en que cada jugador mueve sin conocer qué jugó el resto de los participantes) suelen representarse en forma normal y los *juegos dinámicos* en forma extensiva. Como es más natural ordenar esta sección del curso según si los juegos son estáticos o dinámicos, comenzaremos con los juegos estáticos.

1.1.3 Jugadores racionales

No podemos especificar un juego sin señalar qué sabe cada jugador cuando le corresponde mover. Dependiendo de cada situación específica, un jugador puede saber más o menos. Sin embargo, supondremos que un jugador *siempre*:

1. Conoce el juego (en otras palabras, conoce 1. a 4. de la sección 1.1.1).
2. Sabe que el resto de los jugadores conoce el juego y que él sabe que ellos saben, y así, sucesivamente.

1. y 2. son de *conocimiento común.* Notar que esto implica que la racionalidad de los jugadores es de conocimiento común.

La pregunta central es, entonces, ¿qué resultado podemos esperar si el juego y la racionalidad de los jugadores es de conocimiento común?

1.1.4 Algunos ejemplos

Ejemplo 4: El dilema de los prisioneros

	c	n
C	**20** **20**	10 140
N	140 10	100 100

Ejemplo 5: La batalla de los sexos

		Jugador 2	
		f	b
Jugador 1	F	**2** **1**	0 0
	B	0 0	**1** **2**

Ejemplo 6: Policías y ladrones

		Ladrones	
		z_1	z_2
Policías	Z_1	-1 1	1 -1
	Z_2	2 -1	-1 1

Este es un juego de conflicto puro o juego *estrictamente competitivo*.

Ejemplo 7: Entrar o no entrar

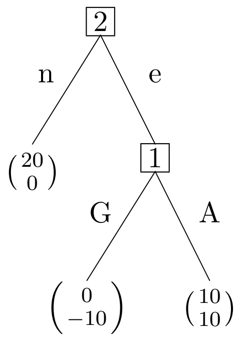


Figura 1.1: Entrar o no entrar

Ejemplo 8: ¿Adoptar o no?

		Jugador 2	
		a	n
Jugador 1	A	**3** **3**	0 0
	N	0 0	**1** **1**

En este juego no hay conflicto de intereses, pero sí un problema de coordinación.

1.2 Juegos estáticos con información completa

En esta sección estudiaremos juegos con las siguientes reglas. Primero, los jugadores eligen simultáneamente acciones. Segundo, los jugadores reciben *pagos* que dependen de la combinación de acciones resultante (también se conocen por *juegos estratégicos*).

A estos juegos se les conoce por *estáticos*, porque ningún jugador sabe qué combinación de acciones eligió cada uno de los restantes jugadores; no hay tiempo para reaccionar. El *dilema de los prisioneros* es un juego estático.

Definición 1 *Un* juego estático *consiste en:*

1. *Un conjunto finito N de jugadores*
2. *Un conjunto A_i de acciones posibles, para todo jugador $i \in N$*
3. *Una función de pago VNM $u_i : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{N} A_i \to \mathbb{R}$, para cada jugador $i \in N$ tal que:*

$$\mathrm{E}u_i(x) = \begin{cases} \int_{\mathsf{X}} u_i(x) dF(x) \\ \sum\limits_{x \in \mathsf{X}} \pi(x) u_i(x) \end{cases}$$

Denotamos el juego en forma normal *por:*

$$J = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$$

Observación 1 : Notar que, para toda *combinación* posible de acciones:

$$a \in A \equiv \mathop{\times}\limits_{i=1}^{N} A_i$$

u_i nos dice el nivel de utilidad que de ella obtiene cada jugador.

Observación 2 : Se supone que $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es de *conocimiento común.* En particular, $\forall\ i$, es *conocimiento común* que el jugador j ordena los posibles resultados según u_j. Es por esto que se dice que el juego es de *información completa.*

Ejemplo 9: El dilema de los prisioneros

1. $N = \{1, 2\}$
2. $A_1 = \{C, N\}$, $A_2 = \{c, n\}$
3. $A = A_1 \times A_2 = \{(C, c), (N, n), (C, n), (N, c)\}$
4. $u_1 : A \to \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_1(C, n) = 10$
   $u_2 : A \to \mathbb{R}$, por ejemplo: $u_2(C, n) = 140$

Cuando hay dos jugadores, el juego se representa en forma gráfica con la tradicional matriz:

	c	n
C	**20** **20**	10 140
N	140 10	100 100

1.2.1 Estrategias dominadas

Nota: A partir de ahora hablaremos indistintamente de *acción* y *estrategia*; además, elegir una acción con probabilidad uno también se conoce con el nombre de *estrategia pura.*

En el *dilema de los prisioneros* la estrategia N es dominada por la estrategia C; no importa qué haga el otro jugador, lo conveniente para uno es confesar. Una manera de resolver el juego (predecir qué sucederá si se juega) es eliminar las estrategias dominadas, puesto que un jugador racional no debería jugar estrategias dominadas.

Definición 2 *La estrategia* $a_i \in A_i$ *es dominada estrictamente por* $a_i' \in A_i$ *si,* $\forall\ a_{-i} \in \mathop{\times}\limits_{j\neq i} A_j$*:*

$$u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(a_i', a_{-i})$$

Es dominada débilmente si, $\forall\ a_{-i} \in \mathop{\times}\limits_{j\neq i} A_j$*:*

$$u_i(a_i, a_{-i}) \leq u_i(a_i', a_{-i}),$$

con desigualdad estricta para al menos un $a_{-i} \in \mathop{\times}\limits_{j\neq i} A_j$

Ejemplo 10: Una licitación de sobre cerrado, segundo precio
Considere la siguiente licitación en la que participan N empresas. Se vende un objeto (por ejemplo, una máquina) que las empresas valoran en $v_1 > v_2 > \ldots > v_N$. Gana la licitación quien declara valorar más el bien, pero paga la segunda valoración más alta. Si hay empate, el bien se asigna al de menor subíndice.

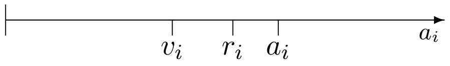
Proposición 1 *Para cada empresa, decir la verdad es una estrategia débilmente dominante.*

Demostración: Para cada participante $i \in N$, su estrategia consiste en elegir una postura $a_i \in [0, \infty)$. La proposición dice que $\forall\ i \in N$, $a_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante, es decir $\forall\ a_{-i} \in \mathop{\times}\limits_{j\neq i} A_j$ y $\forall\ a_i \in A_i$, $a_i \neq v_i$:

$$u_i(v_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$$

con desigualdad estricta para al menos algún $a_{-i} \in \mathop{\times}\limits_{j\neq i} A_j$.

1. Sea $r_i \equiv \max a_{-i}$ (Es decir, r_i es la máxima postura del resto de las empresas).
2. Suponer que el jugador i elige una postura $a_i > v_i$.
   (a) Si $r_i \leq v_i$, entonces i gana y obtiene un excedente $v_i - r_i \geq 0$, que es lo mismo que hubiese obtenido si hubiera seleccionado v_i.
   (b) Si $r_i > a_i$, i no gana y su excedente es 0, lo cual es igual que si hubiese elegido una postura $a_i' = v_i$.



(c) Si $a_i \geq r_i > v_i$, i gana y su excedente es $v_i - r_i < 0$. Con la postura $a_i' = v_i$ su excedente sería 0.

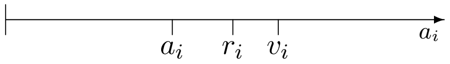
Por lo tanto, v_i domina débilmente a $a_i > v_i$.

3. Suponer que el jugador i elige una postura $a_i < v_i$.

   (a) Si $r_i \leq a_i$, entonces i gana y obtiene un excedente $v_i - r_i \geq 0$, que es lo mismo que hubiese obtenido si hubiera seleccionado $a_i' = v_i$.

   (b) Si $r_i > v_i$, i obtiene excedente 0, lo cual es igual que si hubiese elegido una postura $a_i' = v_i$.

   (c) Si $v_i > r_i > a_i$, el excedente es 0. Con la postura $a_i' = v_i$ su excedente sería $v_i - r_i$.



Por lo tanto, v_i domina débilmente a $a_i < v_i$.

Observación 3 : No hemos hecho supuesto alguno sobre qué es lo que sabe cada licitante sobre la valoración del resto. Tampoco sobre racionalidad.

Ejemplo 11: (Continuación del ejemplo sobre el dilema de los prisioneros)
Este juego se puede resolver sólo con eliminar las estrategias dominadas.

	c	n
C	20 20	10 140
N	140 10	100 100

Nuevamente, no hemos hecho supuesto alguno sobre lo que cada jugador sabe del otro. ¿Es eso característica de todo juego que se puede resolver eliminando estrategias débilmente dominadas? Esto es sólo así si el juego se puede resolver en una *ronda* de eliminación.

Ejemplo 12: Considerar el juego:

		Jugador 2	
		a	b
Jugador 1	A	5 5	**6** **3**
	B	3 4	-1000 2

El supuesto clave en este juego es que el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional y esto lo lleva a eliminar *a*. Pero, ¿es esto razonable?

Observación 4 : ¿Qué podemos esperar si resolvemos juegos eliminando estrategias dominadas sucesivamente?

1. Toda estrategia estrictamente dominada será eliminada, dado que anteriormente otros jugadores han eliminado sus estrategias dominadas. En este caso, el resultado no cambia con el orden de la eliminación.

2. El resultado puede depender del orden de eliminación si se eliminan estrategias débilmente dominadas.

Ejemplo 13: Juego en que el equilibrio depende del orden de eliminación
En este juego, el equilibrio resultante depende del orden en que se eliminan las estrategias débilmente dominadas:

	a	b	c
A	4 3	2 3	4 3
B	4 0	2 2	4 4
C	4 2	0 0	6 4

¿Qué pasa si, después de eliminar todo lo eliminable, resulta un conjunto de estrategias en las que nada domina a nada?: Equilibrio de Nash.

1.2.2 Equilibrio de Nash

En la mayoría de los casos, un juego no puede resolverse eliminando estrategias dominadas. (*Resolver* significa que el método entrega una predicción, posiblemente única, sobre cómo se jugará o se debe jugar el juego en cuestión).

El concepto central de equilibrio de la teoría de juegos (y de toda la teoría microeconómica), el *equilibrio de Nash*, sugiere un *algoritmo* para elegir combinaciones de estrategias.

Un equilibrio es una situación tal que ninguno de los jugadores quiere cambiar su decisión dada la combinación de estrategias del resto de los jugadores.

Definición 3 *Un* equilibrio de Nash *del juego* $J = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$*, es una combinación de estrategias* $a^* \in A$ *tal que,* $\forall\, i \in N$

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \quad \forall\, a_i \in A_i$$

Ejemplo 14: Oligopolio
Suponga un oligopolio en que las empresas deben decidir entre utilizar precios *altos*, *bajos* o *de guerra.*

	a	b	g
A	10 10	14 -5	0 -10
B	-5 14	**5** **5**	0 -5
G	-10 0	-5 0	**0** **0**

En este juego hay dos equilibrios de Nash.

Observación 5 : Algunas características del equilibrio de Nash:

1. No es equilibrio de Nash, en el ejemplo, la combinación de estrategias que maximiza las utilidades conjuntas. (Un equilibrio de Nash no es, necesariamente, Pareto-Óptimo).

2. Un equilibrio de Nash no requiere de un agente externo para sostenerse ya que los incentivos son tales que no conviene salirse. Esta propiedad sugiere que el concepto de equilibrio de Nash es útil para diseñar un mecanismo de incentivos debido a que propone cómo usar el interés personal para lograr determinados resultados sin usar la coerción para inducirlos.

3. ¿Es una predicción razonable del resultado del juego? La definición no nos dice nada sobre cómo se llega a que todos los jugadores jueguen un equilibrio de Nash.

   (a) Una interpretación sugiere que el equilibrio de Nash es el resultado de la experimentación en el tiempo. Cuando los jugadores se dan cuenta que la experimentación no les lleva a mejorar su pago, el comportamiento se perpetúa. Notar que no deben haber vínculos estratégicos intertemporales.
   (b) Una segunda interpretación es que un equilibrio de Nash corresponde a lo que jugarán jugadores racionales que conocen el juego y cuya racionalidad es *conocimiento común*

   Probablemente, (3a) es más razonable si lo que se pretende de la teoría de juegos es un modelo para analizar el comportamiento económico.

4. No todos los juegos tienen equilibrios de Nash en estrategias puras: recordar el juego *policías y ladrones*:

Esto nos lleva a las *estrategias mixtas*.

1.2.3 Estrategias mixtas

En el juego *policías y ladrones* no existe un equilibrio en *estrategias puras* debido a que el *comportamiento sistemático* de uno de los jugadores sería explotado por el otro. Lo natural en estos casos es que el comportamiento de cada jugador sea aleatorio, o equivalentemente, que elija más de una estrategia pura con probabilidad positiva, es decir, que elija una *estrategia mixta*.

Definición 4 *Una* estrategia mixta σ_i *es una distribución de probabilidades sobre estrategias puras. Denotamos por* $\sigma_i(a_i)$ *la probabilidad que* σ_i *le asigna a la estrategia pura* a_i

Observación 6 : Propiedades de las estrategias mixtas.

1. Si el set de estrategias puras del jugador i es A_i, el set de estrategias mixtas de i es el simplex de dimensión $n_i - 1$, donde n_i es el número de estrategias puras.

2. Denotamos por $\triangle(A_i)$ el set de todas las estrategias mixtas de i. $\triangle(A) = \bigtimes_{i=1}^{N} \triangle(A_i)$ es el espacio de estrategias mixtas de J; si σ es un elemento de $\triangle(A)$, entonces $\sigma_i(a_i)$ es la probabilidad que aparezca la acción a_i de i, dado que se escogió σ como combinación de estrategias.

3. El pago del i-ésimo jugador, si se juega la combinación de estrategias σ es:

$$\sum_{a \in A} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(a_j) \right) u_i(a_1, a_2, \ldots, a_N) \equiv \sum_{a \in A} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(a_j) \right) u_i(a)$$

   Donde:

   $u_i(a)$**:** utilidad que le reporta al jugador i el que se juegue a

$\sigma_j(a_j)$**:** probabilidad que se juegue $a_j \in A_j$

$\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(a_j)$**:** probabilidad que se juegue $a \in A$

4. La forma del pago de cada jugador implica que las preferencias de cada uno son VNM, y que sus estrategias mixtas son independientes entre sí.
5. Las definiciones sobre estrategias dominadas y equilibrio de Nash se extienden directamente al caso de estrategias mixtas.

¿Cómo encontrar un equilibrio de Nash en estrategias mixtas? Haremos uso de la siguiente propiedad:

Propiedad: En un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, a cada jugador le es *indiferente* qué estrategia pura juega entre aquellas que, según su estrategia mixta, juega con probabilidad positiva.

Ejemplo 15: Equilibrio de Nash en estrategias mixtas
La siguiente matriz describe el juego *policías y ladrones* presentado anteriormente.

		Ladrones	
		z_1	z_2
Policías	Z_1	-1 1	1 -1
	Z_2	2 -1	-1 1

Aplicando la propiedad anterior a este juego se tiene que, en equilibrio, a los policías les será indiferente en qué zona patrullar si el pago esperado es el mismo:

$$l(1) + (1-l)(-1) = l(-1) + (1-l)(1)$$

Donde l es la probabilidad que los ladrones operen en la zona 1.

$$\begin{aligned} l - 1 + l &= -l + 1 - l \\ 2l - 1 &= 1 - 2l \\ 4l &= 2 \\ l &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Notar que para que a los policías les sea indiferente en qué zona patrullar, los ladrones deben operar en la zona 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$.

A los ladrones les será indiferente en qué zona robar si la probabilidad p con que los policías patrullan la zona 1 es tal que:

$$\begin{aligned} p(-1)+(1-p)(2) &= p(1)+(1-p)(-1) \\ -p+2-2p &= p+p-1 \\ 2-3p &= 2p-1 \\ 3 &= 5p \\ p &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Notar que los policías patrullan más en la zona 1 porque los ladrones prefieren robar allí. Su estrategia mixta de equilibrio queda determinada por las preferencias de los ladrones, no por su propia indiferencia. Lo mismo ocurre para los ladrones.

Críticas al concepto de *estrategia mixta*:

1. Si en el equilibrio los jugadores están indiferentes respecto a qué estrategia pura jugar, ¿por qué habrán de hacerlo justo con la frecuencia requerida por la estrategia mixta de equilibrio?

   Sin embargo, ésta no es una crítica condenatoria debido a que casi cualquier modelo económico utiliza una condición similar para poder ser resuelto y, dado que hemos supuesto funciones de utilidad del tipo VNM, las condiciones de indiferencia son válidas.

2. Cambios marginales en la estrategia mixta de un jugador llevan a cambios drásticos en el comportamiento del otro jugador. Esta discontinuidad es realmente la que no gusta. (Harsanyi (1973) propuso soluciones a las críticas 1. y 2.).

1.2.4 Existencia de un equilibrio de Nash

Vimos que el juego de *policías y ladrones* no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras, pero sí lo tiene en estrategias mixtas. Esto no es casual, pues todo juego cuyo espacio de acciones es finito tiene, al menos, un equilibrio de Nash en estrategias puras o uno en estrategias mixtas (la suficiencia depende del supuesto que la función de utilidad de cada jugador es del tipo VNM).

¿Por qué nos preocupa la existencia del equilibrio? Si existe, el juego es consistente con la existencia de una solución estable en el largo plazo.

1.2.5 Ejercicios

Ejercicio 1:
Construya un ejemplo donde el equilibrio dependa del orden en que se eliminan estrategias débilmente dominadas.

Ejercicio 2:
¿Cuál es la diferencia entre $\bigtimes_{i=1}^{N} \triangle(A_i)$ y $\triangle(\bigtimes_{i=1}^{N} A_i)$? Explique la relevancia desde el punto de vista de teoría de juegos.

Ejercicio 3:
Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si una aseveración es verdadera, demuéstrela; si es falsa, dé un contraejemplo.

1. Sean σ_i y σ_i^* dos estrategias mixtas del jugador i. Suponga que para cualquier vector de estrategias puras $a_{-i} \in A_{-i}$ del resto de los jugadores, $u_i(\sigma_i^*, a_{-i}) > u_i(\sigma_i, a_{-i})$. Entonces, para cada vector de estrategias mixtas $\sigma_{-i} \in A_{-i}$ se cumple que $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.
2. Sea $a_i^* \in A_i$ es una estrategia pura del jugador i. Suponga que ninguna estrategia pura $a_i \in A_i$ domina estrictamente a a_i^*. Entonces, ninguna estrategia mixta $\sigma_i \in \triangle(A_i)$ domina estrictamente a a_i^*.
3. Si una estrategia mixta σ_i^* domina estrictamente a la estrategia pura a_i, entonces cualquier estrategia mixta del jugador i que asigne una probabilidad positiva a la estrategia pura a_i es estrictamente dominada por σ_i^*.

Ejercicio 4:
¿Cómo es posible que haya más de un equilibrio en estrategias mixtas?

Ejercicio 5:
Demuestre que:

1. Si un juego se puede resolver por eliminación de estrategias dominadas, entonces la solución obtenida por esta vía es un equilibrio de Nash.
2. Si un juego se puede resolver eliminado estrategias estrictamente dominadas, entonces, esta solución es el único equilibrio de Nash.

Ejercicio 6:
Para el juego *dilema de los prisioneros*, encuentre en equilibrio en estrategias mixtas. ¿Qué opinión le merece? Dé una intuición al respecto.

Ejercicio 7:
Sin usar la fuerza bruta encuentre el equilibrio en estrategias mixtas del siguiente juego:

	A	B	C
T	0 2	1 1	2 4
U	4 3	2 1	3 2
V	3 1	2 0	0 3

Ejercicio 8:
Dos empresas, 1 y 2, ofrecen cada una un puesto de trabajo en el que pagan, respectivamente, w_1 y w_2, con $\frac{w_1}{2} < w_2 < 2w_1$. Existen dos trabajadores, quienes pueden postular sólo a una empresa. Ambos postulantes eligen simultáneamente a que empresa postular. Si postulan a la misma empresa, ambos obtienen trabajo con probabilidad $\frac{1}{2}$; si los dos postulan a distintas empresas, ambos obtienen trabajo. Represente el juego en forma normal y luego encuentre el equilibrio en estrategias mixtas.

Ejercicio 9:
Suponga que un regulador negocia con un monopolio el precio de un bien. La ley dice que el precio debe ser igual al costo medio de largo plazo, el que se determina según el procedimiento siguiente: el regulador y el monopolio declaran simultáneamente un costo medio que debe caer en el intervalo $[c^-, c^+]$. Si ambos declaran el mismo, ese es el precio. Si hay desacuerdo, el precio será el promedio de los costos medios declarados. Por último, es conocimiento común el verdadero costo $c^v \in (c^-, c^+)$.

1. Describa la forma normal del juego entre el monopolio y el regulador. Encuentre el (o los) equilibrios de Nash en estrategias puras. Luego demuestre que son equilibrios.

2. Suponga ahora que se modifica la ley de la siguiente forma: si hay desacuerdo un árbitro elige uno de los costos medios. Suponga que es conocimiento común que el árbitro elegirá aquel costo que esté más cerca del costo verdadero. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias puras de este juego.

3. Compare ambos mecanismos de arbitraje a la luz de lo que encontró en 1. y 2. Explique por qué se llega a resultados diferentes.

Ejercicio 10: Remate de obras de arte

Suponga que usted va a participar en el remate de pinturas de Renoir en la prestigiosa casa de remates de Sothebys en Rockefeller Center, Nueva York. El procedimiento que se sigue en este tipo de remates es el siguiente:

- *Inscripción*: si su intención es hacer una oferta, tiene que registrarse a la entrada de la sala. Ahí le entregan una paleta numerada para que haga sus ofertas.
- *Ofertas*: Una vez que las pinturas de Renoir salen a remate, “ ... todo lo que usted tiene que hacer es levantar su paleta y esperar que el martillero lo identifique. No es necesario que vocee su oferta—el martillero incrementa automáticamente el precio, generalmente en incrementos del 10%. No es necesario que se quede quieto como una momia; rascarse la nariz o tirarse la oreja no será contado como una oferta (a no ser que lo haya acordado previamente con el martillero). Si nadie sobrepasa su oferta, esto es, nadie sigue con la paleta levantada, entonces el martillero golpea la mesa y cierra la venta”. (Si le interesan más detalles sobre remates, entre al sitio web de Sothebys en http://www.sothebys.com.)

1. Describa el juego en forma normal. Hágalo rigurosamente.
2. ¿Cómo cambia su descripción si Sothebys establece un precio mínimo por el lote (es decir, si al precio mínimo no hay ofertas, entonces el lote de pinturas no se remata).
3. Suponga ahora que en el remate participan sólo dos personas. La primera valora el cuadro en $6,000 y la segunda en $7,000. El precio mínimo establecido por Sothebys es $2,000, y los incrementos del martillero son de a $1,000. La estrategia de un jugador consiste en especificar el precio máximo que está dispuesto a pagar. Describa todas las estrategias de cada uno de los jugadores.

Ejercicio 11: Monopolio natural
Un monopolio natural es una industria en que las condiciones tecnológicas o de demanda son tales que es eficiente que sólo produzca una firma (¿por qué?). Una industria se puede transformar en un monopolio natural por una caída violenta de la demanda. Por ejemplo, cuando terminó la guerra fría la demanda por armamentos cayó y varias firmas salieron del mercado. En esta pregunta se le pide examinar qué determina cual firma sale del mercado cuando una industria es monopolio natural pero inicialmente hay más de una empresa en el mercado.

Considere un duopolio que permanecerá por dos años más y en que cada firma pierde c por año. Si una de las firmas saliera del mercado, entonces la restante tendría utilidades iguales a π por período por lo que quede de los dos años. Cada firma puede elegir cuando salir: ahora ($t = 0$), en un año más ($t = 1$) o en dos años ($t = 2$).

1. Describa el juego.
2. Encuentre el (o los) equilibrio (s) de Nash en estrategias puras. Si una firma decide salir, ¿en qué momento lo hace en equilibrio? Explique la intuición en cada caso.
3. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas y explique por qué no es único. Interprete intuitivamente el resultado. Explique en castellano lo que el resultado dice.
4. Considere el equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico y examine qué ocurre cuando c aumenta. ¿Qué ocurre si π cae? Compare y explique intuitivamente.

Ejercicio 12:
Una de las preocupaciones fundamentales del período posterior a la primera guerra mundial fue garantizar un ordenamiento mundial que evitara una nueva guerra. El 4 de octubre de 1925 Francia, Alemania y Gran Bretaña firmaron el tratado Locarno, en el cual se comprometían a intervenir en ayuda de cualquiera que fuera objeto de una agresión no provocada por uno de ellos. Así, por ejemplo, Gran Bretaña se comprometía a intervenir en ayuda de Alemania si ésta era atacada por Francia. En sus *Memorias de la Segunda Guerra Mundial* Winston Churchill resumía así su posición:

> “La cuestión de si existía alguna obligación por parte de Gran Bretaña de desarmarse en cualquier grado no fue afectada (por el tratado). [.........] Mi opinión personal acerca de estas garantías mutuas era que mientras Francia permaneciera armada y Alemania desarmada, Alemania no la atacaría; y que por otro lado Francia jamás atacaría a Alemania si eso automáticamente involucraba a Gran Bretaña como aliada de Alemania.
>
> Por eso, aunque la propuesta parecía en teoría arriesgada —obligándonos de hecho a tomar parte por uno u otro lado en cualquier guerra Franco-Alemana que pudiera ocurrir— era poco probable de tal desastre ocurriera alguna vez; y esta era la mejor

> forma de impedirlo. Por lo tanto yo me oponía por igual tanto al desarme de Francia como el rearme de Alemania, por el mayor peligro que inmediatamente esto implicaba para Gran Bretaña. [....] Era evidente que ese peligro crecería si en algún momento Alemania llegara a tener similar poder que Francia, aún más si llegaba a ser más poderosa que Francia".

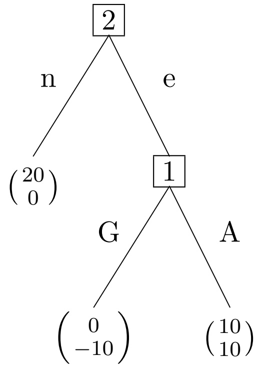
1. Plantee un juego que modele la situación estratégica que describe Churchill.
2. Evalúe el argumento de Churchill, indicando si existen circunstancias bajo las cuales es un equilibrio de Nash el que no ocurra una guerra.
3. ¿Cómo afectan los resultados del juego el que uno de los países si Alemania llegaba a ser muy poderosa?

Ejercicio 13: Elecciones
Considérese una población votante uniformemente distribuida en el espectro ideológico que va desde la izquierda ($x = 0$) a la derecha ($x = 1$). Cada uno de los candidatos para un único puesto elige simultáneamente un programa electoral (es decir, un punto en la línea entre $x = 0$ y $x = 1$. Los votantes observan el programa de los candidatos y luego cada votante vota por el candidato más cercano a su posición en el espectro. Si, por ejemplo, hay dos candidatos y eligen programas $x_1 = 0.3$ y $x_2 = 0.6$, todos los votantes a la izquierda de $x = 0.45$ votan por el candidato 1 y el resto por el candidato 2. Suponga que a los candidatos sólo les importa ser elegidos; en realidad, su programa no les interesa para nada. Si hay dos candidatos, ¿cuál es el equilibrio de Nash en estrategias puras? Si hay tres candidatos, indique un equilibrio de Nash en estrategias puras. (Suponga que si dos o más candidatos coinciden con el programa, se reparten en partes iguales los votos y los empates se resuelven al azar con igual probabilidad para cada uno).

1.3 Juegos dinámicos con información completa

Hemos estudiado juegos estáticos, es decir, juegos en que los jugadores deciden simultáneamente qué hacer. Como es obvio, en muchas situaciones esto no es así, como por ejemplo: el juego de ajedrez, cuando una empresa decide si entrar o no al mercado, lanzar un producto, etc. En estos juegos, es indispensable considerar que, a veces, un jugador mueve antes que otro, y que otros jugadores observan su decisión antes de jugar. A estos juegos se les conoce como *juegos dinámicos.*

Ejemplo 16: El juego de entrar o no entrar



Es claro que en este juego lo razonable es suponer que el potentado verá si Almacenes París entra o no en el mercado y, sólo entonces, tomará una decisión sobre si establece una guerra de precios o no. Esto queda meridianamente claro si representamos el juego en forma extensiva.

Cosas sobre las cuales tenemos que pensar:

1. ¿Qué es una *estrategia*?
2. ¿Qué equilibrios son razonables?
3. ¿Qué información tiene cada jugador cada vez que le toca decidir?

Ahora analizaremos juegos en los que cada jugador sabe qué han hecho los jugadores que han movido antes que él.

Se dice que estos juegos son de información *perfecta*, lo cual es más estricto que información *completa.*

1.3.1 Juegos con información perfecta

Definición 5 *La* forma extensiva *de un juego dinámico con información perfecta consiste en:*

1. *Un conjunto (finito) N de jugadores.*
2. *Un conjunto $\mathcal{H}$ de* historias o secuencias*, que satisfacen tres condiciones:*
   - *(a)* $\phi \in \mathcal{H}$
   - *(b) Si* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K} \in \mathcal{H}$ *y* $L < K < \infty$*, entonces* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,L} \in \mathcal{H}$
   - *(c) Si una secuencia infinita* $(a^k)_\infty$ *satisface que* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,L} \in \mathcal{H}$*,* $\forall\, L \in I\!N$*, entonces* $(a^k)_\infty \in \mathcal{H}$
   - *(d)* $A(h) \bigcap A(h') = \phi \;\forall\, h, h' \in \mathcal{H},\; h \neq h'$

   Todo elemento de $\mathcal{H}$ es una historia*; cada componente de una historia es una* acción*. Una historia* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K}$ *es* terminal *si* $K = \infty$ *o si* $\nexists a^{K+1}$ *tal que* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,K+1} \in \mathcal{H}$*.*

   ***Notación**: Denotaremos* $(a^k)_{k=1,2,\ldots,L} \in \mathcal{H}$ *por h.*
3. *Una función $P : \mathcal{H} \setminus Z \to N$ que le asigna, a cada historia no terminal, un jugador a quién le corresponderá el turno de jugar. Z es el conjunto de historias terminales. Esta definición implica que no hay jugadores en las historias terminales.*
4. *Para cada jugador $i \in N$, una función de utilidad $u_i : Z \to I\!R$. Esta función implica que sólo existirán pagos en las historias terminales.*

Observación 7 : Después de cada historia no terminal h, el jugador $P(h)$ elige una acción del set:

$$A(h) = \{a : (h, a) \in \mathcal{H}\}$$

Notación: Denotamos por $\langle N, \mathcal{H}, P, (u_i)\rangle$ la *forma extensiva de J.*

De la definición de juego en forma extensiva, se tiene que dos historias distintas no pueden terminar en la misma acción.

1.3.1.1 Estrategias

Definición 6 *Una* estrategia *del jugador $i \in N$ en $\langle N, \mathcal{H}, P, (u_i)\rangle$ es una función que le asigna una y sólo una acción $A(h)$ a cada historia no terminal $h \in \mathcal{H} \setminus Z$, para la cual $P(h) = i$. La denotaremos por S_i*

Nótese que una estrategia es un *plan completo*; especifica la acción elegida para cada historia después de la cual le toca elegir, aún si, dada la combinación de estrategias elegidas por los jugadores, esa historia no ocurre.

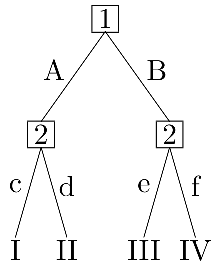


Figura 1.2: Un juego dinámico

Ejemplo 17: Un juego dinámico

$$S_2((A)) = c$$
$$S_2((B)) = f$$

es una estrategia del jugador 2.

Para entender mejor lo que es una estrategia, consideremos la representación en forma normal del juego:

	ce	*cf*	*de*	*df*
A	*I*	*I*	*II*	*II*
B	*III*	*IV*	*III*	*IV*

Definición 7 *Para cada* combinación de estrategias $s = (S_i)_{i=1}^N \in S$, *definimos el* resultado del juego $R(s)$ *como la historia terminal que resulta si cada jugador sigue los dictados de* S_i.

$R(s)$ *es la historia terminal* $(a^1, \ldots, a^K) \in Z$, *tal que* $\forall\ 0 \leq k < K$ *se tiene que:*

$$S_{p(a^1,\ldots,a^k)}(a^1, \ldots, a^k) = a^{k+1}$$

En nuestro ejemplo, si $S_1((\phi)) = A$ y $S_2((A)) = c$, $S_2((B)) = f$, entonces $R((S_1, S_2)) = (A, c)$

Ejemplo 18: Otro juego dinámico

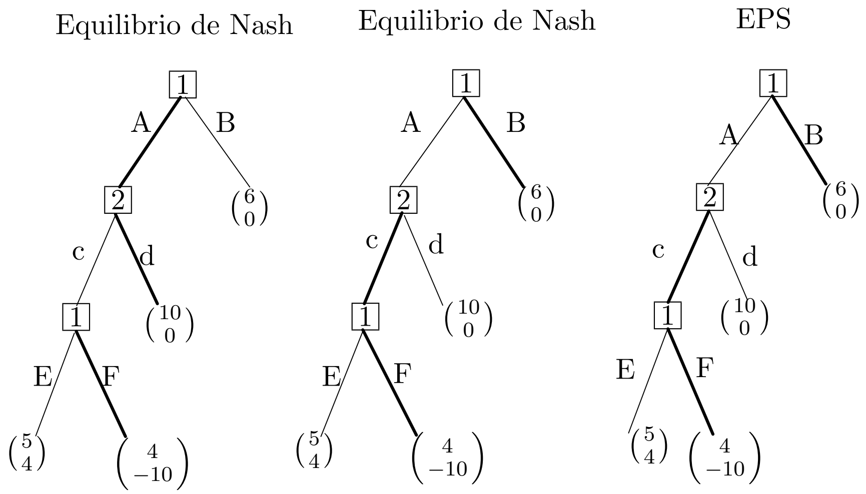

Equilibrio de Nash
Equilibrio de Nash
EPS

Figura 1.3: Otro juego dinámico

		Jugador 2	
		c	d
Jugador 1	B/F	**0** **6**	0 6
	A/E	4 5	0 10
	A/F	-10 4	**0** **10**
	B/E	**0** **6**	0 6

1.3.1.2 Equilibrio

Si todos los jugadores eligieran estrategias simultáneamente al comenzar el juego, bastaría la forma normal para representar el juego y el equilibrio de Nash sería el concepto de solución natural. Sin embargo, dicha manera de elegir estrategias va en contra de la razón de ser de los juegos dinámicos, la cual corresponde a modelar situaciones en que hay interacción temporal y los jugadores pueden repensar sus acciones a medida que el juego avanza. Esto nos lleva al concepto de *equilibrio perfecto en subjuegos.*

El juego del ejemplo anterior tiene dos equilibrios de Nash. Sin embargo, en el equilibrio en que la combinación de estrategias es $\{(A,F),d\}$, la amenaza de jugar F que hace el jugador 1 no es creíble: enfrentado a la situación de elegir, siempre preferirá E a F pues, en este caso, su pago sería de 5 y no de 4. El jugador 1 amenaza con F sólo porque, mientras no se vea realmente enfrentado a decidir que hacer, *jugar* F no tiene costo.

Definición 8 *El subjuego* $\{h \in \mathcal{H} : (h,h')\}$ *de* $J = \langle N, \mathcal{H}, P, (u_i)\rangle$ *es el juego:*

$$J(h) = \big\langle N, \mathcal{H}/h, P/h, \big(u_{i/h}\big)\big\rangle$$

$\mathcal{H}/h$ *es el set de subhistorias (o subsecuencias)* $(h,h') \in \mathcal{H}$

$P/h(h') \equiv P(h,h'),\ \forall\ h' \in \mathcal{H}/h$

$u_{i/h}(h') \geq u_{i/h}(h'')$, *ssi* $u_i(h,h') \geq u_i(h,h'')$, $\forall h', h'' \in \mathcal{H}/h.$

El equilibrio perfecto en subjuegos es un equilibrio de Nash al que se le exige además que cada jugador optimice después de *cada* historia, llegue a ella o no el juego, dada la combinación de estrategias que están utilizando el resto de los jugadores. La condición de optimalidad luego de cada historia es equivalente a exigir que en cada subjuego la combinación de estrategias elegida induzca un equilibrio de Nash.

Definición 9 *La combinación de estrategias* $s^* \in S$ *es un equilibrio perfecto en subjuegos de* $J = \langle N, \mathcal{H}, P, (u_i)\rangle$ *si:*

1. *Es un equilibrio de Nash de* J
2. $\forall\ h \in \mathcal{H} \setminus Z,\ s^*/h$ *es un equilibrio de Nash de* $J(h) = \big\langle N, \mathcal{H}/h, P/h, \big(u_{i/h}\big)\big\rangle$

Ejemplo 19: Negociación
Dos jugadores deben repartirse \$ 1.000.000. Las reglas son las siguientes: el jugador 1 parte ofreciendo una división, luego el jugador 2 decide si la acepta o no. Si la acepta, el juego termina ahí. Si no acepta, en el siguiente periodo el jugador 2 ofrece y 1 decide si acepta o no. Esto continúa hasta que se logre el acuerdo. El factor de descuento de 1 y de 2 es el mismo e igual a $\delta \in (0,1)$. Sea x la cantidad con la que se queda 1.

1. La forma extensiva del juego:
2. Considerar la siguiente combinación de estrategias:
   (a) Jugador 1. Después de cada historia $h \in \mathcal{H}$ tal que le toca ofrecer a 1, este ofrece $x = \frac{1}{\delta+1}$ Después de cada oferta de 2, el jugador 1:

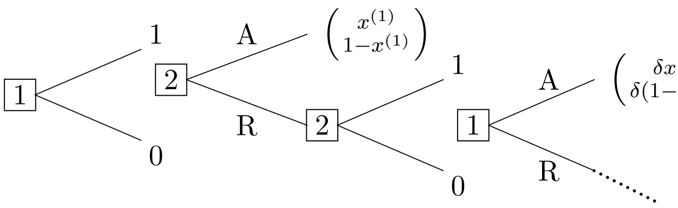


Figura 1.4: Forma extensiva del juego de negociación

      i. Acepta si $x \geq \frac{\delta}{\delta+1}$
      ii. Rechaza si no es así.

   (b) Jugador 2. Lo mismo que el jugador 1.

3. **Proposición 2** *Esta combinación de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos.*

   Demostración: Tenemos que demostrar que esta combinación de estrategias induce un equilibrio de Nash en cada subjuego:

   (a) Dada la estrategia de 2, al jugador 1 le conviene ofrecer una fracción $\frac{1}{\delta+1}$ en t=1. Si ofrece quedarse con menos, 2 acepta y su pago es menor de lo que podría ser si ofreciera $\frac{1}{\delta+1}$. Si ofrece quedarse con más, 2 rechazará y 1 obtendrá a lo más $\delta\left(\frac{\delta}{\delta+1}\right) < \frac{1}{\delta+1}$ en t=2.
   Notar que si 1 se desvía y rechaza la oferta de 2 en t=2, la negociación se dilata un período más; en t=3, lo máximo que 1 puede aspirar a obtener es $\frac{1}{\delta+1}$, pero en t=1 eso sólo vale $\delta^3\left(\frac{1}{\delta+1}\right)$, y así sucesivamente.

   (b) Supongamos que el juego ha llegado a un subjuego donde al jugador 1 le ofrecen x:
      i. Si $x \geq \frac{\delta}{\delta+1}$ a 1 le conviene aceptar pues, si rechaza, a lo más recibe $\frac{1}{\delta+1}$ en el periodo siguiente, lo cual vale $\frac{\delta}{\delta+1}$ en t=1.
      ii. Por lo mismo, si $x < \frac{\delta}{\delta+1}$, le conviene rechazar la oferta de 2.

   (c) El juego es estacionario, más aún, es simétrico. Por lo tanto, hemos demostrado que el par de estrategias descritas inducen un equilibrio de Nash en cada subjuego, incluyendo el juego completo. Por lo tanto, es un equilibrio perfecto en subjuegos. □

El siguiente es un resultado interesante, que será importante cuando veamos juegos repetidos. Más aún, es muy útil en muchas aplicaciones. Dice que, para comprobar si $s^* \in S$ es un equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) basta demostrar que cada jugador no puede mejorar su pago desviándose por única vez al comienzo de cada subjuego en que le toca realizar la movida inicial, siguiendo, luego de esta desviación, su estrategia original.

Proposición 3 *Sea $J = \langle N, \mathcal{H}, P, (u_i) \rangle$ un juego de horizonte finito. La combinación de estrategias $s^* \in S$ es un EPS ssi $\forall\, i \in N$ y cada historia $h \in \mathcal{H} \setminus Z$, para la cual $P(h) = i$, $\nexists \quad a \in A(h)$, $a \neq a^*$, tal que:*

$$u_{i/h}\left(S^*_{-i/h}, \left(a, S^*_{i/(h,a)}\right)\right) > u_{i/h}\left(S^*_{-i/h}, \left(a^*, S^*_{i/(h,a^*)}\right)\right)$$

Demostración:

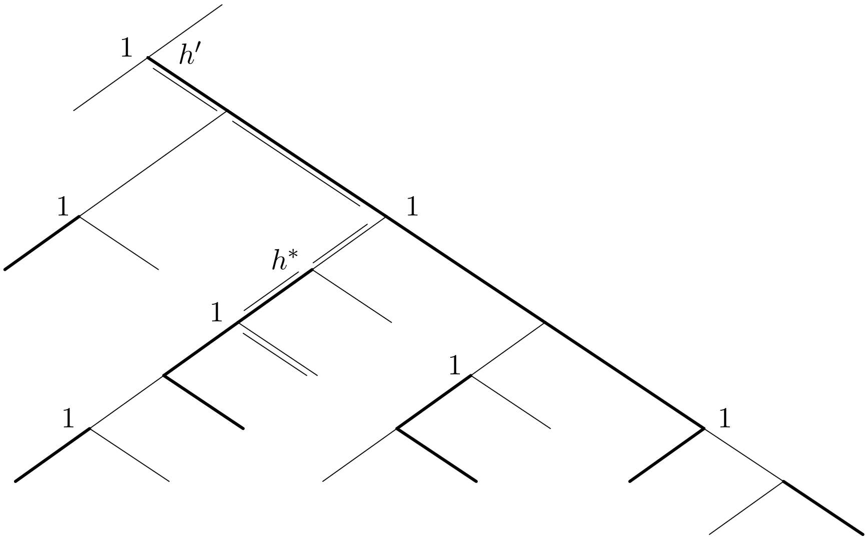


Figura 1.5: Demostración de la proposición 3.

1. **Necesidad** (*sólo si*). Sigue de la definición de EPS: si fuera posible mejorar el pago en un subjuego desviándose por una vez, entonces $S^*_{i/h}$ no sería óptima.

   Notar además que esta condición no es necesaria para un equilibrio de Nash; recordemos que una estrategia óptima en un equilibrio de Nash no necesariamente es óptima condicional a una historia que, de acuerdo a la combinación de estrategias jugada, nunca se alcanza.

2. **Suficiencia** (*si*). Suponer que s^* satisface la condición pero no es un EPS. Ergo, se puede mejorar el pago con una desviación después de al menos dos historias. Demostraremos por contradicción que, si s^* no es un EPS, entonces es posible encontrar algún subjuego $J(h^*)$ tal que podemos mejorar el pago de $i = P(h^*)$ si se desvía sólo en la acción que prescribe S^*_i después de h^*.

   (a) Suponer que S^*_i no es óptima dado S^*_{-i} a partir de la historia h' tal que $P(h') = i$. Esto equivale a que existan desviaciones tales que aumentan el pago en el subjuego que comienza en h'. Entonces, existe al menos una estrategia S_i tal que:

   $$u_{i/h'}\left(S_{i/h'}, S^*_{-i/h'}\right) > u_{i/h'}\left(s^*_{/h'}\right)$$

Notar que, para cualquier desviación, S_i difiere de $S^*_{i/h'}$ para un número finito de historias porque el juego es de horizonte finito.

(b) Esta estrategia difiere de $S^*_{i/h'}$ en, al menos, dos oportunidades. Vale decir, $S_{i/h'}(h) \neq S^*_{i/h'}(h)$, para al menos dos historias $h \in \mathcal{H}/h'$ (o, historias h en el subjuego $J(h')$).

(c) De todas las desviaciones $S_{i/h}$ que mejoran el pago del jugador i en el subjuego $J(h')$, elegir la que difiere de $S^*_{i/h'}$ en el menor número de oportunidades.

(d) Para esta estrategia, considerar la historia $h^* \in \mathcal{H}/h'$, más larga de $J(h')$ tal que la acción dictada por $S^*_{i/h'}(h)$ sea distinta a la acción dictada por $S^*_{i/h'}(h^*)$. Notar, nuevamente, que esta historia, aunque larga, es finita porque el juego es finito.

(e) Se sigue que S_{i/h^*} difiere de S^*_{i/h^*} sólo luego de la historia inicial $J(h^*)$. De lo contrario, sería posible encontrar una historia h^{**} más larga que h^* tal que $S_{i/h'}(h) \neq S^*_{i/h'}(h)$. Más aún, $S^*_{i/h}$ es una desviación que debe aumentar el pago de i en $J(h^*)$. De lo contrario, S_i no sería la desviación que difiere en el menor número de oportunidades de $S^*_{i/h'}$, pero que mejora el pago en $J(h')$. Es decir, sería posible encontrar una desviación que:

   i. Aumenta el pago de i en $J(h')$.

   ii. Difiere de $S^*_{i/h'}$ en un número menor de veces que $S^*_{i/h'}$ haciendo $S_{i/h'}(h^*) = S^*_{i/h'}(h^*)$.

(f) Por lo tanto, S_{i/h^*} es una desviación que aumenta el pago de i en $J(h^*)$, y que difiere de S^*_{i/h^*} sólo en la acción que i toma luego de la historia inicial de $J(h^*)$. Esto contradice la hipótesis inicial. □

¿Qué sucede si el horizonte es infinito? La proposición anterior nos dice que si una estrategia no puede mejorarse desviándose de la acción inicial que esta estrategia prescribe luego de $h \in \mathcal{H} \setminus Z$ tal que $P(h) = i$, entonces ninguna desviación que difiera de S^*_i después de un número finito de historias es óptima. Sin embargo, si el horizonte del juego es infinito, cabe la posibilidad que un jugador pueda mejorar su pago desviándose un número infinito de veces. La segunda parte de la proposición anterior nos entrega condiciones bajo las cuales el resultado se extiende a juegos de horizonte infinito. La intuición en este caso es que la propiedad será suficiente si los pagos *al infinito* no son muy importantes.

Definición 10 *Sea h_t la restricción de h a los primeros t periodos. Un juego es* continuo en el infinito *si, para cada jugador i, la función de utilidad u_i satisface:*

$$\sup_{h,h' \text{ s.a. } h_t = h'_t} |u_i(h) - u_i(h')| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\ h \in \mathcal{H}$$

En el infinito, todas las historias son iguales.

Proposición 4 *Sea $J = \langle N, \mathcal{H}, P, (u_i) \rangle$ un juego con horizonte infinito, con u_i continua en el infinito $\forall \quad i \in N$. $s^* \in S$ es un EPS si y sólo si ningún jugador i puede mejorar su pago desviándose por una vez en su estrategia luego de cualquier historia h tal que $P(h) = i$.*

Demostración: Véase Fudenberg y Tirole (1991), p. 110. □

Observación 8 : La función de utilidad

$$u_i(h) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v_i\left(a^t\right)$$

Satisface la condición de continuidad en el infinito si $0 < \beta < 1$ y v_i es acotada superiormente.

El siguiente resultado, conocido como *teorema de Kuhn*, dice que todo juego dinámico con horizonte finito tiene al menos un equilibrio perfecto en subjuegos.

Teorema 1 *Todo juego dinámico* finito *con información perfecta tiene al menos un equilibrio perfecto en subjuegos (en estrategias puras).*

Demostración: propuesta.

1.3.2 Juegos repetidos

Se dice que un juego tiene *información imperfecta* si al momento de decidir algún jugador no sabe exactamente cual ha sido la historia del juego. Todo juego estático es de este tipo.

En esta sección revisaremos un caso particular, pero muy importante de esta clase de juegos, *los juegos repetidos.*

Los juegos repetidos nos permiten estudiar la siguiente pregunta: ¿es posible que amenazas y promesas de comportamiento futuro influyan en el comportamiento presente?

Nos encontraremos con dos tipos de resultados:

1. *Teorema del pueblo*: un gran número de resultados puede obtenerse como EPS.
2. Estudiaremos la estructura que deben tener promesas y amenazas para que sean creíbles.

Definición 11 *Dado un juego estático J, sea $J(T)$ el juego repetido que consiste en repetir $T \leq \infty$ veces el juego J, con los resultados de cada repetición conocimiento común. Sea $\delta \equiv \frac{1}{1+r}$ el factor de descuento común, $\delta \in (0,1)$. El pago del i-ésimo jugador es:*

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} \pi_{it}$$

donde π_{it} es el pago obtenido en la t-ésima repetición del juego por el jugador i.

Ejemplo 20: El dilema de los prisioneros
Supongamos que el dilema de los prisioneros se repite $T < \infty$ veces ¿Es posible que los jugadores cooperen (no confiesen) hoy en la expectativa de que en el futuro seguirán cooperando?

Un argumento de inducción hacia atrás muestra que esto no es posible, pues, en el último periodo no cooperarán.

La siguiente proposición resume este resultado.

Proposición 5 *Sea* J *un juego estático* con un único equilibrio de Nash. *Entonces,* $J(T)$, $T < \infty$ *tiene sólo un equilibrio perfecto en subjuegos: se repite* T *veces el equilibrio de Nash de* J.

Demostración: propuesta.

Este resultado, aunque algo sorprendente, sólo se da en juegos repetidos en que el juego estático tiene sólo un equilibrio de Nash. Consideremos ahora el juego del ejemplo del oligopolio:

	a	b	g
A	10 10	14 -5	0 -10
B	-5 14	**5** **5**	0 -5
G	-10 0	-5 0	**0** **0**

En este juego hay dos equilibrios de Nash, pero ninguno de ellos es un óptimo de Pareto, pues son dominados por (A, a). Sin embargo, si el juego se repite dos veces, es posible sostener la cooperación (A, a) durante el primer periodo (aunque no en el segundo).

Considérese la siguiente combinación simétrica de estrategias s:

$$\begin{array}{lll} \text{Cooperación} \quad S_i(\phi) & = & \text{A} \\ \text{Premio} \quad S_i((A,a)) & = & \text{B} \\ \text{Guerra} \quad S_i(h') & = & \text{G} \ \forall\, h' \in \mathcal{H} \setminus Z \neq \phi, (A,a) \end{array}$$

Demostraremos que esta combinación de estrategias es un EPS. Para hacerlo basta demostrar que ningún jugador puede ganar desviándose de su acción inicial después de cada historia:

1. Luego de h' y (A, a) a ninguno de los dos le conviene desviarse, puesto que se encuentran en un equilibrio de Nash.
2. ¿Es óptimo jugar A luego de ϕ? Si 1 se desvía en pasa de 10 a 14. En el siguiente periodo, siguiendo sus estrategias, cada jugador elegirá guerra en lugar de premio, por lo que el pago cae de 5 a 0.
3. Entonces, cada jugador compara lo que gana en el primer turno (14-10=4) (la *tentación*) con lo que pierde en el segundo periodo ($\delta(0 - 5) = -5\delta$) (el *castigo*). No se desviarán si el beneficio de la *tentación* es menor que el costo del *castigo*, es decir si:

$$\begin{aligned} 5\delta &\geq 4 \\ \delta &\geq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

4. La demostración es completa si invocamos la propiedad de desviación por única vez. □

Reflexionemos ahora sobre lo que nos puede enseñar este ejemplo:

1. El que se pueda sostener la cooperación hoy depende de cuánto valoran el futuro los jugadores, lo cual queda resumido aquí a través de δ. Si no se valora el futuro, es obvio que no se puede sostener la cooperación.

2. ¿Por qué hay cooperación en este caso y no en el dilema de los prisioneros? La diferencia fundamental es que en este caso el juego estático tiene dos equilibrios de Nash, y uno de ellos es Pareto–Superior al otro. Esto permite que existan dos equilibrios posibles en el segundo periodo y, por lo tanto, es posible castigar creíblemente al que se desvía.

Nótese, sin embargo, que en este caso también se castiga a quien no se desvió. Esto sugiere que los jugadores podrían *renegociar*. No ocurre así en el dilema de los prisioneros, en el cual, en el último periodo, sólo hay una combinación de acciones creíbles.

La lección es que la cooperación puede sostenerse hoy sólo si hay disponible algún castigo mañana. Veremos esto nuevamente, aunque en una encarnación algo distinta, a continuación donde consideraremos juegos que se repiten un número infinito de veces.

Ejemplo 21: Análisis para el dilema de los prisioneros
Suponga que el dilema de los prisioneros se repite un número indefinido de veces. Si δ es suficientemente alto, entonces la siguiente combinación de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos:

$$\begin{array}{lcl} S_i(\phi) & = & N \\ S_i(h') & = & N \quad \forall\, h' \in \mathcal{H} \setminus Z \text{ tal que } a = N \;\forall\, a \in h' \\ S_i(h'') & = & C \;\forall\, h'' \in \mathcal{H} \setminus Z \text{ tal que } \exists \quad a \in h'' \text{ tal que } a = C \end{array}$$

Es decir, basta que por una vez no haya cooperación para que ésta se abandone.

Para obtener condiciones bajo las cuales esto es un EPS, usamos la propiedad de desviación por una vez:

1. Si $h = h''$, entonces no conviene desviarse (equilibrio de Nash).

2. Si $h = \phi$ o $h = h'$, entonces la *tentación* es 140 - 100 = 40. El castigo es pasar de 100 en el futuro (pago con cooperación) a 20 (pago sin cooperación) en todos los periodos. Es decir, se compara:

$$140 + \sum_{t=2}^{\infty} \delta^{t-1} 20 \quad \geq \quad \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} 100$$

$$\begin{aligned}
140 + \frac{\delta}{1-\delta}20 &\geq \frac{1}{1-\delta}100 \\
140(1-\delta) + 20\delta &\geq 100 \\
140 - 120\delta &\geq 100 \\
120\delta &\leq 40 \\
\delta &\leq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

El principio que usamos aquí es el mismo anterior: lo que detiene la desviación es el temor al castigo futuro. La estrategia que hemos usado en este ejemplo se conoce como *estrategia de gatillo.*

Observación 9 : Los castigos pueden durar menos tiempo que el infinito. Más aún, pueden haber castigos más fuertes que la reversión al equilibrio de Nash del juego estático.

El siguiente resultado, se conoce como *teorema del pueblo.* Nos dice que si el factor de descuento es alto, muchísimos pagos promedio pueden emerger de equilibrios perfectos en subjuegos del juego repetido. Para simplificar la exposición, consideremos la siguiente versión del *dilema de los prisioneros*:

	l	r
L	**1** **1**	0 5
R	5 0	4 4

En este juego, más es mejor que menos.

Para llegar al teorema, necesitamos la siguiente definición:

Definición 12 *1. El vector de pagos x en el juego estático J es* factible *si es una combinación convexa de los pagos de J.*

2. El pago promedio *de la secuencia infinita de pagos (π_t) es:*

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_t \equiv \pi$$

Notar que el pago promedio es equivalente a la anualidad que, descontada a la tasa implícita δ, entrega el valor presente:

$$\frac{\pi}{1-\delta} = (1+r)\frac{\pi}{r} \qquad \text{con } \delta = \frac{1}{1+r}$$

Además, como el pago promedio es simplemente el valor presente multiplicado por una constante, maximizarlo es equivalente a maximizar el valor presente. Ahora, podemos enunciar el teorema.

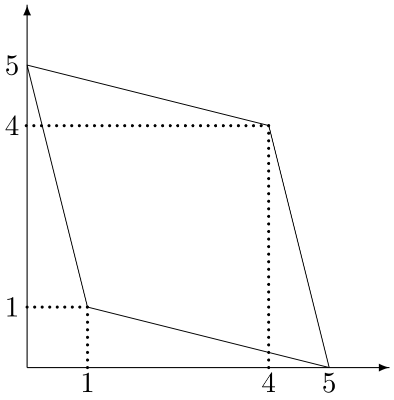


Figura 1.6: Simplex de pagos

Teorema 2 ***(Teorema del pueblo)*** *Sea J un juego estático finito, y sean $l = (l_1, \dots, l_N)$ los pagos de cada jugador en un equilibrio de Nash del juego estático, y sea $x = (x_1, \dots, x_N)$ un vector de pagos factible en J. Si:*

1. $x_i > l_i \quad \forall\, i \in N$ *y*
2. δ *es lo suficientemente cercano a 1.*

Entonces existe un EPS del juego repetido $J(\infty)$ cuyo pago promedio es x.

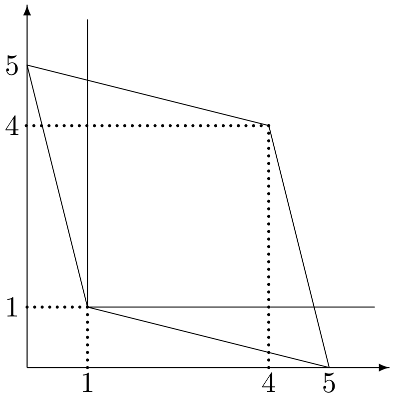


Figura 1.7: Equilibrios perfectos en subjuegos de un juego repetido

Nota: Ésta corresponde a una de las muchas versiones que existen del teorema del pueblo. Hay varias otras más fuertes que ésta. (Véase Fudenberg y Maskin, 1985).

Demostración: propuesta.

La lección que obtenemos del teorema del pueblo es que en juegos repetidos es posible sostener muchos resultados como equilibrios perfectos en subjuegos, los que no necesariamente son Pareto–Óptimos. Una conjetura que sigue de esta observación es que muchas situaciones sociales, en las que es óptimo conformar, pueden no ser óptimas. Otra implicancia es que, cuando la interacción es repetida es posible observar comportamientos diversos, cada uno de los cuales se sostiene por sí mismo.

1.3.3 Información imperfecta

En muchos casos se presenta la siguiente situación:

1. Un jugador sabe que le corresponde mover, y
2. no sabe exactamente qué es lo que ha pasado en etapas anteriores del juego.

Cuando la ignorancia de un jugador se limita a qué es lo que ha pasado en el juego, pero este jugador conoce la estructura matemática del juego y esto es de conocimiento común, se dice que el juego es de información *completa* pero *imperfecta.*

Ejemplo 22: Juegos estáticos
Cualquier juego estático es un juego dinámico con información imperfecta.

En este juego hemos representado a través de la unión con línea punteada de los nodos luego de $h = (C)$ y $h' = (N)$ el hecho que el jugador 2 no sabe lo que ha hecho el jugador 1 al momento de tomar la decisión. Diremos que h y h' pertenecen al mismo *conjunto de información.*

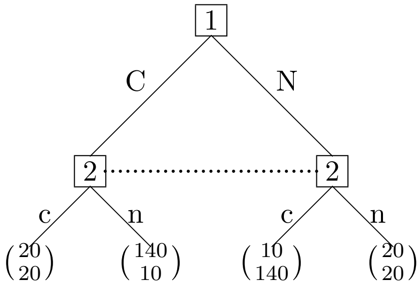


Figura 1.8: Conjunto de Información

Definición 13 *Un conjunto de información del jugador i, es un conjunto de historias I_i tal que:*

1. $P(h) = i \quad \forall\, h \in I_i$
2. *Si se juega una de las historias en I_i, el jugador no puede distinguirla de cualquier otra historia en ese conjunto de información.*

Observación 10 : De 2. se sigue que $A(h) = A(h') \ \forall\, h, h' \in I_i$. De lo contrario, el jugador debería ser capaz de distinguir h de h'. Adicionalmente, las estrategias corresponden a una función cuyo dominio son los conjuntos de información del jugador.

Definición 14 ***Un subjuego***

1. *Comienza luego de una historia no–terminal $h \in I_i$, singleton.*
2. *Incluye todas las historias h' tal que $h' = (h, a)$.*
3. *Todo conjunto de información que incluye historias en el subjuego, contiene sólo historias en el subjuego.*

Ejemplo 23: Subjuegos en un juego con información imperfecta
Este ejemplo corresponde a un juego que contiene sólo dos subjuegos: el juego mismo, y aquel que comienza luego de $h = (R, r)$.

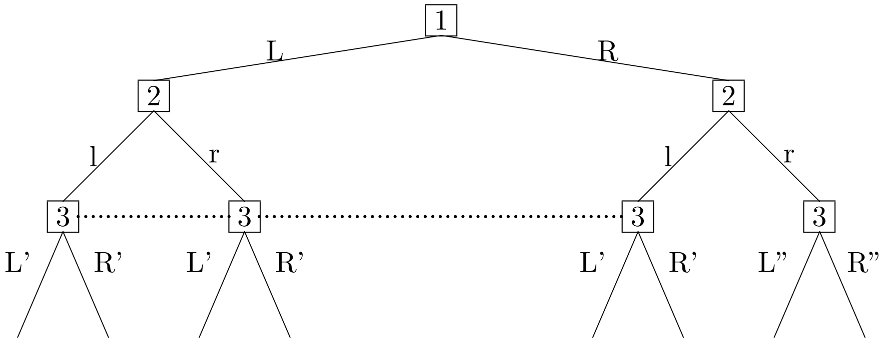


Figura 1.9: Subjuegos de un juego con información imperfecta

La definición de equilibrio de Nash y equilibrio perfecto en subjuegos no cambia. Sin embargo, esta noción de equilibrio puede no ser siempre razonable, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 24: Un juego con información imperfecta

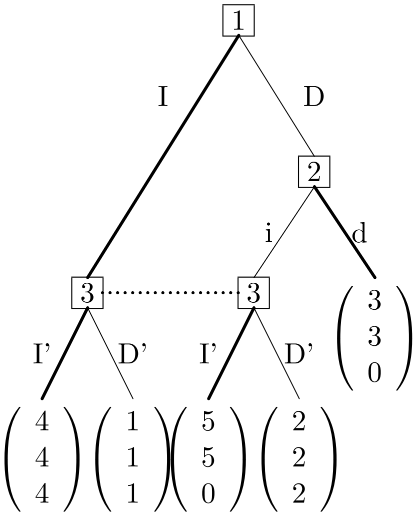


Figura 1.10: Juego con información imperfecta

Notar que este juego sólo tiene un subjuego. La siguiente combinación de estrategias es un equilibrio de Nash:

1. I
2. d
3. I'

Pero, la decisión del jugador 2 no parece muy razonable. Sin embargo, la noción de EPS no ayuda ahora, sólo hay un subjuego.

Volveremos sobre esto cuando hablemos de señales y de equilibrios bayesianos en juegos dinámicos.

1.3.4 Ejercicios

Ejercicio 14:
Del párrafo anterior a la proposición 3, ¿qué significa *seguir con la estrategia original*? ¿Es elegir las mismas acciones?

Ejercicio 15:
¿Qué significa *creíble*?

Ejercicio 16:
Para el ejemplo 24, ¿qué es óptimo en I_3? ¿Depende de la conjetura que haga 3 sobre dónde está si el juego llega a I_3?

Ejercicio 17: Equilibrio perfecto en subjuegos y negociación
Dos jugadores deben repartirse \$1,000. Las reglas son las siguientes: el jugador 1 parte ofreciendo una división $x \in [0, 1000]$. Luego el jugador 2 decide si la acepta o no. Si la acepta, el juego termina ahí, si no acepta en el siguiente período el jugador 2 ofrece una división, y ahora 1 decide si acepta o no. Si no la acepta pasa otro periodo y 1 vuelve a ofrecer, 2 decide si acepta o no; y así sucesivamente. Esto continúa hasta que se logre el acuerdo. El factor de descuento de 1 y de 2 es el mismo e igual a $\delta \in (0, 1)$.

1. Describa el juego y dibuje esquemáticamente su forma extensiva.
2. Demuestre que, en el único equilibrio perfecto en subjuegos el resultado del juego es tal que el jugador 1 ofrece quedarse con $\frac{1000}{1+\delta}$ y el jugador 2 acepta de inmediato y se queda con $\frac{\delta 1000}{1+\delta}$.
3. Escriba una combinación de estrategias que sea un equilibrio perfecto en subjuegos.
4. Demuestre que la estrategia que escribió es un equilibrio perfecto en subjuegos usando la propiedad de la desviación por una vez.
5. Demuestre que la estrategia que escribió es un equilibrio perfecto en subjuegos mostrando que la estrategia induce un equilibrio de Nash en cada subjuego.
6. Finalmente, demuestre que el juego tiene infinitos equilibrios de Nash.

Ejercicio 18: Del examen final del semestre primavera 1999
El reciente y frustrado intento por modificar la ley laboral causó mucha polémica. Uno de los puntos más arduamente disputados se refiere a si es conveniente que una empresa pueda contratar reemplazantes durante una huelga. En la actualidad lo puede hacer, y el proyecto de ley pretendía prohibirlo. En esta pregunta se le pide analizar las consecuencias de tal prohibición.

Suponga una empresa que produce banquetes que se contratan con meses de anticipación. Los activos de la empresa (cocinas, refrigeradores, etc.) duran tres años, al cabo de los cuales se deprecian completamente y deben ser reemplazados. El costo de inversión en activos es $ 2,100 y se incurre completamente al principio de los tres años. La tasa de interés es 0.

Las utilidades anuales de la empresa, sin considerar el costo del capital, son $1000 si todos sus clientes quedan conformes y contentos y para ello es necesario que los banquetes sean atendidos por el personal habitual. El costo en reputación de la empresa por no cumplir sus compromisos durante una semana es de $ 200 (vale decir, si deja botados a sus eventuales clientes durante una semana, las utilidades anuales caen a $800, si es por dos semanas caen a $600, y así sucesivamente). En la eventualidad de una huelga, la empresa tiene la opción de reemplazar a su personal muy rápidamente. Sin embargo, los reemplazantes no conocen bien el negocio y atienden peor. Así, si los reemplazantes son contratados apenas se inicia la huelga, el valor de las utilidades cae inmediatamente a $600 y el costo en reputación aumenta a razón de $120 por semana.

Las negociaciones salariales siguen las siguientes reglas. El empleador le hace una oferta a los trabajadores, quienes pueden aceptarla o rechazarla. Si la rechazan, los trabajadores hacen una oferta una semana después, la que puede ser aceptada o rechazada por la empresa. Si no se llega a acuerdo, pasa una semana y la empresa hace una oferta. Y así sucesivamente, hasta que el negocio vale nada.

1. Determine el tamaño de la "torta" a ser repartida, y cómo ésta disminuye según se dilata el acuerdo.

2. Describa el juego. Luego encuentre el o los equilibrios perfectos en subjuegos, y, para uno de ellos, demuestre rigurosamente que se trata de un equilibrio. ¿Se observará una huelga en equilibrio?

3. Durante un ciclo de inversión de tres años ¿a cuánto ascienden las utilidades netas de inversión de la empresa? De acuerdo a esto, ¿invertirá la empresa cada tres años?

   Suponga que se elimina la posibilidad de contratar reemplazantes.

4. Repita 1 y 2. No es necesario que repita la demostración rigurosa de uno de los equilibrios.

5. Suponga que la empresa ya invirtió en los activos. ¿Cambiará su nivel de producción en el corto plazo?

6. ¿Qué decisión va a tomar la empresa una vez que tenga que decidir si vuelve a invertir?

7. A la luz de su análisis, evalúe el siguiente comentario que su profesor leyó hace muchos años en un diario: "Da casi lo mismo si se pueden contratar o no reemplazantes durante una huelga, porque el hecho empírico es que menos del 2% de las negociaciones terminan en una huelga"

Ejercicio 19: Elecciones en las Naciones Unidas

En diciembre de 1996 las Naciones Unidas eligieron a un nuevo secretario general. Uno de los candidatos era el egipcio Boutros Boutros-Ghali, quien había sido secretario general desde 1992 y buscaba ser reelegido. Sin embargo, los Estados Unidos no querían que Boutros-Ghali continuara en el cargo. Los rumores indicaban que el candidato de Estados Unidos era la primer ministro de Noruega, Glo Harlem Brundtland. Por el contrario, los países africanos querían un segundo período con un secretario general africano. Así, el nombre de Koffi Annan de Ghana (y un veterano de las Naciones Unidas) apareció al finalizar la campaña. En esta pregunta se le pide predecir el resultado de la elección.

Suponga que en esta elección participan dos votantes (los Estados Unidos y África) y tres candidatos: Koffi Annan (A), Boutros-Ghali (B) y Glo Harlem Brundtland (H). El procedimiento de votación es el siguiente. Primero, los Estados Unidos pueden vetar a un candidato. Luego África veta a un candidato, y el que queda es elegido. Las preferencias de los Estados Unidos son tales que

$$H \succ A \succ B;$$

es decir, los estados Unidos prefieren a Harlem Brundtland por sobre Annan y a Annan en vez de Boutros-Ghali Las preferencias de los países africanos son

$$B \succ A \succ H.$$

1. Escriba la forma extensiva del juego.
2. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos de este juego y demuestre rigurosamente que efectivamente es un equilibrio ("rigurosamente" significa que debe enunciar los resultados que ocupa para demostrar).
3. Si Estados Unidos o África pudiera elegir el orden de la votación, ¿cambiaría el resultado de la elección? Justifique su respuesta explicando la intuición.

Ejercicio 20: ¿Es conveniente darle inmunidad a los dictadores?

La semana pasada el semanario inglés *The Economist* editorializó sobre las garantías de inmunidad que algunos dictadores negociaron a cambio de entregar el poder. En el último tiempo varios países han desconocido estas garantías y comenzado a juzgar a los ex dictadores, rompiendo acuerdos explícitos e implícitos. Aunque el *Economist* no lamenta que ex dictadores sean llevados a juicio a pesar de todo, indica que si las promesas de inmunidad se rompen con mucha facilidad se perderá un instrumento útil para lograr que algunos dictadores prefieran entregar el poder. Por ejemplo, así podría ser con Slobodan Milosevic en Serbia, o la junta de gobierno en Mynamar; en ambos casos tribunales internacionales han dejado claras sus intenciones de juzgar a los susodichos dictadores apenas pierdan su poder. Por otro lado el *Economist* afirma que tampoco es bueno que las garantías de inmunidad sean inamovibles; sin la posibilidad de un castigo posterior los potenciales dictadores no temerían tomarse el poder.

En esta pregunta se le pide analizar las consecuencias de la inmunidad sobre los incentivos a tomarse el poder y luego entregarlo. Suponga el siguiente juego de tres períodos:

1. El potencial dictador decide si se toma el poder.
2. Una vez en el poder, el dictador decide si negocia con "los partidos" y entrega el poder, o si se aferra al cargo.
3. Si hay una salida negociada, los partidos deciden si lo juzgan o mantienen su inmunidad.
4. Si el dictador no negocia y se aferra al cargo, entonces tiene éxito en quedarse con el poder con probabilidad e; por lo mismo, la probabilidad de fracasar y perder el poder luego de haber intentado aferrarse a él es $(1-e)$ (la probabilidad de éxito es exógena). Si el dictador fracasa, los partidos deciden si lo juzgan o le dan inmunidad.

Las preferencias del dictador sobre los posibles resultados del juego son:

$$exito \succ s/juicio + neg. \succ s/juicio + frac. \succ nogolpe \succ juicio + neg. \succ juicio + frac.,$$

donde "neg." significa "negociación" y "frac." significa "fracasar". Vale decir, el dictador prefiere dar el golpe si no lo enjuician y lo peor es ser enjuiciado después de fracasar. Además, note que si el dictador no es enjuiciado, siempre prefiere dar el golpe.

Por otro lado, las preferencias de los que tomarán la decisión si juzgar al dictador son:

$$nogolpe \succ juicio + neg. \succ juicio + frac. \succ s/juicio + neg. \succ s/juicio + frac. \succ exito$$

Vale decir, lo que más les gusta a los partidos es que no haya golpe, prefieren una salida negociada que por el fracaso del dictador y el peor de los escenarios es que el dictador tenga éxito en mantener el poder.

1. Invente una notación eficiente para los pagos de cada jugador en cada historia terminal. Su puntaje dependerá de cuan buena sea la notación que proponga. (Ayuda: suponga que el pago del dictador cuando no da el golpe es 0).
2. Dibuje la forma extensiva del juego.
3. Suponga ahora que el dictador ya dio el golpe. Deduzca una condición que sea función de e. Esta condición debe indicar cuándo el dictador va a entregar el poder negociadamente y cuando no. ¿Es correcta la afirmación del *Economist* en el sentido que si a los dictadores se les juzga después de negociar su salida, entonces no estarán dispuestos a entregar el poder voluntariamente? ¿Cuál es la intuición detrás de su respuesta? (Ayuda: utilice inducción reversa.)

4. Ahora deduzca una condición que indique cuándo el dictador va a dar un golpe. Interprete. (Ayuda: utilice inducción reversa y lo que obtuvo en 3.)
5. Suponga que *al momento de negociar con el dictador* los partidos pueden comprometerse creíblemente a no juzgarlo si entrega el poder. Explique bajo qué condiciones los partidos elegirán comprometerse. Luego indique qué consecuencia tiene la posibilidad de garantizar inmunidad sobre la decisión de dar un golpe ¿Se confirma la conjetura del *Economist*?
6. Por último, suponga que mientras el país está en democracia (antes que ocurra el golpe), los partidos tiene la posibilidad de firmar un tratado internacional que forzaría a juzgar a los dictadores (en otras palabras, el tratado le permite al país comprometerse creíblemente a que los dictadores *siempre* serán juzgados una vez que pierdan el poder, da lo mismo si aceptan negociar su salida o no). ¿Es conveniente para el país firmar ese tratado? ¿De qué depende?

Ejercicio 21: Votación estratégica
En el país de las Maravillas tres partidos, el de Arriba (A), el del Centro (C) y el de Adentro (D), controlan cada uno un tercio del parlamento. Tres propuestas de reforma al sistema educacional, las que llamaremos 1, 2 y 3, deben ser votadas. Las preferencias (estrictas) de cada uno de los partidos son como se detallan en el siguiente cuadro:

A	C	D
1	2	3
2	3	1
3	1	2

Es decir, el partido de Arriba prefiere estrictamente que se apruebe la primera propuesta a que se apruebe la segunda, y la segunda a la tercera. Para evitar empates, los astutos parlamentarios han decidido adoptar el siguiente mecanismo de votación. Primero se vota la propuesta 1 contra la 3, y luego, la ganadora de la primera vuelta se enfrenta con la propuesta 2. En cada ronda la votación es simultánea y está prohibido abstenerse. Los premios y castigos al interior son tan efectivos que, los tres votan en bloque.

1. Describa el juego y luego represéntelo en forma extensiva. Escriba una estrategia para el partido de Arriba. (Cuidado, recuerde la definición de estrategia).
2. Encuentre la combinación de estrategias que sea equilibrio perfecto en subjuegos. Muestre que hay más de un equilibrio prefecto en subjuegos, pero que en cada uno de ellos resulta elegida la propuesta 1.
3. Suponga que justo antes de que voten las propuestas es elegido presidente del parlamento el honorable Juan Estrella de la Mañana, integrante del partido de Adentro. El presidente

del parlamento tiene derecho a modificar el orden de votación. Muestre que don Juan puede elegir un orden de votación que garantiza la elección de la propuesta preferida de su partido (la 3). Explique.

Ejercicio 22: A veces es mejor tener menos información

El siguiente juego muestra que hay ocasiones en que más información puede ser perjudicial socialmente. Dos empresas que tienen la concesión de ventas en el estadio deben decidir el día antes si compran bronceador o paraguas para vender el día del partido. El orden de las jugadas es el siguiente:

- La naturaleza decide si mañana lloverá o habrá sol con igual probabilidad. Las empresas, A y B, deciden qué comprar sin conocer la movida de la naturaleza.
- El jugador A elige si compra paraguas o bronceador.
- El jugador B observa la decisión del jugador A, y luego, decide si compra bronceador o paraguas.

Los pagos del juego son como sigue: Si ambas empresas compran lo mismo, entonces el pago es 1 para cada uno, independientemente si llueve o hay sol. Si llueve y uno compra paraguas y el otro bronceador, el pago del que compra paraguas es 4, y el pago del que compra bronceador es 0. Por último si hay sol y uno compra bronceador y uno paraguas, el pago del que compra bronceador es 4, y el pago del que compra paraguas es cero.

1. Describa el juego y luego represéntelo en forma extensiva.
2. Demuestre que las siguientes combinaciones de estrategias son equilibrios perfectos en subjuegos:
   (a) A compra bronceador; B compra paraguas.
   (b) A compra paraguas; B compra bronceador.

   ¿Cuál es el pago esperado de cada empresa en equilibrio?
3. Suponga ahora que es conocimiento común que la empresa A recibe información confidencial de TV Tiempo y sabe con certeza si mañana lloverá o habrá sol antes de comprar. El jugador B sigue sin saber cual fue la movida de la naturaleza. Encuentre el único equilibrio perfecto en subjuegos y muestre que ambas empresas terminan peor que cuando ninguna conoce el estado de la naturaleza. Explique.
4. Suponga que la empresa A se fusiona con la empresa B, pasando a detentar el monopolio de las ventas en el estadio. Demuestre que ahora más información es siempre mejor que menos información. Explique.

Ejercicio 23: Lo que uno hace revela lo que uno sabe
Una de las formas en que los equipos de fútbol se nutren de buenos jugadores es seleccionándolos en las divisiones inferiores. Sin embargo, este proceso es muy costoso. Por ejemplo, hace un tiempo el ex-entrenador del Ajax de Holanda contaba que sólo dos de cada cien niños que juegan en las divisiones inferiores del club llegan a primera división. Acto seguido, se quejaba del cambio en la legislación que ha habido en la Comunidad Económica Europea que le permite a un jugador cambiar de club apenas se transforme en profesional, sin indemnizar al club que lo formó. Sostenía que los clubes ya no iban a invertir en formar buenos jugadores. En este ejercicio se le pide demostrar formalmente la queja del entrenador.

Para simplificar, suponga que el mundo de divide en dos tipos de jugadores, buenos y malos. Por cada 49 malos hay sólo uno bueno. Durante su carrera profesional, un jugador bueno deja rentas de R por año. Un jugador malo no puede convertirse en profesional y no deja renta alguna. Hay un sólo club, Los Chunchos, que tiene la capacidad de averiguar si un jugador es bueno o malo, a un costo E, con $\frac{R}{E} = 51$. Sin embargo, hay dos clubes más, Los Cruzados y Los Indios, que si bien no saben distinguir un jugador bueno de uno malo, observan perfectamente cuando Los Chunchos le hace una oferta a un juvenil bueno. El factor de descuento es igual a 1. El juego entre estos tres clubes consiste en lo siguiente:

- El presidente de Los Chunchos, el Dr. Zoroco, decide si invierte o no en detectar buenos jugadores. Si no invierte el juego termina. Si invierte, gastan E por juvenil y Los Chunchos encuentran uno bueno por cada 50 juveniles seleccionados.
- A cada jugador bueno, el Dr. Zoroco le ofrece un contrato por un año que paga $c^U \in [0, \infty)$. A cada jugador malo le ofrece nada.
- Los Cruzados y Los Indios observan la oferta c^U del Dr. Zoroco y, simultáneamente, le hacen una oferta al jugador de, respectivamente, $c^{UC}, c^{CC} \in [0, \infty)$.
- Por último, el jugador acepta el contrato de quien paga más y el juego termina. Así, el pago del jugador es $max\{c^U, c^{CC}, c^{UC}\}$. Si hay empate, el jugador se queda en cada equipo con igual probabilidad.

1. Describa el juego.
2. Suponga que la ley da exclusividad del jugador a Los Chunchos por un año. Al final de ese año, el jugador es dueño del pase. ¿Invertirá el Dr. Zoroco? ¿Cuánto le pagará al jugador bueno? ¿Cuánto ganará el jugador a partir del segundo año?

   En el resto de la pregunta suponga que la ley dicta que el un juvenil es dueño de su pase apenas pasa a ser profesional.
3. Escriba una estrategia de Los Indios. (Cuidado; recuerde la definición de estrategia).

4. Demuestre que en todo equilibrio perfecto en subjuegos, el jugador bueno ganará R si Los Chunchos invierten. ¿Cuál es el pago del equipo que se queda con el jugador? Explique.

5. En vista de 4., ¿invertirá el Dr. Zoroco?

6. Suponga ahora que Los Cruzados y Los Indios no observan c^U. Sin embargo, observan si el Dr. Zoroco le hizo una oferta o no al jugador. ¿Cambian sus resultados que obtuvo en 4. y 5.? Explique la intuición detrás de su respuesta.

1.4 Juegos estáticos con información incompleta

Un supuesto fundamental dentro de los juegos que hemos visto hasta ahora es que el jugador conoce el juego y que esto es conocimiento común. Los jugadores podrían tener dudas durante el transcurso del juego, pero no sobre su estructura. En esta sección analizaremos juegos en que esto no se cumple, es decir, los jugadores tienen incertidumbre sobre el juego aún *antes* de empezar.

Ejemplo 25: Un remate
Cada jugador conoce su precio de reserva, pero no conoce los precios de reserva de quienes participarán en el remate.

1.4.1 Un juego particular

Supongamos un juego estático $J = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ con $N = 4$, en el que los pagos de los jugadores son:

1. $u_1(a) = \pi_1 V_1(a_1, a_3) + (1 - \pi_1) V_1(a_1, a_4)$
2. $u_2(a) = \pi_2 V_2(a_2, a_3) + (1 - \pi_2) V_2(a_2, a_4)$
3. $u_3(a) = \pi_3 V_3(a_1, a_3) + (1 - \pi_3) V_3(a_2, a_3)$
4. $u_4(a) = \pi_4 V_4(a_1, a_4) + (1 - \pi_4) V_4(a_2, a_4)$

Como ya sabemos, la combinación de estrategias a^* es un *equilibrio de Nash* si:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}) \; \forall \; a_i \in A_i$$

Notemos, sin embargo, que las funciones de utilidad tienen una forma particular. En lo que sigue, daremos la siguiente interpretación a este ejemplo:

1. Hay sólo dos jugadores, A y B. A puede ser de dos *tipos*: 1 ó 2. B puede ser de *tipo* 3 ó 4.
2. Cada jugador conoce su tipo pero no el del otro jugador.
3. π_1 es la probabilidad que el jugador de tipo A, *cuando es de tipo 1*, atribuye a que B sea de tipo 3.

En lo que sigue, veremos en mayor detalle de donde provienen estas probabilidades. Pero, es necesario tener claro que, técnicamente, no estamos haciendo nada nuevo, sino reinterpretando el modelo para considerar situaciones en que los jugadores no conocen exactamente contra quien están jugando. Por eso, la innovación en este caso es la historia que rodea al juego.

1.4.2 Juegos bayesianos en forma normal

En principio, la ignorancia de un jugador se puede referir a muchas cosas: las funciones de pago del resto de los jugadores, las acciones que otros jugadores pueden elegir, las características del medio ambiente en donde se juega, *la información con que cuenta el resto de los jugadores*, etc. Sin embargo, todas estas incertidumbres pueden reducirse al caso en que los jugadores tienen información imperfecta sobre las funciones de pago del resto de los jugadores. Por tanto, el primer paso que debemos dar para describir un juego bayesiano es representar la idea que en ellos cada jugador conoce su propia función de pago, pero no la de sus rivales. Para simplificar, consideraremos el caso en que sólo hay dos jugadores.

Definición 15 *Un* juego bayesiano *consiste en:*

1. *Un conjunto N de jugadores, más la naturaleza ($N = 2$, para este curso).*
2. *Para cada jugador, un conjunto A_i de acciones posibles.*
3. *Para cada jugador un conjunto T_i de* tipos *o encarnaciones posibles.*
4. *Para cada jugador, una función de utilidad del tipo VNM $u_i : A_1 \times A_2 \times T_i \to I\!R$*
5. *Una distribución de probabilidades conjuntas:*
   (a) $p : T_1 \times T_2 \to [0, 1]$
   (b) $\sum_{T_1 \times T_2} p_l = 1,$

   que es conocimiento común, con que la naturaleza *elige las encarnaciones de cada jugador.*

Denotamos el juego en forma normal por:

$$B = \langle N = 2, (A_i), (T_i), (u_i), p \rangle$$

El orden de las jugadas se elige como sigue:

1. *La naturaleza elige $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ de acuerdo a p, y le revela a cada jugador su tipo, pero no el del otro jugador.*
2. *Los jugadores eligen acciones simultáneamente.*

Notar que con este procedimiento hemos transformado un juego con información incompleta en un juego con información imperfecta: los jugadores conocen la estructura del juego, pero al momento de tomar sus decisiones no conocen exactamente cual es la historia del juego.

Supongamos ahora que la naturaleza le revela al jugador 1 que su tipo es k. Este jugador calcula la probabilidad que el jugador 2 sea del tipo m por:

$$\pi_1^k(m) = \text{prob}\left(t_2^m / t_1^k\right) = \frac{p_{km}}{\sum\limits_{m'} p_{km'}} \tag{1.1}$$

La información que le es revelada por la naturaleza le permite a este jugador usar la regla de Bayes para mejorar su información. Así, cuando es del tipo t_1^k, el jugador 1 elige $a_1 \in A_1$ para maximizar:

$$\sum_m \pi_1^k(m) u_1(a_1(k), a_2(m); k) \tag{1.2}$$

Donde $a_2(m)$ reconoce que encarnaciones distintas del jugador 2 tomarán decisiones distintas. Notar que la expresión (1.2) es una expresión similar a la que vimos en la sección 1.4.1.

Antes de definir un equilibrio bayesiano, debemos definir lo que es una *estrategia* en el contexto de un juego bayesiano. La idea en este caso es que si bien visualizamos en cierto modo a cada encarnación como un jugador distinto, reconocemos que estamos hablando del mismo jugador que puede tomar distintas encarnaciones.

Definición 16 *En* $B = \langle N = 2, (A_i), (T_i), (u_i), p\rangle$ *una estrategia de* i *es una función* $S_i : T_i \longrightarrow A_i$. S_i *es el set de estrategias de* i.

Notar que esta definición es idéntica a la definición tradicional de estrategia como plan completo. La siguiente definición será útil más adelante:

Definición 17 *A* $S_i : T_i \longrightarrow A_i$ *tal que* $S_i(t_k) = a_i$, $\forall\ t_k \in T_i$, *se le llama estrategia de* confusión. *A* $S_i : T_i \longrightarrow A_i$ *tal que* $\exists\ \ t_k, t_l \in T_i$ *de manera que* $S_i(t_k) \neq S_l(t_l)$, *se le llama estrategia de* separación.

Con esta definición, estamos en condiciones de definir lo que es un *equilibrio bayesiano*.

Definición 18 *En el juego bayesiano* $B = \langle N = 2, (A_i), (T_i), (u_i), p\rangle$ *la combinación de estrategias* $s^* = (S_1^*, S_2^*)$ *es un equilibrio bayesiano si* $\forall\ i \in N$, *y* $t_i \in T_i$:

$$\sum_l \pi_i^{t_i}(l)\, u_i\left(S_i^*(t_i), S_j^*(t_l); t_i\right) \geq \sum_l \pi_i^{t_i}(l)\, u_i\left(a_i, S_j^*(t_l); t_i\right),\ \forall\ a_i \in A_i$$

Ejemplo 26: Una licitación de sobre cerrado, primer precio
Hay dos participantes cada uno de los cuales valora el bien en v_i, $i = 1, 2$. v_i se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Los licitantes son neutros al riesgo y todo esto es de conocimiento común. Gana la licitación la postura más alta.

Entonces:

- $N = 2$.

- $A_i = [0, \infty)$.
- $T_i = [0, 1]$.
- $v_i \rightsquigarrow U[0, 1]$, independientes entre sí.
- $u_i(b_1, b_2, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si} \quad b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{si} \quad b_i = b_j \\ 0 & \text{si} \quad b_i < b_j \end{cases}$

Para encontrar un equilibrio bayesiano para este juego, construimos una estrategia $b_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$. El par de estrategias $(b_1(v_1), b_2(v_2))$ es un equilibrio bayesiano si $\forall\, v_i \in [0, 1]$:

$$\max_{b_i} \left\{ (v_i - b_i) \times \text{prob}[b_i > b_j(v_j)] + \frac{1}{2}(v_i - b_i) \times \text{prob}[b_i = b_j(v_j)] \right\}$$

Proposición 6 *El par de estrategias* $b_i(v_i) = \frac{v_i}{2} \quad \forall\, i$ *es un equilibrio bayesiano.*

Demostración:

$$u_1 \equiv \max_{b_1} \left\{ (v_1 - b_1) \times \text{prob}\left[b_1 > \frac{v_2}{2} \right] + \frac{1}{2}(v_1 - b_1) \times \text{prob}\left[b_1 = \frac{v_2}{2} \right] \right\}$$

Dado que

$$\text{prob}\left[b_1 = \frac{v_2}{2} \right] = 0$$

Entonces:

$$u_1 \equiv \max_{b_1} \left\{ (v_1 - b_1) \times \text{prob}\left[b_1 > \frac{v_2}{2} \right] \right\}$$

Pero:

$$\text{prob}\left[b_1 > \frac{v_2}{2} \right] = \text{prob}[v_2 < 2b_1] = \int_0^{2b_1} dx = 2b_1$$

Entonces:

$$u_1 \equiv \max_{b_1} \{ (v_1 - b_1) 2b_1 \}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial b_1} = 2v_1 - 4b_1 &= 0 \\ b_1 &= \frac{v_1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Observaciones:

1. Cada jugador ofrece la mitad de su valoración. Esto señala el *trade-off* fundamental de toda licitación:

   (a) Al aumentar b_i, se aumenta la posibilidad de ganar.
   (b) Pero, de ganar, se disminuye el excedente.

2. Este equilibrio es único (lo demostraremos más adelante) y es *simétrico.*

3. El equilibrio es *eficiente*, gana quien valora más el bien. Este resultado es sumamente dependiente de la simetría del juego.

1.4.3 El principio de la revelación

Lo que hemos hecho hasta ahora es lo siguiente: especificamos un juego y encontramos su resultado. Existe un área de la teoría de juegos llamada *diseño de mecanismos* que sigue el procedimiento inverso: parte de un resultado y luego construye un juego para el cual dicho resultado es un equilibrio[1].

En este curso no entraremos más que en un resultado de esta área, pero que es fundamental conocer: el *principio de la revelación.*

Para introducirnos en los que nos ocupará en esta sección, recordemos el ejemplo de la licitación y pongámonos en los zapatos de quien vende el bien. Seguramente a esta persona le interesará diseñar una licitación tal que sus ingresos esperados por la venta sean máximos. Sin embargo, uno de los problemas que enfrenta es que existen muchísimos mecanismos posibles para diseñarla y compararlos podría ser imposible. A pesar de esto, existe una clase de mecanismos relativamente sencillos que consisten en que cada jugador declare su tipo o encarnación, y el resultado del juego es función de lo que los jugadores declaren conjuntamente. Este tipo de mecanismos reciben el nombre de *mecanismos directos.*

Dentro de los mecanismos directos, están aquellos en que los jugadores *dicen la verdad*, es decir, aquellos en que, en equilibrio, para cada jugador es óptimo declarar fidedignamente su tipo. En el caso del remate, el mecanismo directo consiste en que los jugadores declaren su valoración, y la regla de pago y de asignación del bien es tal que, a cada jugador, le conviene declarar su valoración fidedignamente; incidentalmente, recordemos que éste era el caso cuando se usaba licitación de sobre cerrado *segundo precio.* A este tipo de mecanismos se les llama *compatibles en incentivos.*

Los mecanismos directos y fidedignos son muy convenientes pues son relativamente fáciles de plantear y de entender. El *principio de la revelación* nos indica que además de convenientes son *suficientes* en el sentido del siguiente teorema:

Teorema 3 *Cualquier equilibrio bayesiano de cualquier juego bayesiano puede obtenerse a través de un mecanismo directo y compatible en incentivos.*

¿Qué dice el teorema anterior? Volvamos al ejemplo del remate. Sabemos que en equilibrio $b_i = \frac{v_i}{2}$. El principio de la revelación dice que este equilibrio bayesiano puede obtenerse de un mecanismo directo y compatible en incentivos en el que para cada jugador es óptimo revelar su valoración.

---

[1] Por *mecanismo* entenderemos un conjunto de reglas.

Reconsideremos ahora el problema de nuestro diseñador de licitaciones que requiere maximizar su ingreso esperado. El principio de la revelación dice que se puede restringir la búsqueda a los mecanismos directos y compatibles en incentivos. Supongamos que se encuentra la licitación óptima, luego este mecanismo es óptimo entre *todos* los mecanismos posibles; si existiera algún otro que fuera mejor, éste podría representarse como un mecanismo directo y compatible en incentivos. En las siguientes secciones del curso usaremos repetidamente este principio. Pasemos ahora a demostrar el teorema:

Demostración:

1. Considerar el juego bayesiano $B = \langle 2, (A_i), (T_i), (u_i), p \rangle$, en el que s^* es un equilibrio bayesiano. Por demostrar que existe un mecanismo directo $B^* = \langle 2, (T_i), (T_i), (v_i), p \rangle$, tal que $(T_i(t_i) = t_i)_{i=1}^2$ es un equilibrio bayesiano, donde v_i se deduce de B y s^*.

2. Antes de seguir, notemos que en B^* :

   (a) El espacio de acciones de cada jugador es T_i, esto es obvio, pues lo que hace cada jugador en un mecanismo directo es declarar su tipo.

   (b) (u_i) ha sido sustituido por (v_i), las cuales dependen en forma particular de s^*. Esta es la clave para entender el teorema

3. Notar que, para el jugador 1, $S_1^*(t_1)$ resuelve:

$$arg \max_{A_1} \{u_1(a_1, S_2^*; t_1)\}$$

   Aquí hay un pequeño abuso de la notación, es decir:

$$u_1(S_1^*(t_1), S_2^*; t_1) \geq u_1(a_1, S_2^*; t_1), \forall\, a_1 \in A_1$$

4. De esto se sigue que:

$$u_1(S_1^*(t_1), S_2^*; t_1) \geq u_1(S_1^*(\tau_1), S_2^*; t_1), \forall\, \tau_1 \in T_1$$

   Vale decir, cuando el jugador 1 es de tipo t_1, no le conviene seleccionar la acción que elegiría si fuera de tipo $\tau_1 \neq t_1$. Esto, si bien es obvio, es clave para lo que sigue.

5. Definimos ahora:

$$v_1(\tau_1, \tau_2; t_1) \equiv u_1(S_1^*(\tau_1), S_2^*(\tau_2); t_1)$$

   Si 1 y 2 declaran ser de tipo τ_1 y τ_2, entonces se les asignan acciones $S_1^*(\tau_1)$ y $S_2^*(\tau_2)$. Por lo tanto, si el jugador 1 *declara* ser de tipo τ_1, se le *asigna* la acción $S_1^*(\tau_1)$[2].

---

[2] Recordar que $S_1^* : T_1 \to A_1$

6. La demostración de que $(\tau_i^*(t_i) = t_i)$ es un equilibrio, sigue de notar que:

$$\begin{aligned} v_1(\tau_1, \tau_2^*; t_1) &\equiv u_1(S_1^*(\tau_1), S_2^*; t_1) \\ \leq v_1(t_1, \tau_2^*; t_1) &\equiv u_1(S_1^*(t_1), S_2^*; t_1) \end{aligned}$$

   Y análogamente para 2.

Ejemplo 27: Monopolista
Considere un monopolista que enfrenta consumidores cuya función de utilidad es:

$$u(x, T, \theta) = \theta V(x) - T \quad V' > 0, V'' < 0$$

con x la cantidad consumida del bien y T la tarifa cobrada por el monopolista. θ es un parámetro que denota la valoración del bien. Supondremos que $\theta \in \left\{\theta^A, \theta^B\right\}$, con $\theta^A > \theta^B$. El monopolista quiere maximizar sus utilidades, para ello ofrece canastas x a precios $T(x)$.

El principio de la revelación implica que puede restringir su búsqueda a mecanismos directos y compatibles en incentivos, en que el par (x, T) asignado en función del θ revelado. Si la proporción de clientes de valoración alta es $\lambda \in (0, 1)$, entonces resuelve:

$$\begin{array}{l} \max\left\{\lambda\left[T_A(x_A) - C(x_A)\right] + (1-\lambda)\left[T_B(x_B) - C(x_B)\right]\right\} \\ \text{s.a.} \\ \qquad \begin{array}{lll} 1. & \theta^i V(x_i) - T_i \geq 0 & \text{Restricción de participación} \\ 2. & \theta^A V(x_A) - T_A \geq \theta^A V(x_B) - T_B & \text{Restricción de incentivos.} \\ 3. & \theta^B V(x_B) - T_B \geq \theta^B V(x_A) - T_A & \text{Restricción de incentivos.} \end{array} \end{array}$$

Entonces, $(T, x) : \left\{\theta^A, \theta^B\right\} \to I\!R^+$ que resuelve este problema es óptimo *entre todos los mecanismos posibles.*

Ejemplo 28: Tesis de Daniel Hojman
En ocasiones, la estrategia óptima depende del tipo o encarnación del jugador. De este modo:

$$\begin{aligned} S_1^*(1) &= a(1) \in A_1 \\ S_1^*(2) &= a(2) \in A_1 \\ S_1^*(3) &= a(3) \in A_1 \\ &\vdots \\ S_1^*(n_1) &= a(n_1) \in A_1 \end{aligned}$$

Luego, $S_1^*(t_1) \in A_1$, por lo tanto, una vez conocida $a(t_j)$ $t_j = 1, 2, \ldots, n_1$, se sabe que el jugador es de tipo j.

Se puede construir un mecanismo del tipo: "Si tú me dices que eres de tipo τ_1, yo te dicto jugar $S_1(\tau_1) = a(\tau_1)$." Luego, la utilidad del jugador es $u_1(S_1(\tau_1), S_2^*)$ y esto se maximiza seleccionando $S_1(\tau_1) = S_1^*(\tau_1) = a(\tau_1)$. Es decir, lo óptimo es decir la verdad.

1.4.4 Ejercicios

Ejercicio 24:
Considere un duopolio de Cournot que opera en un mercado cuya demanda inversa es $P(Q) = a - Q$, donde $Q \equiv q_1 + q_2$ es la cantidad agregada que las empresas ofrecen en el mercado. Ambas empresas tienen costos totales $c_i(q_i) = cq_i$, pero la demanda es incierta: es alta ($a = a^+$) con probabilidad p y baja ($a = a^-$) con probabilidad $1 - p$; obviamente $a^+ > a^-$. Además, la información es asimétrica. La empresa 1 conoce si la demanda es alta o baja antes de decidir cuánto producir, pero la empresa 2 no lo sabe. Todo esto es conocimiento común. Las dos empresas eligen cantidades simultáneamente.

1. Describa el juego.
2. Suponga que a^+, a^-, q y p son tales que las cantidades de equilibrio son positivas. Encuentre el equilibrio bayesiano de este juego.

Ejercicio 25:
Considere el juego bayesiano

$$\langle N = 2, (A_i), (T_i), (u_i), p \rangle$$

1. Harsanyi distingue entre la interpretación del juego centrada en los jugadores, y la interpretación centrada en los tipos. Explique a qué se refiere.
2. Explique en qué consiste un juego con información incompleta y distíngalo de uno con información imperfecta. Luego explique en qué consiste la transformación de un juego con información incompleta en uno con información imperfecta.

   En el resto de la pregunta suponga que $A_1 = A_2 = \{a, b, c\}$, y que cada jugador puede ser de dos tipos.
3. Escriba una estrategia del jugador 1.
4. Defina equilibrio bayesiano en el contexto de este juego.
5. Suponga que el juego

   $$\langle N = 2, (A_i), (T_i), (u_i), p \rangle$$

   tiene sólo un equilibrio bayesiano, en que ambos jugadores utilizan una estrategia de separación. Use el principio de la revelación y transfórmelo en un mecanismo directo y compatible en incentivos, vale decir, en un juego

   $$\langle N = 2, (T_i), (T_i), (v_i^*), p \rangle$$

   Explique en qué consiste el principio de la revelación.

Ejercicio 26:
Considere una licitación en la que se vende un cuadro. Hay $n > 1$ interesados. A cada uno de los participantes el riego les es indiferente y sus valoraciones se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, 100]$. Todo esto es de conocimiento común. El cuadro se le adjudicará a quien haga la mejor oferta. Quien la haga pagará su oferta (es decir, la licitación es de sobre cerrado primer precio).

1. Describa el juego bayesiano.
2. Escriba una estrategia del jugador i.
3. Encuentre el equilibrio bayesiano de este juego y demuéstrelo con rigurosidad.
4. Use el principio de la revelación y transforme la licitación descrita en un mecanismo directo y compatible en incentivos. Luego demuestre que en equilibrio los participantes dicen la verdad.

Ejercicio 27:
Dos ejércitos se disputan una isla. El comandante de cada ejército puede elegir "atacar" o "no atacar". Adicionalmente, cada ejército es "débil" o "fuerte" con igual probabilidad; los eventos son independientes, y la fortaleza de un ejército sólo es conocida por su comandante. Los pagos son como sigue. La isla vale M si es capturada. Un ejército captura la isla cuando ataca y el otro ejército no lo hace, o bien cuando es fuerte, ambos atacan y el otro ejército es débil. Si dos ejércitos de igual fortaleza atacan, ninguno conquista la isla. El costo de pelear es d si el ejército es débil y f si el ejército es fuerte, con $f < M < d$. Atacar no tiene costo cuando el ejército rival no o hace.

1. Demuestre que la combinación de estrategias simétricas tal que un ejército ataca cuando es fuerte, pero no lo hace cuando es débil es un equilibrio bayesiano.
2. Considere la siguiente combinación de estrategias: el ejército 1 ataca no importando si es fuerte o débil; el ejército 2 no ataca nunca. Encuentre aquellos valores de M, f y d tal que esta combinación de estrategias es un equilibrio bayesiano (siga suponiendo que $f < M < d$).
3. Explique intuitivamente por qué un ejército fuerte podría no querer atacar en equilibrio, cuando al mismo tiempo el ejército rival lo hace aún cuando es débil.

Ejercicio 28: Regulando a una empresa sin conocer sus costos
Considere el problema de un regulador que debe contratar a una empresa privada monopólica para que le produzca un bien. El costo por unidad es constante pero puede ser alto (c^A) o bajo (c^B). La empresa conoce su costo, pero el regulador no puede observarlo. Desde su punto de vista, la empresa tiene costos altos con probabilidad $\pi \in (0, 1)$. Sin embargo, el regulador puede elegir la

cantidad que quiere comprar (q) y el monto total que pagará (R) y hacerlo depender de cualquier declaración de la empresa que elija. Si la empresa produce q unidades y se le paga R, la utilidad del regulador es

$$B(q) - R,$$

con $B' > 0$, $B'' < 0$. Obviamente, la participación de la empresa es voluntaria, vale decir, el regulador tiene que ofrecerle al menos lo suficiente para que cubra sus costos. Suponga además que para el regulador es indispensable que la empresa, aún si es de costos altos, acepte producir el bien. El regulador tiene que diseñar un contrato y su objetivo es maximizar el costo esperado de abastecimiento, viz.

$$E\left[B(q) - R\right].$$

1. Dé un ejemplo de un mecanismo *indirecto* en este caso.
2. Describa *rigurosamente* un mecanismo directo en este caso.
3. Explique formalmente qué significa que un mecanismo sea "compatible en incentivos". Luego enuncie las condiciones para que el mecanismo directo que describió en 2. sea compatible en incentivos. (Ayuda: parta escribiendo la función de pago de la empresa.)
4. Enuncie el problema de optimización que debe resolver el regulador.
5. Enuncie el "principio de la revelación" y explique qué significa. Luego explique por qué y cómo este principio le permite simplificar el problema de maximización que resuelve el regulador.

Capítulo 2

Introducción a la economía de la información

2.1 Introducción

La teoría económica tradicional supone que, en un mercado, la información con que transan las partes es simétrica. La economía de la información estudia situaciones en que esto no se cumple.

Cuando hablemos de la economía de la información, usualmente supondremos que lo que se transa es un *contrato*. Esto no es restrictivo, puesto que las transacciones que no envuelven tiempo (por ejemplo, la compra de una revista en un kiosko) las consideramos un *contrato spot*.

El principio fundamental detrás de la economía de la información es que las acciones especificadas por un contrato deben ser compatibles con la información disponible. Un corolario de este principio es que las intervenciones del regulador deben respetar sus restricciones de información. De este principio se siguen varias consecuencias:

1. En contraste con el mundo de Arrow-Debreu en que los contratos son:
    (a) Observables.
    (b) Verificables.
    (c) Completos.
    (d) Hacerlos cumplir *no tiene costo*.

   En lo que sigue consideraremos casos en que algunas de las variables no son observables o verificables. Por eso, las posibilidades de hacer cumplir un contrato van a depender de qué variables son verificables; en general (y esto es lo que hace interesante el problema), las variables objetivo de los contratos no van a ser ni observables ni verificables.

2. El que las variables más relevantes para el contrato no sean verificables introduce el problema del *comportamiento oportunista*. Típicamente, estos problemas ocurren ex-post, es decir, una

vez que el contrato se firmó, pero afectan los incentivos ex-ante. Por esto, el contrato debe proveer los incentivos correctos.

3. No es posible asegurar completamente.
4. Necesitamos un estándar para evaluar cuan deseable es una determinada asignación de recursos que considere las limitaciones del planificador. Esto nos lleva al concepto de *optimalidad de Pareto restringida.*
5. Las transacciones no son *impersonales* (un ejemplo en que esto se ve claramente es en relaciones de crédito), lo cual tiene varias consecuencias:
    (a) La teoría de juegos es la herramienta natural.
    (b) La estructura de mercado puede cambiar una vez que se contrata: ex-ante hay competencia; ex-post las relaciones son más personales.
    (c) En general, los precios no son paramétricos, aún si hay competencia (libre entrada), y se compite en más de una dimensión.
6. Clasificación de asimetrías de información:
    (a) **Pre-contrato**. En esta situación tenemos lo que se conoce como *selección adversa.* Hay dos casos
        i. Quien no está informado mueve primero y tratará de estructurar un contrato de forma tal que pueda ordenar a los distintos tipos de jugadores. Esto nos llevará a modelos de *filtros.*
        ii. Quien está informado mueve primero y así, la respuesta del mercado será intentar revelar la información. Esto nos llevará a modelos de *señales.*
    (b) **Post-contrato**. En este caso tenemos lo que se conoce como *moral hazard.* Aquí tenemos dos clases básicas de modelos:
        i. *Acciones no observables.* Por ejemplo, un vendedor observa su esfuerzo, no así la empresa que lo contrata.
        ii. *Resultados no observables.* Por ejemplo, una persona que reporta falsamente a su compañía de seguros que le robaron la radio del auto. A estos modelos se les conoce también como de *verificación costosa de estado.*

2.2 Selección adversa, señales y filtros

Ejemplo 29: El mercado de autos usados.
Consideremos un mercado de autos usados. Supongamos que la calidad de los autos se distribuye uniformemente a lo largo del intervalo $[0,1]$, es decir, $\theta \rightsquigarrow U[0,1]$. Cada comprador está dispuesto a pagar $p = \frac{3}{2}\theta$ por un auto de calidad θ. Cada dueño de auto está dispuesto a vender su auto de calidad θ por θ. Ambos son neutrales al riesgo.

Consideremos los siguientes casos:

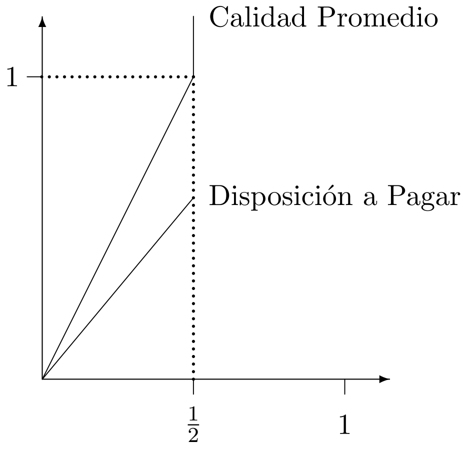


Figura 2.1: El mercado de autos usados

1. Información simétrica y calidad conocida: el precio de un auto de calidad θ es $\frac{3}{2}\theta$.
2. Información simétrica y calidad desconocida: el precio de un auto es $\frac{3}{2}\mu = \frac{3}{4}$ (todos los autos tienen igual precio), donde $\mu = E(\theta)$.
3. Información asimétrica: sólo el vendedor conoce la calidad del auto:
    - Todos los autos deben venderse al mismo precio, puesto que los compradores no pueden distinguir los buenos de los malos vehículos.
    - Suponer que el precio es p. Entonces se venden sólo aquellos autos tales que $\theta \leq p$; la calidad promedio de estos autos es $\frac{p}{2}$.
    - Pero, si la calidad promedio es $\frac{p}{2}$, la disposición a pagar es:

    $$\frac{3}{2}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{3}{4}p$$

    - Al único precio en que $\frac{3}{4}p = p$ es $p = 0$. Por lo cual, en este caso *no se transan autos.*

El ejemplo visto es un caso extremo de lo que se conoce como *selección adversa*. La génesis del problema es que los compradores no pueden distinguir un auto bueno de uno malo y, por lo tanto, no estarán dispuestos a pagar más que el valor promedio. Esto induce, en algunos casos, a que se retiren del mercado precisamente aquellos que tienen los mejores autos. De allí el nombre *selección adversa*. En lo que sigue, plantearemos un modelo más general para:

1. Estudiar la naturaleza de los equilibrios en mercados donde hay selección adversa.

2. Analizar su eficiencia.
3. Estudiar si el planificador puede mejorar su funcionamiento.

2.2.1 Selección adversa

Suponemos un continuo de compradores neutrales al riesgo, los que valoran un auto de calidad θ en θ. La calidad posible de un auto varía entre $\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right] \subset I\!R_+$. La proporción de autos de calidad θ o menor es $F(\theta)$, (F no-degenerada). El *valor de reserva* de un auto de calidad θ es $r(\theta)$.

Proposición 7 *Si la calidad* (θ) *es observable, entonces en equilibrio*

$$p^*\left(\theta\right) = \theta;$$

y venden autos quienes posean

$$\left\{\theta : r\left(\theta\right) \leq \theta\right\}$$

Este equilibrio es Pareto-Óptimo.

Demostración: Propuesta.

Consideremos ahora el caso en que el vendedor conoce la calidad del auto, pero no el comprador, y en que el mercado es *competitivo*, es decir, los participantes son tomadores de precios.

En equilibrio, el precio es único, si éste es p, entonces el set de dueños de autos que vende es:

$$\Theta(p) = \left\{\theta : p \geq r\left(\theta\right)\right\}$$

La oferta de automóviles es $\int\limits_{\Theta(p)} dF\left(\theta\right)$. Notar que no importa si se venden autos de distinta calidad porque el precio es único.

La demanda por automóviles es función de su precio y de la calidad esperada de los automóviles, μ.

$$d\left(p, \mu\right) = \begin{cases} 0 & si \quad \mu < p \\ [0,1] & si \quad \mu = p \\ 1 & si \quad \mu > p \end{cases}$$

Al equilibrio competitivo le exigimos que las conjeturas sean acertadas o *racionales.* Es decir, si p^* es un precio de equilibrio, entonces:

$$p^* = E\left[\theta | \theta \in \Theta^*\right] \tag{2.1}$$

con

$$\Theta^* = \{\theta : p^* \geq r(\theta)\} \tag{2.2}$$

Definición 19 *Un* equilibrio competitivo *es un par* (p^*, Θ^*) *tal que las expresiones 2.1 y 2.2 se cumplen.*

Observación 11 : Nótese que hemos supuesto una demanda perfectamente elástica al precio, dada una calidad esperada. Si la demanda tuviese pendiente negativa ($d_p < 0$), la *demanda efectiva* podría tener pendiente positiva (elasticidad-precio positiva).

Observación 12 :En la mayoría de los casos el equilibrio no será Pareto-Óptimo. La razón es que el valor promedio para quienes venden es menor que el precio. En contraste, el valor marginal de un auto para quienes lo compran es igual al precio. Por eso, en equilibrio, el valor marginal para un comprador es mayor que el valor para un vendedor promedio. De ahí la ineficiencia.

¿Qué debe suceder para que haya selección adversa? Es importante notar que la selección adversa es un problema de la oferta. Cuando baja el precio, salen del mercado quienes tienen autos de mejor calidad. La condición suficiente para que esto suceda es que el valor de reserva sea creciente con la calidad. ($r' > 0$).

2.2.1.1 Equilibrio competitivo

Analicemos los siguientes casos:

1. Equilibrio único (Ver figura 2.2).

   $$E[\theta|\theta \in \Theta] = \frac{\int\limits_{\Theta} \theta dF(\theta)}{\int\limits_{\Theta} dF(\theta)} \quad \text{dado que } r' > 0$$

   Notar que, $p = r(\theta)$ determina el rango de Θ.

   En la figura 2.2. notar que al precio $r\left(\bar{\theta}\right)$ todos los dueños de auto venden. En este caso, $\mathrm{E}(\theta)$ = media poblacional. A precios más altos todos venden y la calidad promedio no aumenta.

2. Equilibrios múltiples (Ver figura 2.3).

   Notemos que el equilibrio con precio más alto (E_3) es Pareto-Superior a los otros 2. En cualquier equilibrio, el excedente de quienes compran auto es cero, y quienes venden prefieren precios más altos. Equilibrios como E_1 y E_2 surgen por un problema de coordinación: los compradores esperan que la calidad promedio de los autos sea baja y están dispuestos a ofrecer un precio bajo. Esto lleva a que la calidad promedio de los autos efectivamente sea baja.

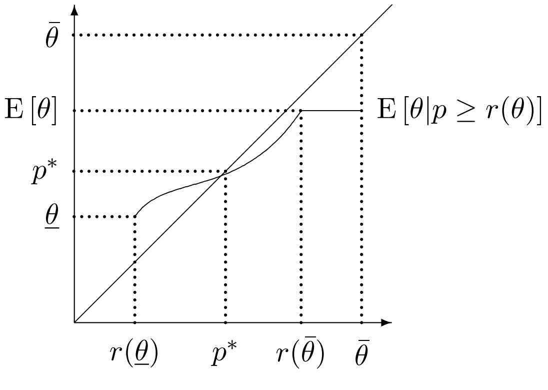


Figura 2.2: Equilibrio único

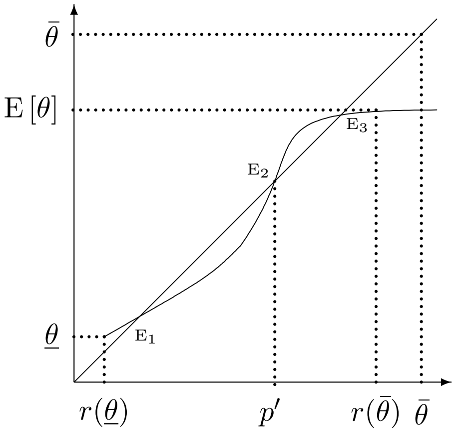


Figura 2.3: Equilibrios múltiples

2.2.1.2 Óptimo de Pareto restringido

En general, vimos que el equilibrio en un modelo de selección adversa no es Pareto-Óptimo. Surge la pregunta si un planificador puede mejorar las cosas. El principio en este caso es que el planificador debe considerar que no cuenta con información privada; así, debe basar sus intervenciones sólo en información públicamente disponible. Una asignación que no puede ser mejorada en el sentido de Pareto por un planificador sin acceso a información privada se conoce como *asignación Pareto-Óptima restringida.*

Estudiaremos, como ejemplo, si en nuestro modelo un planificador puede lograr una mejora Pareto-restringida. Supondremos que $r(\cdot)$ es estrictamente creciente, con $r(\theta) \geq 0, \quad \forall\, \theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, y que $F(\cdot)$ tiene una función densidad conocida $f(\cdot)$, con $f(\theta) > 0, \quad \forall\, \theta \in \quad \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$. Obviamente, el planificador no puede observar la calidad de autos individuales.

Notemos primero que el problema del planificador se analiza suponiendo que éste compra todos los autos y luego los vende a los demandantes[1]. Segundo, el planificador sólo puede observar si un dueño de auto decide o no vender, pero no la calidad de un auto, por lo tanto, su intervención puede discriminar solamente en base a si una persona vende o no vía pagos p y t. Finalmente, deben imponerse las restricciones adicionales que el planificador no pierda plata y deje escoger libremente a un dueño de auto si vende o no. (La condición de presupuesto equilibrado obedece a que si el planificador pudiera tener déficit, habría que considerar de donde saca plata para financiarlo. Además, *deep pocket* implica que el planificador siempre puede implementar la asignación Pareto-Óptima no restringida).

Proposición 8 *En el modelo de selección adversa examinado, el equilibrio con mayor precio es Pareto-Óptimo restringido, y domina a cualquier equilibrio en que el precio es menor.*

Demostración:

1. La segunda parte de la proposición es obvia: el planificador siempre puede implementar el equilibrio Pareto-superior fijando $p = p_3^*$ y $t = 0$. Todo dueño de auto en $\Theta(p^*)$ vende, y como $p^* = E\left[\theta | r(\theta) \leq p^*\right]$, el planificador no tiene pérdidas si vende los autos a p^*.
2. Ahora bien, si todos los automovilistas venden en el equilibrio Pareto-superior, el equilibrio es Pareto-Óptimo no restringido. Por lo tanto, supongamos que no todos venden en dicho equilibrio. Mostraremos que el equilibrio con p^* más alto es Pareto-Óptimo restringido.
3. Notemos, para empezar, que para (p, t) arbitrario, el set de autos es $\left[\underline{\theta}, \widehat{\theta}\right]$, con $\widehat{\theta}$ que satisface:

$$t + r\left(\widehat{\theta}\right) = p \tag{2.3}$$

   (ya que $r(\cdot)$ es estrictamente creciente). Adicionalmente, para respetar su restricción presupuestaria, el planificador debe seleccionar (p, t) de manera que:

$$pF\left(\widehat{\theta}\right) + t\left(1 - F\left(\widehat{\theta}\right)\right) = \int_{\underline{\theta}}^{\widehat{\theta}} \theta f(\theta)\, d\theta \tag{2.4}$$

   Sustituyendo 2.4 en 2.3, se obtiene que:

$$t\left(\widehat{\theta}\right) = \int_{\underline{\theta}}^{\widehat{\theta}} \theta f(\theta)\, d\theta - r\left(\widehat{\theta}\right) F\left(\widehat{\theta}\right) \tag{2.5}$$

---

[1] Esta es la forma tradicional de analizar problemas de este tipo.

$$p\left(\widehat{\theta}\right)=\int_{\underline{\theta}}^{\widehat{\theta}}\theta f\left(\theta\right)d\theta+r\left(\widehat{\theta}\right)\left(1-F\left(\widehat{\theta}\right)\right) \tag{2.6}$$

O, equivalentemente:

$$t\left(\widehat{\theta}\right)=F\left(\widehat{\theta}\right)\left\{E\left[\theta|\theta\leq\widehat{\theta}\right]-r\left(\widehat{\theta}\right)\right\} \tag{2.7}$$

$$p\left(\widehat{\theta}\right)=F\left(\widehat{\theta}\right)\left\{E\left[\theta|\theta\leq\widehat{\theta}\right]-r\left(\widehat{\theta}\right)\right\}+r\left(\widehat{\theta}\right) \tag{2.8}$$

4. Suponer que el planificador selecciona $\widehat{\theta}=\theta^*$, donde θ^* es el dueño del auto marginal, a quien le es indiferente vender o no en el equilibrio Pareto-superior. Sabemos que $r\left(\theta^*\right)=E\left[\theta|\theta\leq\theta^*\right]=p^*$. Luego, si el planificador selecciona $\widehat{\theta}=\theta^*$, $\quad t=0$ y $p=p^*$:

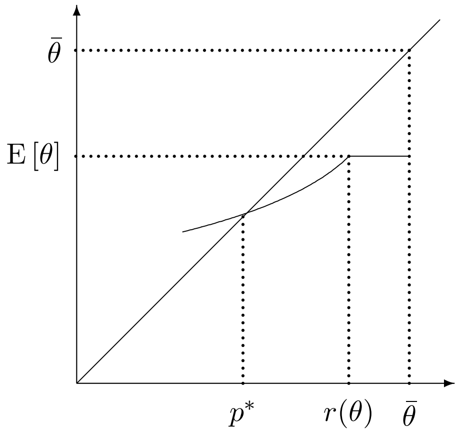


Figura 2.4: Óptimo social

5. Demostraremos que $\widehat{\theta}=\theta^*$ es óptimo para el planificador. Para esto, basta demostrar que $\widehat{\theta}\neq\theta^*$ deja peor, ya sea a quienes tienen autos de calidad $\underline{\theta}$, o a quienes tienen autos de calidad $\bar{\theta}$ (con esto basta para mostrar que no es posible una mejora en el sentido de Pareto).

6. Notar que quienes tienen autos de calidad $\underline{\theta}$ quedan peor si $p\left(\widehat{\theta}\right)<r\left(\theta^*\right)=p^*$. Quienes tienen autos de calidad $\bar{\theta}$ quedan peor si $t\left(\widehat{\theta}\right)<0$.

7. Considerar $\widehat{\theta}<\theta^*$. Como $r\left(\widehat{\theta}\right)<r\left(\theta^*\right)$, la ecuación 2.6 implica que:

$$\begin{aligned} p\left(\widehat{\theta}\right) &< \int_{\underline{\theta}}^{\widehat{\theta}} \theta f\left(\theta\right) d\theta + r\left(\theta^*\right)\left(1 - F\left(\widehat{\theta}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad p\left(\widehat{\theta}\right) - r\left(\theta^*\right) &< F\left(\widehat{\theta}\right)\left\{E\left[\theta|\theta \leq \widehat{\theta}\right] - r\left(\theta^*\right)\right\} \\ &= F\left(\widehat{\theta}\right)\left\{E\left[\theta|\theta \leq \widehat{\theta}\right] - E\left[\theta|\theta \leq \theta^*\right]\right\} \\ &< 0 \end{aligned}$$

8. Considerar $\widehat{\theta} > \theta^*$. Notar que:

$$E\left[\theta|r\left(\theta\right) \leq p\right] < p, \quad \forall\, p > p^*$$

9. Como $p = r\left(\widehat{\theta}\right)$, sabemos que:

$$E\left[\theta|r\left(\theta\right) \leq r\left(\widehat{\theta}\right)\right] < r\left(\widehat{\theta}\right), \quad \forall\, \widehat{\theta} > \theta^*$$

Además:

$$E\left[\theta|r\left(\theta\right) \leq r\left(\widehat{\theta}\right)\right] = E\left[\theta|\theta \leq \widehat{\theta}\right]$$

Por ello,

$$E\left[\theta|\theta \leq \widehat{\theta}\right] - r\left(\widehat{\theta}\right) < 0, \quad \forall\, \widehat{\theta} > \theta^*$$

Pero, en ese caso:

$$t\left(\widehat{\theta}\right) = F\left(\widehat{\theta}\right)\left\{E\left[\theta|\theta \leq \widehat{\theta}\right] - r\left(\widehat{\theta}\right)\right\} < 0$$

Con lo que quienes tienen autos de calidad $\bar{\theta}$ terminan peor. Esto completa la demostración.□

La importancia de este resultado se refiere a que sugiere que aún cuando los resultados a que llegue el mercado pueden no ser Pareto-Óptimos, la intervención no necesariamente puede mejorar las cosas. En todo caso, es necesario remarcar que este es un resultado de equilibrio parcial. En equilibrio general, no obstante, hay intervenciones del planificador que pueden mejorar las cosas aún sin tener información privada.

2.2.1.3 Una aproximación desde la teoría de juegos

En el análisis precedente hemos supuesto que los participantes del mercado son *tomadores de precios (price-takers).* En el modelo los participantes del mercado son sofisticados, pues tienen expectativas racionales, pero supone que compradores y vendedores no pueden cambiar los precios a los que transan. Este supuesto puede no ser razonable. Consideremos la situación del equilibrio E_2 en la figura del caso en el que existían equilibrios múltiples. Un comprador de autos más sofisticado podría razonar de la siguiente forma:

Si subo el precio que ofrezco de p_2 *a* p'*, la cantidad promedio de autos que atraería sería:*

$$E\left[\theta|r\left(\theta\right)\leq p'\right]>p'$$

y, por lo tanto, en lugar de obtener excedente cero, podría tener excedente positivo.

Lo razonable es pensar que en este caso, p' no puede ser un equilibrio. Pero, notemos que esto requiere un nivel mayor de sofisticación por parte del participante del mercado. Para ejemplificar, supongamos que el juego consiste en lo siguiente:

1. $F\left(\cdot\right),\ r\left(\cdot\right)$ y $\left[\underline{\theta},\overline{\theta}\right]$ son conocimiento común. Es decir, la estructura del mercado es conocimiento común.
2. Se juega en dos etapas. En la primera etapa, dos compradores anuncian precios a los que están dispuestos a comprar.
3. En la segunda etapa, los dueños deciden si venden o no, y en caso de vender, a quien. Supondremos que en caso de estar indiferentes, eligen aleatoriamente entre los compradores.

Proposición 9 *Sea* P^* *el set de precios de equilibrio competitivo para el modelo visto anteriormente, y sea* $p^*=\max\left\{p:p\in P^*\right\}$*.*

1. *Si* $p^*>r\left(\underline{\theta}\right)$*, y* $\exists\varepsilon>0$ *tal que* $E\left[\theta|r\left(\theta\right)\leq p'\right]>p',\ \forall\, p'\in\left(p^*-\varepsilon,p^*\right)$*, entonces hay un único EPS en estrategias puras. En él el precio seleccionado por los compradores es* p^* *y venden aquellos con autos en* $\Theta\left(p^*\right)=\left\{\theta:p^*\geq r\left(\theta\right)\right\}$
2. *Si* $p^*=r\left(\underline{\theta}\right)$*, hay múltiples EPS. Pero, en todos ellos el resultado es que todo agente recibe un pago equivalente al que recibe en el equilibrio competitivo.*

Demostración:

- Intuición:

  Suponer que E_1 es un equilibrio. En este caso, ambos compradores (supongamos empresas) tienen utilidades iguales a cero. Pero, una de ellas podría ganar plata ofreciendo p'. En

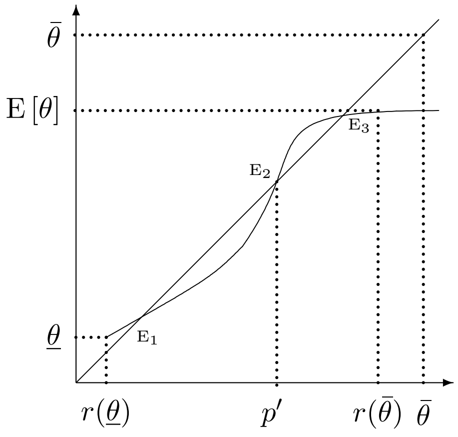


Figura 2.5: Múltiples equilibrios.

contraste, si $p = p_3^*$, no existe ninguna desviación que deje utilidades. Notar que esto requiere que la empresa sea capaz de ofrecer un precio distinto al del equilibrio, y que conozca la estructura del juego, de manera tal que sepa la relación entre precio y calidad promedio de los autos. Esto *no* es necesario en el equilibrio competitivo.

- Demostración formal:

  1. (a) Notar que en equilibrio sólo puede comprar la empresa que paga más, si es que $r(\underline{\theta}) < p$. Supongamos entonces que $p^* > r(\underline{\theta})$.

     (b) Mostremos primero que en cualquier equilibrio, las empresas no tienen utilidades. Supongamos que, por contradicción, ambas empresas ganan plata ofreciendo $p = p'$. Si a ese precio se transan M autos, las utilidades totales son:

     $$\Pi = M\left(E\left[\theta | r(\theta) \leq p'\right] - p'\right) > 0$$

     La empresa con menores utilidades gana a lo más $\frac{\Pi}{2}$, pero, en ese caso le convendrá ofrecer $p' + \alpha, \ \alpha > 0$, con lo que ganará:

     $$\Pi' = M\left(E\left[\theta | r(\theta) \leq p' + \alpha\right] - \left(p' + \alpha\right)\right) > 0$$

     para α suficientemente pequeño (el que existe, por continuidad). Por lo tanto, en equilibrio las empresas tienen utilidades iguales a cero. De esto, se sigue que sólo puede ser equilibrio un equilibrio competitivo.

     (c) De aquí, en equilibrio, se tiene que $p \in P^*$, o bien $p < r(\underline{\theta})$. Supongamos que en equilibrio $p < p^*$. En ese caso, una empresa gana si se desvía y ofrece $p' \in (p^* - \varepsilon, p^*)$. Por lo tanto, p^* es el único candidato.

   (d) Si ambas empresas ofrecen p^*, una de ellas no puede ganar desviándose y ofreciendo $p' \in (p^* - \varepsilon, p^*)$. Supongamos ahora que $p' > p^*$. Por hipótesis, p^* es el precio más alto en un equilibrio competitivo, por lo que:

   $$E\left[\theta | r(\theta) \leq p'\right] - p' \neq 0.$$

   Queda por demostrar que:

   $$E\left[\theta | r(\theta) \leq p'\right] - p' < 0.$$

   (e) Por continuidad se tiene que la expresión en cuestión es, o positiva o negativa, pero no cambia de signo. Ahora,

   $$\lim_{p' \to \infty} E\left[\theta | r(\theta) \leq p'\right] - p' = -\infty,$$

   pues $E[\theta | r(\theta) \leq p']$ es acotado superiormente por $E\left[\overline{\theta}\right]$. Luego, la expresión es negativa $\forall\, p' > p^*$.

2. La segunda parte de la demostración queda propuesta.

2.2.2 Señales

En los modelos que hemos visto en la sección anterior, la parte informada nunca compra conociendo la calidad del bien; sino que la averigua al consumirlo. En mercados como estos, uno esperaría que las partes perjudicadas diseñaran mecanismos para revelar la información (por ejemplo, el caso de los vendedores de autos de alta calidad) o para extraerla. En esta sección consideraremos el primero de estos dos casos. La pregunta que intentaremos responder es bajo qué condiciones la parte informada será capaz de informar creíblemente.

El problema central es que quienes tienen bienes de alta calidad no pueden revelar directamente su información: una simple declaración no sirve, pues cualquiera puede hacerla. De esto se sigue que la señal debe ser costosa para quien la da. Sin embargo, esto no basta, pues quien tiene un bien de baja calidad podría pagar para dar la misma señal. De aquí que, para ser efectiva, la señal debería ser relativamente (es decir, en relación al precio de venta) más barata para quienes tienen bienes de alta calidad, de forma tal que quien tenga un bien de baja calidad decida no imitar. En lo que sigue formalizaremos estas intuiciones.

Consideremos ahora un modelo del mercado del trabajo (parecido al de autos usados), en que hay dos tipos de trabajadores, uno de alta productividad $\left(\theta = \theta^A\right)$ y otro de baja productividad $\left(\theta = \theta^B\right)$, con $\theta^A > \theta^B$. La proporción de trabajadores de alta productividad es $\lambda \in (0,1)$. De forma similar al ejemplo de los autos usados, los trabajadores tienen un salario de reserva $r(\theta)$, y el salario de mercado es igual al producto marginal esperado.

Hasta aquí todo es igual. Ahora introduciremos la señal, educación. La característica central de toda señal es que debe ser observable. Si esto es así , es posible condicionar el contrato a la señal. Supondremos que para una persona de habilidad θ, el costo de obtener un nivel de educación e es:

$$c(e;\theta) \tag{2.9}$$

con

$$\begin{array}{rcl} c(0;\theta) & = & 0 \quad \forall\, \theta \\ c_e(e;\theta) & > & 0 \\ c_{ee}(e;\theta) & > & 0 \\ c_\theta(e;\theta) & < & 0 \quad \forall\, e \end{array}$$

Notemos que el costo de lograr un cierto nivel de educación es mayor para una persona de baja habilidad. Sin embargo, esto no es suficiente. Supondremos además que:

$$c_{e\theta}(e;\theta) < 0$$

¿Cuál es la diferencia entre $c_\theta < 0$ y $c_{e\theta} < 0$? Lo primero indica que el costo total del esfuerzo es menor para el individuo de alta habilidad, mientras que la segunda desigualdad impone que el costo marginal del esfuerzo es menor para el individuo de alta habilidad.

Antes de seguir, introduciremos tres supuestos adicionales:

1. La educación no afecta el producto marginal de la persona. En este sentido, la señal no genera valor agregado. Es por esto que el impacto de las señales sobre el bienestar es ambiguo: por un lado, pueden beneficiosas si llevan a una asignación más eficiente; esto ocurre, por ejemplo, si moderan la selección adversa. Por otro lado, las señales son costosas; si en equilibrio debe invertirse mucho en la señal, el bienestar puede caer.
2. Para simplificar, en lo que sigue supondremos que $r\left(\theta^A\right) = r\left(\theta^B\right) = 0$. Nótese que en este caso, si no hay señales, el equilibrio es Pareto-Óptimo. De esto se sigue que un equilibrio con señales podría ser Pareto-superior, pero pueden haber equilibrios de separación que no sean Pareto-Dominados.
3. La educación no revela directamente información sobre la habilidad de los trabajadores.

La condición clave en este modelo es que $c_{e\theta}\left(e;\theta\right) < 0$, lo cual se conoce como la *single crossing property* (SCP). Para entender qué es y por qué es importante, consideremos el siguiente gráfico:

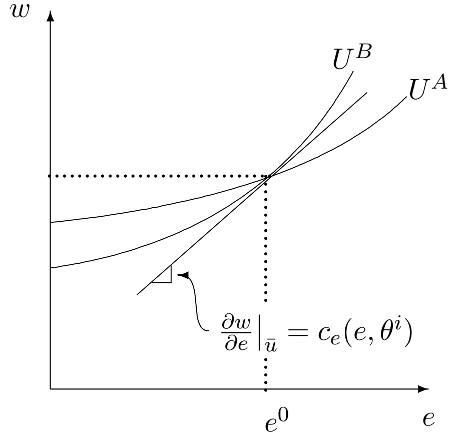


Figura 2.6: *Single crossing property*

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= w - c\left(e;\theta^i\right) \\
d\bar{u} &= dw - c_e\left(e;\theta^i\right) de = 0 \\
\left.\frac{dw}{de}\right|_{\bar{u}} &= c_e\left(e;\theta^i\right) > 0 \\
\left.\frac{d^2w}{ded\theta}\right|_{\bar{u}} &= c_{e\theta}\left(e;\theta^i\right) < 0
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el mercado paga w_B a quienes no tienen educación, y w_A a quienes tienen educación e. Entonces, quienes son de habilidad alta se educan, pero no quienes son de habilidad baja. Nótese que la SCP es crucial para que esto sea posible; en particular no basta con que $c_\theta < 0$.

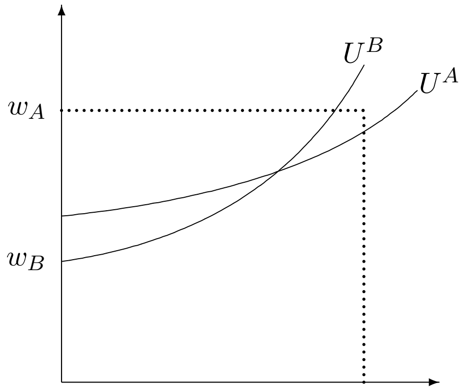
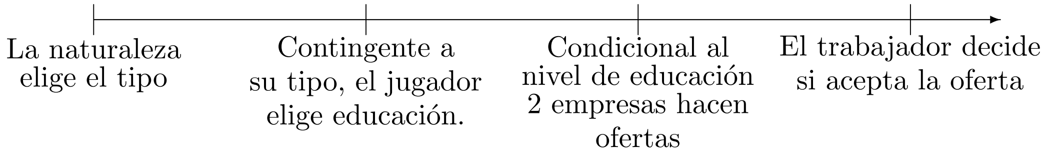


Figura 2.7: El juego de las señales

Formulemos ahora el juego de señales. Éste es un juego dinámico con información incompleta.



Para resolver este juego, notemos que la decisión del trabajador sobre cuánto educarse depende del salario que espera recibir si se educa. A su vez, la decisión de cada firma dependerá de qué tipo de trabajador recibirá si paga un determinado salario a una persona con determinado nivel de educación. Como es obvio, en equilibrio, ambas conjeturas deben ser consistentes:

1. Para resolver el juego, lo hacemos de atrás hacia adelante. La decisión del trabajador es obvia: una vez que observa las ofertas de salario, contingente a su nivel de educación, elige el más alto.

2. Lo interesante comienza cuando consideramos la decisión de una empresa. La estrategia de una empresa i es una función $w_i : I\!R_+ \to I\!R_+$ del nivel de educación. En equilibrio, esta función debe ser óptima:

   (a) dada la estrategia de la otra empresa, y

   (b) dadas las estrategias de un trabajador de baja y de uno de alta habilidad.

3. La decisión de un trabajador de habilidad i sobre cuánto educarse debe ser óptima dados $w_A(\cdot)$ y $w_B(\cdot)$.

4. La dificultad del problema radica en que la decisión de cada empresa es tomada sin conocer la habilidad del trabajador. Así, cada una debe hacer conjeturas sobre la habilidad del trabajador a partir de la educación que éste eligió. Supondremos que si una empresa observa un nivel de educación e, estima que el trabajador es de habilidad alta con probabilidad $\mu(e) \in [0,1]$. La función $\mu(\cdot)$ se conoce como *creencia*.

Podemos definir ahora el concepto de *equilibrio bayesiano perfecto* (EBP).

Definición 20 *Una combinación de estrategias* $s^* \in S$*, y una función* $\mu(\cdot) \in [0,1]$ *son un equilibrio bayesiano perfecto si:*

1. *La estrategia del trabajador es óptima dadas las estrategias de las empresas.*

2. *La función de creencias* μ *es deducida de la estrategia del trabajador cuando esto es posible.*

3. *Las ofertas de las empresas para cada nivel de educación* e *son un equilibrio de Nash del juego de movidas simultáneas entre empresas que toma como dado que la probabilidad que el trabajador sea de habilidad alta es* $\mu(e)$.

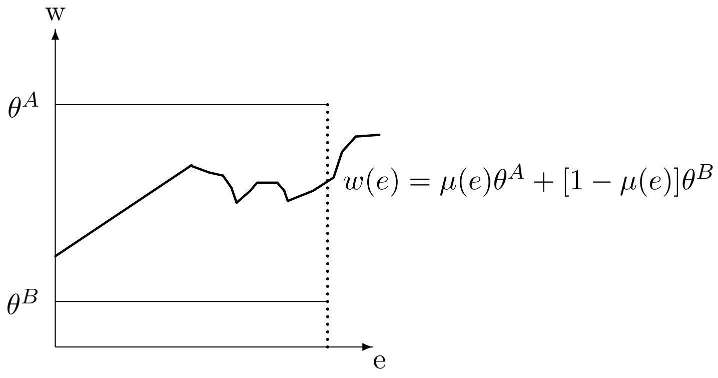


Figura 2.8: Salarios y creencias

Observación 13 :

1. El concepto de EBP es la extensión natural del concepto de EPS cuando se trata de un juego de información imperfecta.
2. Notar que el trabajador puede elegir hasta dos niveles de educación distintos, según sea de alta o de baja habilidad. Sin embargo, la estrategia de cada empresa especifica el salario a pagar para todo nivel de educación.
3. Notar que, si en equilibrio las empresas tienen creencias $\mu(e)$, entonces el salario de equilibrio es exactamente la productividad esperada del trabajador, $\mu(e)\,\theta^A + (1 - \mu(e))\,\theta^B$.

De 3. podemos deducir una función de salarios:

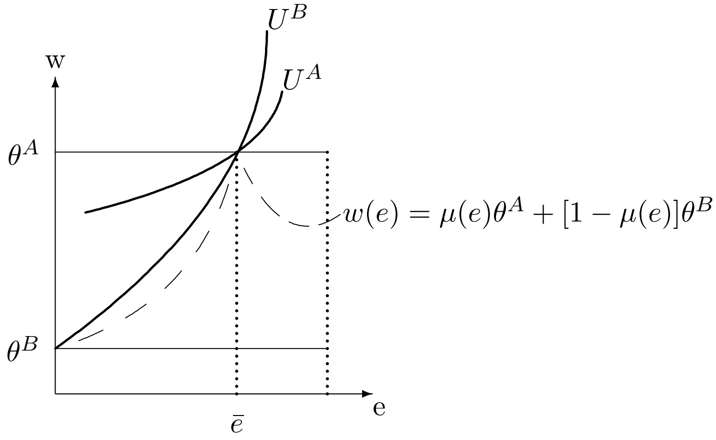


Figura 2.9: Función de salarios

Estudiaremos ahora dos tipos de equilibrio, de *separación*, en el que los niveles de educación elegidos por trabajadores de alta y baja habilidad son distintos, y de *confusión* en el que son iguales.

2.2.2.1 Equilibrio de separación

Proposición 10 *En todo equilibrio de separación:*

$$\begin{aligned} w^*\left(e^*\left(\theta^B\right)\right) &= \theta^B \\ w^*\left(e^*\left(\theta^A\right)\right) &= \theta^A \end{aligned}$$

Demostración: Es la única forma de satisfacer 3 en la definición de EBP.

Proposición 11 *En cualquier EBP de separación, el trabajador de baja habilidad no se educa, es decir,* $e^*\left(\theta^B\right) = 0$.

Demostración: Propuesta

Podemos ahora construir un equilibrio de separación:

1. Las empresas pagan $w^*(\widetilde{e}) = \theta^A$ y $w^*(0) = \theta^B$.
2. y $w^*(\widetilde{e})$ es como lo señala el gráfico, con las consiguientes funciones $\mu(e)$.

Pero, notar que, como lo sugiere la figura 2.10, hay múltiples equilibrios de separación posibles:

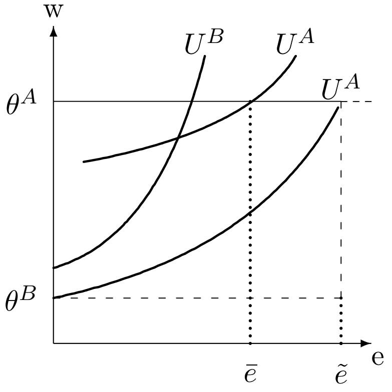


Figura 2.10: Múltiples equilibrios de separación

Esto ocurre porque, fuera del equilibrio, hay libertad absoluta para fijar las creencias. Notemos en todo caso, que el equilibrio con el menor nivel de educación $(\widetilde{e})$, Pareto-domina al resto. De ahí que un equilibrio de separación puede ser Pareto-inferior al resto.

2.2.2.2 Equilibrio de confusión

En un equilibrio de confusión, ambos tipos de trabajador eligen el mismo nivel de educación. En equilibrio:

1. El salario debe ser igual a la habilidad esperada $E(\theta)$. Por lo tanto, en equilibrio, la creencias para el nivel de educación e' deben ser tales que $\mu(e') = \lambda$.
2. Cualquier nivel de educación $e \in [0, e']$ puede aparecer en un equilibrio de confusión; niveles de educación mayores no pueden ser sostenidos en equilibrio, pues los trabajadores de baja habilidad elegirían no educarse.
3. El resultado es idéntico al que se daría si no hubiesen señales.

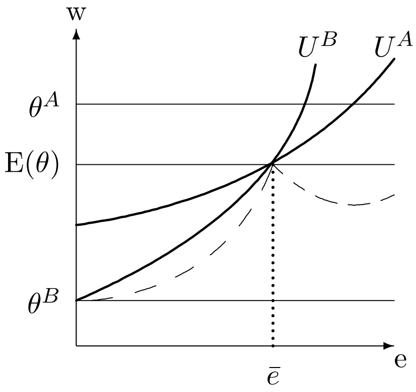


Figura 2.11: Equilibrio de confusión

2.2.2.3 Multiplicidad de equilibrios y creencias *razonables*

Un problema de los modelos de señales es que admiten múltiples equilibrios. El origen de este problema es que fuera de la senda de equilibrio las creencias son arbitrarias. Esto ha dado origen a una serie de refinamientos de los conceptos de equilibrio, los que consisten básicamente en restringir en forma razonable las creencias. Aquí estudiaremos brevemente dos de ellas.

1. La primera restricción a las creencias dice que éstas no pueden suponer que un tipo de jugador adoptará una acción dominada. Por ejemplo, si fuera el caso que eligiendo educación e' el trabajador de baja habilidad siempre está peor (independientemente del salario que le paguen) que cuando se educa e'', entonces, ninguna creencia puede asignarle probabilidad positiva a los trabajadores de habilidad baja si el nivel de educación es e'. Desafortunadamente, en el

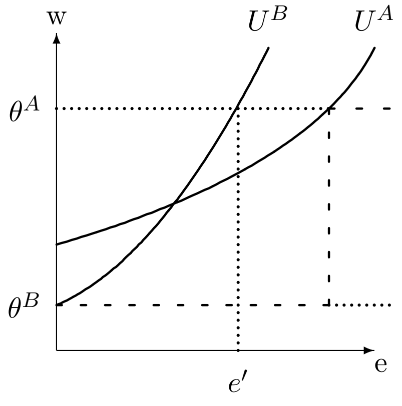


Figura 2.12: Refinamientos del concepto de equilibrio

caso del modelo que hemos visto, este criterio no nos sirve; $e \geq 0$ nunca es una estrategia dominada para ninguno de los dos tipos de jugador.

2. Para entender el segundo criterio, consideremos el siguiente equilibrio de separación, donde el nivel de educación exigido para recibir un salario alto es mayor a $\widetilde{e}$, e igual a e''. La pregunta es: ¿Son razonables estas creencias? El segundo criterio nos dice que no, pues en equilibrio, un trabajador de habilidad baja jamás elegiría educarse un nivel $e \in (\widetilde{e}, e'']$, aún si el salario fuese θ^A. Por eso, este criterio sugiere eliminar creencias de ese tipo. Nótese que si lo seguimos, el único equilibrio de separación que sobrevive es aquel en que $e = \widetilde{e}$.

   Más formalmente, no es admisible que las empresas crean que un trabajador que se educa e es de baja habilidad con probabilidad positiva, si la utilidad que obtendría si le pagan el mayor salario posible en equilibrio, θ^A, es menor que la utilidad que obtiene no educándose y recibiendo

$$w^*(0) = \theta^B$$

   Es decir, si:

$$U^B\left(0, \min_{w^*} w^*(0)\right) = U^B\left(0, \theta^B; \theta^B\right) > U^B\left(e, \max_{w^*} w^*(e)\right) = U^B\left(e, \theta^A; \theta^B\right)$$

   Entonces, $\mu(e) = 1$. Nótese que esto implica que, de los equilibrios de separación, sólo sobreviven aquellos en los que $\mu(e) = 1, \forall\, e > \widetilde{e}$. Sin embargo, este criterio no necesariamente elimina el equilibrio de confusión, si la utilidad que en él obtiene el trabajador de habilidad alta es menor que la que obtiene en el menor equilibrio de separación.

Existen criterios adicionales, pero no los veremos en este curso.

2.2.3 Filtros

En la sección anterior supusimos que la parte informada (el trabajador) movía primero. Ahora veremos qué sucede si la parte desinformada mueve primero y usa un *filtro* para separar los distintos tipos. En general, en estos problemas la propiedad de la intersección única (SCP) pasa a ser crucial, pues permite a la parte desinformada diseñar contratos que llevan a que la parte informada se autoseleccione y separe. Para presentar estas ideas, formularemos un modelo del mercado de los seguros, en el que la parte informada sabe más de la probabilidad de siniestro que la parte desinformada.

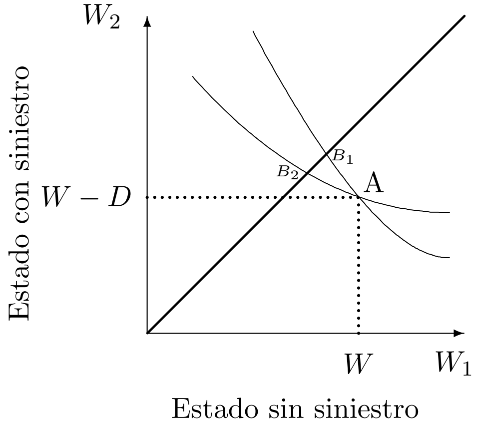


Figura 2.13: Modelo sin seguros

Consideremos el siguiente modelo. Quienes deciden le tienen aversión al riesgo. Su riqueza inicial es W, y con probabilidad π^i tienen una pérdida igual a D. Suponemos dos tipos de personas: el primero con probabilidad alta de siniestro π^A, y el segundo con baja π^B tal que $\pi^A > \pi^B$. Supongamos que existen seguros. Éstos consisten en pagar una prima α_1 a todo evento, y recibir un pago $\widehat{\alpha}_2$ en caso de siniestro. Definimos $\alpha_2 \equiv \widehat{\alpha}_2 - \alpha_1$, como el pago neto en caso de siniestro. Un contrato de seguros queda totalmente definido por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. La utilidad de una persona con probabilidad de siniestro π^i y contrato α, es:

$$\pi^i u(\underbrace{W - D + \alpha_2}_{W_2}) + (1-\pi^i)u(\underbrace{W - \alpha_1}_{W_1}) = \bar{U} \tag{2.10}$$

Diferenciando totalmente la expresión 2.10 se obtiene que:

$$\left.\frac{dW_2}{dW_1}\right|_{U=\bar{U}} = -\frac{\left(1-\pi^i\right)}{\pi^i}\frac{u'\left(W_1\right)}{u'\left(W_2\right)} \tag{2.11}$$

Notar que para niveles de riqueza dados, la pendiente de la curva de indiferencia de una persona de alto riesgo es siempre menor en valor absoluto (y mayor en valor real) que la pendiente de la curva de indiferencia de una persona de bajo riesgo (ver figura 2.13.)

$$\frac{1-\pi^B}{\pi^B} > \frac{1-\pi^A}{\pi^A} \tag{2.12}$$

Notemos que de la ecuación 2.11. se sigue que la propiedad de la intersección única se cumple. Consideremos ahora el siguiente juego, en el que participan dos compañías de seguros, y personas de alto y bajo riesgo. Las compañías de seguro son neutrales al riesgo.

- Primera etapa: las dos compañías de seguros ofrecen, simultáneamente, contratos $\left(\alpha^A, \alpha^B\right)$ y $\left(\alpha^{A'}, \alpha^{B'}\right)$.
- Segunda etapa: dados los contratos ofrecidos en la primera etapa, las personas eligen.

Notar que, en este caso, las empresas no tienen *creencias*. Sin embargo, en equilibrio sus ofertas son óptimas dada las estrategias de las personas. El concepto natural de equilibrio en este caso es, entonces, el equilibrio perfecto en subjuegos.

Consideremos primero el caso en que el tipo de cada persona es observable:

Proposición 12 *Si los tipos son observables, en equilibrio:*

1. *Ambos tipos reciben un seguro completo, es decir:*

$$W - D + \alpha_2 = W - \alpha_1$$

2. *Las empresas no tienen utilidades.*

Demostración:

1. Si en equilibrio alguna aseguradora tuviera utilidades ofreciendo α, la otra podría ofrecer $\alpha' = (\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_2)$ y obtener utilidades si ε es lo suficientemente pequeño. Nadie compraría α.
2. Por 1 nos limitamos a contratos en los que:

$$\left(1-\pi^i\right)\alpha_1 - \pi^i\alpha_2 = 0$$

Si el seguro no fuera completo, existiría un seguro que dejaría utilidades o bien sería preferido por las personas.

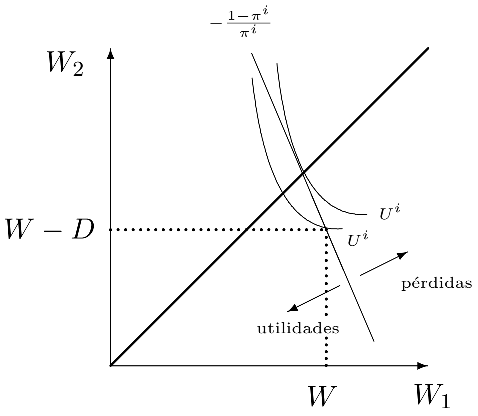


Figura 2.14: Una línea de quiebre

Para lo que sigue, es conveniente definir *líneas de quiebre*, contratos que dejan cero utilidades al asegurador.

Como en la sección anterior, en principio podemos tener dos tipos de equilibrios, de separación y confusión. Pero, en cualquier caso:

Proposición 13 *En equilibrio, ambas empresas no tienen utilidades.*

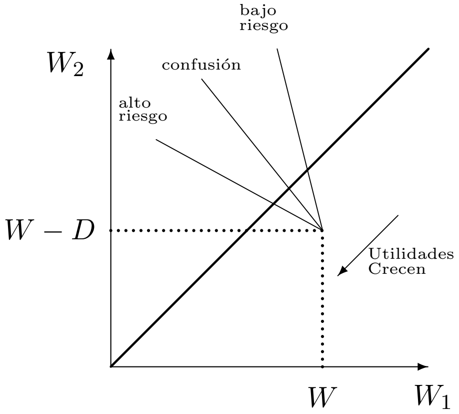


Figura 2.15: Líneas de quiebre

Demostración: Suponer que en equilibrio, las personas de alto riesgo eligen $\alpha^A = \left(\alpha_1^A, \alpha_2^A\right)$, y las de bajo riesgo $\alpha^B = \left(\alpha_1^B, \alpha_2^B\right)$, y suponer que las utilidades agregadas son $\Pi > 0$. Entonces, una de las empresas tiene utilidades agregadas de a lo más $\frac{\Pi}{2}$. Esa empresa puede ofrecer contratos $\left(\alpha_1^A - \varepsilon, \alpha_2^A\right)$ y $\left(\alpha_1^B - \varepsilon, \alpha_2^B\right)$, y ganar utilidades arbitrariamente cercanas a Π. Luego, $\Pi \leq 0$. Sin embargo, $\Pi < 0$ no puede ser ya que una empresa gana nada saliéndose del mercado, por lo tanto, $\Pi = 0$.

Proposición 14 *No existe equilibrio de confusión.*

Demostración: Ver figura 2.16.

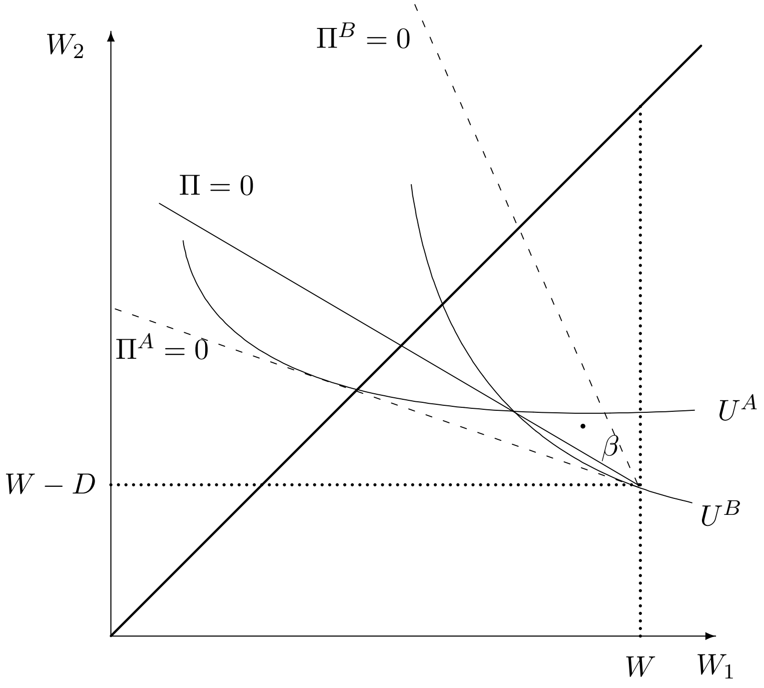


Figura 2.16: Inexistencia del equilibrio de confusión

Notar que este resultado es consecuencia de la propiedad de la intersección única, y del hecho que en equilibrio no hay utilidades. De esto se sigue que, si hay un equilibrio, éste es de separación.

Antes de seguir, notemos que en equilibrio no pueden haber *subsidios cruzados* debido a que si un contrato genera pérdidas y otro ganancias, el asegurador puede aumentar sus ganancias retirando el contrato que deja pérdidas. Pero, en equilibrio, las empresas no pueden ganar plata.

La siguiente proposición muestra que en equilibrio las personas de alto riesgo reciben el mismo seguro que si existiera información perfecta. Sin embargo, aquellas personas con riesgo de siniestro

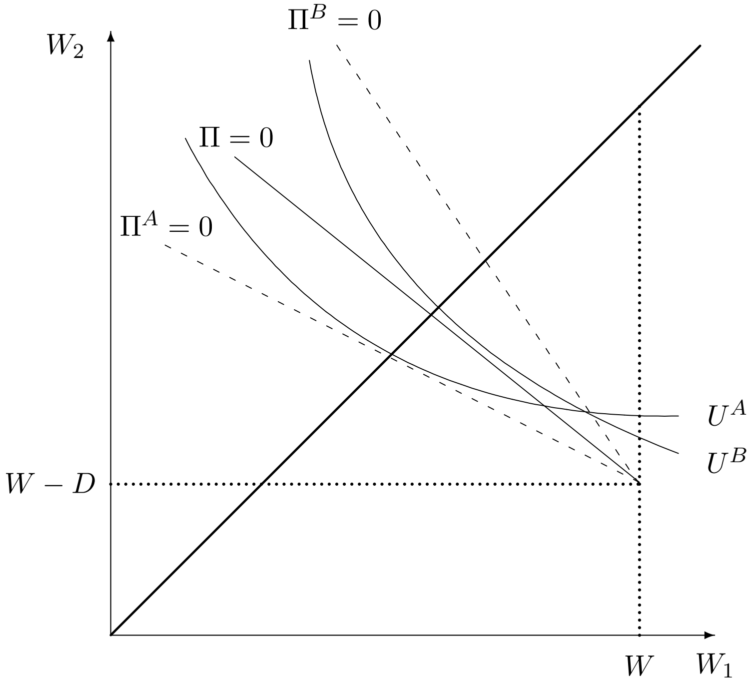


Figura 2.17: Equilibrio de separación

bajo asumen riesgo.

Proposición 15 *1. En cualquier equilibrio de separación las personas de alto riesgo se aseguran completamente, y su riqueza esperada es:*

$$\pi^A (W - D) + \left(1 - \pi^A\right) W = W - \pi^A D$$

2. El contrato de las personas de bajo riesgo es tal que:

$$\pi^A U\left(W - D + \alpha_2^B\right) + \left(1 - \pi^A\right) U\left(W - \alpha_1^B\right) \leq U\left(W - \pi^A D\right)$$

Notar que la propiedad de la intersección única es clave en este resultado: las personas de uno u otro tipo se autoseleccionan:

$$\begin{aligned} U\left(W - \pi^A D\right) &= \pi^A U\left(W - \pi^A D\right) + \left(1 - \pi^A\right) U\left(W - \pi^A D\right) \\ &= \pi^A U\left(W - D + \alpha_2^B\right) + \left(1 - \pi^A\right) U\left(W - \alpha_1^B\right) \\ &< \pi^B U\left(W - D + \alpha_2^B\right) + \left(1 - \pi^B\right) U\left(W - \alpha_1^B\right) \end{aligned}$$

Proposición 16 *Si la proporción de personas de bajo riesgo es muy alta, no existe equilibrio.*

Demostración: Ver figura 2.18.

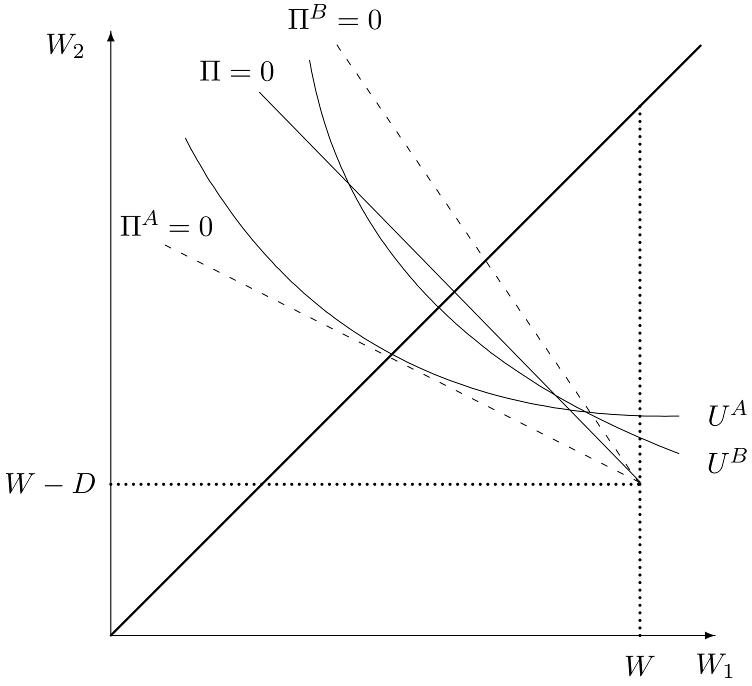


Figura 2.18: Inexistencia del equilibrio.

2.2.4 Ejercicios

Ejercicio 29:
En el modelo de selección adversa presentado en este apunte:

1. ¿Qué es el valor de reserva?
2. ¿De qué depende la calidad promedio? ¿de la distribución de $F(\theta)$ o de la función $r(\theta)$?
3. En el caso de equilibrio competitivos con múltiples equilibrios, ¿porqué el excedente de quienes compran autos es cero?
4. Se señaló que si la demanda por automóviles tuviese pendiente negativa, la *demanda efectiva* podría tener pendiente positiva. Dé una intuición al respecto.

Ejercicio 30: Del examen de Primavera de 1997
Comente brevemente la siguiente afirmación. Si se eliminaran las carencias en los contratos de seguros contra enfermedades catastróficas el mercado podría desaparecer. (Una carencia es el tiempo que transcurre entre el momento en que se contrata el seguro de salud y el momento en que el asegurado está cubierto si ocurre una enfermedad. Para algunas enfermedades la carencia es de varios años.

Ejercicio 31:
Suponga que el dueño de un paquete de acciones conoce exactamente su valor, y que vende solamente si su precio es mayor. Muestre que si los posibles compradores conocen solamente el rango posible del valor, el paquete nunca se transará.

Ejercicio 32: Especulando con terrenos
Andrés y Antonio tienen que decidir si transan o no un terrenito en Achupallas (Andrés es el dueño del terreno). Ambos lo quieren sólo con fines especulativos y planean venderlo al cabo de un año. El precio de reventa depende de qué plano regulador se apruebe. Si se permite la subdivisión de terrenos, el precio será alto (p^A) si no se permite subdividir los terrenos, el precio de reventa será bajo (p^B). La subdivisión se permite con probabilidad p. Tanto Andrés como Antonio son neutrales al riesgo y no descuentan el futuro. Si para Andrés es indiferente vender hoy o mañana, y para Antonio comprar o no comparar, ambos transan.

1. Suponga que la información es simétrica. ¿Se transará el terreno? ¿A qué precio? Demuestre.
2. Suponga ahora que Andrés es amigo íntimo del alcalde de Achupallas, y al momento de la transacción sabe si se permitirá la subdivisión o no. ¿En qué caso se transará el terreno? ¿A qué precio? Demuestre.

Ejercicio 33:
Para resolver este problema puede ser útil consultar a *C. Wilson (1980) The Nature of Equilibrium in Markets with Adverse Selection, Bell Journal of Economics 11: 108-30.* Considere el siguiente modelo del mercado laboral. Hay N firmas, cada una de las cuales emplea a lo más a un trabajador. Las N empresas difieren en su productividad: en una firma de tipo γ un trabajador de habilidad θ produce $\gamma\theta$ unidades de producto. El precio de cada unidad de producto es 1 y las firmas son neutrales al riesgo. El parámetro γ se distribuye uniformemente en el intervalo [0,1].

1. Denote por $z(w, \mu)$ la demanda agregada por trabajo cuando el salario es w y la productividad promedio de los trabajadores μ. Deduzca la demanda por trabajo.
2. Sea $\mu(w) \equiv E[\theta : r(\theta) \leq w]$, y defina la demanda agregada por trabajo $z^*(w) \equiv z(w, \mu(w))$.
    - (a) ¿Cuáles son los determinantes de μ?
    - (b) Muestre que $z^*(w)$ es estrictamente creciente en w cuando evaluada en $\bar{w}$ si y sólo si la elasticidad de μ con respecto a w en ese punto es mayor que 1 (suponga que todas las funciones relevantes son diferenciables). Explique intuitivamente.
3. Sea $s(w) = \int_{\theta(-)}^{r^{-1}(w)} f(\theta)d\theta$ la oferta agregada de trabajo, y definamos como salario de equilibrio competitivo w^* uno tal que $z^*(w^*) = s(w^*)$. Muestre que si hay múltiples equilibrios competitivos, aquel en que el salario es más alto Pareto-domina al resto de los equilibrios.
4. Considere un modelo de teoría de juegos en que dos firmas ofrecen salarios simultáneamente luego de observar los niveles de educación del trabajador. Denote el mayor salario que puede darse en un equilibrio competitivo por w^{**}. Muestre que:
    - (a) Sólo w^{**} puede resultar en un equilibrio perfecto en subjuegos.
    - (b) El equilibrio competitivo con el salario más alto es un equilibrio perfecto en subjuegos si y sólo si $z^*(w) \leq z^*(w^{**})$ para todo $w > w^{**}$.
5. ¿Qué peculiaridades de los mercados con selección adversa le llaman la atención? Comente.

Ejercicio 34:
Suponga que se asigna un nivel de tarea T a todos los trabajadores. Asuma que un trabajador tipo θ produce $\theta(1 + \nu t)$ unidades de producto cuando el nivel de tarea es t con $\nu > 0$.

El equivalente monetario del costo de aceptar el empleo al nivel de tarea antes mencionado es $c > 0$, independiente del tipo de trabajador. Sin embargo, ahora la producción de un trabajador es observable y verificable, y el contrato establece una compensación para el trabajador una vez observada su producción.

1. ¿Cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos de este modelo?

2. Ahora suponga que la producción es aleatoria, esta puede ser buena (q_b) o mala (q_m). La probabilidad de que sea buena es p_H para los trabajadores de alta habilidad y p_L para los trabajadores de baja habilidad ($p_H > p_L$). Si los trabajadores son neutrales al riesgo y tienen una función de utilidad del tipo Bernoulli sobre su riqueza u(w)=w, ¿cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos?

3. ¿Qué sucederá si los trabajadores son estrictamente aversos al riesgo con $u''(w) < 0$ para todo w?

Ejercicio 35:
En el modelo de señales visto en clases suponga que un planificador, que no puede observar las habilidades de cada trabajador, puede fijar la relación entre salario y nivel de educación.

1. Muestre que el planificador puede elegir una función $w(e)$ que le permite implementar el equilibrio de separación Pareto-superior. Haga lo mismo para el equilibrio de confusión Pareto superior.

2. Construya un ejemplo en que el planificador, forzado a elegir entre los equilibrios de separación y confusión Pareto-superiores prefiere que nadie se eduque. Explique por qué puede ser este el caso.

   Ahora suponga que el planificador puede implementar subsidios cruzados: por ejemplo, le paga más que su producto marginal esperado a los trabajadores que no se educan , y menos que su producto marginal esperado a quienes se educan más de e años (todo esto considerando que cada trabajador es libre de elegir el número de años que se educa). Pero, en cualquier caso, no puede tener pérdidas.

3. Construya un ejemplo en que usando subsidios cruzados se puede llegar a una mejora de Pareto aun en el caso que el equilibrio de separación Pareto superior no domina al equilibrio de mercado sin señales. Explique intuitivamente el porque de este resultado.

Ejercicio 36:
Respecto al modelo de seguros presentado en el apunte:

1. Se hace notar que, a diferencia de los modelos de señales, en este caso las empresas no tienen *creencias*. Indique porqué es así. Dé una intuición al respecto.

2. ¿Porqué no hay equilibrios múltiples? Dé una intuición.

Ejercicio 37: El mercado de los seguros. Caso competitivo
Considere el siguiente modelo del mercado de los seguros. Hay sólo dos tipos de individuos: alto riesgo y bajo riesgo. Cada uno parte con riqueza inicial W pero se reduce, si ocurre un accidente,

en L. La probabilidad de esta ocurrencia es p_L para los individuos de bajo riesgo y p_H para los individuos de alto riesgo, donde $p_H > p_L$. Ambos tipos maximizan una utilidad esperada del tipo Bernoulli sobre la riqueza ($u(w)$, con $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0 \ \forall \ w$). Hay dos compañías de seguro neutrales al riesgo. Una póliza consiste en una prima M que el asegurado paga a la compañía y un pago R que la aseguradora paga al individuo en el evento del siniestro.

1. Suponga que los individuos no pueden comprar más que un seguro. Argumente que una póliza puede ser especificada como los niveles de riqueza que el asegurado tiene en ambos eventos ("sin pérdida" y "con pérdida").
2. Asuma que las compañías de seguro ofrecen simultáneamente un número finito pólizas. ¿Cuál es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de este modelo? ¿Existe este equilibrio necesariamente?

Ejercicio 38: El mercado de los seguros. Caso monopólico

Considere un individuo averso al riesgo que maximiza una función de utilidad esperada del tipo Bernoulli sobre su riqueza. El individuo tiene un nivel de riqueza inicial W y tiene una probabilidad θ de sufrir una perdida L, donde $W > L > 0$.

Un contrato de seguro puede ser descrito por el par (c_1, c_2), donde c_1 es la riqueza del individuo en el caso de no sufrir la pérdida, y c_2 es la riqueza del individuo si sufre la pérdida. Esto es, en el caso de que la perdida no ocurre el individuo paga a la compañía de seguros la cantidad (W- c_1), en cambio si la perdida ocurre el individuo recibe un pago $(c_2 - (W - L))$ de parte de la compañía.

1. Suponga que el individuo sólo puede asegurarse con un monopolio neutral al riesgo. Caracterice el contrato que el monopolista ofrecerá al individuo en el caso de que la probabilidad de pérdida θ es observable.
2. Suponga que θ no es observable por la compañía aseguradora, pero si por el individuo. El parámetro θ puede tomar dos valores $\{\theta_L, \theta_H\}$,con $\theta_L > \theta_H > 0$ y probabilidad $(\theta_L) = \lambda$. Caracterice el contrato óptimo ofrecido por el monopolista. ¿Se puede hablar de que uno de los asegurados ha sido racionado en su compra por seguro?, es decir, ¿se le ha vendido menos seguro del que quería? Intuitivamente, ¿por qué el racionamiento ocurre?

Ejercicio 39: El mercado del crédito

Considere un mercado de financiamiento de proyectos de inversión. Todos los proyectos requieren de 1 dólar. Hay dos tipos de proyectos: buenos y malos. Un proyecto bueno tiene una probabilidad p_G de dar utilidades positivas y una probabilidad $(1 - p_G)$ de retornar cero. Para los malos proyectos, las probabilidades relativas son p_B y $(1 - p_B)$ respectivamente, donde $p_G > p_B$. La fracción de proyectos buenos es $\lambda \in (0, 1)$.

Los inversionistas van a los bancos para endeudarse en el valor de la inversión (asuma por ahora que requieren toda la cantidad). Un contrato especifica una cantidad R que se pagará al banco.

Los inversionistas conocen de que tipo es su proyecto, pero los bancos no. En la eventualidad de que el proyecto fracase, el banco no recibe pago alguno. Los bancos actúan competitivamente y son neutrales al riesgo. La tasa de interés libre de riesgo (que el banco paga a los depósitos que financian los préstamos) es r. Asuma que:

$$p_G\Pi - (1+r) > 0 > p_B\Pi - (1+r)$$

1. Encuentre el nivel R de equilibrio y el conjunto de proyectos financiados. ¿Cómo depende de p_G, p_B, Π y r.
2. Suponga ahora que el inversionista puede ofrecer contribuir, con sus propios recursos, una fracción $x \in (0,1)$ del dólar inicial. El inversionista enfrenta restricciones de liquidez, por lo que, el costo efectivo de hacer esto es $(1+\rho)x$, donde $\rho > r$.
   - (a) Escriba la función de utilidad de cada tipo de inversionista en función de su tipo, x y R.
   - (b) Describa el mejor equilibrio bayesiano de separación (desde el punto de vista del bienestar) del juego en que el inversionista primero hace una oferta al banco (especificando x), el banco responde ofreciendo R y, finalmente, el inversionista acepta o no el préstamo. ¿Cómo depende la fracción de la inversión que ofrecerá el inversionista que tiene un buen proyecto ante cambios en p_G, p_B, λ, Π y r?
   - (c) Compare 2a. y 2b. para los dos tipos de inversionistas.

Ejercicio 40: Air Shangri La

Air Shangri La es la única línea aérea autorizada para volar entre las islas de Nirvana y Shangri La. Existen dos tipos de pasajeros: turistas y bussines. Los pasajeros de la clase bussines están dispuestos a pagar más que los turistas. La aerolínea, sin embargo, no puede detectar directamente cuando un comprador de tickets es un viajero turista o bussines. Los dos tipos difieren en cuánto están dispuestos a pagar para evitar comprar sus pasajes por adelantado. (A los dos tipos de pasajero no les gusta comprometerse a viajar en una fecha determinada).

Más específicamente, los niveles de utilidad de cada uno de los dos tipos dependen del precio P del ticket, para algún período de tiempo w antes del vuelo:

Bussines: $v - \theta_b \cdot P - w$.

Turista : $v - \theta_t \cdot P - w$.

donde $0 < \theta_b < \theta_t$. Note que dado un nivel w, el pasajero bussines está deseoso de pagar más por el ticket. Así también, esta deseoso de pagar más por alguna reducción en w.

La proporción de viajeros que son turistas es λ. Asuma que el costo de transportar un pasajero es c.

Asuma desde 1. a 4. que Air Shangri La quiere llevar ambos tipos de pasajeros.

1. Dibuje las curvas de indiferencia en el espacio (P, w). Dibuje las curvas de isoutilidad de la aerolínea. Luego formule el problema de optimización que Air Shangri La debe resolver. *Hint: Imponga no negatividad de precios como restricción ya que, de imponer un $P < 0$, venderá infinitos tickets.*

2. Muestre que el óptimo, los turistas están indiferentes entre comprar un ticket o no hacerlo.

3. Muestre que en el óptimo, los viajeros bussines nunca compran su ticket anticipadamente al vuelo.

4. Describa completamente el esquema de discriminación óptimo bajo el supuesto que se venden ambos tickets. ¿Cómo depende esto de $\lambda, \theta_b, \theta_t$, y c?

5. ¿Bajo qué circunstancias se atenderá sólo a los viajeros bussines?

Ejercicio 41:
Asuma que hay dos tipos de consumidores para el producto de una firma, θ_H y θ_L. La proporción de tipos θ_L es λ. La utilidad de un tipo θ cuando consume una cantidad x del bien y paga un total de T es $u(x, T) = \theta v(x) - T$, donde:

$$v(x) = \frac{1 - (1 - x)^2}{2}$$

La firma es la única en producir el bien y el costo por unidad es $c > 0$.

1. Considere un monopolista no discriminante. Derive la política óptima de precios. Muestre que el monopolio sirve a ambos tipos de consumidores si θ_L o λ es "suficientemente grande".

2. Considere un monopolista que puede distinguir a ambos tipos (por alguna característica) pero puede sólo cobrar un precio p_i al tipo θ_i. Caracterice los precios óptimos.

3. Suponga que el monopolista no puede distinguir a los tipos. Derive la tarifa óptima de dos partes (una política de precios consiste en una cargo fijo F más un precio lineal por unidad comprada) bajo en supuesto que el monopolista sirve a ambos tipos. Interprete. ¿Bajo que condiciones el monopolista sirve a los dos tipos de consumidores?

4. Derive la tarifa no lineal óptima. ¿Cómo se comparan las cantidades compradas con los niveles encontrados en las partes anteriores?

2.3 Moral hazard

Hemos visto el caso en que la información asimétrica es relevante antes que se contrate; ahora, lo que importará son las *características* de la parte informada (v.g. si es de alta o baja habilidad). La información también puede ser asimétrica después que las partes contratan.

Un ejemplo son los contratos de crédito entre un banco y un deudor. Una vez que se contrata, el deudor podría esforzarse menos de lo que corresponde, y con ello disminuir la probabilidad de que pague el crédito. O bien, el deudor podría no pagar argumentando que tuvo mala suerte. El primer caso es uno en que las acciones de la parte informada no son observables. En el segundo caso tenemos modelos en que es costoso (o aún imposible) verificar los resultados.

El punto importante a tener en cuenta aquí es que, aún si no hay asimetrías de información al momento de contratar, las partes anticiparán que sí las habrá después que el contrato se firme. Por lo tanto, el contrato considerará la asimetría de información ex-post.

2.3.1 Agente-principal: acciones no verificables

Consideremos el caso en que los accionistas de una empresa contratan a un gerente. Los accionistas pueden observar las utilidades de la empresa, $\Pi \in [\Pi^-, \Pi^+]$, pero no el esfuerzo y la diligencia del gerente. Supondremos que el gerente tiene dos opciones: esforzarse mucho $(e = e_H)$, o esforzarse poco $(e = e_L)$. Si se esfuerza harto, las utilidades esperadas son mayores; esto le gusta a los dueños. Sin embargo, el esfuerzo desagrada al gerente. Por eso, se dice que entre el gerente y los accionistas existe un *conflicto de interés*. Esta es la característica central del problema.

Para modelar el conflicto de intereses suponemos:

1. $F(\Pi|e_H)$ DEPO a $F(\Pi|e_L)$, es decir,

   $$F(\Pi|e_L) \geq F(\Pi|e_H)$$

   $\forall\, \Pi \in [\Pi^-, \Pi^+]$ con desigualdad estricta para algún conjunto abierto $\Pi \in [\Pi^-, \Pi^+]$.

2. El gerente le tiene aversión al riesgo, con preferencias VNM dadas por:

   $$u(w, e) = v(w) - e,$$

   donde w es el salario y $v(\cdot)$ cumple que $v' > 0,\ v'' < 0$.

Para que el problema sea interesante, no debe ser posible deducir las acciones del gerente de los resultados; de otra forma, condicionar la compensación a los resultados sería equivalente a remunerar directamente el esfuerzo. Captamos esto suponiendo que $f(\Pi|e) > 0 \quad \forall\, e$ y $\forall\, \Pi \in [\Pi^-, \Pi^+]$[2].

---

[2] Esto es más fuerte que lo que realmente necesitamos.

Por último, suponemos que los accionistas son indiferentes al riesgo. Para entender mejor el problema, analizaremos primero el caso en que el esfuerzo es verificable y, por tanto, se puede condicionar el contrato a él.

2.3.1.1 Esfuerzo observable

Un contrato especifica:

1. El esfuerzo e;
2. una función $W : [\Pi^-, \Pi^+] \to I\!R$.

Suponemos que el gerente tiene una alternativa de trabajo que le entrega un nivel de utilidad esperada igual a $\bar{u}$. Así, los accionistas resuelven:

$$\begin{aligned} &\max_{e\in\{e_L,e_H\},W(\Pi)} \int (\Pi - W(\Pi))\, f(\Pi|e)\, d\Pi \\ &s.a. \\ &\int v(W(\Pi))\, f(\Pi|e)\, d\Pi - e \geq \bar{u} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Resolveremos el problema en dos etapas[3]. Primero, dado e, buscamos la forma más barata de implementarlo. Luego, elegimos e óptimo, dado $W^*(\Pi, e)$. Entonces, el primer problema es:

$$\min_{W(\Pi)} \left\{ \int W(\Pi)\, f(\Pi|e)\, d\Pi + \lambda \left[\bar{u} - \int v(W(\Pi))\, f(\Pi|e)\, d\Pi + e \right] \right\} \tag{2.14}$$

Equivalente a:

$$\max_{W(\Pi)} - \left\{ \int W(\Pi)\, f(\Pi|e)\, d\Pi + \lambda \left[\bar{u} - \int v(W(\Pi))\, f(\Pi|e)\, d\Pi + e \right] \right\} \tag{2.15}$$

Sea λ el multiplicador de la restricción. En el óptimo $\lambda > 0$, es decir, la restricción es activa, pues de otra forma, los accionistas podrían bajarle el salario al gerente y a
'un contratarlo con esfuerzo e.

La condición de primer orden de 2.14. es:

$$f(\Pi|e) - \lambda v'(W(\Pi))\, f(\Pi|e) = 0$$

por lo tanto,

---

[3] Método de Grossman y Hart (1983).

$$\lambda = \left[v' \left(W \left(\Pi\right)\right)\right]^{-1}$$

Se sigue que en el óptimo $W^* \left(\Pi, e\right) = W^* \left(e\right)$, es decir, en el óptimo el salario es independiente de la realización de Π. Entonces:

$$v \left(W^* \left(e\right)\right) - e = \bar{u}$$

define W^*. Lo que dice este resultado es lo siguiente: cuando no hay asimetrías de información, lo óptimo es que todo el riesgo sea asumido por los accionistas, porque a ellos el riesgo les es indiferente. (Notar que para que el gerente asuma riesgo hay que pagarle). Cuando el esfuerzo es observable, su nivel óptimo se obtiene resolviendo:

$$\max_{e \in \{e_L, e_H\}} \int \Pi f \left(\Pi | e\right) d\Pi - v \left(W^* \left(e\right)\right)$$

2.3.1.2 Esfuerzo no observable

Supongamos ahora que e no puede ser observado. En este caso, el contrato no puede condicionarse en e, porque el gerente siempre alegaría que se esforzó al máximo. Primero observemos que si el salario es independiente del nivel de utilidades, el gerente siempre se esforzará poco. De esto se sigue que, si los accionistas quieren que que el gerente se esfuerce, tendrán que pagarle un salario contingente. De aquí que cuando e no puede observarse y queremos que el gerente se esfuerce por encima del mínimo, deberá soportar riesgo, es decir, la distribución de riesgos no es eficiente (sin considerar las restricciones de información).

Consideremos el problema que enfrentan los accionistas si quieren que el gerente se esfuerce:

$$\begin{aligned}
&\min_{W(\Pi)} \textstyle\int W \left(\Pi\right) f \left(\Pi | e_H\right) d\Pi \\
&s.a. \\
&(i) \quad \textstyle\int v \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_H\right) d\Pi - e_H \geq \bar{u} \\
&(ii) \quad \textstyle\int v \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_H\right) d\Pi - e_H \geq \textstyle\int v \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_L\right) d\Pi - e_L
\end{aligned} \tag{2.16}$$

La restricción (i) se conoce como *restricción de participación* y (ii) como *restricción de incentivos.* Sea λ el multiplicador de Lagrange asociado a (i), y μ el multiplicador de asociado a (ii). La condición de primer orden es, entonces:

$$-f \left(\Pi | e_H\right) + \lambda v' \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_H\right) + \mu \left[v' \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_H\right) - v' \left(W \left(\Pi\right)\right) f \left(\Pi | e_L\right)\right] = 0$$

Reordenando:

$$\lambda + \mu \left[1 - \frac{f\left(\Pi | e_L\right)}{f\left(\Pi | e_H\right)} \right] = \left[v'\left(W\left(\Pi\right)\right)\right]^{-1}$$

Proposición 17 *En cualquier solución de la ecuación 2.16. se tiene que,* $\lambda, \quad \mu > 0$.

Demostración:

1. Supongamos que $\mu = 0$. Entonces, el salario es independiente de Π. Pero, en este caso (ii) no puede cumplirse (el gerente, óptimamente, no se esfuerza).
2. Sea $\lambda = 0$. En este caso, como $F\left(\Pi | e_H\right)$ DEPO $F\left(\Pi | e_L\right)$, se sigue que existe un conjunto $\widetilde{\Pi} \subseteq \left[\Pi^-, \Pi^+\right]$, tal que $\frac{f(\Pi | e_L)}{f(\Pi | e_H)} > 1, \ \forall \, \Pi \in \widetilde{\Pi}$.

   Pero, si $\lambda = 0$, entonces la condición de primer orden implica que $v'\left(W\left(\Pi\right)\right) \leq 0, \forall \, \Pi \in \widetilde{\Pi}$, porque $\mu > 0$, lo que es imposible. Luego, $\lambda > 0$.□

Definir $\widehat{W}$ de $\frac{1}{v'\left(\widehat{W}(\Pi)\right)} \equiv \lambda$. De acuerdo a la condición de primer orden y a la proposición anterior:

$$\begin{aligned} W\left(\Pi\right) > \widehat{W} \quad & \text{si} \quad \tfrac{f(\Pi | e_L)}{f(\Pi | e_H)} < 1 \\ W\left(\Pi\right) < \widehat{W} \quad & \text{si} \quad \tfrac{f(\Pi | e_L)}{f(\Pi | e_H)} > 1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Es decir, el salario es mayor que $\widehat{W}$ si un determinado nivel de utilidades es estadísticamente más probable si el esfuerzo es alto, y menor que $\widehat{W}$ de cualquier otra forma.

¿Qué está sucediendo aquí? A primera vista parecería que los accionistas infieren estadísticamente el nivel de esfuerzo a partir de las utilidades. Sin embargo, los accionistas diseñan el contrato de manera que el gerente se esfuerza, es decir, saben perfectamente cuál es el nivel de esfuerzo del gerente. La forma de W es determinada sólo por el efecto que ésta tiene sobre los incentivos del gerente. La siguiente proposición sugiere que no siempre el salario será creciente en Π.

Proposición 18 W *será creciente en* Π *si y sólo si:*

$$\frac{f\left(\Pi | e_L\right)}{f\left(\Pi | e_H\right)}$$

es decreciente en Π. *Es decir, si la razón de verosimilitud es monótonamente decreciente en* Π.

Esta proposición es importante porque revela exactamente en qué consiste la solución al problema agente-principal: La forma de $W\left(\Pi\right)$ depende del contenido informativo de Π, es decir, depende de cómo Π se relaciona estadísticamente con el esfuerzo.

Notar que si f satisface la propiedad, entonces $F\left(\Pi | e_H\right)$ *DEPO* $F\left(\Pi | e_L\right)$, pero lo contrario no es necesariamente cierto.

Notemos que cuando los accionistas quieren implementar esfuerzo alto, deberán pagarle al gerente por asumir riesgo. Como el gerente siempre puede alcanzar un nivel de utilidad $\bar{u}$, esto implica que los accionistas deben pagar más en valor esperado. Para demostrar esto, recordar que cuando el esfuerzo es observable:

$$\begin{array}{lcll} v\left(W^{*}\left(e_H\right)\right) & = & \bar{u}+e_H & \text{Restricción de participación} \\ E\left[v\left(W\left(\Pi\right)\right)|e_H\right] & < & v\left[E\left(W\left(\Pi\right)\right)|e_H\right] & \text{Desigualdad de Jensen } + \text{ v cóncava} \end{array}$$

Lo anterior sugiere que hay un costo de implementar esfuerzo alto.

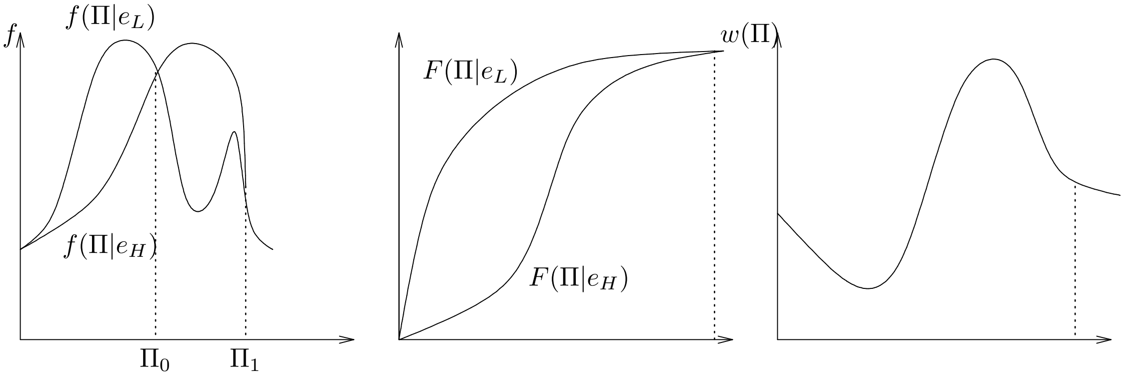


Figura 2.19: Relación entre la razón de verosimilitud y el salario

2.3.1.3 Gerente neutral al riesgo

Para apreciar mejor los resultados del modelo, es conveniente analizar un segundo caso extremo: cuando el gerente es neutral al riesgo. Supongamos entonces que $v\left(W\right)=W$.

Recordemos que cuando hay asimetrías de información, los accionistas resuelven:

$$\max_{e\in\{e_L,e_H\}}\int \Pi f\left(\Pi|e\right)d\Pi-e-\bar{u}$$

Proposición 19 *Si el esfuerzo no es observable, pero el gerente es neutral al riesgo, entonces las utilidades esperadas de los accionistas y el esfuerzo del gerente son los mismos que cuando e es observable.*

Demostración:

1. Mostraremos que hay un contrato que los accionistas pueden elegir, que les entrega la misma utilidad que cuando existe información simétrica. Este contrato debe ser óptimo (¿por qué?)
2. Consideraremos la función de compensación $W(\Pi) = \Pi - \alpha$; esta función indica que, por un pago fijo, el gerente se queda con todo el residuo. Esto es equivalente a que los accionistas le vendan la empresa al gerente por un pago fijo α.
3. Si el agente acepta el contrato, resuelve:

$$\begin{aligned} &\max_{e\in\{e_L,e_H\}} \int W(\Pi) f(\Pi|e)\, d\Pi - e = \\ &\max_{e\in\{e_L,e_H\}} \int \Pi f(\Pi|e)\, d\Pi - \alpha - e \end{aligned} \qquad (2.18)$$

4. El gerente aceptará el contrato sólo si:

$$\int \Pi f(\Pi|e^*)\, d\Pi - \alpha - e^* \geq \bar{u}$$

5. Sea α^* tal que la desigualdad débil anterior se cumple con igualdad, en ese caso:

$$\int \Pi f(\Pi|e^*)\, d\Pi - \alpha^* - e^* = \bar{u}$$

   y por lo tanto, la utilidad de los accionistas es:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \int \Pi f(\Pi|e^*)\, d\Pi - e^* - \bar{u} \\ &= \max_{e\in\{e_L,e_H\}} \int \Pi f(\Pi|e)\, d\Pi - e - \bar{u} \end{aligned} \qquad (2.19)$$

   Luego, cuando el gerente es neutral al riesgo, la utilidad de los accionistas es igual a cuando el esfuerzo es observable.□

En este caso, se puede alcanzar el óptimo porque se le hace asumir al gerente todas las consecuencias de sus acciones.

2.3.2 Información privada

Un segundo tipo de asimetrías de información post-contractual ocurre cuando el agente tiene acceso a información que el principal no conoce. Por ejemplo, esto ocurre cuando un banco le presta dinero a una persona; el deudor conoce mejor los resultados de la empresa que el banco.

Existen dos tipos de modelos en este caso. En el primer tipo, el principal puede adquirir información o, más generalmente, observar una señal si paga por ello. Este tipo de modelos, a los que se le conoce como *modelos de verificación costosa de estado*, se han usado para mostrar que bajo ciertas condiciones los contratos con deuda son óptimos.

Un segundo tipo de modelos estudia el caso en que el contrato se diseña para que la parte informada tenga incentivos a revelar su información privada. Este es el tipo de modelos que estudiaremos aquí.

La idea central es diseñar un mecanismo tal que el agente le revele la información privada al principal; la remuneración del agente dependerá de lo que el agente revele.

Consideremos el siguiente ejemplo. El dueño de un cine lo entrega en concesión. Los ingresos que genera el cine son función del número de entradas vendidas, $e \in [0, \infty)$, según la función $\Pi(e)$, con $\Pi' > 0, \Pi'' < 0 \; \forall \, e$. El número de entradas vendidas es verificable.

El concesionario tiene una función de utilidad esperada $u(W, e, \theta)$, donde W es el pago que recibe el concesionario del cine, e es el número de personas que asisten , y θ el estado de la demanda. Suponemos que:

$$u(W, e, \theta) \quad = \quad v(W - g(e, \theta))$$

donde

$$\begin{array}{l} v'' < 0 \\ g(0, \theta) = 0 \quad \forall \, \theta \end{array}$$

y además debe cumplirse lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} i. & g_e(e, \theta) & \begin{cases} > 0 & si \;\; e > 0 \\ = 0 & si \;\; e = 0 \end{cases} \\ & & \\ ii. & g_{ee}(e, \theta) & > \; 0 \quad \forall \, e \\ & & \\ iii. & g_\theta(e, \theta) & < \; 0 \quad \forall \, e \\ & & \\ iv. & g_{e\theta}(e, \theta) & \begin{cases} < 0 & si \;\; e > 0 \\ = 0 & si \;\; e = 0 \end{cases} \end{array}$$

(*i.*) y (*ii.*) significan que el costo de vender entradas es creciente a tasa creciente; (*iii.*) significa que el costo cae si la demanda es alta (θ grande) y (*iv.*) dice que el costo marginal de vender una entrada es menor mientras más alta sea la demanda.

Tal como lo hicimos antes, supondremos que la utilidad de reserva del agente es $\bar{u}$. Por último, para simplificar supondremos que $\theta \in \left\{\theta^A, \theta^B\right\}$, con $\theta^A > \theta^B$, y que con probabilidad $q \in (0, 1)$, $\theta = \theta^A$.

Notar que en este caso, un contrato tiene dos objetivos:

1. Distribuir riesgos óptimamente.

2. Maximizar el excedente total,

   $$\Pi(e) - g(e, \theta)$$

   En general, es más rentable vender asientos cuando la demanda es alta. Cuando la demanda es baja convendrá vender menos porque el costo de vender es mayor. El problema es que la información sobre el estado de la demanda la conoce sólo el concesionario. Si al concesionario siempre le pagan lo mismo, independientemente de lo que declare, siempre declarará que la demanda es baja, para así esforzarse menos.

2.3.2.1 Caso 1: θ observable

Para tener una vara de comparación comenzaremos suponiendo que el estado de la demanda es observable. En este caso, el dueño resuelve el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\substack{W_A, e_A \geq 0 \\ W_B, e_B \geq 0}} & q\left[\Pi(e_A) - W_A\right] + (1-q)\left[\Pi(e_B) - W_B\right] \\ \text{s.a.} & \\ & qv\left(W_A - g\left(e_A, \theta^A\right)\right) + (1-q)\, v\left(W_B - g\left(e_B, \theta^B\right)\right) \quad \geq \quad \bar{u} \end{array} \tag{2.20}$$

Como hay información simétrica, el contrato especifica $(W_A^*, e_A^*, W_B^*, e_B^*)$ que resuelve 2.20.

Sea λ el multiplicador lagrangeano asociado a la restricción. Es fácil ver que en el óptimo, la restricción debe ser activa.

Las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker son:

i. $-q + \lambda q v'\left(W_A - g\left(e_A, \theta^A\right)\right) = 0$

ii. $-(1-q) + \lambda(1-q)\, v'\left(W_B - g\left(e_B, \theta^B\right)\right) = 0$

iii. $q\Pi'(e_A) - \lambda q v'\left(W_A - g\left(e_A, \theta^A\right)\right) g_e\left(e_A, \theta^A\right) \begin{cases} \leq & 0 \\ = & 0 \text{ si } e_A > 0 \end{cases}$

iv. $(1-q)\,\Pi'(e_B) - \lambda(1-q)\, v'\left(W_B - g\left(e_B, \theta^B\right)\right) g_e\left(e_B, \theta^B\right) \begin{cases} \leq & 0 \\ = & 0 \text{ si } e_B > 0 \end{cases}$

De (*i.*) y (*ii.*)

$$\begin{aligned} v'\left(W_A - g\left(e_A, \theta^A\right)\right) &= v'\left(W_B - g\left(e_B, \theta^B\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad W_A - g\left(e_A, \theta^A\right) &= W_B - g\left(e_B, \theta^B\right) \end{aligned}$$

Se sigue que, en equilibrio, el concesionario recibe una compensación neta fija.

Supusimos que $g(0,\theta) = 0$ y $\Pi'(0) > 0$, luego, $e > 0$ en el óptimo. Entonces, de (*iii.*) y (*iv.*)

$$\Pi'(e) = g_e(e,\theta)$$

Es decir, en el equilibrio, el ingreso marginal de vender una entrada es igual al costo marginal de generarla. Nótese que esta condición implica que se maximiza el excedente total en cada estado de la naturaleza. Notar que $e_A > e_B$, porque $g_{e\theta} < 0$.

2.3.2.2 Caso 2. θ no observable

Supondremos ahora que el dueño del cine no puede observar el estado de la demanda.

Si θ no es observable, entonces el dueño del cine debe dejar que el concesionario tome la decisión. El contrato se puede diseñar tal que:

1. El concesionario revele al dueño el estado de la demanda, y
2. contingente a lo que el concesionario revele, el dueño le ordena un determinado nivel de esfuerzo y asociado a él, un pago.

Proposición 20 *Sea* $(W^*(\theta), e^*(\theta))$ *el contrato con información simétrica. Si el dueño del cine implementa ese contrato, el concesionario siempre declara* $\widehat{\theta} = \theta^B$

Demostración: Por demostrar que:

$$\begin{aligned} v\left(W_B^* - g\left(e_B^*, \theta^B\right)\right) &\geq v\left(W_A^* - g\left(e_A^*, \theta^B\right)\right) \quad [1] \\ v\left(W_B^* - g\left(e_B^*, \theta^A\right)\right) &\geq v\left(W_A^* - g\left(e_A^*, \theta^A\right)\right) \quad [2] \end{aligned}$$

La demostración de la inecuación [1] es directa al recordar que $g_\theta < 0$.

Para el caso de [2] se aplica nuevamente que $g_\theta < 0$, y se tiene que:

$$\begin{aligned} v\left(W_B^* - g\left(e_B^*, \theta^A\right)\right) &\geq v\left(W_B^* - g\left(e_B^*, \theta^B\right)\right) \\ &= v\left(W_A^* - g\left(e_A^*, \theta^A\right)\right) \square \end{aligned}$$

En principio, la cantidad de contratos que tendríamos que investigar para saber cuál es el contrato óptimo es bastante grande. El *principio de la revelación* nos asegura que podemos restringirnos a *mecanismos directos* en los que el concesionario tenga *incentivos para decir la verdad.*

Recordemos que un mecanismo directo es aquel en que:

1. Se le solicita al concesionario que haga un anuncio $\widehat{\theta} \in \left\{\theta^A, \theta^B\right\}$.

2. El contrato especifica un resultado $\left[W\left(\widehat{\theta}\right), e\left(\widehat{\theta}\right)\right]$ para cada posible anuncio.

Con esto, la proposición 20. pasa a ser:

$$\max_{\substack{W_A, e_A \geq 0 \\ W_B, e_B \geq 0}} q\left[\Pi\left(e_A\right) - W_A\right] + (1-q)\left[\Pi\left(e_B\right) - W_B\right]$$

s.a.

$$i. \quad qv\left(W_A - g\left(e_A, \theta^A\right)\right) + (1-q)\, v\left(W_B - g\left(e_B, \theta^B\right)\right) \geq \bar{u} \quad \text{RP}$$

$$ii. \quad W_B - g\left(e_B, \theta^B\right) \geq W_A - g\left(e_A, \theta^B\right) \quad \text{RI}$$

$$iii. \quad W_A - g\left(e_A, \theta^A\right) \geq W_B - g\left(e_B, \theta^A\right) \quad \text{RI}$$

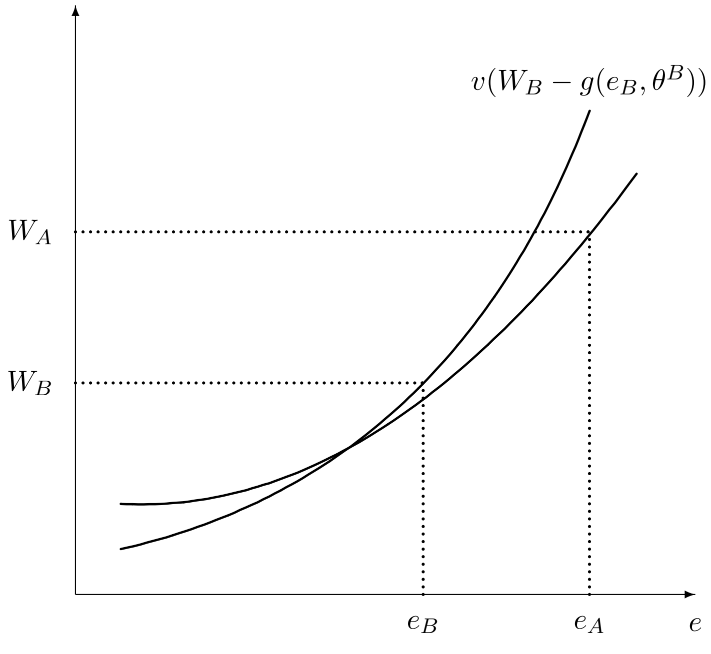


Figura 2.20: Solución del problema del principal

Lema: *Si (iii.) es activa, y $e_B < e_A$, entonces (ii.) se cumple con holgura.*

Demostración: Si (*iii.*) es activa, $W_A - W_B = g\left(e_A, \theta^A\right) - g\left(e_B, \theta^A\right)$. Por demostrar que:

$$g\left(e_A, \theta^B\right) - g\left(e_B, \theta^B\right) > W_A - W_B,$$

o bien,

$$g\left(e_A,\theta^B\right) - g\left(e_B,\theta^B\right) > g\left(e_A,\theta^A\right) - g\left(e_B,\theta^A\right)$$

Para ello, definir $\triangle g\left(\theta,e_A,e_B\right) \equiv g\left(e_A,\theta\right) - g\left(e_B,\theta\right)$, luego si $e_A > e_B$ entonces, se tiene que $\triangle g\left(\theta,e_A,e_B\right) > 0$. Por propiedad de la intersección única, $\triangle g\left(\theta,e_A,e_B\right)$ es decreciente en θ. Luego, $\triangle g\left(\theta^B,e_A,e_B\right) > \triangle g\left(\theta^A,e_A,e_B\right)$. $\square$

En lo que sigue caracterizaremos la solución. Sean μ_A y μ_B los multiplicadores respectivos. La proposición anterior implica que podemos ignorar (*ii.*) si encontramos que en el óptimo del problema sin (*ii.*) $e_B^{**} < e_A^{**}$. Las condiciones de primer orden son:

a. $\frac{\partial \pounds}{\partial W_A}: \quad -q + \lambda q v'(W_A - g(e_A,\theta^A)) + \mu_A = 0$

b. $\frac{\partial \pounds}{\partial W_B}: \quad -\left(1-q\right) + \lambda\left(1-q\right)v'\left(W_B - g\left(e_B,\theta^B\right)\right) - \mu_A = 0$

c. $\frac{\partial \pounds}{\partial e_A}: \quad q\Pi'\left(e_A\right) - \lambda q v'\left(W_A - g\left(e_A,\theta^A\right)\right)g_e\left(e_A,\theta^A\right) - \mu_A g_e\left(e_A,\theta^A\right) = 0$

d. $\frac{\partial \pounds}{\partial e_B}: \quad \left(1-q\right)\Pi'\left(e_B\right) - \lambda\left(1-q\right)v'\left(W_B - g\left(e_B,\theta^B\right)\right)g_e\left(e_B,\theta^B\right) + \mu_A g_e\left(e_B,\theta^A\right) = 0$

Proposición 21 *En el óptimo (i.) es activa.*

Demostración:

Proposición 22 *De (b.) vemos que:*

$$\lambda\left(1-q\right)v' = \left(1-q\right) + \mu_A > 0$$

Luego, $\lambda > 0$.$\square$

Proposición 23 *En el óptimo (iii.) es activa.*

Demostración: Suponer que esto no se cumple. Entonces $\mu_A = 0$, y $W_A + g\left(e_A,\theta^A\right) = W_B + g\left(e_B,\theta^B\right)$. Pero, ya vimos que esto es imposible. Luego $\mu_A > 0$.$\square$

Proposición 24 *Sea* (e_A^*, e_B^*) *los niveles de esfuerzo óptimo cuando la información es simétrica, y* (e_A^{**}, e_B^{**}) *cuando* θ *no es observable. Entonces* $e_A^{**} = e_A^*$, *y* $e_B^{**} < e_B^*$*.*

Demostración:

Proposición 25 *Usando (a.), (c.) se puede escribir como:*

$$q\left[\Pi'\left(e_A\right) - g_e\left(e_A,\theta^A\right)\right] = 0$$

Proposición 26 *De donde se sigue que* $e_A^{**} = e_A^*$. *De manera similar, usando (b.), (d.) se puede reescribir como:*

$$(1-q)\left[\Pi'\left(e_B\right) - g\left(e_B, \theta^B\right)\right] = \mu_A\left[g_e\left(e_B, \theta^B\right) - g_e\left(e_B, \theta^A\right)\right]$$

Como $g_e\left(e_B, \theta^B\right) - g_e\left(e_B, \theta^A\right) > 0$ (por la propiedad de la intersección única). $\Pi'\left(e_B\right) - g\left(e_B, \theta^B\right) > 0$; de donde se sigue que $e_B^{**} < e_{B.}^*$

Proposición 27 *En el óptimo, el concesionario asume riesgo (no hay seguro completo).*

Demostración:

De (*iii.*),

$$W_A^{**} - g\left(e_A^*, \theta^A\right) = W_B^{**} - g\left(e_B^{**}, \theta^A\right)$$

Como $g_\theta < 0$, entonces

$$W_A^{**} - g\left(e_A^*, \theta^A\right) = W_B^{**} - g\left(e_B^{**}, \theta^A\right) \geq W_B^{**} - g\left(e_B^{**}, \theta^B\right) \Box$$

¿Cuál es la intuición detrás de estos resultados? El problema del dueño del cine es que el concesionario querrá engañarlo cuando la demanda es alta. Lo que hace, entonces, el dueño del cine es quitarle atractivos al contrato para cuando el concesionario declare que la demanda es baja. Para lograr esto, el dueño debe distorsionar la decisión del concesionario, haciendo $\Pi'\left(e_B^{**}\right) > g\left(e_B^{**}, \theta^B\right)$.

En contraste, el concesionario nunca querrá engañar al dueño si la demanda es baja. Por esto, no es necesario que el dueño haga menos atractivo el contrato para cuando la demanda sea alta. Al mismo tiempo, esto conlleva abandonar el seguro completo al concesionario.

2.3.3 Un agente con múltiples principales

En una serie de casos ocurre que un agente debe rendirle cuentas a varios principales. Esto ocurre, por ejemplo, en las empresas con propiedad dispersa, en las agencias de gobierno, o incluso, en la universidad. En las siguientes dos clases estudiaremos un modelo de múltiples principales que nos permitirá examinar el problema formalmente.

¿Qué agrega al problema el que sean múltiples principales?

1. Conflicto de interés entre principales ⇒ maximizar el excedente conjunto y luego realizar transferencias. Solución cooperativa.
2. Pero si los principales no actúan cooperativamente:
    (a) Un principal puede premiar al agente por no esforzarse en dimensiones que no le interesan.
    (b) Más útil, es darle seguro en las dimensiones que no le importan y así mejora el precio por riesgo. Aquí, el principal es *insight* de esta sección: los incentivos terminan siendo menos potentes y decrecen linealmente con el número de principales.

2.3.3.1 El modelo

1.
$$\begin{array}{ll} x = t + \varepsilon & m \times 1 \\ \varepsilon \rightsquigarrow N(0,\Omega) & \Omega \quad \text{diagonal} \end{array}$$

   donde t es el esfuerzo y x el resultado.

2. Utilidad de los principales:

$$b^{j'}x$$

   Donde $b^{j'}$ es un vector de dimensiones $m \times 1$ y $bx \equiv \sum_{j=1}^{n} b^{j'}x$ es el beneficio agregado, con $b >> 0$

   El riesgo les es indiferente a los principales. Notar que:

   - Las diferencias entre los b^j representan los conflictos de interés *entre principales*.
   - $b >> 0$ implica que el esfuerzo en todas las dimensiones es un *bien* para el conjunto de principales.

3. La función de utilidad del agente es:

$$u(w) = -e^{-rw}$$

$$\text{con} \quad w = m - \frac{1}{2}t'Ct$$

   Donde m es un pago monetario y $t'Ct$ refleja el costo del esfuerzo. La matriz C se supone definida-positiva y con términos cruzados positivos. Cuando se aumenta el nivel de esfuerzo en una dimensión t_i, el costo marginal del esfuerzo aumenta en cada una de las restantes dimensiones ($\frac{\partial c_j}{\partial t_i} > 0$).

Ejemplo 30: Dos principales
Suponer $m = 2$ y sea

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}, \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} t'Ct &= c_{11}t_1^2 + 2c_{12}t_1t_2 + c_{22}t_2^2 \\ \frac{\partial t'Ct}{\partial t_1} &= 2c_{11}t_1 + 2c_{12}t_2 \\ \frac{\frac{\partial t'Ct}{\partial t_1}}{\partial t_2} &= 2c_{12} > 0 \quad \text{si} \quad c_{12} > 0 \end{aligned}$$

Notar que, aún si a un principal no le importa el esfuerzo del agente en alguna de las dimensiones directamente, le terminará importando a través de C: si se esfuerza más en la dimensión que no le interesa, le aumenta el costo en las dimensiones que le interesa.

En lo que sigue analizaremos tres casos: información simétrica, principales coludidos y principales que juegan entre sí (respectivamente, primer mejor, segundo mejor y tercer mejor).

2.3.3.2 Esfuerzo observable

Si el esfuerzo es observable y los principales actúan en conjunto no tiene sentido que el agente asuma riesgo. Luego, el contrato consiste en un pago monetario no contingente z a cambio de un vector de esfuerzo t.

El problema se reduce a maximizar $\mathrm{E}\left[b'\left(t+\varepsilon\right)\right]-z$ sujeto a que el agente obtenga un nivel de utilidad dado, $-\exp\left(-r\left[z-\frac{1}{2}t'Ct\right]\right)=\bar{u}$.

- Notar que z simplemente es una *transferencia de ingreso* del principal al agente y no tiene efecto sobre los incentivos.
- Luego, al principal le conviene maximizar el excedente esperado total:

  $$b't-z+z-\frac{1}{2}t'Ct$$

  Nótese que el principal internaliza exactamente el costo social del esfuerzo. La condición de primer orden es:

  $$b=Ct$$

  o

  $$t=\Gamma b$$

  con $\Gamma\equiv C^{-1}$.

2.3.3.3 Esfuerzo no observable con principales coludidos

Cuando el esfuerzo no es observable y los principales se coluden, eligen un esquema de pago:

$$\alpha'x+\beta \tag{2.21}$$

Una vez que el agente ve 2.21. elige t para maximizar su utilidad esperada. Nuevamente β es una simple transferencia desde los principales al agente.

Comenzamos deduciendo la utilidad esperada del agente. Ésta es:

$$-\mathrm{E}\left[\exp\left\{-r\left(\alpha' x+\beta-\frac{1}{2}t'Ct\right)\right\}\right] \; = \; -\,\mathrm{E}\left[\exp\left\{-r\left(\alpha'\left(t+\varepsilon\right)+\beta-\frac{1}{2}t'Ct\right)\right\}\right] \tag{2.22}$$

Dado que la variable x se distribuye normal, el equivalente cierto de 2.22. es:

$$\alpha' t-\frac{1}{2}r\alpha'\Omega\alpha+\beta-\frac{1}{2}t'Ct \tag{2.23}$$

Cuando la lotería se distribuye normal, es equivalente a maximizar 2.22. o 2.23. Si el agente elige t para maximizar 2.23, entonces la condición de primer orden es:

$$\alpha-Ct=0$$

o

$$t=\Gamma\alpha \tag{2.24}$$

Notar que $\alpha=b$ implementa el esfuerzo de primer mejor. Pero no necesariamente eso es óptimo, porque al agente se le debe pagar $\frac{1}{2}r^2b'\Omega b$ por ello.

De 2.24 sabemos que el equivalente cierto del agente será:

$$\alpha'\Gamma\alpha-\frac{1}{2}r\alpha'\Omega\alpha+\beta-\frac{1}{2}\alpha'\Gamma\alpha \tag{2.25}$$

El excedente esperado conjunto de los principales será:

$$\mathrm{E}\left[(b-\alpha)-\beta\right]=(b-\alpha)'\,\Gamma\alpha-\beta \tag{2.26}$$

Nuevamente, a los principales les conviene maximizar el excedente total, que es igual a:

$$\begin{aligned}&(b-\alpha)'\,\Gamma\alpha-\beta+\frac{1}{2}\alpha'\Gamma\alpha-\frac{1}{2}r\alpha'\Omega\alpha+\beta\\ = \; &\underbrace{b'\Gamma\alpha}_{Beneficio}-\underbrace{\frac{1}{2}\alpha'\Gamma\alpha}_{Costo \quad esfuerzo}-\underbrace{\frac{1}{2}r\alpha'\Omega\alpha}_{Costo \quad riesgo}\end{aligned}$$

La condición de primer orden de 2.27 es:

$$\Gamma b-\Gamma\alpha-r\Omega\alpha=0$$

Nótese que cuando $r = 0$ ó $\Omega = 0$, $\alpha = b$ (*first best*).

La ecuación 2.27. puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} C\Gamma b &= C\Gamma\alpha + rC\Omega\alpha \\ b &= \left(I + rC\Omega\right)\alpha \end{aligned}$$

O bien,

$$\alpha = \left(I + rC\Omega\right)^{-1} b$$

Ahora bien, si $t > 0$, entonces $\alpha > 0$ (si $t_i < 0$ es económicamente irrelevante, esto se justifica). Luego,

$$(b - \alpha) = rC\Omega\alpha > 0$$

ya que C es supermodular y Ω una matriz de varianzas-covarianzas diagonal. Luego, los incentivos son *menos potentes* cuando $r > 0$.

2.3.3.4 Los principales actúan separadamente

Si los principales actúan separadamente, entonces el concepto de solución adecuado es equilibrio de Nash. Cada principal j elige simultáneamente una función de pago:

$$\alpha^{j'}x + \beta^j$$

Ahora bien, la función de pago agregada del agente es $\alpha x + \beta$ y su esfuerzo óptimo $t = \Gamma\alpha$. Pero buscamos un equilibrio de Nash del juego entre principales. Para un contrato, recordemos que en equilibrio de Nash cada principal elige $\alpha^{j'}$ y β^j para maximizar su pago dado los $\alpha^{i'}$ y $\beta^i \quad \forall\, i \neq j$ y la función de respuesta óptima del agente, $\Gamma\alpha$. De esto podemos obtener una condición de primer orden para cada principal y, luego, agregarla. Lo hacemos a continuación: Sea

$$\begin{aligned} A^j &\equiv \sum_{k \neq j} \alpha^k \\ B^j &\equiv \sum_{k \neq j} \beta^k \end{aligned}$$

El equivalente cierto del agente se puede reescribir como:

$$\frac{1}{2}\left(A^j + \alpha^j\right)'\left(\Gamma - r\Omega\right)\left(A^j + \alpha^j\right) + \left(B^j + \beta^j\right)$$

Luego, el excedente que j le agrega al agente es:

$$A^{j'}\left(\Gamma - r\Omega\right)\alpha^{j} + \frac{1}{2}\alpha^{j'}\left(\Gamma - r\Omega\right)\alpha^{j} + \beta^{j} \tag{2.27}$$

Notar que $\Gamma\alpha^{j}$ es el esfuerzo incremental que el agente hace y que el resto de los principales $j \neq i$ remunera según $A^{j'}$.

$r\Omega\alpha^{j}$ es la varianza incremental que agrega α^{j} al sumarse a los términos de A^{j}. Notar que si algún componente de a^{j} es negativo, le *quita* varianza y hace más fácil cumplir con la restricción de participación.

Por otro lado, el excedente del principal j al entrar en la relación con el agente es:

$$\left(b^{j'} - \alpha^{j'}\right)t - \beta^{j} = \left(b^{j} - \alpha^{j}\right)'\Gamma\left(A^{j} + \alpha^{j}\right) - \beta^{j}$$

Pero sin participar, el principal ya obtendría $b^{j'}\Gamma A^{j}$. Luego:

$$b^{j'}\Gamma\alpha^{j} - \alpha^{j'}\Gamma\left(A^{j} + \alpha^{j}\right) - \beta^{j} \tag{2.28}$$

es el beneficio de entrar en la relación. Entonces, el excedente conjunto es la suma de 2.27. y 2.28:

$$\begin{array}{rl} & b^{j'}\Gamma\alpha^{j} - \alpha^{j'}\Gamma\left(A^{j} + \alpha^{j}\right) - \beta^{j} + A^{j'}\left(\Gamma - r\Omega\right)\alpha^{j} + \frac{1}{2}\alpha^{j'}\left(\Gamma - r\Omega\right)\alpha^{j} + \beta^{j} \\ = & b^{j'}\Gamma\alpha^{j} - \frac{1}{2}\alpha^{j'}\Gamma\alpha^{j} + rA^{j'}\Omega\alpha^{j} - \frac{1}{2}r\alpha^{j'}\Omega\alpha^{j} \\ = & b^{j'}\Gamma\alpha^{j} - rA^{j'}\Omega\alpha^{j} - \frac{1}{2}\alpha^{j'}\left(\Gamma + r\Omega\right)\alpha^{j} \end{array} \tag{2.29}$$

Si se elige α^{j} para maximizar 2.29. la condición de primer orden queda como:

$$\begin{array}{rlll} & \Gamma b^{j} - r\Omega A^{j} - \left(\Gamma + r\Omega\right)\alpha^{j} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & b^{j} - rC\Omega A^{j} - \left(I + rC\Omega\right)\alpha^{j} & = & 0 \end{array} \tag{2.30}$$

Sumando sobre j, notando que $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k}^{j} = (n-1)\alpha$, se obtiene que:

$$\begin{array}{rcl} b & = & \left(n-1\right)rC\Omega\alpha + \left(I + rC\Omega\right)0 \\ b & = & \left(I + nrC\Omega\right)\alpha \end{array} \tag{2.31}$$

Aquí vemos el principal resultado de esta sección, la potencia de los incentivos decrece linealmente con el número de principales. ¿De dónde viene ese resultado? Recordemos que:

$$\begin{array}{rcl} b^{j} & = & \left(I + rC\Omega\right)\alpha^{j} + rC\Omega A^{j} \\ & = & \alpha^{j} + rC\Omega\alpha \end{array} \tag{2.32}$$

Usando la ecuación 2.31. se tiene que lo anterior implica:

$$\alpha^j = b^j - rC\Omega\left(I + nrC\Omega\right)^{-1} b \tag{2.33}$$

Suponga ahora que $n = m$ y que todos los componentes de b^j son iguales a cero salvo el j-ésimo. La ecuación 2.33 muestra que, en general, los componentes de α^j serán distintos de cero. El punto es que al principal j le conviene que el esfuerzo sea menor en las dimensiones que no le interesan. En efecto, ocurre por dos lados que se pueden apreciar en la ecuación 2.29, el excedente de la relación bilateral entre el agente y el principal j. Ese excedente es:

$$b^{j\prime}\Gamma\alpha^j - rA^{j\prime}\Omega\alpha^j - \frac{1}{2}\alpha^{j\prime}\left(\Gamma + r\Omega\right)\alpha^j \tag{2.34}$$

El primer término es igual a $b_j^j \sum \Gamma_{ji}\alpha_i^j$. Los Γ_{ji} tienden a ser negativos, luego conviene que $\alpha_i^j \quad i \neq j$ sean negativos. El principal castiga buenos resultados en las dimensiones que no le interesan.

El segundo efecto se aprecia en el segundo término. Reescribiendo queda:

$$-rA^{j\prime}\begin{bmatrix} \alpha_1^j\Omega_{11} \\ \alpha_2^j\Omega_{22} \\ \vdots \\ \alpha_n^j\Omega_{nn} \end{bmatrix} = -r\sum_i A_i^j\Omega_{ii}\alpha_i^j$$

2.3.4 Ejercicios

Ejercicio 42:
Una compañía estudia la posibilidad de vender seguros contra incendio en ciudades en que hay casas "buenas" y casas "malas". Lo que distingue a las casas buenas de las malas es que es menos probable que se quemen. La probabilidad de incendio también depende de la diligencia del dueño (por ejemplo, una casa con detectores de humo se quema con menor probabilidad). Pero ser diligente cuesta plata y esfuerzo. La compañía no observa la diligencia del dueño y no sabe si una casa dada es buena o mala. Obviamente, el dueño de una casa sabe cuan diligente ha sido.

1. Suponga que la compañía estudia si introduce el seguro en una ciudad en que nunca se han asegurado casas. Juanito, jefe del departamento de estudios de la compañía ha determinado que, todos los años se quema una fracción p de las casas. Bernardo, gerente general de la empresa decide vender primas que aseguran completamente la casa cobrando la prima justa dado p (vale decir, los asegurados no pueden asegurar parcialmente su casa). Si en esta ciudad cada persona sabe si su casa es buena o mala ¿quién comprará seguros? ¿Es posible que una persona que tenga una casa buena compre un seguro? ¿Cómo le irá a la compañía?

2. Suponga que en otra ciudad en que los dueños de casa ignoran si su casa es buena o mala, muchas compañías ya venden seguros hace mucho tiempo (por ende, el mercado es competitivo). Se sabe que una fracción q de las casas se queman. Siguiendo la misma política, que en la ciudad anterior Bernardo decide cobrar la prima justa dado q. En esas circunstancias ¿cómo le irá a la compañía? Explique.

3. Si en la segunda ciudad se prohibieran los seguros ¿se quemarían más o menos casas?

Ejercicio 43:
(En esta pregunta lea cuidadosamente las dos notas al pie de la página). En el capítulo 5 de su Democracia en América Tocqueville describe el sistema de gobierno de los townships (municipalidades) de Nueva Inglaterra, y se refiere al problema de cómo hacer que las autoridades municipales cumplan con su deber.

"Pero las dificultades comienzan cuando ser trata de [...] lograr que las autoridades municipales cumplan con su deber. Toda acción reprobable de un funcionario público cae dentro de una de tres categorías:

ejecutar la ley sin energía o diligencia; no hacer lo que la ley manda; hacer lo que la ley prohíbe.

Sólo las dos últimas faltas pueden ser examinadas por un tribunal; un hecho (fácilmente) demostrable es el fundamento indispensable de toda acción legal. Así, si los selectmen[4] omiten (cumplir con) las formalidades legales usuales en una elección municipal, pueden ser multados. Pero cuando una

---

[4] Los selectmen son ciudadanos elegidos por las comunidades de Nueva Inglaterra en votación popular para que administren los asuntos locales. El nombramiento es por un año.

autoridad municipal no cumple con su obligación diligentemente, o bien cuando obedece la letra de la ley sin diligencia o energía, queda fuera del alcance de los tribunales. La corte de sesiones[5], aun cuando está investida con poderes administrativos, no puede hacer que cumpla su deber satisfactoriamente. Por eso, el temor a perder el puesto es la única cortapisa de estas cuasi-violaciones, y las autoridades municipales no son elegidas por la corte de sesiones; la que no puede despedir a funcionarios que no nombra. Más aún, será necesario supervisar permanentemente para poder condenar a la autoridad por negligencia o falta de entrega en el cumplimiento de su deber. Ahora bien, la corte sesiona sólo dos veces al año, y trata sólo aquellos casos que son denunciados ante ella. La única garantía de aquella obediencia competente y activa (de las autoridades municipales) radica en (la posibilidad de) remoción discrecional del cargo. En Francia esta potestad es ejercida por los jefes de la Administración Pública; en América es ejercida a través de elecciones."

1. ¿En la situación descrita por Tocqueville quién es el agente? ¿quienes son los principales? De qué se trata el "contrato"? Explique.
2. ¿Es razonable lo que afirma Tocqueville acerca el tipo de faltas que puede sancionar un tribunal? Justifique.
3. ¿Qué rol cumplen las elecciones en este contrato? Si las elecciones hubiesen sido cada diez años en vez de anuales ¿hubiese sido distinto el comportamiento de los selectmen?
4. ¿Qué tan efectivas habrían sido las elecciones anuales para lograr que las autoridades municipales cumplieran con el espíritu de la ley? ¿Por qué? ¿Habría sido distinto el comportamiento de las autoridades municipalidades en Francia? Justifique.
5. En vista de la distribución de la información que presumiblemente cada una de las partes tenía, evalúe el "contrato" indicando si tiene fallas evidentes.

Ejercicio 44: Competencia por comparación y la teoría del agente y el principal

En esta pregunta utilizaremos el modelo de agente y principal para estudiar la "competencia por comparación": cuando se regulan las tarifas de una empresa dada se puede utilizar información de otras empresas similares para estimar los costos. Para contestar puede ser útil consultar el capítulo 7 del libro de Milgrom y Roberts, *Economía, Organización y Gestión de Empresas.*

Suponga que un regulador debe fijar las tarifas de la empresa Alectra, el monopolio encargado de distribuir electricidad en la zona A. El costo medio de servir a un cliente en la zona A es

$$c_A = \bar{c} - e_A + x,$$

donde $\bar{c}$ es una constante, $e_A \geq 0$ es la intensidad del esfuerzo que pone Alectra en reducir costos y x es un factor aleatorio que afecta los costos de distribución pero que está fuera del control de la empresa, con $E[x] = 0$ y $Var[x] = \sigma_x$. La función de utilidad esperada de Alectra es

---

[5] La corte de sesiones es un tribunal que tiene jurisdicción sobre un grupo determinado de municipalidades que componen una unidad administrativa superior, el county. En la poca de Tocqueville integraban la corte tres Jueces de Paz, los que eran nombrados por el gobernador del estado.

$$E[p_A - c_A] - \mathcal{C}(e_A) - \frac{r}{2} Var[p_A - c_A],$$

donde p_A es el precio fijado por el regulador; $\mathcal{C}$ es la función estrictamente creciente y convexa de costo del esfuerzo con $\mathcal{C}(0) = 0$; y $r > 0$ es el coeficiente absoluto de aversión al riesgo.

Por su parte, el objetivo del regulador, que es neutral al riesgo, es que las tarifas sean lo más bajas posibles, vale decir, quiere minimizar $E[p_A]$. Sin embargo, el regulador debe respetar la restricción de participación de Alectra—le tiene que fijar un precio tal que su utilidad esperada sea positiva—.

El regulador puede observar el costo medio c_A de Alectra, pero no observa el esfuerzo e_A. Además, al momento de fijar las tarifas de Alectra el regulador conoce el costo medio c_B de la empresa distribuidora de la zona B, Belectra. Si bien no observa cada uno de los componentes de este costo medio, el regulador sabe que

$$c_B = \bar{c} - e_B + x.$$

(Nótese que el factor aleatorio x que afecta el costo de Belectra es el mismo que el de Alectra.) De esta forma, el regulador le fija a Alectra su precio de acuerdo a

$$p_A = \alpha + (1 + \beta)c_A + \delta c_B, \tag{2.35}$$

con $\beta \geq -1$.

1. Para un nivel de esfuerzo dado obtenga el equivalente cierto de Alectra si el regulador le fija el precio de acuerdo la fórmula (2.35); el equivalente cierto del regulador y el equivalente total cierto.
2. Escriba la restricción de participación del regulador. Explique qué significa.
3. **Sólo para responder la 3** Suponga que el regulador *puede* observar el esfuerzo de Alectra. Encuentre el esfuerzo óptimo que elige contratar el regulador y la fórmula tarifaria que elige.
4. Encuentre el contrato óptimo que optimiza el pago del regulador.
5. Finalmente, encuentre la intensidad óptima de incentivos y demuestre que la "competencia por comparación" le permite al regulador implementar óptimamente e_A^* a pesar de que no puede observar e_A. Explique brevemente la intuición de por qué esto es así.

Ejercicio 45: Regulando a una empresa sin conocer sus costos

Considere el problema de un regulador que debe contratar a una empresa privada monopólica para que le produzca un bien. El costo por unidad es constante pero puede ser alto (c^A) o bajo (c^B). La empresa conoce su costo, pero el regulador no puede observarlo. Desde su punto de vista, la empresa tiene costos altos con probabilidad $\pi \in (0, 1)$. Sin embargo, el regulador puede elegir la cantidad que quiere comprar (q) y el monto total que pagará (R) y hacerlo depender de cualquier declaración de la empresa que elija. Si la empresa produce q unidades y se le paga R, la utilidad del regulador es

$$B(q) - R,$$

con $B' > 0$, $B'' < 0$. Obviamente, la participación de la empresa es voluntaria, vale decir, el regulador tiene que ofrecerle al menos lo suficiente para que cubra sus costos. Suponga además que para el regulador es indispensable que la empresa, aún si es de costos altos, acepte producir el bien. El regulador tiene que diseñar un contrato y su objetivo es maximizar:

$$E\left[B(q) - R\right]$$

1. ¿Qué tipo de modelo es este? Explique y justifique.
2. Escriba lo que optimiza el regulador. Explique cómo y porqué usa el principio de la revelación.
3. Escriba la función de pago de la empresa. Luego demuestre que esa función de pago cumple con la propiedad de la intersección única.
4. Muestre que en el óptimo siempre $q^A \leq q^B$.
5. En el resto de la pregunta suponga que $q^A < q^B$. Luego demuestre que:
   (a) la empresa de costo bajo obtiene utilidades,
   (b) la empresa de alto costo obtiene exactamente cero utilidades,
   (c) en el óptimo la restricción de incentivos de la empresa de bajo costo de cumple con igualdad.
6. Usando los resultados de la parte anterior, encuentre el contrato óptimo. Luego caracterícelo, vale decir, explique sus propiedades relativo al primer mejor con información simétrica.
7. ¿Cómo cambiaría el problema del regulador si la empresa observa su costo después de firmar el contrato. Explique.
8. Explique cómo cambiarían los resultados que obtuvo en las partes 5. y 6. No es necesario que resuelva el modelo; use la intuición educada por el estudio.

Ejercicio 46:
El Ministerio de Educación está estudiando cómo mejorar la educación. Se propone premiar a cada colegio según el resultado de sus alumnos en el SIMCE. Suponga que existen sólo dos escuelas. Lo que aprenden los alumnos del colegio a depende sólo del esfuerzo pedagógico de los profesores del colegio,e_a . Sin embargo, el Ministerio sólo puede observar el puntaje del SIMCE, s_a, el que depende del esfuerzo y de dos factores que están fuera de control del colegio:

- las condiciones imperantes el día de la prueba (por ejemplo estado del tiempo, ruido, estado de ánimo de los alumnos, etc.), el que denotamos por x_a;
- el grado de dificultad de la prueba, y.

Así:

$$s_a = e_a + x_a + y$$

De manera similar, para el colegio b:

$$s_b = e_b + x_b + y$$

Además, y, x_a y x_b son variables aleatorias independientes con $E[x_i] = E[y] = 0$.

En esta etapa experimental el Ministerio planea entregarle al colegio a un premio:

$$P_a = \alpha + \beta(s_a - \delta \cdot s_b)$$

con α ,β ,$\delta > 0$. La función de utilidad esperada del colegio a es:

$$E[P_a] - C(e_a) - \frac{r_a}{2} \cdot \mathrm{Var}(P_a)$$

dónde $r > 0$ es el coeficiente absoluto de aversión al riesgo, y $C, C \gg 0$. El Ministerio, que es neutral al riesgo, quiere que los alumnos aprendan, pero al menor costo posible. Así su función objetivo es:

$$e_a - [\alpha + \beta(e_a - \delta e_b)]$$

Por último, es necesario notar que en esta etapa experimental el Ministerio no puede forzar al colegio a participar; le tiene que dar utilidad esperada positiva.

1. Escriba las restricciones de participación y de incentivos que enfrenta el Ministerio. Luego explique qué significan.

2. Considere el premio $Pa = \alpha + \beta(s_a - \delta s_b)$. Explique qué implica. Luego explique por qué es razonable que, todo lo demás constante, el colegio a se le pague menos mientras mejor le vaya al colegio b.

3. Demuestre que al Ministerio le conviene seleccionar

$$\delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_y + \sigma_b}$$

dónde σ_y y σ_b son las varianzas de y y x_b respectivamente. Obviamente δ crece con σ_y y cae con σ_b . Explique intuitivamente por qué.

4. Es posible demostrar que en el óptimo el ministerio selecciona:

$$\beta^* = \frac{1}{1 + r_a[\sigma_a + \delta^2\sigma_b + (1 - \delta^2)\sigma_y] \cdot C''}$$

donde σ_a es la varianza de x_a. Explique por qué el Ministerio disminuye la intensidad de los incentivos cuando aumenta la varianza de alguno de los factores que no controla el colegio.

5. En no más de cinco líneas dé una razón de por qué no siempre es deseable premiar a un colegio solamente por el puntaje que obtengan sus alumnos en el SIMCE. (Obviamente esta razón debe ser sugerida por la teoría del agente-principal)

Ejercicio 47:
Considere el siguiente modelo de hidden actions con tres posibles acciones E=$\{e_1, e_2, e_3\}$. Considere además dos escenarios posibles para las utilidades: $\pi_h = 10$ y $\pi_l = 0$. las probabilidades de π_h condicional a los niveles de esfuerzo son: $f(\pi_h|e_1) = 2/3$,$f(\pi_h|e_2) = 1/2$, $f(\pi_h|e_3) = 1/3$. La función de esfuerzo del agente es: $g(e_1) = 5/3$, $g(e_2) = 8/5$,$g(e_3) = 4/3$. Finalmente, $v(w) = \sqrt{w}$, y la utilidad de reserva del gerente es $\bar{u} = 0$

1. ¿Cuál es el contrato óptimo cuando el nivel de esfuerzo es observable?

2. Muestre que si el nivel de esfuerzo no es observable, entonces el nivel e_2 no es implementable. ¿Para qué nivel de $g(e)$ sería e_2 implementable?. *Indicación: Observe los niveles de utilidad del gerente v_1 y v_2, más que en los salarios.*

3. ¿Cuál es el contrato óptimo cuando el esfuerzo no es observable?

4. Suponga que $g(e_1) = \sqrt{8}$, y que $f(\pi_h|e_1) = x \in [0, 1]$. ¿Cuál es el contrato óptimo si el esfuerzo es observable en la medida que x se aproxima a uno? ¿Cuál es el contrato óptimo si x se aproxima a uno y el esfuerzo no es observable? A medida que x se aproxima a uno, ¿el nivel de esfuerzo implementado es alto (bajo) cuándo el esfuerzo es observable (no observable)?