# Soluciones Utilidad Esperada

**Ejercicio 2.** Supongamos que $\succeq$ satisface (1) para alguna función de utilidad $u$.

**Completas:** para todo $p$ y $q$,

$$\begin{array}{ccc} up \geq uq & \Leftrightarrow & p \succeq q \\ & o & \\ uq \geq up & \Leftrightarrow & q \succeq p \end{array}$$

o ambas, por lo cual las preferencias son completas.

**Transitivas:** supongamos que $p \succeq q$ y $q \succeq r$. Por la ecuación (1) de las notas tenemos que

$$\left.\begin{array}{ccc} p \succeq q & \Leftrightarrow & up \geq uq \\ q \succeq r & \Leftrightarrow & uq \geq ur \end{array}\right\} \Rightarrow up \geq ur \Leftrightarrow p \succeq r$$

por lo que las preferencias son transitivas.

**Continuas:** supongamos que hay una secuencia (sucesión) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\alpha_n p + (1-\alpha_n)\, q \succeq t, \forall n \tag{1}$$

y $\alpha_n \to \alpha$. Para demostrar que $\{\alpha : \alpha p + (1-\alpha q) \succeq t\}$ es cerrado, necesitamos demostrar que $\alpha p + (1-\alpha q) \succeq t$ (es decir, tomamos una secuencia que converge, y que para todo $n$ está dentro del conjunto y debemos demostrar que el límite está dentro del conjunto). Por (1) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} u\left[\alpha_n p + (1-\alpha_n q)\right] & \geq & ut \Leftrightarrow \alpha_n up + (1-\alpha_n)\, uq \geq ut \Rightarrow \\ \alpha up + (1-\alpha)\, uq & \geq & ut \Leftrightarrow u\left[\alpha p + (1-\alpha q)\right] \geq ut \Leftrightarrow \\ \alpha p + (1-\alpha)\, q & \succeq & t \Rightarrow \alpha \in \{\alpha : \alpha p + (1-\alpha q) \succeq t\}\,. \end{array}$$

Haciendo una demostración análoga para mostrar que $\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1-\alpha q)\}$ es cerrado, se muestra que las preferencias son continuas.

**Independencia:** supongamos que $p, q$ y $r$ son loterías y que $\alpha \in (0,1)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} p & \succeq & q \Leftrightarrow up \geq uq \Leftrightarrow \alpha up \geq \alpha uq \Leftrightarrow u\alpha p \geq u\alpha q \Leftrightarrow \\ u\alpha p + u(1-\alpha)\, r & \geq & u\alpha q + u(1-\alpha)\, r \Leftrightarrow u\left[\alpha p + (1-\alpha)\, r\right] \geq u\left[\alpha q + (1-\alpha)\, r\right] \Leftrightarrow \\ \alpha p + (1-\alpha)\, r & \succeq & \alpha q + (1-\alpha)\, r \end{array}$$

por lo que se cumple independencia.

**Ejercicio 3**. El valor esperado de comprar $z$ unidades es $1+\frac{z}{4}$. El individuo no comprará nada del activo, pues la utilidad de comprar $z$ unidades es

$$\frac{1}{2}u\left(1-z\right)+\frac{1}{2}u\left(\frac{3z+2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-z\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3z+2}{2}+1}{2}\right)=1-\frac{z}{8}$$

que se maximiza para $z=0$. Lo que es "raro" es que en clase vimos que para cualquier función de utilidad diferenciable, si un activo tiene retornos esperados positivos, la persona comprará siempre una porción, no importa cuán pequeña.

**Ejercicio 4.A.I**. $E\left(u\right)=\int\limits_{0}^{1}x^{a}dx=\frac{1}{a+1}$, y $E\left(u\right)=\alpha 0^{a}+\left(1-\alpha\right)1^{a}$

**4.A.II**. En el primer caso, tenemos que

$$\int\limits_{0}^{1}\log xdx=\lim_{z\to 0}\int\limits_{z}^{1}\log xdx=\lim_{z\to 0}\left|x\log x-x\right|_{z}^{1}=\lim_{z\to 0}\left(-1-z\log z+z\right)=-1$$

Para el caso de la distribución discreta, tenemos que $E\left(u\right)=\alpha\log 0+\left(1-\alpha\right)\log 1$, que no existe, pues $\log 0$ no existe.

**4.A.III**. $E\left(u\right)=\int\limits_{0}^{1}\left(ax+b\right)dx=\frac{a}{2}+b$, y $E\left(u\right)=\left(1-\alpha\right)a+b$

**4.A.IV**. Sustituyendo en la parte III, obtenemos $E\left(u\right)=\frac{1}{2}$, y $E\left(u\right)=\alpha$.

**4.A.V**. En el caso de la uniforme debemos demostrar que la utilidad esperada es menor que cualquier número $k<0$ que elijamos (es decir, la utilidad esperada es $-\infty$). Con eso habremos demostrado que la utilidad esperada no existe. Vemos que como $-x^{-1}<0$ para todo $x>0$,

$$\int\limits_{0}^{1}\left(-x^{-1}\right)dx<\int\limits_{e^{k}}^{1}\left(-x^{-1}\right)dx=k$$

como queríamos demostrar.

**Ejercicio 4.B**. El valor esperado de la distribución uniforme es

$$\int\limits_{0}^{1}xdx=\left.\frac{x^{2}}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

y el de la discreta es

$$\alpha 0+(1-\alpha)\,1=1-\alpha$$

**Ejercicio 5.A.** El retorno esperado para un $\lambda$ cualquiera es la probabilidad de lluvia por el retorno de lluvia, más la probabilidad de seco por el retorno de seco:

$$0.5\,(\$100\lambda\$10+\$100\,(1-\lambda)\,\$2)+0.5\,(\$100\lambda\$3+\$100\,(1-\lambda)\,\$9)$$

Simplificando queda $100\lambda+550$, por lo que el retorno esperado se maximiza con $\lambda=1$. No hay que hacer esta cuenta para darse cuenta de eso: en los años favorables P da 10 y H 9, y en los desfavorables P da 3 y H 2, y los años favorables para cada fábrica ocurren con igual probabilidad.

**Ejercicio 5.B.** La utilidad esperada para un $\lambda$ cualquiera es la probabilidad de lluvia por la utilidad del retorno de lluvia, más la probabilidad de seco por la utilidad del retorno de seco:

$$0.5u\,(100\,(8\lambda+2))+0.5u\,(100\,(9-6\lambda))=0.5\sqrt{100\,(8\lambda+2)}+0.5\sqrt{100\,(9-6\lambda)}$$

La derivada segunda de esta función es

$$10\frac{(24-16\lambda)\sqrt{9-6\lambda}+(12\lambda+3)\sqrt{8\lambda+2}}{(8\lambda+2)^{\frac{3}{2}}\,(2\lambda-3)\sqrt{9-6\lambda}}<0$$

por lo que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un máximo, que se obtiene en $\lambda=0.75$. En este caso el $\lambda$ óptimo es menor que 1, pues invirtiendo también en la fábrica de helados se diversifica la inversión, y eso es bueno para reducir el riesgo.

**Ejercicio 6.** No, no puede satisfacer Independencia. Lo veremos de dos formas. Primero, si cumpliera independencia, la relación de preferencias podría ser representada por una función de utilidad esperada, tal que

$$p\succeq q\Leftrightarrow p_1u\,(1)+p_2u\,(2)+(1-p_1-p_2)\,u\,(3)\geq q_1u\,(1)+q_2u\,(2)+(1-q_1-q_2)\,u\,(3)\,.$$

Tendríamos entonces que

$$\begin{aligned}(0,1) &\succ \left(\frac{1}{2},0\right)\Leftrightarrow u\,(2)>\frac{1}{2}u\,(1)+\frac{1}{2}u\,(3)\\ \left(\frac{3}{4},0\right) &\succ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{3}{4}u\,(1)+\frac{1}{4}u\,(3)>\frac{1}{2}u\,(1)+\frac{1}{2}u\,(2)\Leftrightarrow \frac{1}{2}u\,(1)+\frac{1}{2}u\,(3)>u\,(2)\end{aligned}$$

lo que constituye una contradicción.

Una segunda forma de verlo, es notando que si la relación de preferencias satisface Independencia,

$$\begin{aligned}(0,1) &\succ \left(\frac{1}{2},0\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0,1)+\frac{1}{2}(1,0) \succ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},0\right)+\frac{1}{2}(1,0) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \succ \left(\frac{3}{4},0\right)\end{aligned}$$

**Ejercicio 8.** Tenemos que $u(2)=\frac{3}{4}u(3)+\frac{1}{4}u(1)$ y por lo tanto,

$$\frac{1}{3}u(1)+\frac{1}{3}u(2)+\frac{1}{3}u(3)=\frac{5}{12}u(1)+\frac{7}{12}u(3).$$

Tenemos entonces que

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \sim \frac{5}{12}\delta_1+\frac{7}{12}\delta_3.$$

**Ejercicio 9.** Tenemos

$$\ln w = p\ln w_1+(1-p)\ln w_2 \Leftrightarrow w = w_1^p w_2^{1-p}$$

**Ejercicio 10.** Son completas, transitivas, satisfacen independencia, pero no son continuas.

**Ejercicio 11.** (i) y (ii) no se pueden saber, (iii) es cierto, y (iv) falso.

**Ejercicio 12.A.** Tenemos

$$\begin{aligned}U\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) &= \min\left\{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4},\frac{3}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right\}=\min\left\{\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right\}=\frac{7}{4} \\ U\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) &= \min\left\{\frac{1+2+3}{3},\frac{3+2+1}{3}\right\}=2\end{aligned}$$

**12.B.** Si ponemos a la lotería degenerada en $e$ en la punta superior del simplex, las curvas de indiferencia son rectas paralelas y verticales. La curva que pasa por $(0,1,0)$ es la misma que pasa por $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

**12.C.** Se satisfacen todos los axiomas, menos independencia. No había que decir lo que viene ahora, pero igual va la justificación. Continuidad se satisface porque el mínimo es una función continua, y las dos funciones que están adentro del mínimo son utilidades esperadas que satisfacen continuidad. Las preferencias son completas, porque dados $p$ y $q$, $U$ les asigna un número a cada una de las loterías, y como los números siempre se pueden comparar, las loterías también (además a esta altura ya podrían saber que si unas preferencias se pueden representar por una función de utilidad, son necesariamente completas y transitivas).

Independencia no se satisface, porque aunque las curvas de indiferencia son rectas paralelas, no crecen siempre en la misma dirección. En este caso, la dirección de crecimiento es hacia el medio. Así por ejemplo, $(0,0,1) \sim (1,0,0)$ y los dos arrojan una utilidad de 1, y sin embargo, $U(0,1,0) = U\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 2$. Para ver que se viola independencia, notamos que

$$(0,0,1) \sim (1,0,0) \nRightarrow \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(1,0,0) \sim \frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(1,0,0).$$