Notas y Ejercicios sobre Utilidad

Como siempre, X es el espacio de los bienes de consumo, y $\succeq$ es una relación de preferencias en X. Diremos que una función $u : X \to \mathbf{R}$ **representa** a la relación de preferencia $\succeq$ si, y sólo si, para todo $x, y \in X$,

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Ejercicio 1: Mostrar que si una función u representa a las preferencias $\succeq$ entonces $\succeq$ es completa y transitiva.

Ejercicio 2: Demostrar que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es estrictamente creciente, y $u : X \to \mathbf{R}$ representa a una relación de preferencias $\succeq$, entonces $v : X \to \mathbf{R}$, definida por $v(x) = f(u(x))$ también representa a $\succeq$.

Ejercicio 3: (del Mas-Colell et. al.) Demostrar que si X es finito y $\succeq$ es una relación binaria completa y transitiva en X, entonces existe una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ que representa a $\succeq$. (Ayuda: primero considere el caso en el cual las preferencias son siempre estrictas, y construya una utilidad para ese caso. Luego extienda el argumento para el caso más general).

Demostraremos ahora que una clase bastante general de preferencias en $\mathbf{R}^l$ se pueden representar con una función de utilidad. Para ello debemos definir dos nuevas propiedades de las relaciones de preferencia. Una relación de preferencias $\succeq \subseteq X \times X$ para $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es:

continua si para todo $x \in \mathbf{R}^l$, los conjuntos $\{y : y \succeq x\}$ y $\{y : x \succeq y\}$ son cerrados (es decir, si $y_n \succeq x$ para todo n y $y_n \to y$ implican $y \succeq x$, y similarmente para $x \succeq y_n$).

monótona si $y \gg x$ (es decir $y_i > x_i$ para todo i) implica $y \succ x$.

estrictamente monótona si $y > x$ (es decir $y \geq x$ y $x \neq y$) implica $y \succ x$.

Teorema 4 (Wold, 1943). Si la relación de preferencias $\succeq$ en $\mathbf{R}^l_+$ es completa, transitiva, continua y monótona entonces, es representable por una función de utilidad.

Prueba: Sea $e = (1, 1, ..., 1)$. Por monotonía, para todo x, $x \succeq 0$, por lo que $A^- = \{\beta \in \mathbf{R}_+ : x \succeq \beta e\}$ es no vacío. También, para todo β tal que $\beta e > x$, $\beta e \succ x$, por lo que $A^+ = \{\beta \in \mathbf{R}_+ : \beta e \succeq x\}$ es no vacío. Por continuidad A^+ y A^- son cerrados. Como $\succeq$ es completa, $\mathbf{R}_+ \subseteq A^+ \cup A^-$. Demostraremos ahora que $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. Para ver eso, mostraremos que $A^+ = [a, \infty)$ para algún a, y $A^- = [0, b]$ para algún b, y por lo tanto, $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. Comencemos con A^+ : si $r \in A^+$, para todo $s > r$, $se > re$, y por monotonía, $se \succ re$. Luego, $re \succeq x$ y transitividad implican que $se \succeq x$. Por lo tanto, A^+ sólo puede ser un intevalo. Como A^+ es cerrado, obtenemos $A^+ = [a, \infty)$ para algún a, como queríamos demostrar. La demostración para A^- es similar y se omite.

Como $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$, existe algún α tal que $\alpha e \sim x$, y como $\alpha_1 > \alpha_2$ implica $\alpha_1 e \succ \alpha_2 e$, ese α es único. La función de utilidad que representa a $\succeq$ es aquella que le asigna a cada x, el número α tal que $\alpha e \sim x$. Queda como ejercicio mostrar que esta función de utilidad representa a $\succeq$. ■

Ejercicio 5: Demostrar que la función de utilidad que le asigna a cada x el número α tal que $\alpha e \sim x$ representa a $\succeq$.

Es muy importante destacar, aunque suene a llover sobre mojado, que las hipótesis del Teorema de Wold son suficientes, pero no necesarias, para la existencia de una función de utilidad. Así por ejemplo, si se pide demostrar que ciertas preferencias no son representables por una función de utilidad, no alcanzará con mostrar que no son continuas. En el Ejercicio 16, por ejemplo, alguna gente ha tratado de demostrar que las preferencias no son representables mostrando que no son continuas. En esa línea hay dos errores: las preferencias son continuas, y aunque no lo fueran, podrían ser representables. Para mostrar que unas preferencias no se pueden representar, hay que mostrar que falla alguna condición necesaria, tipo transitividad o completitud. El siguiente ejercicio pretende mostrar que hay preferencias que aunque no son continuas, se pueden representar con una función de utilidad.

Ejercicio 6. Sea $X = \mathbf{R}_+$ suponga que $0 \succ x$ para todo $x \neq 0$ y que para todo $x, y \in \mathbf{R}_{++}$ $x \succeq y$ si y sólo si $x \geq y$.

Parte A. Demuestre que estas preferencias no son continuas.

Parte B. Encuentre una función de utilidad que represente a estas preferencias.

Parte C. La función de utilidad de la Parte B, ¿podría ser continua?

Ejercicio 7. Parte A. Demuestre que si $\succeq$ es estrictamente monótona, entonces es monótona.

Parte B. Demuestre que si $\succeq$ es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona entonces, es representable por una función de utilidad.

Ejercicio 8. Suponga que $X = \mathbf{R}_+^2$ y que $x \succeq y \Leftrightarrow \lambda x \succeq \lambda y$ para todo $\lambda > 0$. Suponga también que u representa a $\succeq$ y que $u(s, s) = s$. Si $(1, 3) \sim (2, 2)$ ¿Cuánto es $u(2, 6)$?

El Ejercicio 1 mostró que los supuestos de completitud y transitividad son necesarios si una relación de preferencias tiene una función de utilidad. Los supuestos de monotonía y continuidad en el Teorema 10 no son necesarios, pero daremos ahora un ejemplo de una relación de preferencias que satisface todos los supuestos del teorema, menos continuidad, y que no puede ser representada por una función de utilidad.

Ejemplo 9. Preferencias Lexicográficas. Sea $X = \mathbf{R}_+^2$. Definimos la relación de preferencias de la siguiente manera: $\forall x, y \in X$,

$$x \succeq_L y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 > y_1 \\ o \\ x_1 = y_1 \,\&\, x_2 \geq y_2 \end{array} \right\}.$$

Primero mostramos que no satisface continuidad. Tomamos $x = (1, 1)$, y

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right).$$

Para cada n, $y_n \succ x$, pero no es cierto que $y = \lim_{n\to\infty} y_n = (1, 0) \succeq x$.

Para ver que estas preferencias no tienen una función de utilidad que las represente, recordamos que no existe ninguna función inyectiva desde los reales positivos a los racionales. Si existiera una función de utilidad, tendríamos que para cada par de reales $x_1 \neq x_1'$ existiría un par de racionales $r(x_1)$, $r(x_1')$ tal que

$$\begin{array}{rcl} u(x_1, 0) & < & r(x_1) < u(x_1, 1) < u(x_1', 0) < r(x_1') < u(x_1', 1) \ \ (\text{si } x_1' > x_1) \\ & & o \\ u(x_1', 0) & < & r(x_1') < u(x_1', 1) < u(x_1, 0) < r(x_1) < u(x_1, 1) \ \ (\text{si } x_1' < x_1) \end{array}$$

con lo que habríamos construido una función que le asigna a dos reales distintos, dos racionales distintos. Eso es una contradicción. $\blacksquare$

Ejemplo 10. Dado que las preferencias lexicográficas no se pueden representar con una función de utilidad, y dado que son completas, transitivas y monótonas, el Teorema de Wold nos dice que no pueden ser continuas. Mostraremos ahora que no son continuas. Sea $x = (1,1)$, y sea $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right)$. Tenemos que $x_n \succeq y$ para todo n y que $x_n \to x = (1,0)$. Si las preferencias lexicográficas fueran continuas, tendríamos $x \succeq y$, y sin embargo, $y \succ x$.

Ejercicio 11. Sea $X = \mathbf{R}^2$. La relación de preferencias $\succeq$ está definida por

$$x \succeq y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 * x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1 * y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Determinar cuáles de las siguientes propiedades satisface esta relación de preferencias: completa; transitiva; continua. Para cada propiedad que se cumpla, de una demostración. Para las que no se cumplan, de un contraejemplo.

Ejercicio 12. Sea $\succeq$ mi relación de preferencias sobre el conjunto de todos los objetos del universo. Lo único que me importa sobre un objeto es su tamaño (en kilos) y cuán alto es (en centímetros), por lo que el espacio de los bienes es $X = \mathbf{R}^2_+$ (donde en (x_1, x_2), x_1 es el peso y x_2 la altura). Supongamos que mis preferencias son completas y transitivas y que si un objeto es al menos tan pesado y tan alto como otro, entonces me gusta más. Supongamos que los objetos $\left(1, 1 + \frac{1}{n}\right)$ son preferidos a $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ para todo n.

Parte A: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que asegure que existe una función de utilidad que representa a $\succeq$? (por ejemplo, $(1,1) \succeq \left(2, \frac{1}{2}\right)$ o $\left(2, \frac{1}{2}\right) \succ (1,1)$)

Parte B: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que sea necesaria para la existencia de una función de utilidad?

Parte C: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que sea necesaria para que el Teorema de Wold asegure la existencia de una función de utilidad?

Ejercicio 13. Sean $\succeq$ unas preferencias definidas sobre $X \equiv \mathbf{R}^2_+$, con la propiedad que

$$(a, 0) \sim (0, 2a)$$

para todo $a > 0$, y tal que $(a, 0) \succ (b, 0)$ si y sólo si, $a > b$. También, asuma que son transitivas y que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \sim \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

Encuentre una función de utilidad para estas preferencias. Sugerencia: para cada x encuentre un número $u(x)$ tal que $u(x)(1,0) \sim x$.

Ejercicio 14. Lo que viene en el primer párrafo es un ejemplo para motivar el ejercicio, que empieza en el segundo párrafo. Sea $\Omega = [0,1]$ el conjunto de los "estados posibles de la naturaleza" respecto al retorno que puede tener una acción de Coca Cola. Cada $\omega \in \Omega$ corresponde a un retorno, en porentaje por año, de la acción. Así por ejemplo, si ocurre $\omega = 0,5$, quiere decir que el retorno anual de la acción será de 50%. El inversor puede comprar esa acción, o un bono que rinde 5% seguro y debe decidir cuál comprar. Obviamente, es muy valioso para el inversor saber lo más posible sobre cuál va a ser el ω que ocurrirá. Por ejemplo, una "estructura de información" posible es $\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$: si el individuo posee esa estructura de información se enterará de antemano si ω va a ser menor estricto que $\frac{1}{2}$ o mayor que $\frac{1}{2}$. En términos generales, una estructura de información es una "partición" de Ω. Una partición es un conjunto de subconjuntos de Ω, tales que la unión es Ω y que para dos subconjuntos cualesquiera, la intersección es vacía. En este ejemplo, la unión de $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$ es Ω, y su intersección es vacía. Otra estructura posible de información (mucho más útil que la anterior) es

$$x=\left\{\left[0,\frac{1}{20}\right],\left(\frac{1}{20},\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}.$$

En términos generales, las preferencias del individuo sobre estructuras de información deberían ser tales que si x e y son dos estructuras de información tales que para cada elemento de x existe un elemento de y que la contiene, entonces x es estrictamente mejor que y. La idea es que la partición x es más "fina" que y, pues posee más información.

Ejercicio. Sea X el conjunto de todas las estructuras de información sobre $\Omega=[0,1]$, es decir, el conjunto de todas las particiones de Ω. Un individuo tiene preferencias $\succeq$ (completas, transitivas) definidas sobre X, con la propiedad que si x es más fina que y, entonces $x \succ y$. Demostrar que no existe ninguna función de utilidad que represente a $\succeq$. Pista: la demostración es parecida a lo de las preferencias Lexicográficas. Utilice, para cada $\omega\in\Omega$, las siguientes particiones

$$\begin{aligned} x_\omega &= \{\{\alpha\}:\alpha<\omega\}\cup[\omega,1] \\ x^\omega &= \{\{\alpha\}:\alpha\leq\omega\}\cup(\omega,1]. \end{aligned}$$

La partición x^ω es más fina que x_ω: si ocurre algún α menor estricto que ω, x_ω me dice exactamente cuál, y si no, me dice sólo que α fue débilmente mayor que ω; si ocurre algún α débilmente menor que ω, x^ω me dice exactamente cuál, y si no, me dice sólo que α fue estrictamente mayor que ω.

Ejercicio 15. Una relación de preferencias $\succeq$ en $X=\mathbf{R}_+^L$ es **homotética** si $x\sim y$ si y sólo si $ax\sim ay$ para todo $a>0$. Mostrar que si una relación de preferencias $\succeq$ es completa, transitiva, continua, monótona y homotética, entonces existe una función de utilidad u que representa a $\succeq$ y que es homogénea de grado 1 : $u(ax)=au(x)$ para todo $a\geq 0$ (pista: utilice la construcción en la demostración del Teorema de Wold).

Ejercicio 16. Sea $X=\mathbf{R}_+^2$. Las preferencias $\succeq$ de un individuo se pueden describir de la siguiente manera. Dados x e y, si x_1 y y_1 son "similares" (la diferencia es menor que 1) y x_2 y y_2 son similares, el individuo elige la canasta con más unidades del bien 1 e ignora al bien 2. Así, si por ejemplo, $|x_1-y_1|\leq 1$, $|x_2-y_2|\leq 1$ y: $x_1>y_1$, tenemos $x\succ y$; si $x_1=y_1$, $x\sim y$. Si las canastas son similares en una dimensión y no en la otra, el individuo elige la que tiene más bienes en la dimensión que no es similar. Así si por ejemplo $|x_1-y_1|\leq 1$ y $y_2>x_2+1$, tenemos $y\succ x$. Si ninguna de las dos dimensiones son similares, tenemos $x\sim y$. Demostrar que estas preferencias no se pueden representar con una función de utilidad.

Ejercicio 17. Suponga que el espacio X de consumo es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbf{R}^l$ y asuma que las preferencias del individuo se pueden representar por una función de utilidad continua. Demuestre que las preferencias no son localmente no saciables (o que son localmente saciables). Pista: una función continua en un conjunto cerrado y acotado tiene un máximo.

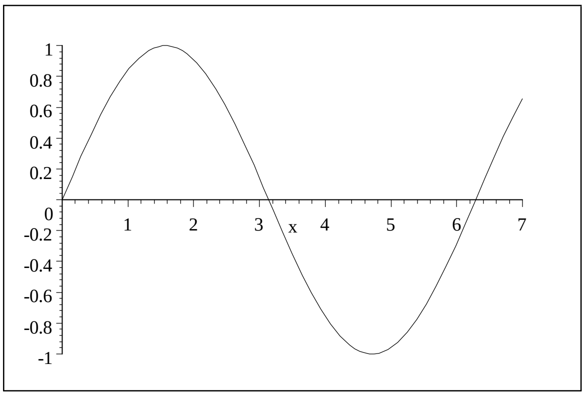
Ejercicio 18. Sea $X=\mathbf{R}_+^2$ y sea $\succeq_L$ la relación de preferencias lexicográfica.

Parte A. Dados $p_1, p_2, w > 0$ calcule la demanda Walrasiana.

Parte B. Dada una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ dada por $u(x) = x_1$, calcule la demanda Walrasiana para $p_1, p_2, w > 0$.

Parte C. En no más de tres renglones (se anula toda la respuesta si contesta en más): explique si contradicen algo visto en clase las Partes A y B.

Ejercicio 19. Sea $X = \mathbf{R}_+$ y sean $\succeq$ las preferencias en X definidas por $x \succeq y$ si y sólo si $seno(x) \geq seno(y)$. La siguiente gráfica muestra la función de utilidad $u(x) = seno(x)$.



Indique cuál de las siguientes funciones de utilidad representan a $\succeq$. En cada caso demuestre su respuesta.

Parte A. $s(x) = seno\left(x^2\right)$

Parte B. $t(x) = seno(ax + b)$ para $a > 0$.

Parte C. $v(x) = [seno(x)]^2$

Parte D. $w(x) = a \times seno(x) + b$ para $a > 0$.

Parte E. $f(x) = seno(x)(seno(x) - 1)$

Parte F. $g(x) = \sqrt{seno(x)}$.

Ejercicio 20. Un individuo tiene una función de utilidad u sobre $\mathbf{R}_+^2$. Cuando los precios de los bienes son $(2, 4)$ demanda solamente la canasta $(1, 2)$ y cuando los precios son $(6, 3)$ demanda solamente la canasta $(2, 0)$. El individuo, ¿está maximizando su utilidad?

Referencias: Parte de este material proviene de "Notes on the theory of choice," de David Kreps. También hay algo tomado de "Micoreconomic Theory," de Mas-Colell, Whinston y Green.