Notas y Ejercicios sobre Preferencias, Soluciones

Ejercicio 2: Tomemos cualquier $x \in X$. Como $\succeq$ es completa, para todo $y \in X$

$$x \succeq y \text{ ó } y \succeq x.$$

Poniendo $y = x$ obtenemos $x \succeq x$.

Ejercicio 3: Para cada número natural i, sea x_i el café con i granos de azúcar. Tenemos que $x_0 \sim x_1 \sim ... \sim x_{5438}$ (donde 5438 es el número de granos en una cucharadita de azúcar: obviamente el número particular no importa). Por lo tanto, si tuviéramos transitividad, tendríamos $x_0 \succeq x_{5438}$. Por otro lado, tenemos que, como $x_{5438} \succ x_0$, x_0 no es débilmente preferido a x_{5438}, es decir, no es verdad que $x_0 \succeq x_{5438}$, una contradicción.

Ejercicio 4: Reflexivas: (a) no, porque $(2, 2)$ no pertenece a la relación. (b) si, porque cada persona comparte al menos un nombre consigo misma. (c) si, porque es completa. (d) no, porque $|2 - 2| = 0$, y por lo tanto no pertenece a la relación. (e) si, porque para todo número x, $x - x = 0$ que es múltiplo de 2.

Completas: (a) no, porque no es reflexiva. (b) no, porque Juan Dubra no comparte ningún nombre con George Bush. (c) si, porque para dos números reales cualesquiera, x y z, ó x es mayor o igual que z, ó z es mayor o igual que x. (d) no, porque no es reflexiva. (e) no, $3 - 2$ no es múltiplo de 2, y $2 - 3$ no es múltiplo de 2, por lo que 3 y 2 no están relacionados.

Transitivas: (a) no, porque $3 \succeq 1 \succeq 2$ y sin embargo, $(3, 2) \notin \succeq$. (b) no, porque Alberto Passarella comparte un nombre con Luis Alberto Lacalle, y este último comparte un nombre con Luis Viana. (c) si, obvio. (d) no, porque $2 \succeq 0 \succeq 2$, pero como ya vimos, $(2, 2) \notin \succeq$. (e) si, obvio.

Ejercicio 5.a: X cualquiera y $\succeq = \emptyset$. También $\geq$ en $\mathbf{R}$.
5.b: $>$ en $\mathbf{R}$.
5.c: $\geq$ en $\mathbf{R}$.
5.d: X cualquiera y $\succeq = \{(x, z)\}$. Otra posible es con X el conjunto de todos los hombres del mundo, y xRy si y sólo si x es el padre de y. Es asimétrica porque si x es padre de y, y no es padre de x. No es negativamente transitiva porque Kirk Douglas no es el padre de Tom Cruise (no kRt) y Tom Cruise no es el padre de Michael Douglas (no tRm) y sin embargo, kRm.

Ejercicio 6: Empezamos con una más fácil que la (iii): $x \succ y \succ z$ implica $x \succ z$. Sabemos que $x \succeq z$, entonces supongamos $z \succeq x$. En ese caso, por transitividad, $z \succeq y$, que sabemos que es falso.

Ejercicio 7. Lo haremos de dos formas. Una "coqueta" y una "ilustrativa".

"Coqueta": Recordamos que

(1) $a \Rightarrow b$ es equivalente a $\urcorner b \Rightarrow \urcorner a$
(2) $\urcorner (c \text{ó } d)$ es equivalente a $\urcorner c$ y $\urcorner d$.

Entonces $\forall x, y, z$

$$\begin{aligned} x &\succeq z \Rightarrow x \succeq y \text{ ó } y \succeq z \overset{\text{por (1)}}{\Leftrightarrow} \\ \urcorner (x \succeq y \text{ ó } y \succeq z) &\Rightarrow \urcorner (x \succeq z) \overset{\text{por (2)}}{\Leftrightarrow} \\ \urcorner (x \succeq y) \text{ y } \urcorner (y \succeq z) &\Rightarrow \urcorner (x \succeq z) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

"Ilustrativa": Asumimos primero que $\succeq$ es negativamente transitiva y tomamos $x \succeq z$. Si $\urcorner (x \succeq y)$ y $\urcorner (y \succeq z)$, como $\succeq$ es negativamente transitiva, $\urcorner (x \succeq z)$, lo que contradice $x \succeq z$. Por lo tanto debemos tener $x \succeq y$ ó $y \succeq z$, como queríamos demostrar.

Asumimos ahora que $x \succeq z \Rightarrow x \succeq y$ ó $y \succeq z$. La "hipótesis" de negativamente transitiva es que $\urcorner (x \succeq y)$ y $\urcorner (y \succeq z)$, por lo que se viola la "tesis" que acabamos de asumir, por lo que debemos obtener $\urcorner (x \succeq z)$ que era lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 8.A Puede no existir ningún y tal que xBy.

8.B Sean $X = \{x, y, z\}$ y $\succeq = \{(y,z), (z,y), (y,y), (z,z)\}$. O por ejemplo, $X = \{x, y\}$ con $\succeq = \{(y,y)\}$

Ejercicio 9. Asumo primero que R es reflexiva y circular para demostrar que es simétrica y transitiva. Simétrica:

$$\left.\begin{array}{rc} & xRy \\ \text{(reflexiva)} & yRy \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ (circular con el segundo } y \text{ de abajo igual a } z\text{) } yRx$$

Transitiva: Asumo xRy e yRz, entonces por circularidad zRx, y como ya demostré simetría, xRz, como queríamos demostrar.

Ahora asumimos primero que R es reflexiva, simétrica y transitiva para demostrar circularidad. Tomo x, y, z tales que xRy e yRz, y por transitividad obtengo xRz. Como R es simétrica obtengo zRx, como quería demostrar.