Relación entre Preferencias y Elección

En el Capítulo 1 el enfoque era que las elecciones de la gente eran dictadas por sus preferencias. En el Capítulo 2, el se adoptó el enforque que las elecciones de la gente se derivan de una "estructura de elección". En este capítulo veremos cuál es la relación entre ambos enfoques. En particular, contestaremos las siguientes dos preguntas

1. Si un tomador de decisiones tiene una relación de preferencias completa y transitiva $\succeq$, la regla de elección "C" que genera cuando se enfrenta a restricciones presupuestales en $\mathcal{B}$, ¿satisfacen el axioma débil?
2. Si las elecciones de un individuo en el conjunto de restricciones presupuestales $\mathcal{B}$ se puede capturar por una estructura de elección $E(\mathcal{B}, C(\cdot))$ que satisface el axioma débil, ¿existe necesariamente una relación de preferencias (completa y transitiva) que sea consistente con esas elecciones?

Primera Pregunta

La respuesta a la primera pregunta es corta y sencilla: si. Supongamos que un tomador de decisiones tiene una relación de preferencias completa y transitiva $\succeq$ en X. Si esta persona enfrenta un conjunto de alternativas no vacío $B \subseteq X$, su comportamiento óptimo consiste en elegir cualquier elemento en

$$C(B, \succeq) = \{x \in B : x \succeq y \text{ para todo } y \in B\}. \tag{1}$$

Los elementos de $C(B, \succeq)$ son las mejores alternativas.en B. En principio, $C(B, \succeq)$ podría ser el conjunto vacío para algún B, o para alguna relación de preferencias mal comportada. Si B es finito, esto nunca puede pasar. De todas maneras, asumiremos en lo que resta del capítulo que las preferencias y $\mathcal{B}$ son tales que $C(B, \succeq)$ siempre es no vacío. Para cualquier $\mathcal{B}$, diremos que la relación de preferencias $\succeq$ **genera** la estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot, \succeq))$.

Antes de responder a la primera pregunta, debemos investigar bajo qué condiciones $C(B, \succeq)$ está bien definido, o lo que es lo mismo, bajo qué condiciones es una regla de elección. El siguiente Ejercicio nos da un caso particular para el caso en que X es finito.

Ejercicio 0. Sea X un conjunto finito. Decimos que una relación binaria $\succeq$ en X es **acíclica** si $x_m \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$ implica $x_m \neq x_1$.

Parte A. Para una relación binaria $\succeq$ muestre que

$$D(B, \succeq) = \{x \in B : \text{no existe } y \text{ tal que } y \succ x\} \tag{2}$$

es no vacío para todo B si y sólo si $\succeq$ es acíclica.

Parte B. Encuentre un ejemplo en el cual X no sea finito, $\succeq$ sea acíclica, y $D(B, \succeq)$ sea vacío para algún B.

Parte C. Muestre que si $\succeq$ es transitiva, entonces es acíclica. Verifique que en $X = \{1, 2\}$ la relación

$$\succeq = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

es acíclica pero no transitiva.

Parte D. Muestre que si $\succeq$ es completa, entonces $D(B, \succeq) = C(B, \succeq)$ para todo B. Note que las Partes A, B y C muestran que si $\succeq$ es completa y transitiva, entonces $C(B, \succeq)$ es no vacío.

Parte E. Encuentre una relación binaria $\succeq$ tal que $D(B, \succeq) \neq C(B, \succeq)$ para algún B.

Ahora la respuesta a la pregunta (1).

Teorema 1: Si $\succeq$ es una relación de preferencias completa y transitiva en X, entonces la estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot, \succeq))$ generada por $\succeq$ satisface el Axioma Débil.

Prueba: Debemos demostrar que siempre que x se revele al menos tan bueno como y, usando $E = (\mathcal{B}, C(\cdot, \succeq))$, tendremos que si $y \in C(B', \succeq)$ y $x \in B'$, se cumplirá que $x \in C(B', \succeq)$. Recalcando, debemos mostrar que

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in B \\ x \in C(B, \succeq) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{c} x, y \in B' \\ y \in C(B', \succeq) \end{array}\right] \Rightarrow x \in C(B', \succeq)\right\}$$

Supongamos entonces que $x, y \in B$ y que $x \in C(B, \succeq)$. Por definición de $C(B, \succeq)$ eso quiere decir que $x \succeq y$. Supongamos ahora que $x, y \in B'$ y que $y \in C(B', \succeq)$. Por definición de $C(B', \succeq)$ eso quiere decir que $y \succeq z$ para todo $z \in B'$. Tenemos entonces que $x \succeq y \succeq z$ para todo $z \in B'$. Como $\succeq$ es transitiva, tenemos $x \succeq z$ para todo $z \in B'$, y por tanto $x \in C(B', \succeq)$, como queríamos demostrar. ■

Segunda Pregunta

La respuesta a la segunda pregunta es más sutil. Comenzaremos con una definición. Dada una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$, diremos que la relación de preferencias (completa y transitiva) $\succeq$ **racionaliza** a $C(\cdot)$ relativo a $\mathcal{B}$ (o racionaliza a E) si

$$C(B) = C(B, \succeq) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

En palabras, $\succeq$ racionaliza a C si las elecciones óptimas generadas por $\succeq$, y capturadas por $C(\cdot, \succeq)$, son las mismas que C. Si $\succeq$ racionaliza a C, podemos pensar que el comportamiento de un agente que elige de acuerdo a C es como si estuviera dictado por la relación de preferencias $\succeq$.

En la definición de racionalización está la frase "relativo a $\mathcal{B}$" porque en la definición de C aparece el $\mathcal{B}$ para el cual está definido.

Ejercicio 2. Sea $X = \{x, y, z\}$ y suponga que $\succeq = \{(x, y), (y, z), (x, z), (x, x), (y, y), (z, z)\}$. De un ejemplo de una función C y dos conjuntos de restricciones $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ con $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ tales que $\succeq$ racionaliza a C relativo a $\mathcal{B}_1$ pero no a $\mathcal{B}_2$.

También, puede suceder que haya más de una relación de preferencias que racionalice a una C dada.

Ejercicio 3. Encuentre un ejemplo de una estructura de elección E que pueda ser racionalizada por más de una relación de preferencias, y diga cuáles son las preferencias que la racionalizan. (Pista: si $\mathcal{B}$ incluye como restricciones presupuestales a todos los pares de X, entonces existe a lo sumo una relación de preferencias que racionaliza a E).

El próximo ejemplo demuestra que la respuesta a la segunda pregunta (si una estructura E satisface el ADPR, ¿siempre puede ser racionalizada por una relación de preferencias $\succeq$?) es no.

Ejemplo 4. Sean $X = \{x, y, z\}$ y $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$ y $C(\{x, z\}) = \{z\}$. La estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil pues no hay en $\mathcal{B}$ conjuntos distintos B y B' tales que ambos contengan a dos elementos v y w, y eso es una condición necesaria para violar el ADPR. A pesar de eso, no existe una relación de preferencias que racionalice a E. Supongamos que hubiera una $\succeq$ que racionalizara a C. Si así fuera, tendríamos

$$\begin{aligned}
C(\{x, y\}) &= \{x\} \Rightarrow x \succ y \\
C(\{y, z\}) &= \{y\} \Rightarrow y \succ z \\
C(\{x, z\}) &= \{z\} \Rightarrow z \succ x
\end{aligned}$$

lo que es imposible para una relación $\succeq$ transitiva.

Notamos que cuantas más restricciones presupuestales hay en $\mathcal{B}$, más restringe el axioma débil la forma que puede tomar C, pues con más restricciones, hay más posibilidades para que el comportamiento de C sea contradictorio. En el ejemplo anterior, $\{x, y, z\}$ no es un elemento de $\mathcal{B}$, y resulta que eso es muy importante. Ya lo veremos más adelante en estas mismas notas. Por ahora basta el adelanto que si $\mathcal{B}$ tiene suficientes subconjuntos de X, y la estructura $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil, entonces existe una relación de preferencias $\succeq$ que racionaliza a E.

Ahora estamos prontos para establecer las condiciones bajo las cuales la respuesta a la segunda pregunta es afirmativa.

Teorema 5: Si $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ es una estructura de elección tal que

(i) Se satisface el axioma débil

(ii) $\mathcal{B}$ incluye todos los suconjuntos de X de hasta tres elementos

entonces existe una única relación de preferencias (completa y transitiva) $\succeq$ que reacionaliza $C(\cdot)$.relativo a $\mathcal{B}$. Es decir, $C(B) = C(B, \succeq)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Prueba: La relación de preferencias que pide a gritos ser la candidata a racionalizar E es la relación de preferencia revelada $\succeq^E$. De hecho, demostraremos que $\succeq^E$ es completa y transitiva, y que además racionaliza a E. Finalmente, demostraremos unicidad.

(a) $\succeq^E$ es completa: para todo $x, y \in X$, $x \succeq^E y$ ó $y \succeq^E x$. Por (ii), para cualquier x e y tenemos que $\{x, y\} \in \mathcal{B}$, por lo que se debe cumplir que: o $x \in C(\{x, y\})$, en cuyo caso $x \succeq^E y$, o $y \in C(\{x, y\})$, en cuyo caso $y \succeq^E x$.

(b) $\succeq^E$ es transitiva: para todo $x, y, z \in X$, $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$ implican $x \succeq^E z$. Asumamos $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$, y analicemos qué sucede con el conjunto $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$. Alcanzará con probar que $x \in C(\{x, y, z\})$, ya que eso implica $x \succeq^E z$. Como $C(\{x, y, z\})$ es no vacío, debemos tener que o x o y o z pertenecen a $C(\{x, y, z\})$. Si x pertenece, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $y \in C(\{x, y, z\})$. En ese caso, como $x \succeq^E y$, y E satisface el ADPR, debemos tener $x \in C(\{x, y, z\})$. Si $z \in C(\{x, y, z\})$, $y \succeq^E z$ y el axioma débil implican que $y \in C(\{x, y, z\})$, usando otra vez $x \succeq^E y$ y el axioma débil obtenemos $x \in C(\{x, y, z\})$, como queríamos demostrar.

(c) $\succeq^E$ racionaliza a E : para todo $B \in \mathcal{B}$, $C(B) = C\left(B, \succeq^E\right)$ (la relación de preferencia revelada generada por C racionaliza a C). Para demostrar $C(B) = C\left(B, \succeq^E\right)$ debemos establecer que: (1) $C(B) \subseteq C\left(B, \succeq^E\right)$ y que (2) $C\left(B, \succeq^E\right) \subseteq C(B)$.
(1) Para cualquier $x \in C(B)$, tenemos que $x \succeq^E y$ para todo $y \in B$ (por definición de $\succeq^E$). Por lo tanto, $x \in C\left(B, \succeq^E\right)$.
(2) Para cualquier $x \in C\left(B, \succeq^E\right)$, tenemos que $x \succeq^E y$ para todo $y \in B$. Eso quiere decir que para cada y existe un $B_y \in \mathcal{B}$, tal que $x, y \in B_y$ y $x \in C(B_y)$. Por el axioma débil, para cualquier $y \in C(B)$, como x se reveló al menos tan bueno como y, debemos tener $x \in C(B)$, como queríamos demostrar.

(d) si $\succeq$ y R racionalizan a E, entonces $\succeq = R$. Otra vez, demostraremos (1) $\succeq \subseteq R$ y (2) $R \subseteq \succeq$.
(1) Supongamos que $(x, y) \in \succeq$. Como $\succeq$ racionaliza a E, quiere decir que existe algún $B \in \mathcal{B}$ con $x, y \in B$ tal que $x \in C(B)$. Como R también racionaliza a E, debemos tener xRy (si no, no se hubiera elegido x en B).
(2) es igual a (1) y se omite. ■

La definición y teorema que siguen dan una caracterización completa de las estructuras de elección que pueden ser racionalizadas por una relación de preferencias $\succeq$. Dada la relación de preferencia revelada $\succeq^E$ asociada a una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$, definimos la relación $\succeq_I^E$, la **relación de preferencia revelada indirecta**, mediante

$$x \succeq_I^E y \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n \text{ tales que } x \succeq^E x_1 \succeq^E ... \succeq^E x_n \succeq^E y.$$

Es decir, decimos que x se **reveló indirectamente al menos tan bueno** como y, si x se reveló al menos tan bueno como x_1, x_1 al menos tan bueno como x_2, ..., x_n al menos tan bueno como y. Decimos que una estrucutra de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el **Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada** (AFPR) si para todo $x, y \in X$ y $B \in \mathcal{B}$,

$$\left.\begin{array}{c} y \in C(B) \\ x \succeq_I^E y \\ x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in C(B)$$

El axioma fuerte nos dice que si x se reveló indirectamente al menos tan bueno como y, y se elige y en B, entonces se debería elegir x también en B.

Ejercicio 6. Demostrar que si una estructura E satisface el axioma fuerte, entonces satisface el axioma débil.

Ejercicio 7. Demostrar que para cualquier E, $\succeq_I^E$ es la más chica de las relaciones de preferencias transitivas y que contienen a $\succeq^E$. En general, mostrar que para cualquier relación binaria $R \subseteq X \times X$, la relación R_t definida mediante

$$xR_ty \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n \text{ tales que } xRx_1R...Rx_nRy.$$

es la más chica de las relaciones de preferencias transitivas y que contienen a R. En este ejercicio, y en general, un conjunto (recordar que las relaciones de preferencias son conjuntos) es el más chico en una cierta clase (en este caso, en la clase de preferencias transitivas y que contienen a R) si está contenido en cualquier otro conjunto de la clase. Pista: se puede mostrar que hay al menos una relación transitiva que contiene a R, y luego verificar que R_t es la intersección de todas las relaciones transitivas que contienen a R.

Teorema 8 (Richter). Una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma fuerte si y sólo si existe una relación de preferencias $\succeq$ que la racionaliza.

Algunas veces, el axioma débil de la preferencia revelada se separa en dos partes, siguiendo la presentación de Amartya Sen, quien recibió el Premio Nobel de Economía en 1998. Se dice que la regla de elección C:

satisface el Axioma α de Sen si $x \in C(B)$ siempre que $x \in B \subseteq A$ y $x \in C(A)$. En palabras de Sen, si el club campeón mundial de cricket es paquistaní, ese club también es el campeón de cricket de Pakistán.

satisface el Axioma β de Sen si $x \in C(B)$ siempre que $A \subseteq B$, $y \in C(B)$ y $x, y \in C(A)$. En palabras de Sen, si el club campeón mundial de cricket es paquistaní, entonces todos los campeones paquistaníes son campeones mundiales.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si son verdaderas o falsas, demostrando su afirmación si es verdadera, o un contraejemplo si es falsa.

Parte A. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $D(\cdot, \succeq)$ definida en (2) satisface el Axioma α de Sen.

Parte B. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (1) satisface el Axioma α de Sen.

Parte C. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $D(\cdot, \succeq)$ definida en (2) satisface el Axioma β de Sen. En caso que esta afirmación sea falsa, encuentre una relación acíclica $\succeq$ tal que $D(\cdot, \succeq)$ viole el Axioma β de Sen.

Parte D. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (1) satisface el Axioma β de Sen.

Parte E. Para cualquier relación binaria transitiva $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (1) satisface el Axioma β de Sen.

La demostración de este teorema no es muy extensa ni difícil, pero requiere algo de trabajo. En ella se utiliza el Lema de Zorn.

El Lema de Zorn. Dado un conjunto X cualquiera y una relación binaria $R \subseteq X \times X$ que es reflexiva, transitiva y antisimétrica (xRy e yRx implican $x = y$), llamamos a R un orden parcial, y decimos que X está parcialmente ordentado por R. El ejemplo más obvio de un orden parcial es el $\geq$ en $\mathbf{R}^2$. Una cosa importante para notar es que un orden parcial R no tiene porqué ser completo. Una **cadena** C en X es un subconjunto C de X tal que para todo $x, y \in X$, tenemos xRy o yRx. Es decir, C en X es una cadena si R, restringido a C es completo. Una **cota superior** para un conjunto $C \subseteq X$ es un $x \in X$ tal que xRy para todo $y \in C$.

Lema 10. Lema de Zorn. Sea R un orden parcial en X. Si toda cadena C en X tiene una cota superior, entonces existe un $x_m \in X$ tal que $x_m R x$ para todo $x \in X$. El elemento x_m se llama un elemento maximal.

El Ejemplo 4 mostraba una estructura de elección E que no podía ser racionalizada por ninguna relación de preferencias. Dado el Teorema 8, sabemos que E debe violar el axioma fuerte. De hecho, vemos que como $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$, tenemos que $x \succeq_I^E z$. El axioma fuerte nos dice entonces que como $z \in C(\{x, z\})$, deberíamos tener $x \in C(\{x, z\})$, lo cual no se cumple.

Ejercicio 11. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Si $\succeq$ es transitiva y $R \subseteq \succeq$, liste tres pares (x, y) que no están en R, que tienen que estar necesariamente en $\succeq$.