Notas y Ejercicios sobre Preferencias

Sea X el espacio de los bienes de consumo, y sea $\succeq$ una relación de preferencia, es decir, $\succeq \subseteq X \times X$. Interpretaremos $(x, y) \in \succeq$ como x débilmente preferido a y, y escribiremos $x \succeq y$.

Ejemplo 1:
(a) Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $\succeq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$.
(b) Sea X el conjunto de todas las personas en el mundo, y $\succeq$ la relación "tienen al menos un nombre en común." Así, por ejemplo, tenemos que el par (Gabriel Omar Batistuta, Gabriel García Márquez) $\in \succeq$
(c) Sea $X = \mathbf{R}$, el conjunto de los números reales y $\succeq$ la relación "mayor o igual que", es decir $\succeq = \geq$.
(d) Sea $X = \mathbf{R}$, y $\succeq$ la relación: $x \succeq y$ si $|x - y| > 1$.
(e) Sea $X = \mathbf{R}$, y $\succeq$ la relación: $x \succeq y$ si $x - y$ es múltiplo de 2. ■

A partir de la relación de preferencia $\succeq$ definimos $\sim$ (indiferencia) como

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ y } y \succeq x$$

es decir, x es indiferente a y si, y sólo si, x es débilmente preferido a y y y es débilmente preferido a x. También definimos $\succ$ (estrictamente preferido) como

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ y no } y \succeq x$$

es decir, x es estrictamente preferido a y si, y sólo si, x es débilmente preferido a y y y no es débilmente preferido a x.

Decimos que la relación de preferencia $\succeq$ es:

reflexiva si, y sólo si, para todo $x \in X$, $x \succeq x$. Es decir, todos los elementos son comparables consigo mismos.

completa si, y sólo si, para todo $x, y \in X$

$$x \succeq y \text{ ó } y \succeq x$$

es decir, todos los elementos en el espacio de los bienes de consumo son comparables: dadas dos canastas x y y, x es mejor que y ó y es mejor que x. Para ver que las preferencias no tienen porqué ser completas, imaginemos a una persona que tiene que decidir entre dos trabajos con distintos sueldos, ambientes de trabajo, tipo de trabajo, etc, y a quien le resulta imposible decidir. Al final, la persona tomará una decisión (porque debe elegir) pero eso no quiere decir que la persona "prefiera" lo que eligió. A veces se confunde la completitud de las elecciones con completitud de las preferencias. Por ejemplo, si a mi me dan a elegir entre x e y, alguno voy a tener que elegir, pero no quiere decir que yo realmente "prefiera" el que elegí. Puede que x e y sean incomparables para mi. A veces los economistas dicen: "las preferencias *tienen* que ser completas. Si no lo fueran, a la gente le pasaría como al burro aquél que perdido en el desierto se encuentra con dos baldes de agua, e incapaz de elegir porque sus preferencias no eran completas, se muere de sed." Al burro pueden resultarle incomparables los dos baldes de agua, y aún así ser capaz de elegir. Que las elecciones sean completas no quiere decir que las preferencias lo sean.

Ejercicio 2: Mostrar que si $\succeq$ es completa, también es reflexiva.

Decimos que una relación de preferencias es **transitiva** si, y sólo si, para todo $x, y, z \in X$

$$x \succeq y \text{ y } y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$$

es decir, si x es mejor que y y y es mejor que z, x es mejor que z. Por más que parece una propiedad "obvia" que deben satisfacer las preferencias de una persona razonable, aca van cuatro cuentos que pueden minar esa intuición.

Cuento A. Una persona es indiferente entre un café sin azúcar, y un café con un grano de azúcar; indiferente entre esto último y uno con dos granos de azúcar; etc, etc, pero que prefiere un café con una cucharadita de azúcar a uno sin azúcar. Estas preferencias no son transitivas.

Ejercicio 3: Mostrar porqué el ejemplo del azúcar viola transitividad.

Cuento B. Esto es de Kahneman y Tversky (1984). A cada uno de los individuos de un grupo se le dice:

> Estás por comprar un equipo de música por U$S 125 y una calculadora por U$S 15. El vendedor te dice que la calculadora está "on sale" a U$S 10 en la otra sucursal de la tienda, que queda a 20 minutos caminando. El equipo de música está al mismo precio. ¿Irías a la otra tienda?

Sucede que la fracción de individuos que responden que irían a la otra tienda es mucho mayor que la fracción que dice que iría cuando se cambia la pregunta de tal forma que el descuento de U$S 5 es en el equipo de música. Lo "raro" de eso es que la fracción "debería" ser la misma, pues el viaje y el ahorro en ambos casos son iguales. De hecho, uno espera que la respuesta a la siguiente pregunta sea indiferencia

> Se agotaron las calculadoras y los equipos de audio en esta tienda. Tenés que ir a la otra tienda a comprar ambas cosas, y recibirás un descuento de U$S 5 en alguno de los items. ¿Te importa en cuál?

La violación de transitividad queda clara si ponemos

$$\begin{array}{rcl} x & \rightarrow & \text{Ir a la otra tienda y recibir el descuento en la calculadora} \\ y & \rightarrow & \text{Ir a la otra tienda y recibir el descuento en el equipo de audio} \\ z & \rightarrow & \text{Comprar las dos cosas en la primera tienda.} \end{array}$$

Las dos primeras elecciones de la gente demuestran que $x \succ z$ y $z \succ y$, pero la última demuestra que $x \sim y$.

Cuento C: A una familia de tres personas se les pregunta: ¿Qué prefieren, ir al Cine o ir a una Parrillada? Dicen $C \succ P$. Les preguntamos ahora ¿Qué prefieren, ir a la Parrillada, o jugar al Nintendo? Dicen $P \succ N$. Finalmente les preguntamos ¿Qué prefieren, jugar al Nintendo, o ir al Cine? Dicen $N \succ C$. Parece que las preferencias son no transitivas, y por tanto "irracionales". Sin embargo, si las preferencias del padre, madre y niño son

$$\begin{array}{rcl} P & \succ & {}_p N \succ_p C \\ C & \succ & {}_m P \succ_m N \\ N & \succ & {}_n C \succ_n P \end{array}$$

y se decide por votación qué hacer, obtenemos las elecciones del principio. Este "problema" se llama la paradoja de Condorcet.

Cuento D: A veces podemos observar intransitividades en las elecciones, debido a un cambio en gustos. Para un potencial fumador, las preferencias sobre cantidades de cigarrillos diarios pueden ser

$$1 \succ 0 \succ 40$$

pero una vez que empieza a fumar uno por día (demostrando $1 \succ 40$), sus preferencias pueden cambiar a

$$40 \succ 1 \succ 0$$

y cuando empieza a fumar 40 por día, observaríamos $40 \succ 1$. Juntando ambas observaciones tenemos $40 \succ 1 \succ 40$.

Ejercicio 4: En el Ejemplo 1 determinar si cada relación satisface cada una de las siguientes propiedades: completa, transitiva y reflexiva.

Ejercicio 5: Una relación binaria $\succeq$ es:
negativamente transitiva si para todo $x, y, z \in X$, $(x,y) \notin \succeq$ y $(y,z) \notin \succeq$ implican que $(x,z) \notin \succeq$.
asimétrica si para todo $x, y \in X$, $x \succeq y$ implica que $(y,x) \notin \succeq$.
(a) Dar un ejemplo de una relación negativamente transitiva.
(b) Dar un ejemplo de una relación asimétrica.
(c) Dar un ejemplo de una relación negativamente transitiva que no sea asimétrica.
(d) Dar un ejemplo de una asimétrica que no sea negativamente transitiva.

Ejercicio 6: (del Mas-Colell et. al.) Demostrar que si una relación de preferencias $\succeq$ es completa y transitiva, entonces
(i) $\succ$ es irreflexiva (es decir, $(x,x) \notin \succ$) y transitiva
(ii) $\sim$ es reflexiva, transitiva y **simétrica** (si $x \sim y$ entonces $y \sim x$).
(iii) si $x \succ y \succeq z$, entonces $x \succ z$.

Ejercicio 7. Demostrar que $\succeq$ es negativamente transitiva si y sólo si, para todo $x, y, z \in X$, $x \succeq z$ implica que para todo y, $x \succeq y$ ó $y \succeq z$.

Ejercicio 8. Presentamos ahora un falso teorema, con una demostración incorrecta. El ejercicio es encontrar un error en la demostración, y un contraejemplo al teorema.

Falso Teorema: Si una relación binaria $B \subseteq X \times X$ es simétrica y transitiva, entonces es reflexiva.

Demostración Incorrecta: Tomo $x \in X$ y cualquier $y \in X$ tal que xBy. Por simetría, obtengo yBx. Ahora, xBy y yBx implican, por transitividad, xBx, como queríamos demostrar.

Parte A: Encontrar el error en la demostración.

Parte B: Encontrar un contraejemplo al teorema. Es decir, encontrar o inventar una relación B tal que B es simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

Ejercicio 9. R es circular si para todo $x, y, z \in X$, xRy y yRz implican zRx para todo x, y, z. Demostrar que R es reflexiva y circular si y sólo si es reflexiva simétrica y transitiva.

Ejercicio 10. Sea X un conjunto cualquiera, sea $\succeq$ una relación binaria en X y sea $\sim$ la relación de indiferencia definida a partir de $\succeq$.

Parte A. Demuestre que si $\sim$ es completa entonces no existen $x, y \in X$ tales que $x \succ y$.

Parte B. Demuestre que si $\succeq$ es completa y no existen $x, y \in X$ tales que $x \succ y$, entonces $\sim$ es completa.

Ejercicio 11. Sean X un conjunto arbitrario y R_1 y R_2 dos relaciones binarias en X.

Parte A. Demuestre o encuentre un contraejemplo: si R_1 y R_2 son completas, entonces $R = R_1 \cap R_2$ es completa.

Parte B. Demuestre o encuentre un contraejemplo: si R_1 y R_2 son transitivas, entonces $R = R_1 \cap R_2$ es transitiva.

Ejercicio 12. Sea X un conjunto arbitrario y sea R cualquier subconjunto de $X \times X$. Se dice que otro subconjunto S de $X \times X$ es una **extensión** de R si $R \subseteq S$. Se define a la **extensión transitiva más chica de** R como la intersección de todas las extensiones transitivas de R. Es decir, si definimos $\mathcal{E}_R$ como el conjunto de todas las extensiones transitivas de R, $\mathcal{E}_R = \{S : S \text{ es una extensión transitiva de } R\}$, la extensión transitiva más chica de R es la relación binaria

$$R_T = \bigcap_{S \in \mathcal{E}_R} S.$$

Parte A. Demuestre que si $\mathcal{E}$ es un conjunto arbitrario, no vacío, de relaciones binarias que son extensiones de R, entonces su intersección es una extensión de R.

Parte B. Demuestre que $X \times X$ es una extensión transitiva de R.

Parte C. Usando las Partes A y B, demuestre que R_T es una extensión transitiva de R.

Parte D. Demuestre que si S es cualquier extensión transitiva de R, entonces $S \subseteq R_T$.

Parte E. Demuestre que xR_Ty si y sólo si existen $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $x_1Rx_2R...Rx_n$.

Una relación de preferencias $\succeq_i$ en el espacio de consumo X_i es **localmente no saciable** si para cada $x_i \in X_i$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $x_i' \in X_i$ tal que $\|x_i - x_i'\| < \varepsilon$ y $x_i' \succ x_i$. Una relación de preferencias $\succeq \subseteq X \times X$ para $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es:

monótona si $y \gg x$ (es decir $y_i > x_i$ para todo i) implica $y \succ x$.

estrictamente monótona si $y > x$ (es decir $y \geq x$ y $x \neq y$) implica $y \succ x$.

Ejercicio 13. Sea $X = \mathbf{R}_+^L$ y sea $\succeq$ una relación de preferencias monótona. Demuestre que si una relación de preferencias es monótona, entonces es localmente no saciable.

Ejercicio 14. Una relación de preferencias $\succeq$ en $X = \mathbf{R}_+^L$ es **convexa** si el conjunto $U = \{y : y \succeq x\}$ es convexo para todo x y es estrictamente convexa si $y \succeq x$ y $z \succeq x$ implican que $\alpha y + (1-\alpha) z \succ x$ para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha \in (0,1)$.

Parte A. Demuestre que si una relación de preferencias es convexa, entonces para cualquier conjunto convexo C, el conjunto $\{x : x \succeq y$ para todo $y \in C\}$ es convexo.

Parte B. Demuestre que si una relación de preferencias es **estrictamente convexa**, entonces para cualquier conjunto convexo C, el conjunto $\{x : x \succeq y$ para todo $y \in C\}$ consiste de un solo elemento.

Ejercicio 15. Sea $X = \{1,2,3,4\}$ y sea $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$. Si $\succeq$ es transitiva y $R \subseteq \succeq$, liste tres pares (x,y) que no están en R, que tienen que estar necesariamente en $\succeq$.

Referencias: Parte de este material proviene de "Notes on the theory of choice," de David Kreps. También hay algo tomado de "Micoreconomic Theory," de Mas-Colell, Whinston y Green. La cita de Kahneman y Tversky es: "Choices Values and Frames," *American Psychologist* **39**, 341-50.