# Estática Comparativa o Comparada

A menudo en economía nos interesa saber cómo cambian un conjunto de variables endógenas ante un cambio en variables exógenas. A ese tipo de estudio, se le llama de estática comparada. Por ejemplo, nos interesa saber cómo cambia la cantidad de trabajo demandada por una firma cuando suben los salarios. En estas notas nos dedicaremos a ver los métodos más tradicionales de estática comparada, y un método más nuevo y mejor. El ejemplo que guiará la presentación es el de la demanda de trabajo por parte de la firma.

Hay una firma que posee una tecnología que transforma trabajo, $l$, en un producto, mediante una tecnología $f$. El precio del bien producido es $p$, y el precio del trabajo es $w$. La pregunta que nos interesa contestar es: ¿Cómo cambia la demanda de trabajo cuando cambia $w$? Para contestar esa pregunta hay por lo menos cuatro métodos, cada uno con diferentes características. Se mostrará en estas notas que es falsa la aseveración típica de muchos economistas y libros de texto que dice:

> La demanda de trabajo tiene pendiente negativa, porque el trabajo tiene rendimientos marginales decrecientes.

Veremos que si uno usa los dos métodos típicos puede llegar, erróneamente, a esa conclusión, mientras que si usa un tercer método, más moderno, se ve que la productividad marginal del trabajo no tiene nada que ver con la pendiente de la demanda de trabajo.

**Métodos 1 y 2: Derivando.**

En general, el camino que adoptan los economistas es el de asumir que $f$ es tal que $f' > 0$ y $f'' < 0$. Con esos supuestos, el problema del empresario es el de elegir $l$ para maximizar

$$v(l, w) = pf(l) - wl$$

y la condición de primer orden

$$f'(l^*) = \frac{w}{p} \tag{1}$$

es necesaria y suficiente para que $l^*$ sea óptima para $\frac{w}{p}$. Ya a esta altura usamos que $f$ es derivable dos veces, y que $f'' < 0$, para que la condición de primer orden sea también suficiente.

Como $f'' < 0$, para cada $W = w/p$, existe un único $l(W)$ que satisface la ecuación (1), por lo que se puede escribir

$$f'(l(W)) \equiv W. \tag{2}$$

**Método A. "Intuitivo" pero Incorrecto y Restrictivo.**

Este método dice algo tipo:

> En la ecuación (2), como es una identidad, pues es la definición de $l(W)$, puedo ver cómo cambian ambos lados, ante cambios "chicos" en $W$. El cambio en el lado izquierdo es la derivada de $f'$, por el cambio en $l$, mientras que el cambio en el lado derecho, será sólo el cambio en $W$. Si llamo $dx$ a un cambio chico en $x$, para cualquier variable $x$, obtengo
>
> $$f''(l(W))\, dl(W) = dW$$

y reacomodando términos,

$$\frac{dl\left(W\right)}{dW}=\frac{1}{f''\left(l\left(W\right)\right)}$$

por lo que la pendiente de la demanda de trabajo es negativa. Es más, si la $f$ no fuera cóncava, la pendiente de la demanda de trabajo podría ser positiva.

Aunque el método es medianamente intuitivo, es incorrecto porque los cambios "infinitesimalmente pequeños" $dW$ y $dl$, no existen como objetos matemáticos. Además, el método es restrictivo porque sigue usando que $f''$ existe y es negativa. Lo más peligroso de todo, es la última oración, la que dice que si $f''$ no fuera negativa, la pendiente de la demanda de trabajo podría ser positiva. Esto está mal, y surge como consecuencia de haber usado este método.■

**Método B. "Técnico" pero Correcto y Restrictivo.**

Este segundo método se basa en el Teorema de la función inversa, que en su versión más sencilla, y cortando grueso en los detalles dice así.

**Teorema 1. Teorema de la Función Inversa.** Si $g:X\rightarrow\mathbf{R}$ para algún $X\subseteq\mathbf{R}$ es tal que

$$\begin{array}{ccc} g'\left(x\right) & > & 0 \quad \forall x \\ & & o \\ g'\left(x\right) & < & 0 \quad \forall x \end{array}$$

entonces existe una función $g^{-1}$ que llamamos la función inversa, que va de la imagen de $g$ a $X$ tal que $g\left(g^{-1}\left(y\right)\right)=y$ para todo $y$ en la imagen de $g$, y $g^{-1}\left(g\left(x\right)\right)=x$ para todo $x$ en $X$. Además,

$$\frac{dg^{-1}\left(y\right)}{dy}=\frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(y\right)\right)}. \tag{3}$$

**Prueba.** Que la función inversa existe es obvio pues como la $g$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente) a cada $y$ de la imagen le corresponde un solo $x$ en $X$ : ese $x$ es $g^{-1}\left(y\right)$. Para ver que la ecuación (3) es cierta, alcanza con ver que derivando en ambos lados de $g\left(g^{-1}\left(y\right)\right)=y$ con respecto a $y$ se obtiene, por la regla de la cadena,

$$\frac{dg\left(g^{-1}\left(y\right)\right)}{dy}=1\Leftrightarrow g'\left(g^{-1}\left(y\right)\right)\frac{dg^{-1}\left(y\right)}{dy}=1\Leftrightarrow\frac{dg^{-1}\left(y\right)}{dy}=\frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(y\right)\right)}$$

como queríamos demostrar.■

Tenemos ahora que la función $f'$ (que debemos pensar que es la $g$ del teorema) mapea $\mathbf{R}_+$ a $\mathbf{R}$, y por tanto,

$$l=f'^{-1}\left(W\right)\quad\text{y}\quad\frac{dl}{dW}=\frac{df'^{-1}\left(W\right)}{dW}=\frac{1}{f''\left(f'^{-1}\left(W\right)\right)}=\frac{1}{f''\left(l\right)}<0$$

como queríamos demostrar.■

**Método C. "Económico", Correcto y General.**

Sea $w>w'$ y sean $l\left(w\right)$ y $l\left(w'\right)$ las cantidades de trabajo óptimas correspondientes a $w$ y $w'$ respectivamente. No las estamos encontrando, ni caracterizando de donde salen, pero ese no es nuestro problema. La pregunta que queremos contestar es bajo qué condiciones es cierto que $l(w) \le l(w')$. Como $l(w)$ maximiza beneficios para $w$ y $l(w')$ maximiza beneficios para $w'$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} pf(l(w)) - wl(w) \ge pf(l(w')) - wl(w') & \Rightarrow & pf(l(w)) - wl(w) \ge pf(l(w')) - wl(w') \\ pf(l(w')) - w'l(w') \ge pf(l(w)) - w'l(w) & \Rightarrow & w'l(w) - pf(l(w)) \ge w'l(w') - pf(l(w')) \\ \hline & & l(w)(w'-w) \ge l(w')(w'-w) \end{array} \quad +$$

y esto implica a su vez $(l(w) - l(w'))(w'-w) \ge 0$, o lo que es lo mismo, que $l(w) \le l(w')$.

Con este método vemos que la forma de $f$ no tiene absolutamente nada que ver con la pendiente de la demanda de trabajo: la pendiente de la demanda de trabajo es negativa, porque con un sueldo más caro, es más caro contratar trabajadores. No tiene absolutamente nada que ver con la productividad marginal decreciente del trabajo. La razón del error común de atribuir la pendiente de la demanda a la forma de $f$ en los libros de texto, se origina en el hecho que $f$ se asume convexa para poder aplicar los métodos típicos de estática comparada.■

Veremos ahora un método para hacer estática comparada que no usa para nada las derivadas, ni la concavidad, ni nada de eso. Lo que viene, está basado en el trabajo de Milgrom y Shannon "Monotone Comparative Statics" publicado en la revista Econometrica, vol. 62, año 1994.

Sean $X$ y $T$ dos subconjuntos de $\mathbf{R}$. Interpretaremos $X$ como el conjunto de acciones que puede tomar un individuo o una firma, y $T$ como un conjunto de parámetros exógenos (el salario en el ejemplo que venimos viendo). Para $f : X \times T \to \mathbf{R}$ decimos que satisface la propiedad del **cruce único** en $(x;t)$ si

$$\left.\begin{array}{c} x' > x \\ t' > t \\ f(x',t) > f(x,t) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x',t') > f(x,t')$$

La idea general es que si vale la pena usar la acción "alta" $x'$ y no la "baja" $x$ cuando el parámetro es el bajo, $t$, también vale la pena usar la acción alta $x'$ y no la $x$ cuando el parámetro sube a $t'$. La idea es que $x$ y $t$ son, de alguna forma, complementarios. Se llama la propiedad del cruce único porque, como función de $t$, $f(x',t) - f(x,t)$ cruza 0 una sola vez, y desde abajo. El siguiente es una versión super sencilla del Teorema 4 de Milgrom y Shannon, para el caso que más van a usar en sus carreras: un parámetro y la variable de elección en $\mathbf{R}$.

**Teorema 4**. Para $X, T \subseteq \mathbf{R}$ y $f : X \times T \to \mathbf{R}$, si $f$ satisface la propiedad del cruce único en $(x,t)$ y

$$x(t) = \arg\max_{x \in X} f(x,t)$$

es una función, entonces $x(\cdot)$ es débilmente creciente.

**Prueba**. Debemos demostrar que si $t' > t$, entonces $x(t') \ge x(t)$. Supongamos $x(t) < x(t')$. Como $x(t)$ es el único $x$ que maximiza $f(\cdot,t)$, tenemos que $f(x(t),t) > f(x(t'),t)$. Poniendo $x(t) = x'$ y $x(t') = x$ en la propiedad del cruce único, vemos que

$$f(x',t') > f(x,t') \Rightarrow f(x(t),t') > f(x(t'),t')$$

lo que contradice que $x(t')$ maximiza $f(\cdot,t')$. Obtenemos entonces $x(t') \ge x(t)$ como queríamos demostrar.■

**Comentario**. El Teorema de Milgrom y Shannon es mucho más fuerte que este, porque vale para espacios $X$ y $T$ mucho más generales que los considerados en el Teorema 4. Pero además, su Teorema también asegura que si $x(t)$ es creciente, entonces $f$ tiene la propiedad del cruce único.

Para ver que la estática comparada es mucho más fácil usando este método que el de las derivadas y todo eso, verificamos ahora que la demanda de trabajo tiene pendiente negativa, mostrando que $f$ satisface el cruce único.

**Ejercicio 5**. Verifique que si llamamos $T$ a $-\mathbf{R}_+$, y $t=-w$ para cada salario, la función

$$pf(l)-wl=pf(l)+tl$$

tiene la propiedad del cruce único en $(l,t)$.