Teorema de la Envolvente

En este capítulo presentamos una versión sencilla de un resultado muy útil que se llama el Teorema de la Envolvente.

Teorema de la Envolvente. Suponga que para cada x la función $g(x,\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es derivable y que alcanza un máximo en un único $y(x)$ que es una función derivable de x. Entonces, si

$$f(x)=\max_y g(x,y)$$

es derivable, tenemos

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}.$$

Demostración. Como $g(x,\cdot)$ es derivable y alcanza un máximo, debemos tener que en el $y(x)$ que maximiza $g(x,\cdot)$ se cumple que

$$\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y(x))}=0. \tag{1}$$

Como por definición $f(x)=g(x,y(x))$, tenemos que por la regla de la cadena y usando la ecuación (1),

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}+\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y(x))}\frac{dy(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}+0\frac{dy(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}$$

como queríamos demostrar. ■

Veremos ahora un ejemplo de cómo funciona el Teorema de la Envolvente.

Ejemplo 1. Sea $g(x,y)=-y(y-x)$. El y óptimo para cada x es $y(x)=x/2$. Por lo tanto, $f(x)=x^2/4$. Vemos entonces que

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{x}{2}.$$

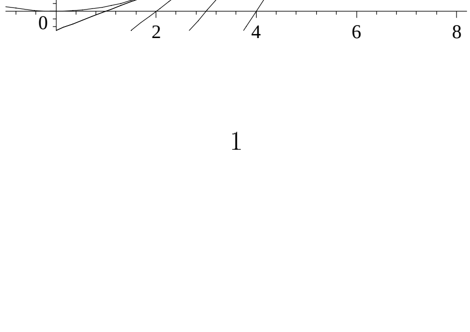
Usando el Teorema de la Envolvente y $\partial g/\partial x=y$ obtenemos

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}=y|_{(x,y(x))}=\frac{x}{2}$$

que es lo mismo que hacer el cálculo directamente.

En este ejemplo es útil y fácil hacer dos gráficos. En el primero, ponemos y en las abcisas. Para cada x la función g es una parábola con un máximo en $x/2$ y raíces 0 y x. Eso ilustra por qué $y(x)=x/2$.

El segundo gráfico es más interesante, e ilustra por qué se llama Teorema de la Envolvente. Graficamos $g(x,y)$ para $y=1,2,3$ y 4. La curva que "envuelve" a todas esas rectas "por encima" es $x^2/4$, es decir, la función $f(x)$. Esta función es la que elige, para cada x el y que hace que la función $g(x,y)$ sea la más alta.



Así por ejemplo, tenemos que para $x = 2$, la recta más alta es la que corresponde a $y = 1$, que está graficada. Para esa recta, la pendiente es 1. No es casualidad que la pendiente de $f(x) = x^2/4$ en $x = 2$ es 1. ■

En términos "intuitivos" o "económicos" el Teorema de la Envolvente nos dice que cuando cambia x, el valor máximo de f cambia por dos motivos. Primero, cambia por el cambio directo sobre g. Pero f también cambia por el cambio en g provocado por el cambio en el y óptimo. Pero como y había sido elegido en una porción en que g era "chata" con respecto a y ($\partial g/\partial y = 0$ en el y óptimo) este segundo cambio no afecta el valor de f y sólo debemos preocuparnos por el cambio directo en g provocado por el cambio en x.

Ilustramos esto ahora con un problema de maximización de beneficios de una firma. La función de beneficios de una firma, como función de los salarios es

$$\pi(w) = \max_l [f(l) - wl].$$

Para hacerlo más concreto, supongamos que $f(l) = \sqrt{l}$. Tenemos entonces que

$$l(w) = \frac{1}{4w^2} \quad \text{y} \quad \pi(w) = \frac{1}{4w}.$$

Cuando, por ejemplo, suben los salarios, π cae porque tenemos una cierta cantidad de gente contratada. Es más, por cada suba de \$1 en los salarios, los beneficios caen en l (eso es la derivada directa de $f(l) - wl$ con respecto a w). Pero a este efecto se suma el hecho que la cantidad óptima de trabajadores cambia al subir el salario, y este cambio en la cantidad de gente contratada también afecta los beneficios. El Teorema de la Envolvente nos dice que este segundo efecto no es relevante. Entonces, el cambio en los beneficios es $-l$ evaluado en el óptimo, $1/4w^2$. Si derivamos $\pi(w)$ con respecto a w vemos que eso es correcto.