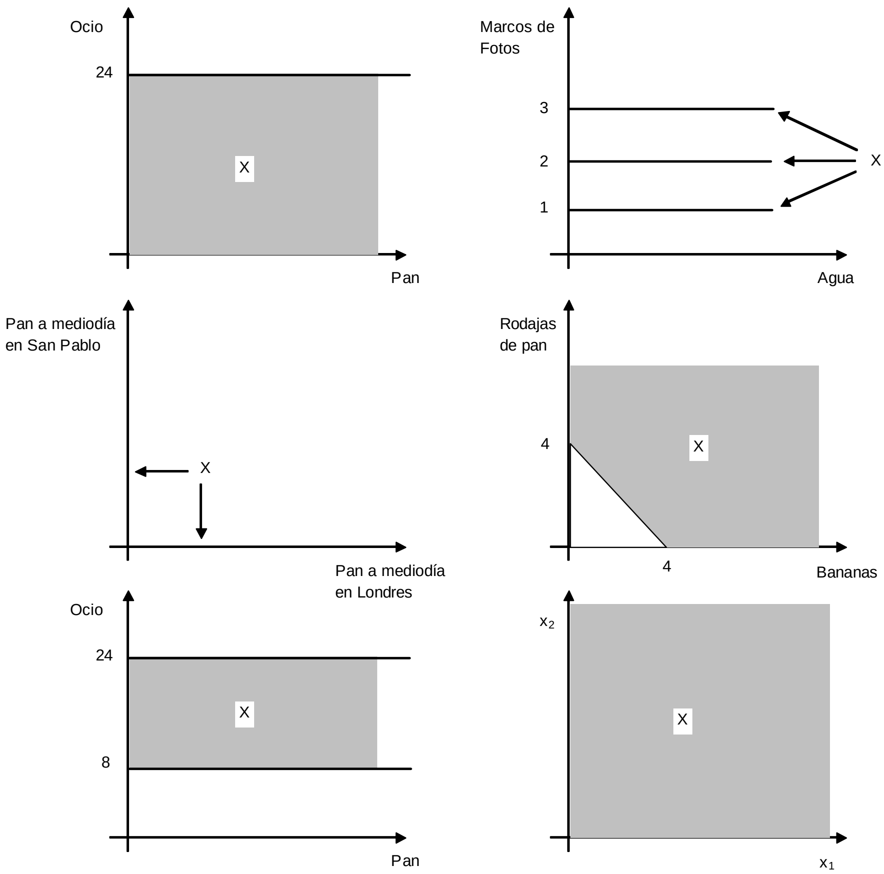
Demanda sin asumir que vienen de Preferencias

El espacio de consumo. Hasta ahora el conjunto X, el "espacio de consumo" había sido un conjunto arbitrario. En los capítulos que siguen, X será un subconjunto de $\mathbf{R}_+^L$, y la componente i de un vector $x = (x_1, ..., x_L)$ será el consumo del bien i-ésimo.

Aunque en general X será todo $\mathbf{R}_+^L$, no tiene porqué ser así. Uno puede introducir en la descripción de X restricciones tanto físicas como legales. Por ejemplo, el Panel A de la figura siguiente representa el espacio de consumo para un individuo que debe elegir cuánto pan y ocio consumir en un día: nunca podrá consumir más de 24 horas de ocio. Similarmente, como uno no puede consumir 2,5 marcos de fotos, el conjunto X debe reflejar que los marcos de fotos se consumen en cantidades enteras, como en el Panel B. En algunos casos los bienes representados en una canasta son "bananas hoy" o "bananas mañana", y en otros, los bienes tienen una dimensión "espacial" (en dónde serán consumidos). En el Panel C se representa una situación en la cual el individuo no podría comer a la misma hora (mediodía en Greenwich) pan en Londres y pan en San Pablo. El Panel D muestra una situación en la cual X se ha elegido para mostrar que el individuo "no puede" comer menos de 4 unidades de alimento entre rodajas de pan, y bananas, pues se moriría. Como adelantamos, el conjunto X también puede reflejar alguna restricción legal, como que un individuo no puede trabajar más de 16 horas al día. El Panel E muestra el conjunto X asociado a esa restricción. Finalmente, el Panel F muestra la situación que será la normal para nosotros $X = \mathbf{R}_+^L$.



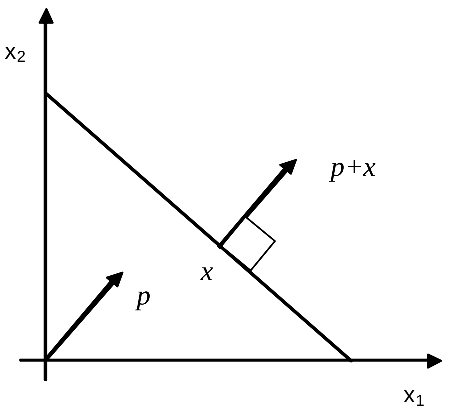
De izquierda a derecha: primera fila, Paneles A y B; segunda fila, Paneles C y D; tercera fila, Paneles E y F.

La Restricción Presupuestal Competitiva. Dado un conjunto de posibilidades de consumo X, el individuo deberá elegir alguna canasta en X dadas sus posibilidades económicas o su restricción de recursos. Para representar una situación "competitiva" utilizamos la riqueza del individuo, un número $w > 0$, y el supuesto que el individuo toma los precios $p \in \mathbf{R}^L_{++}$ como dados. Así, el individuo debe elegir una canasta dentro de su restricción presupuestal

$$B(p, w) = \{x : px \leq w\}. \tag{1}$$

Si el individuo fuera el único consumidor en la economía, o si fuera uno "muy importante" o "muy grande" podría darse cuenta que p depende de su demanda. El supuesto de una economía "competitiva" o "con muchos agentes" se plasma matemáticamente en que el individuo toma los precios como dados.

La siguiente gráfica ilustra una restricción presupuestal para unos precios $p \gg 0$ (cada precio estrictamente positivo). Vemos que la línea presupuestal es perpendicular al vector de precios, y que los puntos como x son aquellos que gastan todo el ingreso: $px = w$.



La Demanda Walrasiana. La demanda Walrasiana es una función $x(p, w)$ que le asigna una canasta "elegida" a cada par de precios p y riqueza w.[1] El enfoque adoptado en los primeros capítulos, sobre preferencias, elección y utilidad, era que la demanda se deducía la la maximización de la utilidad, o de la preferencia, o que estaba determinada por una cierta "estructura de elección" que seguía el individuo. Aquí no nos interesa de dónde sale la demanda. La tomamos como dada.

En este capítulo veremos qué consecuencias tienen sobre la estructura de la demanda: la homogeneidad de grado 0, la ley de Walras y el Axioma Débil de la Preferencia Revelada. Luego veremos qué se precisa para que la demanda agregada, la suma de las demandas individuales, cumpla con el Axioma Débil. Sea $X = \mathbf{R}^L_+$ el espacio de los bienes de consumo. La demanda Walrasiana $x(p, w)$:

1. es **homogénea de grado** 0 si $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ para todo p, w y $\alpha > 0$.
2. **satisface la ley de Walras** si para todo $p \gg 0$, y $w > 0$, tenemos $px(p, w) = w$.

En los capítulos anteriores la homogeneidad de grado 0 se deducía del hecho que si se multiplican los precios y la riqueza por cualquier número positivo, la restricción presupuestal no cambia. Por lo tanto, si x maximizaba la utilidad (o las preferencias) para (p, w), también lo haría para $(\alpha p, \alpha w)$. Aquí asumimos la

[1] En principio, $x(p, w)$ podría ser un conjunto de canastas y no una sola, pero asumiremos que es una sola.

homogeneidad de grado 0, porque no estamos diciendo de dónde sale la demanda. Similarmente, en capítulos anteriores, la ley de Walras se deducía de la no saciabilidad local. Aquí la asumimos.

Nos interesa ahora estudiar qué propiedades son razonables para una función de demanda, y qué implican esas propiedades sobre la demanda cuando cambian los precios y la riqueza.

La Homogeneidad de Grado 0 y la Demanda Individual

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1. Suponga que la demanda Walrasiana $x(p,w)$ es homogénea de grado 0 y que es derivable. Entonces, para todo p y w :

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} w = 0 \quad \text{para } l = 1, 2, ..., L$$

o, en términos de matrices,

$$D_p x(p,w)\, p + D_w x(p,w)\, w = 0.$$

Prueba. Tomando $x_l(\alpha p, \alpha w) = x_l(p,w)$ y derivando con respecto a α de ambos lados obtenemos

$$\sum_{k=1}^{L} \left[\left. \frac{\partial x_l}{\partial p_k} p_k \right|_{(p,w)=(\alpha p,\alpha w)} + \left. \frac{\partial x_l}{\partial w} w \right|_{(p,w)=(\alpha p,\alpha w)} \right] = 0$$

y evaluando en $\alpha = 1$ obtenemos el resultado deseado. ■

Recordamos la definición de las elasticidades precio e ingreso de la demanda:

$$\varepsilon_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l(p,w)} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{lw}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \frac{w}{x_l(p,w)}.$$

El Teorema anterior implica entonces el siguiente resultado.

Corolario 2. Suponga que la demanda Walrasiana $x(p,w)$ es homogénea de grado 0 y que es derivable. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk}(p,w) + \varepsilon_{lw}(p,w) = 0$$

para $l = 1, 2, ..., L$.

La Ley de Walras y la Demanda Individual

Analizamos ahora las consecuencias de la ley de Walras.

Teorema 3. Suponga que la demanda Walrasiana $x(p,w)$ satisface la ley de Walras y que es derivable. Entonces, para todo p y w :

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} p_l + x_k(p,w) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, ..., L$$

o, en términos de matrices,

$$pD_p x(p,w) + x(p,w)^T = 0^T.$$

Prueba. Tomando $px(p,w) = w$ y derivando con respecto a p_k de ambos lados obtenemos directamente lo que queremos demostrar. ■

Teorema 4. Suponga que la demanda Walrasiana $x(p,w)$ satisface la ley de Walras y que es derivable. Entonces, para todo p y w :

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} p_l = 1$$

o, en términos de matrices,

$$pD_w x(p,w) = 1.$$

Ejercicio 5. Demuestre el Teorema 4.

Ejercicio 6. Sea $b_l(p,w) = p_l x_l(p,w)/w$ la proporción del gasto en el bien l. Usando los Teoremas 3 y 4 demuestre que

$$\sum_{k=1}^{L} b_l(p,w)\,\varepsilon_{lk}(p,w) + b_k(p,w) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{L} b_l(p,w)\,\varepsilon_{lk}(p,w) = 1$$

El Axioma Débil y la Demanda Individual

Para estructuras de elección, habíamos argumentado que el axioma débil de la preferencia revelada. En este contexto, tenemos:

La demanda Walrasiana $x(p,w)$ satisface el **Axioma Débil de la Preferencia Revelada** (AD) si se satisface que para todo (p,w) y (p',w')

$$\left.\begin{array}{c} px(p',w') \leq w \\ x(p,w) \neq x(p',w') \end{array}\right\} \Rightarrow p'x(p,w) > w'$$

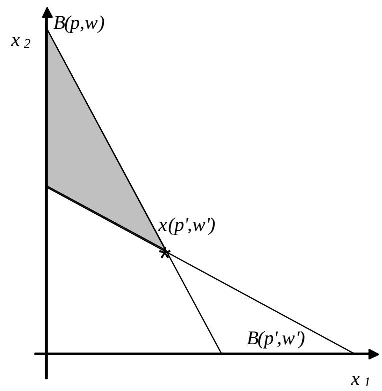
El axioma dice que si $x(p',w')$ no se eligió cuando se podría haber elegido (costaba menos que w a precios p), queriendo decir que $x(p,w)$ es "mejor" que $x(p',w')$, entonces a los precios p', $x(p,w)$ cuesta más que w' (pues sino, debería elegirse $x(p,w)$).

Uno de los objetivos de este capítulo es estudiar las consecuencias del Axioma Débil sobre la "forma" de la función de demanda. Una propiedad que a veces se asocia con propiedades poco "obvias" de la elección del consumidor (tipo, función de utilidad cóncava, o cosas del estilo) es que la demanda de un bien decrece con el precio. El siguiente teorema mostrará que se satisface el Axioma Débil si y sólo si la demanda decrece con el precio, siempre que se ajuste la riqueza del individuo para compensar el cambio. Formalmente, decimos que la demanda $x(p,w)$ satisface la **Ley de la Demanda Compensada** si

$$(p' - p)(x(p',w') - x(p,w)) \leq 0, \tag{2}$$

con desigualdad estricta si $x(p',w') \neq x(p,w)$, para todo $w' = p'x(p,w)$. Esta condición dice aún más, pues es válido no sólo para un cambio de uno solo de los precios, sino para cambios en todos los precios al mismo tiempo. Vemos entonces que si los cambios en los precios son compensados por cambios en la riqueza, la demanda de un bien cuyo precio sube debe caer. Cuando se considera la demanda no compensada, se puede dar, en principio, la existencia de bienes tipo Giffen, cuya demanda sube cuando sube el precio. Si la demanda satisface la Ley de la Demanda Compensada, esto es imposible.

Decimos que (p, w) es una **variación compensada** de (p', w') si $w = px(p', w')$. Gráficamente, un par (p, w) es una variación compensada de (p', w') si la restricción presupuestal asociada a (p, w) pasa por $x(p', w')$. La Ley de la Demanda Compensada cuando $X = \mathbf{R}_+^2$ nos dice que ante una variación compensada en los precios y la riqueza, la "nueva demanda" $x(p, w)$ tiene que estar por encima de la restricción presupuestal "vieja", correspondiente a (p', w'). Eso es así pues si, por ejemplo, sube p_1 y se mantiene p_2 constante (al pasar de p' a p), debe caer x_1. Gráficamente tenemos que $x(p, w)$ debe estar en la zona gris del siguiente gráfico.



Veremos ahora que la Ley de la Demanda Compensada es equivalente al Axioma Débil, y que por tanto "deberíamos" esperar que se cumpliera siempre, pues el Axioma Débil es una propiedad que "deberíamos" esperar que se cumpliera.

Teorema 7. Suponga que la demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisface la ley de Walras. Entonces $x(p, w)$ satisface el axioma débil si y sólo si satisface la Ley de la Demanda Compensada.

Antes de proceder a la demostración de este Teorema, demostraremos un Lema que utilizaremos en la prueba. El Lema dice que se viola el axioma débil para dos pares (p', w') y (p'', w'') si y sólo si se puede encontrar un par (p, w) que es una variación compensada de (p', w') y de (p'', w'') para el cual se viola el axioma débil. La utilidad del Lema es que, al verificar si se satisface el axioma débil, nos permite restringirnos a comparaciones sólo de pares de precios y riquezas que son compensados. Si se satisface el axioma débil para todos esos pares, entonces se satisface el axioma débil para cualquier par de precios y riquezas.

Lema 8. Asuma que $x(p, w)$ satisface la ley de Walras. Si se viola el Axioma Débil, existen (p', w') y una variación compensada (p, w) tales que $x(p, w) \neq x(p', w')$ y $p'x(p, w) \leq w'$. Es decir, $x(p, w)$ y $x(p', w')$ también muestran que se viola el Axioma Débil.

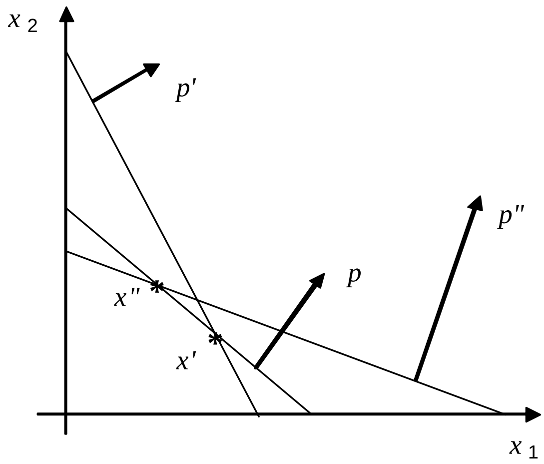
Prueba. Si se viola el axioma débil, existen (p', w') y (p'', w'') tales que $x' \equiv x(p', w') \neq x(p'', w'') \equiv x''$, $p'x'' \leq w'$ y $p''x' \leq w''$. Si $p'x'' = w'$, (p', w') es una variación compensada de (p'', w'') que viola el Axioma Débil, y es cierto el lema. Similarmente, si $p''x' = w''$, tampoco hay nada que demostrar, por lo que resta analizar sólo el caso en que $p''x' < w''$ y $p'x'' < w'$. Sea $f(a)$ definida por

$$f(a) = (ap' + (1 - a)p'')(x' - x'').$$

Tenemos que $f(1) = p'(x' - x'') = w' - p'x'' > 0$ y $f(0) = p''(x' - x'') = p''x' - w'' < 0$, y como f es continua, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$, o lo que es lo mismo,

$$(\alpha p' + (1 - \alpha)p'')x' = (\alpha p' + (1 - \alpha)p'')x'' \equiv w. \tag{3}$$

Poniendo $p \equiv \alpha p' + (1-\alpha)p''$ vemos que (p,w) es una variación compensada tanto de (p',w') como de (p'',w''). La siguiente gráfica muestra la construcción de p.



Tenemos entonces que para $x = x(p,w)$

$$\begin{aligned}\alpha w' + (1-\alpha)w'' &= \alpha p'x' + (1-\alpha)p''x'' > \alpha p'x' + (1-\alpha)p''x' = w = px \\ &= \alpha p'x + (1-\alpha)p''x\end{aligned}$$

por lo que debemos tener $p'x < w'$ o $p''x < w''$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p'x < w'$ (si es la otra desigualdad, la demostración es idéntica). Como $p'x < w'$ y $p'x' = w'$, debemos tener $x \neq x'$, y como además $px' = w$, por la ecuación (3), se viola el Axioma Débil, como queríamos demostrar. ■

Prueba del Teorema 7. Primera Parte: ⇒ o el Axioma Débil implica la Ley de la Demanda Compensada. Si $x' \equiv x(p',w') = x(p,w) \equiv x$, obtenemos $(p'-p)(x'-x) = 0$, como queríamos demostrar. Supongamos ahora que $x' \neq x$, para mostar que se cumple la ecuación (2) con desigualdad estricta. Tenemos entonces que por la ley de Walras y $p'x = w'$,

$$p'(x'-x) = 0. \tag{4}$$

Además, como x se puede comprar a precios p' y riqueza w' y $x \neq x'$, el axioma débil nos dice que $px' > w$ y entonces

$$p(x'-x) > 0. \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) dicen entonces que $(p'-p)(x'-x) < 0$ como queríamos demostrar.

Segunda Parte: ⇐ o la Ley de la Demanda Compensada implica al Axioma Débil. Supondremos que se viola el Axioma Débil y mostraremos que se viola la Ley de la Demanda Compensada. Por el Lema 8 sabemos que si se viola el Axioma Débil, existen (p',w') y una variación compensada (p,w), $w = px'$, tales que $x(p,w) \neq x(p',w')$ y $p'x(p,w) \leq w'$. Obtenemos entonces

$$p(x'-x) = 0 \quad \text{y} \quad p'(x'-x) \geq 0$$

que implican, junto con $x \neq x'$

$$(p' - p)(x' - x) \geq 0 \quad \text{y} \quad x \neq x'$$

lo que contradice la Ley de la Demanda Compensada, como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 9. Considere los precios de los bienes 1 y 2, y las riquezas y elecciones de Hugo, Paco y Luis en cuatro días distintos, presentados en la siguiente tabla. Debajo de cada individuo se presentan pares de la forma $[w, x(p, w)]$:

Precios	Hugo	Paco	Luis
$(4, 2)$	$[12.000, (1.500, 3.000)]$	$[12.000, (1.500, 3.000)]$	$[12.000, (0, 6.000)]$
$(3, 3)$	$[3.000, (500, 500)]$	$[3.000, (300, 600)]$	$[3.000, (500, 500)]$
$(2, 2)$	$[2.000, (500, 500)]$	$[2.000, (300, 600)]$	$[2.000, (1.000, 0)]$
$(1, 2)$	$[7.500, (3.750, 1.875)]$	$[1.500, (500, 500)]$	$[1.500, (1.500, 0)]$

Parte A. Indique si las demandas Walrasianas de Hugo, Paco y Luis cumplen con el Axioma Débil, si no lo cumplen, o no podemos asegurar que lo cumplan.

Parte B. Indique si las demandas Walrasianas de Hugo, Paco y Luis cumplen con la ley de Walras, si no la cumplen, o no podemos asegurar que la cumplan.

Parte C. Para cada uno de los individuos, indique si hay algún par (p, w) y (p', w') tal que (p, w) sea una variación compensada de (p', w').

Parte D. Indique si las demandas Walrasianas de Hugo, Paco y Luis cumplen con la ley de la Demanda Compensada, si no lo cumplen, o no podemos asegurar que lo cumplan.

Ejercicio 10. La "gracia" de este Ejercicio está en Paco. El par $[(1, 2), 1.500]$ es una variación compensada de $[(300, 600), 3.000]$, la demanda viola el Axioma Débil, y sin embargo, contrariamente a lo que afirma el Lema 8, no hay forma de construir una violación de la Ley de la Demanda Compensada con ese par. ¿Por qué?

Escribiremos ahora el Teorema 7 en versión "diferencial" (de cambios pequeños en p y x). Para ello, construimos la matriz de Slutsky, $S(p, w)$, que es

$$S(p, w) = D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x(p, w)^T$$

donde $D_p x(p, w)$ a la matriz de derivadas del vector $x(p, w)$ con respecto a los precios y $D_w x(p, w)$ al vector de derivadas con respecto a la riqueza y $x(p, w)^T$ es el vector x, transpuesto. El elemento s_{lk} de la matriz es

$$s_{lk}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} x_k(p, w) \tag{6}$$

y por tanto mide cuanto cambia la demanda de x_l ante un cambio en p_k que es compensado por un cambio en la riqueza para mantener el poder adquisitivo. Para ver porqué, notamos que el cambio total en la demanda por un cambio de dp_k en el precio es

$$s_{lk} dp_k = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} x_k(p, w) dp_k$$

entonces:

1. el primer término de la ecuación (6) nos da el cambio directo provocado por p_k, $(\partial x_l(p,w)/\partial p_k)\,dp_k$

2. el segundo nos dice cuánto cambia la demanda de x_l por el cambio de $x_k(p,w)\,dp_k$ en la riqueza.

Por esta razón, a la matriz de Slutsky se la llama también la matriz de sustitución. Nos dice, por ejemplo, que un bien puede ser Giffen sólo si es inferior.

El siguiente Teorema es la versión diferencial del Teorema 7.

Teorema 11. Si la función de demanda Walrasiana $x(p,w)$ es derivable, satisface la Ley de Walras, el Axioma Débil y es homogénea de grado 0, para cada (p,w) la matriz de Slutsky $S(p,w)$ satisface

$$vS(p,w)\,v \leq 0 \tag{7}$$

para todo $v \in \mathbf{R}^L$.

Prueba. Usando la regla de la cadena sobre la demanda x, obtenemos

$$dx = D_p x(p,w)\,dp + D_w x(p,w)\,dw = \left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w)\,x(p,w)^T\right] dp$$

Como el Teorema 7 nos dice que $dpdx \leq 0$ la ecuación anterior queda

$$dp\left[D_p x(p,w) + D_w x(p,w)\,x(p,w)^T\right] dp \leq 0 \tag{8}$$

para todo dp como queríamos demostrar. ■

Recordamos que la condición de la ecuación (7) es la definición de una matriz semidefinida negativa.