Demanda Agregada: Soluciones

Ejercicio 9.C. Hacemos sólo la Parte C pues la A y B son casos particulares. El individuo debe elegir x_1 y x_2 para maximizar $ax_1 + bx_2$ sujeto a $px \leq w$. Como las preferencias son localmente no saciables, podemos poner $px = w$ y despejar x_2 y sustituir en la función de utilidad. El problema es entonces el de elegir x_1 para maximizar

$$ax_1 + b\frac{w - p_1x_1}{p_2} = \frac{bw + ap_2x_1 - bp_1x_1}{p_2} = \frac{bw + x_1\left(ap_2 - bp_1\right)}{p_2}.$$

Por lo tanto, si $ap_2 > bp_1$ el coeficiente de x_1 es positivo y entonces el individuo elige x_1 lo más grande posible, sin hacer que x_2 se vuelva negativo. De la restricción presupuestal vemos que eso sucede cuando $x_1 = w/p_1$ (consume todo de x_1 y nada de x_2). Otra forma de escribir la condición $ap_2 > bp_1$ es

$$\frac{p_2}{p_1} > \frac{b}{a}.$$

Esta forma "dice" que si el bien 2 cuesta relativamente más que el bien 1 en comparación con lo que brinda de utilidad, entonces el individuo no demanda nada de 2. Otra forma de ver que la demanda de 2 será 0 es la siguiente. Supongamos que el individuo demanda una cantidad positiva del bien 2, supongamos $x_2 = 1$. El individuo puede venderla, obtener $\$p_2$ y comprar p_2/p_1 unidades del bien 1. Así, perderá b unidades de utilidad, y ganará ap_2/p_1 unidades de utilidad. Si $ap_2 > bp_1$ como veníamos asumiendo, entonces esta venta y compra le reportará una utilidad neta positiva: lo que gana, ap_2/p_1, es mayor que lo que pierde, b. El resultado es que no le conviene consumir ninguna unidad de x_2.

En forma similar, cuando $ap_2 < bp_1$, el individuo elige $x_1 = 0$. Cuando $ap_2 = bp_1$ la utilidad no depende de x_1 y al individuo le da lo mismo consumir cualquier cantidad de x_1 y x_2 que agoten su riqueza: x_1 puede ser cualquier cosa entre 0 y w/p_1 y se gastará el resto en x_2.

La demanda de x_1 es por tanto

$$x_1\left(p, w\right) = \left\{\begin{array}{cc} \frac{w}{p_1} & ap_2 > bp_1 \\ \left[0, \frac{w}{p_1}\right] & ap_2 = bp_1 \\ 0 & ap_2 < bp_1 \end{array}\right. .$$

De la restricción presupuestal obtenemos que $x_2\left(p, w\right)$ viene dado por

$$x_2\left(p, w\right) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & ap_2 > bp_1 \\ \left[0, \frac{w}{p_2}\right] & ap_2 = bp_1 \\ \frac{w}{p_2} & ap_2 < bp_1 \end{array}\right. .$$

Para calcular la demanda $x\left(p, w\right)$ hay que tener en cuenta una única sutileza: si se consume mucho de x_1 cuando los precios son iguales, no se puede consumir mucho también de x_2. Tenemos entonces

$$x\left(p, w\right) = \left\{\begin{array}{cc} \left(\frac{w}{p_1}, 0\right) & ap_2 > bp_1 \\ x_1 \in \left[0, \frac{w}{p_1}\right], x_2 = \frac{w - p_1x_1}{p_2} & ap_2 = bp_1 \\ \left(0, \frac{w}{p_2}\right) & ap_2 < bp_1 \end{array}\right. .$$

Verificamos ahora que la demanda es homogénea de grado 0. Para $\lambda > 0$ tenemos:

$$x\left(\lambda p, \lambda w\right) = \left\{\begin{array}{cc} \left(\frac{\lambda w}{\lambda p_1}, 0\right) & a\lambda p_2 > b\lambda p_1 \\ x_1 \in \left[0, \frac{\lambda w}{\lambda p_2}\right], x_2 = \frac{\lambda w - \lambda p_1x_1}{\lambda p_2} & a\lambda p_2 = b\lambda p_1 \\ \left(0, \frac{\lambda w}{\lambda p_2}\right) & a\lambda p_2 < b\lambda p_1 \end{array}\right. = x\left(p, w\right).$$

Para verificar la ley de Walras suponemos primero $ap_2 > bp_1$ y tenemos $px = p_1 w/p_1 + p_2 0 = w$. Luego, si $ap_2 = bp_1$, tenemos

$$px = p_1 x_1 + p_2 \frac{w - p_1 x_1}{p_2} = w$$

y si $ap_2 < bp_1$, $px = p_1 0 + p_2 w/p_2 = w$.

La demanda Hicksiana se encuentra minimizando px sujeto a $ax_1 + bx_2 \geq u$. Si la última desigualdad fuera estricta, se podría reducir un poco el consumo de x_1, bajar el costo total, y seguir cumpliendo la restricción. Este argumento muestra que en el óptimo debemos tener $ax_1 + bx_2 = u$, y por tanto,

$$x_2 = \frac{u - ax_1}{b}.$$

La función objetivo se vuelve entonces

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{u - ax_1}{b} = \frac{p_2 u + bp_1 x_1 - ap_2 x_1}{b} = \frac{p_2 u + x_1 (bp_1 - ap_2)}{b}.$$

Igual que antes, si $bp_1 > ap_2$ el individuo quiere elegir x_1 lo más chico posible para minimizar su gasto. El análisis es igual que antes y arroja

$$h_1(p, u) = \begin{cases} \frac{u}{a} & ap_2 > bp_1 \\ \left[0, \frac{u}{a}\right] & ap_2 = bp_1 \\ 0 & ap_2 < bp_1 \end{cases}.$$

La demanda Hicksiana por ambos bienes es

$$h(p, u) = \begin{cases} \left(\frac{u}{a}, 0\right) & ap_2 > bp_1 \\ x_1 \in \left[0, \frac{u}{a}\right], x_2 = \frac{u - ax_1}{b} & ap_2 = bp_1 \\ \left(0, \frac{u}{b}\right) & ap_2 < bp_1 \end{cases}.$$

La homogeneidad en precios de h se ve en que sólo depende de p en las comparaciones entre ap_2 y bp_1, y las mismas se mantienen si se multiplican ambos precios por λ. Que todas las canastas demandadas dan una utilidad de u es trivial y se omite.

Ejercicio 10.A. Si x es una demanda óptima para cualquier (p, w), debemos tener $x_1 = x_2$. Supongamos, por ejemplo, que $x_1 > x_2$. El individuo puede vender un poco de x_1 sin perder utilidad, y gastar ese dinero en x_2 aumentando su utilidad. También, como las preferencias son localmente no saciables, debemos tener $px = w$. De $x_1 = x_2$ y $px = w$ obtenemos

$$x(p, w) = \left(\frac{w}{p_1 + p_2}, \frac{w}{p_1 + p_2}\right).$$

10.B. Igual que en la Parte A, es óptimo demandar la misma cantidad de ambos bienes (si no fuera así, se podría vender un poco del que se tiene más, no cambiar la utilidad y reducir el gasto. Como en el Ejercicio 18, también tendremos $\min\{h_1(p, u), h_2(p, u)\} = u$, pues si sobrara utilidad, se podrían vender unas pocas unidades de ambos bienes, de forma de reducir el gasto, y seguir cumpliendo la restricción. De $h_1(p, u) = h_2(p, u)$ y $\min\{h_1(p, u), h_2(p, u)\} = u$ obtenemos $h_1(p, u) = h_2(p, u) = u$.

10.C. Tenemos que para todo i y j,

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = 0, x_j = \frac{w}{p_1 + p_2}, \frac{\partial x_i}{\partial w} = \frac{1}{p_1 + p_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = -\frac{w}{(p_1 + p_2)^2}$$

por lo que También, para todo i,

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial w} x_j \quad \text{se convierte en} \quad 0 = -\frac{w}{(p_1+p_2)^2} + \frac{1}{p_1+p_2}\frac{w}{p_1+p_2} = 0$$

Ejercicio 11. Por simetría, $b = 3$. Por $pS = 0$, de la primer columna $-10 + 2c + 18 = 0 \Leftrightarrow c = -4$ y por simetría otra vez, $a = -4$. De la segunda columna por p, tenemos $-4 - 8 + 6e = 0 \Leftrightarrow e = 2$ y por simetría, $d = 2$. Finalmente, $3 + 4 + 6f = 0 \Leftrightarrow f = -7/6$.