Notas y Ejercicios sobre la Demanda Agregada

El Axioma Débil y la Demanda Agregada

Contestamos ahora las siguientes preguntas:

1. ¿Qué propiedades de la demanda individual son heredadas por la demanda agregada? Por ejemplo, si todas las demandas individuales satisfacen el axioma débil, ¿tiene que satisfacerlo la demanda agregada?

2. En caso que alguna propiedad no sea heredada automáticamente por la demanda agregada, ¿qué condiciones sobre las demandas individuales son suficientes para que la demanda agregada satisfaga, por ejemplo, el axioma débil?

Antes de comenzar con esas preguntas, debemos definir la demanda agregada. Para I individuos cada uno con su respectiva función de demanda $x_i(p, w_i)$, tenemos que la demanda agregada es

$$x(p, w_1, ..., w_I) = \sum_1^I x_i(p, w_i).$$

Vemos entonces que la continuidad, la homogeneidad de grado 0 y la Ley de Walras son satisfechas por la demanda agregada, siempre que sean satisfechas por las demandas individuales. Por lo tanto, lo único importante que resta analizar es el axioma débil. Pasamos ahora a esa pregunta, pero antes una pequeña aclaración. En general, la demanda agregada dependerá de la forma como se distribuyen las riquezas entre los individuos, y no sólo del nivel total de la riqueza en la economía. Por ejemplo, si le paso un poco de plata de un señor que odia las bananas a uno que las adora, el consumo total en la economía cambiará. Sin perjuicio de ello, y para simplificar, asumiremos en lo que resta del capítulo que la riqueza del individuo i se puede escribir como $w_i = a_i w$ para a_i tales que $\sum a_i = 1$. En ese caso tenemos

$$x(p, w) = \sum_1^I x_i(p, a_i w).$$

Analizaremos ahora cuándo la demanda agregada satisface el axioma débil. Comenzaremos con un ejemplo que muestra que aún si todas las demandas individuales satisfacen el axioma débil, la demanda agregada no tiene porqué satisfacerlo.

Ejemplo 1. Sean $w = 200$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $p = (2,1)$ y $p' = (1,2)$. Las funciones de demanda de los individuos 1 y 2 son

$$\begin{aligned} x_1(p, 100) &= (25, 50) \quad \text{y} \quad x_1(p', 100) = (0, 50) \\ x_2(p, 100) &= (50, 0) \quad \text{y} \quad x_2(p', 100) = (50, 25). \end{aligned}$$

En el Ejercicio 2 se le pide que verifique que estas demandas satisfacen (en principio) la Ley de Walras y el Axioma Débil. Verificamos ahora que la demanda agregada no satisface el Axioma Débil:

$$x(p, 200) = (75, 50) \neq (50, 75) = x(p', 200)$$

y

$$px(p', 200) = p'x(p, 200) = 200$$

como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 2. Verifique que en el Ejemplo 1 no podemos concluir que las demandas individuales violan el Axioma Débil, o la Ley de Walras (no podemos decir que se satisfacen porque ambas propiedades deben cumplirse para todo p y w, no sólo para dos pares).

La razón por la que la demanda agregada no satisface el Axioma Débil es por los efectos riqueza. Supongamos que el cambio de (p, w) a (p', w') fuera tal que para cada individuo tuviéramos $a_i w' = p' x_i (p, a_i w)$, de tal forma que $(p', a_i w')$ fuera un cambio compensado de $(p, a_i w)$. En ese caso el Teorema 1 nos dice que como las demandas individuales satisfacen el Axioma Débil, se debe cumplir que

$$(p' - p) (x_i (p', a_i w') - x_i (p, a_i w)) \leq 0$$

con desigualdad estricta si $x_i (p', a_i w') \neq x_i (p, a_i w)$. Sumando para todos los individuos tendríamos entonces

$$(p' - p) (x (p', w') - x (p, w)) \leq 0$$

con desigualdad estricta si $x (p', w') \neq x (p, w)$, por lo que la demanda agregada satisface el axioma débil (siempre que el cambio de (p, w) a (p', w') sea tal que es un cambio compensado para cada individuo. El problema es entonces que un cambio que es compensado a nivel agregado puede no ser compensado a nivel de todos los individuos.

Ejercicio 3. Construya un ejemplo, parecido al Ejemplo 11 (de las Notas sobre la Demanda cuando no proviene de Preferencias), en que: las demandas individuales satisfagan el Axioma Débil, la demanda agregada no lo satisfaga, y el cambio de (p, w) a (p', w') sea compensado a nivel agregado, pero no a nivel individual.

Enunciaremos ahora una propiedad que, si es satisfecha por las demandas individuales, es satisfecha por la demanda agregada. Decimos que una función de demanda $x (p, w)$ satisface la **Ley de la Demanda No Compensada** si

$$(p' - p) (x (p', w) - x (p, w)) \leq 0$$

para todo p, p' y w, con desigualdad estricta si $x (p, w) \neq x (p', w)$.

Ejercicio 4. Demostrar que si $x (p, w)$ satisface la Ley de la Demanda no Compensada, entonces $D_p x (p, w)$ es semidefinida negativa: $dp D_p x (p, w)\, dp \leq 0$ para todo dp.

Lo importante de la Ley de la Demanda no Compensada es que implica al Axioma Débil.

Lema 5. Si una función de demanda $x (p, w)$ satisface la Ley de la Demanda no Compensada, la Ley de Walras y es homogénea de grado 0, entonces satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Prueba. Tomemos (p, w) y (p', w') tales que $x (p, w) \neq x (p', w')$ y $px (p', w') \leq w$. Definimos $p'' = wp'/w'$, por lo que la homogeneidad de grado 0 implica $x (p'', w) = x \left(\frac{wp'}{w'}, w \right) = x (p', w')$ y por tanto $x (p'', w) \neq x (p, w)$. La Ley de la Demanda no Compensada nos dice entonces que

$$(p'' - p) (x (p'', w) - x (p, w)) < 0. \tag{1}$$

Como $x (p'', w) = x (p', w')$ y sabemos que $px (p', w') \leq w$, deducimos

$$px (p'', w) \leq w. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) encontramos, usando la Ley de Walras,

$$\begin{aligned}(p'' - p)(x(p'', w) - x(p, w)) &< 0 \Rightarrow w - p''x(p, w) + (w - px(p'', w)) < 0 \Leftrightarrow \\ w &< p''x(p, w)\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Teorema 6. Si todas las demandas individuales $x_i(p, a_i w)$ satisfacen la Ley de la Demanda no Compensada, la Ley de Walras y son homogéneas de grado 0, entonces la demanda agregada satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Prueba. Por el Lema 5, y porque la demanda agregada hereda la homogeneidad de grado 0 y la Ley de Walras, alcanzará con mostrar que la demanda agregada satisface la Ley de la Demanda no Compensada. Tomemos entonces $x(p, w) \neq x(p', w)$, de tal forma que para algún i, $x_i(p, a_i w) \neq x_i(p', a_i w)$. Como cada demanda individual satisface la Ley de la Demanda no Compensada tenemos

$$(p' - p)(x(p', w) - x(p, w)) < 0$$

para todo p, p' y w, como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 7: Verifique que en el Ejemplo 1 las demandas individuales no satisfacen la Ley de la Demanda no Compensada. Si la satisficieran, según el Teorema 6, la demanda agregada debería satisfacer el Axioma Débil, y como no lo satisface, el Ejemplo 1 sería un contraejemplo al Teorema 6.

El próximo resultado, cuya demostración omitimos, da una condición sobre las preferencias individuales que asegura que se satisface la Ley de la Demanda no Compensada.

Teorema 8: Si las preferencias $\succeq$ son homotéticas, entonces $x(p, w)$ satisface la Ley de la Demanda no Compensada.

Ejercicio 9. Sea $X = \mathbf{R}_+^2$ y sea la función de utilidad $u(x) = x_1 + x_2$.

Parte A. Dados p y w calcule la demanda Walrasiana (con cuidado), verifique que es homogénea de grado 0 y que satisface la ley de Walras.

Parte B. Dados p y u calcule la demanda Hicksiana (también con cuidado), verifique que es homogénea de grado 0 en p y que para todo x en $h(p, u)$, $u(x) = u$.

Parte C. Repita las Partes A y B para $u(x) = ax_1 + bx_2$.

Ejercicio 10. Sea $X = \mathbf{R}_+^2$ y sea la función de utilidad $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$.

Parte A. Dados p y w calcule la demanda Walrasiana (con cuidado).

Parte B. Dados p y u calcule la demanda Hicksiana (también con cuidado).

Parte C. Verifique la ecuación de Slutsky. En este caso no, pero en general hay que tener ojo: primero hay que derivar y después sustituir por $u = v(p, w)$.

Para este ejercicio, faltan propiedades, pero están en el capítulo 3 del Mas-Colell, Whinston y Green.

Ejercicio 11. La siguiente es una matriz de Slutsky de un consumidor que tiene una función de utilidad, y que enfrentaba un vector de precios $p = (1, 2, 6)$:

$$\begin{bmatrix} -10 & a & b \\ c & -4 & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix}.$$

Utilizando las propiedades de las matrices de Slutsky, encuentre los números a a f.