16.3 Este ejercicio es un desarrollo paso a paso de la frontera de posibilidades de producción para dos funciones de producción Cobb-Douglas.

 a. La eficiencia en la producción requiere que, dadas las dotaciones de recursos de la economía (K y L), no se pueda producir más de un bien sin dejar de producir algo de el otro. En términos de la Caja de Edgeworth para la producción esto significaba que las iso-cuantas sean tangentes. O, lo que es lo mismo, la *RST* en la producción del bien *X* sea igual a la *RST* en la producción del bien *Y.* Dado que





La eficiencia en el uso de los factores en la economía requiere *kX* = 2*kY*.

b.



donde α = *LX /(LX + LY)*

c. Combinando (a) y (b) se obtiene:



α(2*kY*) + (1  α)*kY* =$ \frac{1}{2}$

o



Por lo tanto, *kX > kY*. El bien *X* es capital-intensivo.

 d. [Figure 16.3 goes here]

La curva de posibilidades de producción es concave por el argumento típico de la proporción de los factores.

f. No sale como solución explícita. En su lugar, exprese los niveles de producción de *X* e *Y* como funciones de α.



Ó, usando la parte (c) *X*

Similarmente,



Ó, 

3 puntos en la FPP:



 

 



Notar que para α = 1/2, la frontera está por fuera de la línea que une α = 0 y α = 1; esto es, la FPP es cóncava.

## Ejercicio 16.4

El problema formalmente planteado consiste en maximizar

$$Y=K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}$$

Sujeto a

$$\overbar{X}=\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}$$

El Lagrangeano de este problema es

$$ϑ=K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}+λ\left[\overbar{X}-\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}\right]$$

Y las condiciones de primer orden

$$\frac{∂ϑ}{∂K\_{Y}^{}}=γ\frac{K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}}{K\_{Y}^{}}+λ\left[α\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α-1}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}\right]=0$$

$$\frac{∂ϑ}{∂K\_{Y}^{}}=γ\frac{K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}}{K\_{Y}^{}}+λα\left[\frac{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}}{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)}\right]=0$$

Y de manera similar,

$$(2)\frac{∂ϑ}{∂L\_{Y}^{}}=δ\frac{K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}}{L\_{Y}^{}}+λβ\left[\frac{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}}{\left(\overbar{K}-L\_{Y}\right)}\right]=0$$

Y

$$\left(3\right)\frac{∂ϑ}{∂λ}=\overbar{X}-\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}=0$$

De (2) obtenemos,

$$-λ=\frac{γ\frac{K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}}{K\_{Y}^{}}}{α\left[\frac{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}}{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)}\right]}=\frac{δ\frac{K\_{Y}^{γ}L\_{Y}^{δ}}{L\_{Y}^{}}}{β\left[\frac{\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-L\_{Y}\right)^{β}}{\left(\overbar{K}-L\_{Y}\right)}\right]}$$

De donde, luego de algunas cuentas llegamos a

$$L\_{Y}=\frac{δα\overbar{K}K\_{Y}}{γβ\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)+δα\overbar{K}}$$

 Sustituyendo en (3)

$$\overbar{X}=\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)^{α}\left(\overbar{L}-\frac{δα\overbar{K}K\_{Y}}{γβ\left(\overbar{K}-K\_{Y}\right)+δα\overbar{K}}\right)^{β}$$

 ¿?¿?¿?¿?¿ Intentar obtener una expresión de la FPP en función de los parámetros $α,β,γ,δ$ es muy complicado, por lo que la alternativa es….

## Ejercicio 16.5

Este ejercicio es una demostración geométrica del Teorema de Rybczynski de Teoría del Comercio Internacional.[[1]](#footnote-1) El teorema establece que si la oferta de uno de los factores de producción aumenta, y el otro se mantiene constante, el nivel de producción del bien intensivo en el factor cuya oferta se incrementa aumenta, y el nivel de producción del otro bien no intensivo en este factor disminuye en términos absolutos, siempre y cuando los precios de los bienes permanezcan inalterados.

Asumir que los precios de los bienes se mantienen constantes, supuesto válido para un país pequeño tomador de precios internacionales. Ustedes saben del Cap. 11 de Nicholson que si ambos bienes se producen con funciones de producción con rendimientos constantes a escala, la RST en ambas producciones dependerá únicamente del cociente de *K* respecto de *L*, y no del nivel de producción. Por lo tanto, cada isocuanta será una representación radial de la isocuanta *q=1*, ya que en los puntos de corte entre cualquier rayo que sale del origen en el cuadrante *(K, L)*, con una relación *K/L* constante, y las sucesivas isocuantas, éstas deberán tener las mismas pendientes. (Porque la pendiente es la *RST* y ésta depende de *K/L* y este ratio no cambia a lo largo de un rayo del origen).

1. Empezamos por dibujar la situación inicial (antes del incremento de trabajo) en la Figura 16.5.a. En él se dibuja la frontera de posibilidades de producción (FPP), y la determinación de las cantidades producidas de trigo y telas de acuerdo al punto de tangencia entre la FPP y el cociente de precios internacionales. (Punto *E*). El punto *E* en la *FPP* se corresponde directamente con un nivel de utilización de cada uno de los factores en cada industria, y por ende en un punto (que también llamamos *E*) en la caja de Edgeworth de la producción que se dibuja en la Figura 16.5.b. Como la producción de Trigo es intensiva en trabajo este punto debe estar por debajo de la línea de 45º. En este punto, además, las pendientes de las isocuantas en ambas producciones deben ser iguales. El punto *E*, es además el punto de intersección de dos rayos, uno que parte de cada origen y que mide la relación capital – trabajo en ese punto.

1. Un aumento en la oferta de trabajo se traduce en un incremento del área de la Caja de Edgeworth de la producción. Dadas las funciones de producción homogéneas de grado uno y que el cociente de precios de los bienes finales *p* no cambia, el nuevo equilibrio se traslada al punto *E’,* el único punto de la nueva Caja de Edgeworth con el mismo ratio Tierra / Trabajo en las dos industrias. El incremento en la oferta de trabajo también desplaza la FPP para afuera, ya que hay más recursos disponibles. El traslado no es “paralelo” ya que la mayor disposición de trabajo beneficia más a la producción de Trigo, que hace un uso más intenso del Trabajo. Como conclusión, el nuevo punto de tangencia entre la recta del cociente de precios (incambiado) y la nueva *FPP* se da en un punto (*E’*), donde la producción de Telas es menor (está por debajo de la línea punteada) y la de Trigo es mayor. Lo mismo se puede comprobar en la caja de Edgeworth midiendo las distancias al origen y comprobando que para el caso del Trigo (*OT'E' > OTE*) y que para el caso de Telas (O*T E' < OT E*).

**Figura 16.5.a**

****

**Figura 16.5.b.**

****

## EJERCICIO 16.6

### En el óptimo de Pareto la RMS de Jones debe ser igual a la RMS de Smith, que debe ser igual a la RTP, la pendiente de la FPP. Los consumidores igualan cociente de precios a la RMS y los productores igualan RTP a cociente de precios al maximizar beneficios.

### $$RTP=-\frac{dY}{dX}$$

### La FPP la obtengo haciendo:

### $$X=2L\_{X}$$

$$L\_{X}=\frac{X}{2}$$

$$Y=3L\_{Y}=3\left(L-L\_{X}\right)=3\left(L-\frac{X}{2}\right)$$

Por lo tanto,

$$RTP=\frac{3}{2}$$

Y, por ende

$$\frac{P\_{X}}{P\_{Y}}=\frac{3}{2}$$

1. Si el salario es igual a 1, el ingreso de cada persona es 10. Dada la función de utilidad de Smith, sabemos que gastará 3 en X y 7 en Y. De la misma manera, sabemos que Jones gastará 5 en X y 5 en Y. Por lo tanto, las cantidades demandadas de ambos bienes serán



 A su vez, sabemos que



Sustituyendo las cantidades demandadas en la segunda ecuación tenemos

$$\frac{8}{2P\_{X}}+\frac{12}{3P\_{Y}}=\frac{8}{2P\_{X}}+\frac{12}{3P\_{Y}}=20$$

 Utilizando el cociente de precios de equilibrio

$$\frac{8}{2P\_{X}}+\frac{12}{2P\_{X}}=20$$

$$P\_{X}=0,5$$

$$P\_{Y}=\frac{2P\_{X}}{3}=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, Smith demanda

$$X=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

$$Y=\frac{7}{1/3}=21$$

Y Jones demanda

$$X=\frac{5}{\frac{1}{2}}=10$$

$$Y=\frac{5}{1/3}=15$$

1. Sabemos que $X=2L\_{X}=16$, por lo que $L\_{X}=8$. Y sabemos que $Y=3L\_{Y}=36$, por lo que $L\_{Y}=12$. En total, tenemos 20 horas de trabajo, la dotación inicial.
1. Rybczynski, T.N., “Factor Endowments and Relative Commodity Prices,” *Economica*, November 1955. [↑](#footnote-ref-1)