07. TEORÍA DE JUEGOS

1 Motivación

Los individuos se enfrentan a condiciones de incertidumbre también cuando la utilidad de sus decisiones dependen de las decisiones que hagan tomen los demás. Esta es una situación muy frecuente en economía: fijación de precios, esfuerzo en el trabajo, nivel de aporte a un bien público, fijación de sueldo o tasas de interés, etc. Es tan frecuente que llama la atención como la Economía Clásica haya logrado ser tan existosa en sin modelar una sola sola interacción estratégica entre individuos en todo su aparato teórico. En el equilibrio general Walrasiano que vimos en este curso, el equilibrio parcial de mercado, la demanda de factores, la oferta de productos, la maximización de la utilidad, etc. no hay ninguna interacción estratégica. Todo se resuelve mediante decisiones individuales frente a una pizarra de precios. A nadie le interesa lo que hace el otro. Esta es una situación muy irreal. Una de las herramientas teóricas para superar esta situación es la teoría de juegos.

2 Conceptos básicos

2.1 Juego

Cualquier interacción estratégica donde los beneficios de un agente dependen de las decisiones que tomen otros. Los juegos pueden clasificarse en *cooperativos* o *no - cooperativos.* En los primeros los jugadores pueden alcanzar acuerdos *vinculantes.* En los segundos no. Nosotros vamos a ver solo Juegos no - cooperativos.

Todo juego tiene 3 componentes esenciales que son:

2.1.1 Jugadores

Cada agente decisor se llama *jugador*. Los jugadores pueden ser *individuos, empresas, países* y cualquier otra entidad que sopngamos que toma una decisión como tal. También puede aparecer la *Naturaleza* como jugador. Esto es en aquellos casos en que interviene el azar.

El número de jugadores permanece constante en los juegos que vamos a ver.

No hay jugadores "buenos" y "malos". Suponemos que todos deciden en función de lo que le resulte más conveniente.

2.1.2 Estrategias

Cada acción o secuencia de acciones disponibles para los jugadores se llaman *estrategias.*

2.1.3 Beneficios

Cada uno de los resultados posibles del juego le reporta a cada uno de los jugadores un *beneficio,* ya sea en términos de utilidad o monetario. Es lo que obtiene cada jugador al final del juego. Los jugadores prefieren los beneficios que reportan más utilidad o más dinero.

2.1.4 Notación

Normalmente no es necesario escribir un juego en términos matemáticos - formales. Alcanza con la descripción de la situación. Pero ocasionalmente denotaremos un juego G entre dos jugadores A y B como

$$G\left[S_A, S_B, U_A(a,b), U_B(a,b)\right]$$

donde S_i representa el conjunto de estrategias posibles para el jugador i, U_i representa la utilidade del jugador i cuando el jugador A juega la estrategia a y el jugador B juega la estrategia b, con $a \subset S_A$ y $b \subset S_B$.

3 Equilibrio de Nash

Equilibrio: los jugadores no tienen ningún incentivo a moverse (jugar otra cosa). Distinto al concepto de equilibrio de la economía convencional (oferta = demanda).

Mejor respuesta: la estrategia a^* es una mejor respuesta para el jugador A si

$$U_A\left(a^*, b^*\right) \geq U_A\left(a', b^*\right) \text{ para todo } a' \in S_A, a' \neq a^*$$

Equilibrio de Nash: (a^*, b^*) será un Equilibrio de Nash de este juego si

$$U_A\left(a^*, b^*\right) \geq U_A\left(a', b^*\right) \text{ para todo } a' \in S_A, a' \neq a^*$$

y

$$U_B\left(a^*, b^*\right) \geq U_B\left(a^*, b'\right) \text{ para todo } b' \in S_B, b' \neq b^*$$

Es decir, si ambos están respondiendo de la mejor manera a lo que juega el otro.

4 Un Ejemplo

Vemos un ejemplo como forma de aprender los conceptos. El juego es irreal.

Supongamos dos estudiantes que comparten un dormitorio en una Universidad. Se llaman A y B. Deben decidir si ponerl el volúmen de la música alto (L) o bajo (S).

4.1 El juego en su forma extensiva

El jugador A mueve primero y el jugador B no sabe que decide (o ambos juegan a la misma vez). Ambos casos se modelan igual, como la Figura 10.1.

4.2 El juego en su forma normal

Tabla 10.1

La Tabla 10.1 y la Figura 10.1 muestran exactamente la misma información sobre el juego.

4.3 Estrategias Dominantes y equilibrios de Nash

Estrategia Dominante: la estrategia a^* es una *estrategia dominante* para el jugador A si

$$U_A\left(a^*, b'\right) \geq U_A\left(a', b'\right) \text{ para todo } a' \in S_A, a' \neq a^* \text{ y para todo } b^{'} \in S_B$$

La Tabla 10.1 muestra claramente que la estrategia L es una estrategia dominante para B.

El jugador A no tiene una estrategia dominante. Pero puede anticipar, si tiene la misma información que nosotros, que B jugará L de cualquier modo, y en función de ello responder de la mejor forma eligiendo L.

El resultado (L, L) es por tanto el *único* equilibrio de Nash de este juego.

5 Existencia del Equilibrio de Nash

Aunque el ejemplo anterior incluye un único equilibrio de Nash, esta no es siempre la situación. El Ejemplo 10.1 (Piedra, papel y Tijera) ilustra un Juego en el que no hay ningún equilibrio de Nash y otro juego (La Batalla de los Sexos) ilustra el caso en que hay más de un (dos) equilibrio. El Ejemplo 10.2

5.1 Ejemplo de un juego sin equilibrios de Nash: Piedra, Papel y Tijera

Tabla 10.2 (a)

5.2 Ejemplo de un juego con 2 Equilibrios de Nash: La Batalla de los Sexos

Un marido (M) y su esposa (E) están planificando sus vacaciones (o su salida). M prefiere ir a la Montaña. E prefiere ir a la playa. Ambos prefieren pasar las vacaciones juntos que separados. La Tabla 10.2 (b) reflejan estas preferencias

		Esposa	
		Montaña	Playa
Marido	Montaña	2,1	0,0
	Playa	0,0	1,2

Los equilibrio de Nash son $(Montaña, Montaña)$ y $(Playa, Playa)$.

6 El Dilema del Prisionero

No hay nada que garantice que los Equilibrios de Nash sean deseables para los jugadores.

		B	
		Confesar	No confesar
A	Confesar	3 años,3 años	6 meses, 10 años
	No confesar	10 años, 6 meses	2 años, 2 años

6.1 La tragedia de los comunes

Dos granjeros deciden cuántas vacas llevar a pastar en los pastos de acceso libre del pueblo. Sea Y_A y Y_B el número de vacas que A y B deciden llevar a pastar. El valor de la decisión viene dado la siguiente ecuación, igual para ambos, la cual representa dicho valor en términos de, digamos, leche o pesos por cabeza de ganado:

$$V(Y_A, Y_B) = 200 - (Y_A + Y_B)^2 \tag{1}$$

Observar que $V_i < 0$ y $V_{ii} < 0$.

El problema que resuelve A es

$$\max_{Y_A} Y_A \times V(Y_A, Y_B) = \max_{Y_A} Y_A \times \left[200 - (Y_A + Y_B)^2\right] = \max_{Y_A} 200Y_A - Y_A(Y_A + Y_B)^2$$

Derivando e igualando a cero obtenemos la condición de primer orden:

$$\begin{aligned} 200 - (Y_A + Y_B)^2 - Y_A \times 2(Y_A + Y_B) &= 0 \\ 200 - Y_A^2 - 2Y_AY_B - Y_B^2 - 2Y_A^2 - 2Y_AY_B &= 0 \\ 200 - 3Y_A^2 - 4Y_AY_B - Y_B^2 &= 0 \end{aligned}$$

Cómo el problema es simétrico, la condición de primer orden que determina la elección óptima de B, dado lo que está haciendo A es

$$200 - 3Y_B^2 - 4Y_AY_B - Y_A^2 = 0$$

Utilizando la condición $Y_B = Y_A$, caracterísitca obvia de la solución de este juego simétrico, cualquier a de las dos ecuaciones se transforma en:

$$\begin{aligned} 200 - 8Y_A^2 &= 0 \\ Y_A &= \sqrt{200/8} \\ \mathbf{Y}_B &= \mathbf{Y}_A \mathbf{= 5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada granjero llevará 5 cabezas de ganado a pastar y obtendrá unos beneficios de $5 \times (200 - (10)^2) = 500$.

El problema con esta solución es que no maximiza los beneficios para esta comunidad de 2.

Para maximizar beneficios es necesario maximizar

$$\max_{Y} Y \times (200 - Y^2)$$

CPO

$$\begin{aligned} 200 - 3Y^2 &= 0 \\ Y &= \sqrt{200/3} = \sqrt{66.66} \\ Y &= 8.1646 \end{aligned}$$

Es decir que no deben mandar más de 8 cabezas a pastar. En el EN mandan 10, más. Si por alguna razón ambos se encuentran en $Y_B = Y_A = 4$, veremos que esta situación no es un equilibrio. Cuando $Y_B = 4$, A tiene incentivos a llevar

$$184 - 3Y_A^2 - 16Y_A = 0$$

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{16 - \sqrt{16^2 - 4 \times (-3) \times 184}}{2 \times (-3)} \\ &= 5.6 \end{aligned}$$

6.2 Repetición y Cooperación

La repetición del juego puede fomentar la cooperación. (Más adelante).

7 Estrategias Mixtas

Lo anterior era en *estrategias puras.* Existen también las *estrategias mixtas.* Estan son estrategias son estrategias en las que se aplican las distintas estrategias puras disponibles con cierta probabilidad. Por ejemplo, en el juego de Piedra, Papel y Tijera, un jugador puede elegir una de las tres alternativas con probabilidad $1/3$. Este es un ejemplo de estrategia mixta. El siguiente ejemplo ilustra como la posibilidad de añadir estrategias mixtas crea posibles equilibrios de Nash

7.1 La Batalla de los Sexos con Estrategias Mixtas

Suponga que M decide elegir ir a la Montaña con una probabilidad r e ir a la Playa con una probabilidad $1-r$. Análogamente, E elige ir a la Montaña con una probabilidad s e ir a la Playa con una probabilidad $1-s$. Dadas estas probabilidades los resultados de este juego se producen con las siguientes probabilidades

Resultado	Probabilidad
(Montaña, Montaña)	$s \times r$
(Montaña, Playa)	$s \times (1 - r)$
(Playa, Montaña)	$(1 - s) \times r$
(Playa,Playa)	$(1 - s) \times (1 - r)$

Utilidad Esperada de M

$$
\begin{aligned}
E(U_M) &= s \times r \times 2 + s \times (1 - r) \times 0 + (1 - s) \times r \times 0 + (1 - s) \times (1 - r) \times 1 \\
&= s \times r \times 2 + (1 - s) \times (1 - r) \times 1 \\
&= 3rs - s - r + 1 \\
&= 1 - s + r \times (3s - 1)
\end{aligned}
$$

$E(U_M)$ obviamente depende de s. Si $s < 1/3$, $E(U_M)$ se maximiza cuando $r = 0$. Si $s > 1/3$, M debería optar por un $r = 1$. Y cuando $s = 1/3$, $E(U_M) = 2/3$ independientemente del valor de r que elija M. La Figura 10.2 representa las elecciones óptima de r para M dados estos valores de s.

Para la esposa E,

$$
\begin{aligned}
E(U_E) &= s \times r \times 1 + (1 - s) \times (1 - r) \times 2 \\
&= 3rs - 2s - 2r + 2 \\
&= 2 - 2r + s \times (3r - 2)
\end{aligned}
$$

Si $r < 2/3$, a E le conviene (su tilidad esperada se maximiza cuando) $s = 0$. Cuando $r = 2/3$, $E(U_E) = 2/3$. Cuando $r > 2/3$, a E le conviene elegir $s = 1$. Las opciones óptima de s para E también se ilustran en la Figura 10.2.

Los equilibrios de Nash de este juego se muestran también en la Figura 10.2. Son los puntos de corte de las escaleras punteadas. Hay tres. $r = 0$ y $s = 0$ (ambos van a la Playa) y $r = 1$ y $s = 1$ (ambos van a la Montañana) representan las estrategias de vacacionar juntos de la versión anterior de juego. Pero $r = 2/3$ y $s = 1/3$ es un nuevo equilibrio de Nash que no era posible antes de la introducción de las estrategias mixtas.

Este nuevo equilibrio da una pequeña pista de por qué debe existir un equilibrio de Nash cuando las estrategias disponibles son muchas. Pero no vamos a demostrar esto aquí, ya que aún para el caso de dos jugadores es dificil y requiere supuestos adicionales.

8 Juegos Dinámicos (de más de un período o round)

8.1 Un juego del dormitorio en dos períodos

A mueve primero. B observa qué eligió A y luego decide.

FIGURA 10.3

Tabla de beneficios en el juego del dormitorio repetido

		Estrategias de B			
			Lo mismo que A	Lo contrario que A	
		L, L	(L, S)	(S, L)	S, S
Estrategias de A	L	$7, 5$	$7, 5$	$5, 4$	$5, 4$
	S	$6, 4$	$6, 3$	$6, 4$	$6, 3$

Hay tres equilibrios de Nash en este juego: (1) $A : L$ y $B : (L, L)$, (2) $A : L$ y $B : (L, S)$ y (3) $A : S$ y $B : (S, L)$.

Los EN (2) y (3) son imposibles, sin embargo. Incluyen una amenaza no creíble por parte de B. Las estrategias (L, S) no es una amenaza creible porque si A elige S a B no le conviene elegir S, sino L. Lo mismo con la estrategia (S, L). A B le conviene elegir L cuando A elige L. El único equilibrio que no involucra estrategias no creibles es $L : (L, L)$. Este equilibrio se conoce **equilibrio perfecto por subjuegos.**

Equilibrio de Nash perfecto por subjuegos. *Equilibrio de Nash en el que las estrategias de los jugadores no implican amenazas no creibles. Es decir, ninguna estrategia de este equilibrio implica que el jugador tome una decisión en un punto del juego que vaya en contra de sus intereses.*

Con este concepto en mente ahora podemos ver como se puede dar la cooperación en juegos repetidos.

9 Juegos Repetidos

Muchas situaciones reales se pueden modelar como juegos repetidos: competencia, compras, trabajo en equipo, etc. En esta sección veremos algunas cuestiones formales que hacen a los juegos repetidos.

Una distinción importante entre juegos repetidos es si el juego se repite un número fijo y finito de veces o un número indefinido de veces. Un juego que se repite indefinidamente es lo mismo que un juego en el que los jugadores no saben cuando va a terminar.

9.1 El dilema del prisionero repetido un número finito de veces

Supongamos que el DP se juega T veces. Llegados al período T lo óptimo para los dos jugadores es no-cooperar. Cualquier estrategia que involucre la opción de cooperar en el período T no es creíble. Lo mismo para el período $T-1$ y $T-2$ y así sucesivamente. Por *inducción hacia atrás* (continuando con este razonamiento) se demuestra que el único equilibrio de Nash perfecto por subjuegos es No Cooperar, No - cooperar en cada uno de los períodos.

9.2 El dilema del prisionero repetido infinitamente

Suponiendo que los beneficios son ahora los de la Tabla 10.5.

Con el juego del DP jugado indefinidamente, un jugador puede anunciar que va a jugar "cooperar" en un período dado, y amenazar con cambiar nuevamente a no-cooperar en el período siguiente y para siempre si observa que el otro no cooperó. Para que esta amenaza desencadene la cooperación, el valor presente de cooperar para el otro jugador debe ser mayor que el valor presente de no cooperar. Las estrategias como las de la amenaza de cooperar se llaman "*estrategias gatillo*". Supongamos que A anuncia que va a jugar D en el período K, y amenaza a B con volver a jugar U si B no juega R. Si δ es el factor de descuento de B, podemos escribir el valor presente de R como

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... = \frac{2}{1-\delta}$$

Por su parte, el valor presente de jugar L para B es

$$3 + \delta + \delta^2 + ... = 3 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Para que se de la cooperación continua frente a la amenaza de A, se tiene que dar que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-\delta} &> 3+\frac{\delta}{1-\delta} \\
2 &> 3\times(1-\delta)+\delta = 3-2\delta \\
2\delta &> 1 \\
\delta &> 1/2
\end{aligned}$$

Revisión de la tragedia de los comunes Suponga que el juego de la tragedia de los comunes entre los ganaderos se repite indefinidamente. Para simplificar, pongamos que los ganaderos pueden llevar 4 o 5 cabezas a pastar. Los rendimientos de este juego se pueden calcular usando la ecuación (1). Los resultados están en la Tabla 10.6. Si ambos jugadores comparten el mismo factor de descuento δ, y lo saben, en el caso del juego de los comunes, la estrategia cooperar (llevar 4 cabezas) puede ser sostenida en el tiempo como un EN si:

$$\frac{544}{1-\delta} > 595 + \frac{500\times\delta}{1-\delta}$$

$$544 > 595\times(1-\delta)+500\times\delta = 595-595\times\delta+500\times\delta = 595-95\times\delta$$

$$95\times\delta > 595-544 = 51$$

$$\delta > \frac{51}{95}$$

9.2.1 Teorema "Folclórico"

Se llama así porque nadie sabe quien lo dijo primero. La versión más conocida es la de J. Friedman (1971). Hace referencia al hecho que, si existe alguna solución en juegos repetidos en que los jugadores minimicen las pérdidas, esta será la solución elegida.

10 Juegos con información imperfecta

hemos visto juegos estáticos y repetidos con información completa. La información incompleta puede surgir cuando no se sabe algo del o los otros jugadores: cuál es su factor de descuento, sus beneficios, qué jugó el round pasado, etc.

No los veremos aquí.