05. UTILIDAD ESPERADA Y AVERSION AL RIESGO

En este capítulo vemos que el concepto de utilidad se puede generalizar a las situaciones en las cuales los individuos se enfrentan a situaciones en las que tienen que decidir y las consecuencias de sus decisiones dependen del azar. Es decir, se enfrentan a decisiones en condiciones de incertidumbre. Luego utilizaremos estos conceptos para definir aversidad al riesgo y ver que algunos individuos pueden estar dispuestos a pagar algo para reducir el riesgo.

1 Probabilidad y valor esperado

Definimos la *probabilidad* de que ocurra un evento, si este evento puede suceder más de una vez, como la frecuencia con la que observaremos dicho evento.[1] Por ejemplo, la probabilidad de que salga cara si tiramos una moneda no trucada al aire es $1/2$. Eso quiere decir que si tiramos la moneda al aire muchas veces esperaremos que salga cara la mitad de las veces y cruz la otra mitad. Lo mismo con un dado no cargado. La probabilidad de que salga cualquiera de los 6 números es $1/6$. Eso quiere decir que si tiramos el dado 20.000 al aire esperaremos observar $20000/6 = 3333.3$ cada uno de los números.[2]

Las probabilidades tienen dos características: no puedes ser negativas y deben sumar 1. Consideren una *lotería* con n posibles premios $X_1, X_2, ..., X_n$. Supongamos que n es un número finito. El premio X_i no tiene por que ser positivo. Puede ser negativo o cero. Denotaremos $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ a las probabilidades de ganar cada uno de estos premios, respectivamente. Se debe cumplir que

$$\pi_i \geq 0 \text{ para todo } i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

[1]Para los eventos repetidos la probabilidad es un concepto objetivo. Los individuos también le pueden asignar probabilidades *subjetivas* a acontecimientos no repetidos o cuyo mecanismo de generación no conocen. Por el momento dejaremos las probabilidades subjetivas de lado.

[2]Hubo un señor que hizo este experimento en 1882: R. Wolf.

Valor esperado. El *valor esperado* de una lotería como la anterior es

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} (\pi_i \times X_i)$$

El valor esperado de la lotería es la suma poderada de sus premios, donde la ponderación asignada a cada premio es su probabilidad de salir.

Suponga que A y B están de acuerdo en jugar el siguiente juego: tiran una moneda al aire, si sale cara B le pagara \$1 a A y si sale cruz A le pagará \$1 a B. Para ambos jugadores el valor esperado del juego es

$$1/2 \times 1 + 1/2 \times (-1) = 0$$

Hemos denotado -1 como la situación en que el jugador le tiene que pagar al otro; una pérdida.

El juego tiene un valor esperado igual a cero. Si estos dos jugadores juegan a este juego muchas veces es probable que ninguno de los dos gane mucha plata.

Supongamos que el juego cambia y si sale cara B le tiene que pagar \$10 a A, mientras que si sale cruz A le sigue pagando \$1 a B. El valor esperado de este juego para A es

$$1/2 \times 10 + 1/2 \times (-1) = 4.5$$

Esto nos dice que si este juego se juega muchas veces es probable que A termine siendo el ganador. Aún más, es probable que A esté dispuesto a pagar algo por jugar este juego. Los juegos con valor esperado igual a cero se llaman *juegos justos*. El primer juego entre A y B era un juego justo. El segundo juego será un juego justo para A si este paga \$4,5 por el derecho a jugarlo. Sin embargo, frecuentemente la gente se niega a jugar en juegos actuarialmente justos. Este hecho es un aspecto esencial del comportamiento de los individuos frente a la incertidumbre. Y es el objetivo del siguiente punto.

2 Juegos justos y la hipótesis de la utilidad esperada

La gente suele no estar dispuesta a jugar juegos justos.[3]

[3] La gente por lo general juega juegos "injustos". Pero esto no es una refutación de la afirmación anterior, ya que por lo general cuando alguien va al casino lo hace porque

2.1 La paradoja de San Petersburgo

Un ejemplo es "la paradoja de S. Petersburgo", que fue analizada rigurosamente por primera vez por el matemático Daniel Bernoulli en el siglo XVIII.[4] En la paradoja de San Petersburgo se propone el siguiente juego: se tira una moneda hasta que salga cara. Si la cara aparece por primera vez en la enésima tirada, el jugador recibe $\$2^n$. Este juego tiene un número infinito de resultados (uno puede estar tirando la moneda sin que salga cara para siempre, aunque esto tenga una probabilidad muy baja de ocurrencia). Si X_i representa el premio obtenido cuando sale cara en la i-ésima tirada,

$$X_1 = \$2, X_2 = \$4, ..., X_n = \$2^n$$

La probabilidad de que salga cara en la primera tirada es $1/2$, en la segunda es $1/2 \times 1/2 = 1/4$, en la tercera es $1/2^3 = 1/8$ y en la $i - \acute{e}sima$ es $1/2^i$. Es decir,

$$\pi_1 = 1/2, \pi_2 = 1/4, \pi_3 = 1/8, ..., \pi_n = 1/2^n$$

Un aspecto esencial para comprender la paradoja que plantea este juego es que el valor esperado del juego es infinito

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \times X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times 2^i = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1 \times \infty = \infty$$

La paradoja consiste en que aunque el juego tiene un valor esperado igual a ∞, no hay ningún jugador que esté dispuesto a pagar mucho (y mucho menos infinito) para jugar este juego. Esta es pues la paradoja: el juego de Bernoulli no vale su valor esperado (infinito) en dólares.

2.2 La solución de Bernoulli a la paradoja: la Utilidad esperada con utilidad marginal decreciente

Bernoulli supuso que los individuos no reaccionan de acuerdo al valor esperado del juego, sino de la utilidad esperada del juego. Los individuos no

deriva utilidad de otros aspectos relacionados al juego. Cuando se puede aislar el efecto del riesgo de toda la utilidad asociada al consumo de un juego, esta afirmación es correcta.

[4] El artículo original de Bernoulli ha sido reimpreso como D. Bernoulli, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica* **22** (enero de 1954: 23-36).

valoran directamente el juego en función de los valores de los premios, sino en función de la utilidad que le brindan esos valores. Como la gente tiene utilidad marginal decreciente en la riqueza, dijo Bernoulli, los premios superiores de este juego no solo son menos probables sino que brindan menos utilidad en el margen. Si esto es así el valor esperado del juego puede no llegar a infinito, si no a un número finito, relativamente muy bajo.

2.2.1 Ejemplo: la solución de Bernoulli

Si suponemos, como hizo Bernoulli, que los individuos tienen un función de utilidad

$$U(X_i) = \ln(X_i)$$

(Notar que la función de logaritmo neperiano cumple con los postulados $U' > 0$ y $U'' < 0$).

En este caso, el valor de la *utilidad esperada* del juego es

$$E(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \times U(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \ln(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \ln(2^i) = \ln(2) \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$$

El valor de la serie infinita final es 2. Por lo que

$$E(U) = \ln(2) \times 2 = 1.\,386\,3$$

Este es el valor esperado de la utilidad del juego. Por lo tanto, un individuo con esta función de utilidad estará dispuesto a pagar como máximo para jugar este juego la suma de dinero que le brinda una utilidad de 1.3863. Esta suma de dinero es la cantidad x que hace

$$\ln(x) = 1.3863$$

Por lo que tendremos que $x = 4.0$. El supuesto de la utilidad marginal decreciente en la riqueza permitió a Bernoulli ofrecer una explicación a la paradoja: por más que el juego tenga un valor esperado igual a infinito, la gente no está dispuesta a pagar más que $4 por jugarlo.

3 El teorema von Neumann-Morgenstern

John von Neumann y Oscar Morgenstern desarrollaron axiomas para incluir la incertidumbre dentro de la teoría general del comportamiento individual.[5]

[5] J. von Neumann y O. Morgentern, *The Theory of games and Economic Behavior* (Princeton NJ: Princeton University Press, 1944).

Se han planteado muchas cuestiones importantes sobre la validez de estos axiomas, sin embargo no vamos a ver estas cuestiones aquí.[6]

3.1 El índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern

Supongamos de nuevo que un individuo se enfrenta a una lotería con n premios $X_1, X_2, ..., X_n$. Ordenamos los premios por orden de preferencia de peor a mejor. Es decir, X_1 es el premio menos preferido por el individuo y X_n el más preferido. Luego asignamos niveles de utilidad arbitrarios a estos dos premios. Dos números particularmente útiles, aunque no los únicos posibles, son

$$U(X_1) = 0$$
$$U(X_n) = 1$$

El objetivo del teorema es demostrar que existe una forma racional de asignarle valores de utilidad a los demás premios disponibles. Según vNM esta forma es enfrentar al individuo a una elección entre un premio X_i cualquiera, con X_i entre X_1 y X_n, es decir X_i es uno de los restante premios de la lotería, y una lotería que tiene como premio X_n con probabilidad π_i y X_1 con probabilidad $(1-\pi_i)$, y pedirle al individuo que diga cuál es el valor de π_i para el cual estaría indiferente entre recibir X_i con certeza y X_n con probabilidad π_i. vNM supusieron (y esto es uno de los aspectos criticables del teorema) que siempre existirá tal probabilidad. Esta viene definida por

$$U(X_i) = \pi_i U(X_n) + (1-\pi_i)U(X_1)$$

Dados los valores arbitrarios que le dimos a los niveles de utilidad esta condición queda

$$U(X_i) = \pi_i \times 1 + (1-\pi_i) \times 0 = \pi_i$$

Dados los valores arbitrarios que le dimos a los niveles de utilidad que obtiene el individuo con el peor y el mejor premio, la probabilidad de ganar el mejor premio que lo hace indiferente entre optar por X_i con certeza y la lotería entre el mejor y el peor premio es igual al valor de la utilidad que obtiene con X_i. Este es el valor de la probabilidad del premio X_i. Y esto es cierto para todo X_i de la lotería. Por lo tanto hemos logrado asignarle valores a los demás premios de la lotería de forma racional.

[6] Ver por ejemplo Mark J. Machina, "Choices under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved", *Journal of Economic Perspectives (verano de 1987: 121-154).*

3.2 Maximización de la utilidad esperada

Suponiendo que un nivel de utilidad π_i ha sido asignado a cada uno de los posibles premios X_i de la lotería, vNM pasaron a demostrar que un individuo "racional" elegirá entre distintas apuestas en función de la utilidad esperada de cada uno (es decir, en función del valor esperado de estos números índices de utilidad de vNM).

Suponga que el individuo se enfrenta a una elección entre dos loterías. Una ofrece un premio X_2 con probabilidad q y otro X_3 con probabilidad $(1-q)$. La segunda lotería ofrece un premio X_5 con probabilidad t y un premio X_6 con probabilidad $(1-t)$. Queremos demostrar que el individuo elegirá la apuesta 1 si la utilidad esperada de la apuesta 1 es superior a la utilidad esperada de la apuesta 2. Las utilidades esperadas son

$$\begin{aligned}\text{utilidad esperada (1)} &= qU(X_2)+(1-q)U(X_3)\\ \text{utilidad esperada (2)} &= tU(X_5)+(1-t)U(X_6)\end{aligned}$$

Queremos demostrar que el individuo preferirá el juego 1 al 2 sí y sólo sí

$$\text{utilidad esperada (1)} > \text{utilidad esperada (2)}$$

Para hacerlo, escribimos las dos loterías en términos de premios X_1 y X_n para poder compararlas. Recordando que el individuo es indiferente entre obtener con certeza X_2 y una lotería en la que obtiene X_n con probabilidad π_2 y X_1 con probabilidad $(1-\pi_2)$, y lo mismo respecto a los otros premios, podemos expresar las utilidades esperadas en términos de apuestas que solo incluyan X_1 y X_n :

$$\begin{aligned}\text{utilidad esperada (1)} &= qU(X_2)+(1-q)U(X_3)\\ &= q\left[\pi_2 U(X_n)+(1-\pi_2)U(X_1)\right]\\ &\quad +(1-q)\left[\pi_3 U(X_n)+(1-\pi_3)U(X_1)\right]\\ \text{utilidad esperada (1)} &= \left[q\pi_2+(1-q)\pi_3\right]U(X_n)\\ &\quad +\left[q(1-\pi_2)+(1-q)(1-\pi_3)\right]U(X_1)\end{aligned}$$

Similarmente, podemos escribir la utilidad esperada de la loteria 2 como:

$$\begin{aligned}\text{utilidad esperada (2)} &= tU(X_5)+(1-t)U(X_6)\\ &= t\left[\pi_5 U(X_n)+(1-\pi_5)U(X_1)\right]\\ &\quad +(1-t)\left[\pi_5 U(X_n)+(1-\pi_5)U(X_1)\right]\\ \text{utilidad esperada (2)} &= \left[t\pi_5+(1-t)\pi_3\right]U(X_n)\\ &\quad +\left[t(1-\pi_5)+(1-t)(1-\pi_5)\right]U(X_1)\end{aligned}$$

Es obvio que expresadas así, en función de los premios X_1 y X_n, el individuo preferirá la lotería 1 a las 2 si la probabilidad de ganar el premio mayor es mayor en la 1 que en la dos. Pero esto es exactamente lo mismo que decir que el individuo elegirá la 1 si su utilidad esperada es mayor que la utilidad esperada de la 2. Aún más, sustituyendo $U(X_n) = 1$ y $U(X_1) = 0$, podemos decir que el individuo preferirá la lotería 1 si

$$q\pi_2 + (1-q)\pi_3 > t\pi_5 + (1-t)\pi_6$$

que es efectivamente la comparación entre las utilidades esperadas de ambas loterías.

3.2.1 Principio de Optimización

Maximización de la utilidad esperada: Enfrentados a situaciones de incertidumbres los individuos se comportarán como si maximizaran la utilidad esperada, esto es, el valor esperado de sus índices de utilidad vNM.

4 Aversión al riesgo (a partir de este punto debería mezclar con los apuntes a mano de Galera)

Dos loterías pueden tener el mismo valor monteario esperado y ser juegos justos, pero pueden diferir en cuanto a su riesgo. Por ejemplo, el juego en que se gana o se pierde \$1 tirando una moneda tiene el mismo valor esperado que si se ganaran o perdieran \$1.000. (El valor esperado del juego es cero en ambos casos). Pero la segunda es más "arriesgada". El propósito de esta sección es definir el concepto de riesgo y explicar la generalizada aversión al riesgo.

El término **riesgo** hace referencia a *la variabilidad de los posibles resultados de una lotería o de las consecuencias de una determinada acción.* En términos más formales el riesgo se mide a través del (concepto estadístico de) la **varianza** de los resultados posibles. Pero aquí vamos a no meternos con este concepto que ustedes todavía no manejan bien (¿es así?) y nos referiremos a riesgo simplemente como una medida de la **dispersión o variabilidad** de los posibles resultados.

Definida así, *la aversión al riesgo se puede explicar por el supuesto de la utilidad marginal decreciente de la riqueza.* Supongamos que una lotería $\tilde{w}$. Definiremos **aversión al riesgo** cuando se cumple que

$$U\left[E(\tilde{w})\right] > E\left[U\left(\tilde{w}\right)\right]$$

Resulta que la utilidad marginal decreciente en la riqueza W garantiza esto, como veremos en breve.

4.1 Aversión al riesgo y apuestas justas

En la **Figura 8.1.** se muestra que un individuo prefiere un cantidad cierta de riqueza a una apuesta que tenga esa cantidad como valor esperado y que a su vez prefiere una apuesta con menos dispersión entre el resultado positivo y el negativo (menos riesgo). Suponga que un individuo tiene una función de utilidad $U(W)$ sobre su riqueza, la que se deriva de los índices de utilidad de vNM. La misma se dibuja *cóncava* para reflejar la utilidad marginal decreciente de la riqueza: un dólar adicional reporta cada vez menos utilidad adicional. (Ejemplo. $U(w) = \sqrt{w}$). Suponga que se le ofrece a esta persona la posibilidad de participar en dos juegos justos: uno en el que gana $\$h$ con probabilidad 1/2 y pierde $\$h$ con la misma probabilidad y otro similar en el que gana $\$2h$ con probabilidad 1/2 y pierde $\$2h$ con la misma probabilidad. La utilidad de su riqueza actual viene dada por $U(W^*)$. La utilidad esperada si participa en el juego 1 es

$$U^h(W^*) = 1/2U(W^* + h) + 1/2U(W^* - h)$$

Por su parte, la utilidad esperada de participar en el juego 2 es

$$U^{2h}(W^*) = 1/2U(W^* + 2h) + 1/2U(W^* - 2h)$$

Se aprecia claramente en el gráfico que

$$U(W^*) > U^h(W^*) > U^{2h}(W^*)$$

Esto quiere decir que esta persona preferirá su riqueza actual un juego justo que tenga como valor esperado esa riqueza, y que prefiere un juego con menos dispersión entre los montos de las ganancias y las pérdidas a uno con mayor dispersión.

Figura 8.1 aquí

4.2 Aversión al riesgo y seguros

Notar que esta persona estaría dispuesta a pagar hasta $W^* - \overline{W}$ para evitar participar del juego 1. El individuo está dispuesta a pagar una prima $W^* - \overline{W}$ y obtener un utilidad cierta de $U(\overline{W})$, a quedar expuesto a la posibilidad de experimentar $U(W^* - h)$. Si este es el caso se dice que $\overline{W}$ es el equivalente cierto de la lotería h.

Equivalente cierto de una renta aleatoria: *una renta fija que al individuo le es indiferente a la renta aleatoria.*

Esto explica por qué la gente compra seguros.La cantidad de gente que compra seguros (mucha) nos permite elaborar la siguiente definición:

Aversión al riesgo: Un individuo será averso al riesgo si rechaza las apuestas justas. Este será el caso cuando experimente utilidad marginal decreciente en la riqueza. Cuando este es el caso y el individuo es averso al riesgo estará dispuesto a pagar cierta cantidad de dinero para evitar participar en juegos justos.

4.3 Ejemplo 8.2: Disponibilidad a pagar un seguro.

Un individuo tiene una riqueza de 100.000 dólares y enfrenta la posibilidad de que le roben su auto de 20.000 dólares con una probabilidad de 0.25. El índice de utilidad de vNM de esta persona es logarítmico. Es decir, $U(W) = \ln(W)$. Si esta persona afronta el próximo año sin un seguro, su utilidad esperada es

$$\begin{aligned} \text{Utilidad esperada de no contratar seguro} &= 0.75 \times \ln(100000) \\ &\quad +0.25 \times \ln(80000) \\ &= 11.457 \end{aligned}$$

Una **prima justa** es aquella que iguala el valor esperado de la riqueza sin seguro con el valor esperado de la riqueza con seguro. Es decir,

prima justa o prima de riesgo $= E(\text{Renta aleatoria}) -$ Equivalente cierto

Una prima justa en este ejemplo tendría un costo de 5000, ya que el valor esperado de la riqueza del individuo cuando no contrata seguro es $0.75 \times 100000 + 0.25 \times 80000 = 95000$ y esto debe ser igual al valor cierto de la alternativa de contratar seguro. Notar que 5000 **(la prima justa) es también el valor esperado de la pérdida** (0.25×20000).

La utilidad del individuo en caso de contratar un seguro que le reembolsa la totalidad de la pérdida a un costo de 5000 es

$$\begin{aligned} \text{utilidad de contratar seguro a 5.000} &= U(95000) \\ &= \ln(95000) \\ &= 11.462 \end{aligned}$$

La utilidad contratando el seguro (11.462) es mayor que la utilidad esperada de no contratar el seguro. *El individuo no es indiferente entre contratar y no contratar el seguro a* 5000 (la prima justa). Para ser indiferente, la prima del seguro tiene que ser x, tal que x

$$\begin{aligned} U(100000 - x) &= 11.457 \\ \ln(100000 - x) &= 11.457 \\ 100000 - x &= e^{11.457} \\ x &= 5439 \end{aligned}$$

La prima del seguro que lo deja indiferente entre contratar el seguro y no contratarlo es \$5439. Por lo tanto, la compañía de seguros podría cobrarle esta prima y obtener unos beneficios esperados de 439, o menores si consideramos costos de administración de la póliza y otros costos.

5 Cálculo de la aversión al riesgo

La medida más utilizada de aversión al riesgo es la de Pratt[7]

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

[7] J.W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica* (enero/abril de 1964: 122-136).

Puesto que la característica que define a los individuos con aversión al riesgo es $U'' < 0$, el indicador de Pratt es positivo en estos casos. Es facil demostrar que este indicador no varía con transformaciones lineales de la función de utilidad, y por tanto no se verá afectado por los valores arbitrarios elegidos para el mejor y el peor resultado en la escala vNM.

5.1 Indicador de Pratt y prima por seguros

Se puede demostrar que el indicador de Pratt es proporcional a lo que un individuo querrá pagar por asegurarse ante una apuesta justa.

Demostración: *Sea h la variable aleatoria que representa todos los posibles resultados de una lotería (h puede ser positiva o negativa). Dado que la apuesta es justa, $E(h) = 0$. Si p es la cuantía de la prima del seguro que hace al individuo indiferente entre jugar la lotería o pagar p y no jugarla, se debe cumplir que*

$$E\left[U\left(W+h\right)\right] = U(W-p) \tag{1}$$

donde $E\left[U\left(W+h\right)\right]$ es el valor esperado de las utilidades asociadas a cada posible resultado $W+h$, y W es la riqueza del individuo.

Podemos ampliar ambos lados de la igualdad anterior utilizando la ampliación de Taylor.[8] *Para el lado derecho, "dado que p es una suma fija, nos alcanza una apriximación lineal" (Nicholson):*

$$U(W-p) = U(W) - pU'(W) + \text{ términos de ordenes superiores}$$

Para el lado izquierdo necesitamos una aproximación cuadrática

$$\begin{aligned} E[U(W+h)] &= E[U(W) + hU'(W) + \frac{h^2}{2}U''(W) \\ &\quad + \text{términos de orden superior}] \\ &= U(W) + E(h)U'(W) + \frac{E(h^2)}{2}U''(W) \\ &\quad + \text{términos de orden superior} \end{aligned}$$

[8] Las series de Taylor ofrecen una forma de aproximar cualquier función infinitamente diferenciable como un serie infinita de términos que involucran a los valores de sus derivadas en un punto. Por ejemplo, la serie de Taylor que representa a la función $f(x)$, que es infinitamente diferenciable, si la centramos en el punto a es: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\acute{f}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{\acute{f}(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$ Ó, en una notación que nos sirve más para el ejemplo, donde h representa la variable aleatoria y x un numero y se aproxima la función con la serie centrada en el punto x es $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 +$ términos de orden superior.

Recordando que $E(h) = 0$, dejando de lado los términos de orden superior, y escribiendo $E(h^2)/2 = k$ podemos escribir la condición 1 como

$$U(W) - pU'(W) \simeq U(W) + kU''(W)$$

$$p \simeq k\frac{U''(W)}{U'(W)} = kr(W)$$

Esto es lo que queríamos demostrar. Que lo máximo que está dispuesto a pagar un individuo averso al riesgo por evitar una apuesta justa es proporcionar a su medida de aversión al riesgo (de Pratt).

Notar que el factor de proporcionalidad es también proporcional a la varianza de los resultados.

Dado que en el mundo real son las primas que la gente paga lo que se observa, se suelen usar estas para estimar la aversión al riesgo de la gente.

5.2 Aversión al riesgo y riqueza

¿Cómo varía la aversión al riesgo con el nivel de riqueza?

La intuición puede indicar que los ricos son menos aversos al riesgo que los pobres porque como son más ricos las pérdidas pesan menos en su ingreso y por ende están más dispuestos a jugar loterías. Sin embargo, también es cierto que al ser más ricos su tilidad marginal del dinero es menor, y por ende valoran menos las probables ganancias de las loterías. La respuesta es indeterminada. Depende de la forma exacta de la función de utilidad.

Si la *utilidad es cuadrática* respecto a la riqueza,

$$U(W) = a + bW + cW^2$$

con $b > 0$ y $c < 0$, el indicador de Pratt de aversión al riesgo es

$$r(W) = -\frac{2c}{b + 2cW}$$

por lo que en este caso $r(W)$ *(la aversión al riesgo) aumenta con* W.

Sin embargo esta función de utilidad no puede ser muy realista porque siempre va a existeir un W a partir del cual $U' < 0$, lo cual no tiene sentido. Se puede suponer que ese W es muy alto (aq partir de lo cual tener más plata no agrega mucho en si mismo y complica la administración, la seguridad, etc.). Si estamos dispuestos a hacer ese supuesto, ese W vendría dado por $W = -b/2c$. Esto es porque para que $U' > 0$ se necesita $b > -2cW$.

Por el contrario, si *la utilidad es logarítmica* en la riqueza

$$U(W) = \ln(W)$$

y tenemos

$$r(W) = -\frac{-1/W^2}{1/W} = \frac{1}{W}$$

por lo que en este caso *la aversión al riesgo disminuye cuando aumenta la riqueza.*

Por último, si la función de *utilidad es exponencial*

$$U(W) = -e^{-AW}$$

donde A es una constante positiva. En este caso,

$$r(W) = -\frac{-e^{-AW} \times -A \times -A}{-e^{-AW} \times -A} = A$$

La aversión al riesgo es constante.

5.2.1 Ejemplo 8.3: Aversión al riesgo constante

Suponga que un individuo con un nivel de riqueza W_0 enfrenta la posibilidad de ganar o perder \$1000 con probabilidad $0,5$. Si el individuo tiene la función de utilidad exponencial anterior, lo máximo que estaría dispuesto a pagar para evitar esta lotería justa sería la cantidad F que hace

$$\begin{aligned}
-e^{-A(W_0-F)} &= 0,5 \times -e^{-A(W_0-1000)} + 0,5 \times -e^{-A(W_0+1000)} \\
-e^{-AW_0} \times e^{AF} &= 0,5 \times \left[-e^{-AW_0} \times e^{A1000}\right] + 0,5 \times \left[-e^{-AW_0} \times e^{-A1000}\right] \\
e^{AF} &= 0,5 \times e^{A1000} + 0,5 \times e^{-A1000}
\end{aligned}$$

Lo cual quiere decir que la cantidad F será independiente de su nivel de riqueza inicial W_0, y el valor específico dependerá del valor que tome la constante A.

5.3 Aversión al riesgo relativa

Propuesta por Pratt. Es

$$rr(W) = Wr(W)$$

6 El enfoque de las preferencias por los estados para explicar la Elección en Condiciones de Incertidumbre

Hasta ahora, hemos visto la construcción del índice de utilidad vNM para concluir que los individuos se comportan como sí maximizaran la utilidad esperada de sus acciones. Luego hemos definido aversión al riesgo y hemos visto cómo esto afecta la disponibilidad a pagar por un seguro.mPor último hemos visto un indicador de la aversión al riesgo y cómo éste varía dependiendo de la riqueza del individuo.

Sin embargo no hemos visto un modelo general de comportamiento del individuo en condiciones de incertidumbre que se parezca a los modelos de maximización de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria vistos en el capítulo 3.

El propósito de esta sección es incorporar todos estos conceptos nuevos sobre incertidumbre en el análisis de la maximización de utilidad.

6.1 Bienes contingentes

Un *bien contingente* es un bien que solo se produce en determinadas circunstancias; si el "estado del mundo" es uno y no otro. Para simplificar las cosas supondremos que los estados posibles del mundo mañana son "buenos" y "malos" tiempos. Un ejemplo de bienes contingentes antes estos posibles estados es "$1 en buenos tiempos". Este "bien" promete al individuo $1 si ocurren los buenos tiempos, pero nada si ocurren los malos. Tomando la decisión antes de que se realice el estado del mundo, alguien podría estar interesado en comprar este bien. Como no es seguro que mañana el estado del mundo sea bueno, no es seguro que el que compre este bien contingente tenga un peso mañana. Por ende no va a estar dispuesto a pagar más de $1 por recibir $1 mañana con cierta probabilidad. En realidad, tampoco va a estar dispuesto a pagar $1. Va a estar dispuesto a pagar menos que $1. ¿Cuánto menos? Depende de la probabilidad con que vaya a darse el estado bueno (o el malo) mañana.

Notar que un individuo enfrentado a un mundo incierto puede estar interesado en asegurarse un peso mañana, no importa lo que pase. Para eso tendría que comprar ambos bienes contingentes, "$1 mañana si estado bueno" y "$1 mañana si estado malo". De esa forma se aseguraría $1 mañana.

6.2 Utilidad esperada

Podemos también pensar en dos niveles de riqueza o ingresos como bienes contingentes. Sea W_b el nivel de riqueza del individuo si ocurren los buenos tiempos y W_m el nivel de riqueza del individuo si ocurren los malos tiempos. Si la probabilidad de que ocurran los malos tiempos es π, y la utilidad de la riqueza es independiente del estado del mundo[9], o si el cambio de estado del mundo solo afecta su riqueza y nada más, entonces la utilidad esperada de este individuo es

$$V(W_b, W_m) = \pi \times U(W_b) + (1 - \pi) \times U(W_m) \tag{2}$$

6.3 Restricción presupuestaria

Supongamos que un peso de riqueza en tiempos buenos puede comprarse a P_b y un peso de riqueza en tiempos malos puede comprarse a P_m. La restricción presupuestaria del individuo será

$$W = P_b W_b + P_m W_m \tag{3}$$

6.4 Mercados justos para bienes contingentes

Si los mercados de las posibles riquezas contingentes están bien desarrollados y hay un acuerdo general en que la probabilidad de los buenos tiempos es π, entonces los precios de estas posibles riquezas serán actuarialmente justos. Es decir, $P_b = \pi$ (la ganancia esperada de participar en esta "lotería" del bien contingente) y $P_m = 1 - \pi$ (la pérdida esperada), o

$$\frac{P_b}{P_m} = \frac{\pi}{1 - \pi} \tag{4}$$

Éste nos dice cómo puede intercambiar esta persona un peso de riqueza en buenos tiempos por pesos de riqueza en malos tiempos. Por ejemplo, si $P_b = 0,8$ y $P_m = 0,2$, el individuo puede sacrificar \$1 en buenos tiempos y "comprar" \$4 de riqueza en malos tiempos.

[9] Notar que el supuesto de que la utilidad es independiente del estado del mundo es importante. Está diciendo, por ejemplo, que un dólar de riqueza le brinda la misma utilidad al individuo, ya sea que este está sano o enfermo.

6.5 Aversión al riesgo

En esta sección demostramos que si los mercados de bienes contingentes son justos, entonces el individuo elegirá $W_b = W_m$.

El individuo maximiza 2 sujeto a 3 e iguala

$$RMS = \frac{\partial V/\partial W_b}{\partial V/\partial W_m} = \frac{\pi U'(W_b)}{(1-\pi)U'(W_m)} = \frac{P_b}{P_m}$$

Utilizando el supuesto de que los mercados de bienes contingentes son justos, ecuación 4, esto queda

$$\frac{U'(W_b)}{U'(W_m)} = 1$$

ó[10]

$$W_b = W_m$$

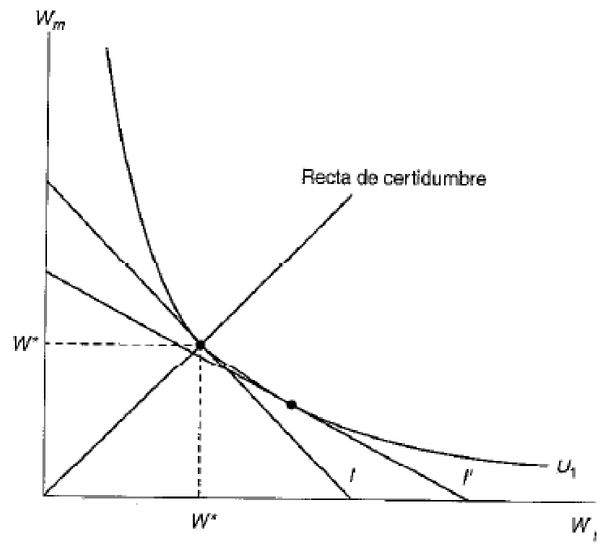
El individuo, como queríamos demostrar, en mercados justos elegirá garantizar el mismo valor de riqueza independientemente de las circunstancias. Esto es, será averso al riesgo.

6.6 Un análisis gráfico

En el gráfico, I representa la restricción presupuestaria $W = P_b W_b + P_m W_m$. Si el mercado es actuarialmente justo, el individuo maximiza utilidad esperada donde $W_b = W_m$, es decir sobre la "recta de certidumbre".

Si el mercado no es justo, la maximización de utilidad puede no situarse en la recta de certidumbre. Suponga, por ejemplo que $\pi/(1-\pi) = 4$ (la pendiente de la CI es -4) pero que $P_b/P_m = 2$ (la pendiente de la restricción presupuestaria es -2). Este caso se puede interpretar como que garantizar la riqueza en malos tiempos es caro. En este caso, suponiendo que U_1 aún refleja la máxima utilidad, la restricción presupuestaria debe ser tangente a la curva de indiferencia U_1 en un punto abajo y a la derecha del anterior. Ya que la tangente en W^* es igual a 4 y la de la restricción I' debe ser 2.

[10] Notar que esta equivalencia requiere que la utilidad de la riqueza sea independiente de la situación y que $U^{'} > 0$.



6.7 Ejemplo 8.5: Seguros en el modelo de preferencias de las situaciones

En el ejemplo anterior del robo del auto suponga W_b = riqueza sin robo y W_m = riqueza con robo. Si la probabilidad de un robo $(1-\pi)$ sigue siendo $0,25$, y la utilidad logarítmica, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \times U(W_b) + 0.25 \times U(W_m) \\ &= 0.75 \times \ln(W_b) + 0.25 \ln(W_m) \end{aligned}$$

Si el individuo no contrata ningún seguro

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \times \ln(100000) + 0.25 \ln(80000) \\ &= 11.457 \end{aligned}$$

Para analizar las elecciones del individuo, primero escribimos su restricción presupuestaria:

$$P_b W_b^* + P_m W_m^* = P_b W_b + P_m W_m$$

donde los W_i representa las dotaciones iniciales de riqueza del individuo y los W_i^* las elecciones óptimas, ambas en el estado $i = b, m$.

Si suponemos que el mercado es justo:

$$0.75W_b^* + 0.25W_m^* = 0.75 \times 100.000 + 0.25 \times 80.000$$

$$0.75W_b^* + 0.25W_m^* = 95.000$$

Recordando que la maximización de utilidad produce $W_b^* = W_m^*$, el individuo elegirá $W_b^* = W_m^* = 95000$. El individuo se moverá por la recta de certidumbre y alcanzará una utilidad esperada

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \times \ln(95000) + 0.25 \ln(95000) \\ &= \ln(95000) \\ &= 11.462 \end{aligned}$$

Lo que significa una mejora respecto de no hacer nada.

Que el individuo elija $W_b^* = W_m^* = 95000$ equivale a decir que el individuo debe ser capaz de comprar \$15.000 de riqueza en tiempos malos (95.000−80.000) con \$5.000 de riqueza en tiempos buenos (\$100.000−95.000). Esto equivale a comprar un contrato de seguros justo que cueste 5.000 pero devuelva 20.000 en caso de robo (y nada en caso de no robo). Observe que $dW_m/dW_b = 15000/-5000 = -3$ es igual al cociente de probabilidades (con signo negativo): $-\pi/(1-\pi) = -0.75/0.25 = -3$

6.7.1 Puede haber otros seguros que mejoren la utilidad aunque no todos lo ubiquen al individuo en la recta de certidumbre

6.7.2 Póliza 1:

Si la póliza costara \$5.200 y devolviera \$20.000 en caso de robo, el individuo solo enfrentaría un costo seguro de 5200, por lo que la restricción presupuestaria sería

$$0.75W_b^* + 0.25W_m^* = 94800$$

Y tendríamos $W_b = W_m = 94.800$. Su nivel de utilidad sería

$$\text{utilidad si contrata seguro a } 5.200 = \ln(94.800) = 11.45953$$

Aún es mayor a lo que obtiene como utilidad esperada si no contrata el seguro. Por lo que estaría dispuesto a comprar este seguro a 5.200.

6.7.3 Póliza 2:

Una póliza que costara \$4.900 y que exigiera que el individuo asuma los primeros \$1.000 de pérdida en caso de robo, generaría:

$$\begin{aligned} W_b &= 100000 - 4900 = 95100 \\ W_m &= 100000 - 4900 - 20000 - 1000 + 20000 = 94100 \end{aligned}$$

Si el individuo decide comprar esta póliza, no se encontrará sobre la recta de certidumbre pero su utilidad esperada es

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada si compra esta póliza} &= 0.75 \times U(W_b) + 0.25 \times U(W_m) \\ &= 0.75 \times \ln(95100) \\ &\quad +0.25 \times \ln(94100) \\ &= 11.46004 \end{aligned}$$

Es decir que, aunque este individuo no alcanza la recta de certidumbre, el individuo está mejor pagando esta póliza que pagando la póliza de 52000 sin deducible.

6.8 Aversión al riesgo y prima de riesgo

El modelo dibujado en la FIGURA 8.2 también es útil para analizar las relaciones entre aversión al riesgo y disponibilidad a pagar de los individuos por evitar el riesgo.

Suponga dos individuos con la función de utilidad $U(W) = \frac{W_b^R}{R}$, con $R < 1, \neq 0$. Entonces, la utilidad esperada es

$$v(W_b, W_m) = \pi \times \frac{W_b^R}{R} + (1 - \pi) \times \frac{W_m^R}{R}$$

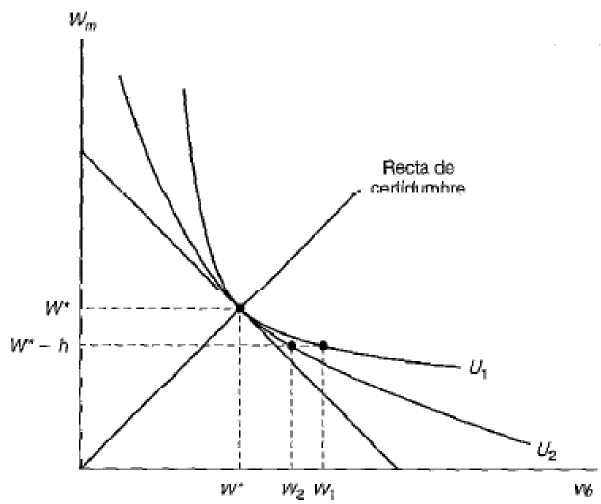
Esta función se parece mucho a las funciones de utilidad ESC analizadas en el capítulo 3. Por lo tanto, el parámetro R determina la curvatura de sus curvas de indiferencia. También está asociado a la aversión al riesgo del individuo:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(R-1)W^{R-2}}{W^{R-1}} = -\frac{R-1}{W}$$

O sea, un individuo con una gran aversión al riesgo tendrá un gran valor negativo de R, y tendrá curvas de indiferencia muy curvas, como la curva U_1

de la FIGURA 8.3. Un individuo con una mayor tolerancia al riesgo, tendrá un mayor valor de R y curvas de indiferencia menos curvas (como la U_2).[11]

Ahora suponga que ambos individuos enfrenta la posibilidad de perder h dólares en malos tiempos. Para el individuo con menor aversión al riesgo, este riesgo sería aceptable si en los buenos tiempos su riqueza aumenta a W_2. Mientras tanto, para el mismo riesgo sea aceptable para el individuo más averso al riesgo, su nivel de riqueza en los buenos tiempos suba hasta $W_1 > W_2$.



7 Utilidad Esperada Subjetiva

El ejercicio 8.1 da una idea de la teoría de la utilidad esperada subjetiva. Pero ni siquiera esta está exenta de crítica.

[11]La tangencia de ambas curvas en W^* está garantizada porque la RMS a lo largo de la recta de certidumbre viene dada por $\pi/(1-\pi)$ independientemente del valor de R.

8 ¿Es la Teoría de la Utilidad Esperada Subjetiva una teoría que explique el comportamiento de la gente?

Más o menos. Los sujetos no se comportan siempre como predice la teoría. De hecho, existe mucha evidencia experimental que sugiere que existen otras motivaciones que deben tenerse en cuenta para explicar el abanico de comportamients humanos.

8.1 Muchas personas razonan en términos relativos, respecto a una situación de referencia

Usted es quiere comprar una milanesa al pan. En la cantina de la Universidad, donde Usted se encuentra, la milanesa cuesta \$U60. Estando en la cantina le dicen que el precio de una milanesa al pan en la panadería que queda a 10 minutos a pie la milanesa al pan (asumamos que son iguales en calidad y tamaño, o comparables al menos) cuesta \$U30. ¿Qué hace?

Ahora imahine que se está por comprar una laptop en el centro comercial más cercano a su casa. camina hasta llí y ve que el precio de la computadora es \$U 42.000. En ese momento le dicen que en una tienda de computadoras que queda a 10 minutos del centro comercial a pie la misma computadora cuesta \$U 41.970. ¿Dónde compra la computadora?

No es descabellado pensar que mucha gente opte por comprar la milanesa en la panadería y la computadora en el centro comercial por más que el ahorro en ambos casos es el mismo: \$U 30 a un costo de 10 minutos.

He aquí otro ejemplo: Le ofrecen dos opciones, ganar \$U 100.000 por mes en un mundo donde todo el resto gana \$U 50.000 por mes o (b) ganar \$U 110.000 en un mundo donde todo el resto gana \$U 900.000 por mes.

de nuevo, si usted se fijara únicamente en los valores absolutos de su ingreso preferiría la situación b), pero mucha gente prefiere la situación (a).

8.2 Aversión a las pérdidas

Dos planes de salud: (a) cuesta \$U 1.000 por mes y te cubre todo; (b) cuesta \$U 750 y tenes que pagar los primeros \$200. Después te cubre todo. ¿Cuál prefieren?

El segundo representa un ahorro de \$50 pesos, sin embargo no todo el mundo lo elige.

8.3 Efecto de enmarcamiento

Usted es el ministro de salud y debe elegir entre dos planes de vacunación para combatir una epidemia mortal en Montevideo:

(a) Salva seguro 200.000 personas

(b) Salva a toda la población (1.500.000) con 1/3 de probabilidad, no salva a nadie con probabilidad 2/3.

¿Cuál elige?

Ahora suponga que le presentan dos nuevos planes:

(c) Mueren seguro 1.300.000 personas

(d) Tiene 1/3 de probabilidad de que no muera nadie y 2/3 de que mueran todos.

¿Cual elige?

El tema es que el plan (a) y el plan (c) son iguales, al igual que el plan (b) y el plan (d).

8.4 Descuento hiperbólico

ya lo di la clase pasada

8.5 Más desviaciones de la TUES

Las personas no solo valoran los resultados de sus acciones de acuerdo a la utilidad que pueden derivar de su ingreso, sino también respecto de emociones como la envidia, enojo, altruismo, vergüenza, comformidad, etc.

Si nos da el tiempo vermos algo de esto (Cap. 3 Bowles).

8.6 La Paradoja de Ellsberg

8.7 Dos urnas

La Urna I contienen 100 bolas, ya sea rojas (R) o negras (N), con un número desconocido de cada una de ellas. La Urna II contiene 50 bolas rojas y 50 bolas negras. En la lotería C_i se saca una bola de forma aleatoria de la urna $i = I$ o II. El jugador recibe \$100 si la bola es R, digamos (es lo mismo apostar por la N o la R). Ellsberg (1961) mostroó en un experimento (replicado luego por varios) que la mayoría de la gente es indiferente entre R_I (jugar a que sale rojo en la urba I) y N_I (jugar a que sale negro en la urna I) y al mismo tiempo es indiferente entre R_{II} y B_{II}, pero prefieren R_{II} a R_I y N_{II} a N_I.

El problema con estas preferencias es que contradicen la teoría de la utilidad esperada subjetiva. Porque si los individuos son indiferentes entre R_I y N_I y entre R_{II} y N_{II} quiere decir que le asignan $1/2$ a la probabilidad de estos eventos. Mientras que preferir R_{II} a R_I y N_{II} a N_I quiere decir que le asignan una probabilidad menor a $1/2$ a los respectivos colores en la Urna II.

9 Práctico: Ejercicio 8.5, 8.6 y 8.7

References

[1] Nicholson, W. (2002). "Teoría Microeconómica. Principios Básicos y Aplicaciones". Capítulo 8. Octava edición. Thomson.

[2] Galera, F. (2008). "Incertidumbre, Información y Juegos". Cap. 1. Notas sin publicar.