4. LOS EFECTOS DE LAS VARIACIONES DEL INGRESO O EL PRECIO DE UN BIEN

1 Las funciones de Demanda

Introducimos notación
$$x_1^* = d_1(P_1, .., P_n, I)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$x_n^* = d_n(P_1, .., P_n, I)$$

1.1 Homogeneidad:

Es facil ver informalmente en el caso de 2 bienes que si multiplicamos ambos precios y el ingreso por un número positivo, las cantidades demandadas de x e y no van a variar porque la restricción no varía.

$$PxX + PyY = I$$

es lo mismo que
$$2PxX + 2PyY = 2I$$

Definición: *Una función $f(x_1, ..x_n)$ es homgénea de grado k si $f(tx_1, .., tx_n) = t^k f(x_1, ..x_n)$.*

Las funciones de demanda son homogéneas de grado cero:

$$x_1^* = d_1(P_1, .., P_n, I) = d_1(tP_1, .., tP_n, tI) \text{ para todo } t > 0$$

Ejemplo: las funciones de demanda de la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$x^* = \frac{\alpha I}{P_x}$$

$$y^* = \frac{\beta I}{P_y}$$

2 Las Variaciones del Ingreso

Análisis gráfico de aumentos sucesivos en I.

FIGURA 5.1 NICHOLSON

Observar:

1. las RP son paralelas. El cociente de precios no cambia
2. La RMS no puede cambiar

Con esta información construimos la *Curva de Engel* para un bien determinado, en este caso x en el eje (x, I)

Si x es un bien necesario los aumentos en la cantidad demandada de x serán sucesivamente menores en proporción a los aumentos de I.

Si x es un de lujo necesario los aumentos en la cantidad demandada de x serán sucesivamente menores en proporción a los aumentos de I.

Las curvas de Engel son un concepto que anda por allí pero que nosotros no vamos a utilizar mucho en este curso.

2.1 Bienes Normales e Inferiores

Las variaciones de las cantidades demandadas de los bienes ante variaciones en el ingreso nos permite clasificar a los biene en normales o inferiores, necesarios o de lujo.

X_i es un **bien normal en un intervalo del ingreso si:**

$$\frac{\delta x_i^*}{\delta I} \geq 0$$

Si $\frac{\delta x_i^*}{\delta I} < 0$ en ese intervalo, entonces x_i es un **bien inferior**: transporte colectivo.

Gráfico de aumentos sucesivos en el ingreso con un bien inferior:

FIGURA 5.2 NICHOLSON

3 Las Variaciones en el precio de un bien

3.1 Análisis gráfico de un descenso en el precio de P_x, el cual baja de P_x^0 a P_x^1

FIGURA 5.3 NICHOLSON

La canasta óptima pasa de (X^*, Y^*) a (X^{**}, Y^{**}). Pero este cambio total se puede descomponer en **dos efectos**:

1. el **efecto sustitución**: de A a B
2. el **efecto ingreso**: de B a C

SERÍA BUENO ENCONTRAR UN EJEMPLO EN EL CUÁL NOS INTERESA AISLAR EL EFECTO RENTA DEL EFECTO SUSTITUCIÓN.

3.2 Análisis gráfico de un aumento en el precio de P_x, el cual sube de P_x^0 a P_x^1

3.3 El efecto de un aumento en el precio en el caso de los bienes inferiores

El efecto-ingreso y el efecto-sustitución van en sentido contrario

El efecto total es indeterminado. (Si el efecto total es positivo (baja P_x y baja la cantidad demandad de X) estamos frente a un bien de Giffen).

4 La Curva de Demanda del Individuo

Se escriben, por comodidad, como

$$x_1^* = d_1(P_1)$$

en lugar de $x_1^* = d_1(P_1, .., P_n, I)$. Se supone que $P_1, .., P_n, I$, permanecen constantes.

4.1 Análisis gráfico de la obtención de una curva de demanda d_x :

En el eje (X, Y), y el eje (P_x, X) a medida que baja P_x :

FIGURA 5.5

Definición: La *función de demanda individual* muestra....cuando permanecen constantes todos los otros determinantes de la cantidad demandada.

Si cambian:

4.2 Desplazamientos de la curva de demanda

4.3 Ejemplo: Funciones de demanda y curvas de demanda

Vimos en el Ejemplo 4.2 del libro que las funciones de demanda de una función de utilidad Cobb-Douglas:

$$U(x, y) = x^{0,3}y^{0,7}$$

son

$$\begin{aligned} x &= \frac{0,3I}{P_x} \\ y &= \frac{0,7I}{P_y} \end{aligned}$$

Para dibujar las curvas de demanda tenemos que saber I. Si $I = 100$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{30}{P_x} \\ y &= \frac{70}{P_y} \end{aligned}$$

que son las curvas de demanda que queremos dibujar. Y son hipérbolas rectangulares.

También vimos en el Ejemplo 4.2 del libro que las funciones de demanda de una función de utilidad ESC:

$$U(x, y) = x^{0,5} + y^{0,5}$$

son

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{1 + P_x/P_y}\right) \times \frac{I}{P_x} \\ y &= \left(\frac{1}{1 + P_y/P_x}\right) \times \frac{I}{P_y} \end{aligned}$$

En este caso, para dibujar las curvas de demanda tenemos que saber I pero también P_x y P_y. Si $I = 100$, tenemos

$$x = \frac{100}{(P_x^2 + P_x)}$$

que son las curvas de demanda que queremos dibujar. Y son hipérbolas rectangulares.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial I} &= \left(\frac{1}{1 + P_x/P_y}\right) \times \frac{1}{P_x} > 0 \\
\frac{\partial x}{\partial P_y} &= \frac{1}{(P_x + P_y)^2} > 0
\end{aligned}$$

4.4 Curva de Demanda Compensada

Análisis gráfico h_x

FIGURA 5.6

A medida que P_x baja de P_x' a P_x'' al individuo se le "compensa" para mantenerlos en la misma curva de indiferencia U_2. Se le saca I (en este caso) para que su utilidad no aumente.

4.5 Relación entre las curvas de Demanda Compensada y no-compensada

Si el bien x es un bien *normal,* la h_x es más empinada porque incorpora sólo el efecto sustitución mientras que la no-compensada (d_x) incorpora el efecto sustitución + el efecto ingreso.

Análisis gráfico. Supongamos que partimos del punto (P_x^0, X^0), en donde se cruzan h_x y d_x. Este punto es ...$I = E^*$.

FIGURA 5.7

Cuando P_x aumenta la disminución en la cantidad demandada de x es menor por h_x que por d_x porque en el caso de h_x el individuo es compensado por su pérdida de poder adquisitivo de tal forma que se mantiene en la misma curva de indiferencia.

Cuando P_x baja sucede lo contrario. El aumento en la cantidad demandada de x es mayor por d_x ya que en el caso de h_x el individuo es "castigado" (le "sacan plata") para impedir que alcance una curva de indiferencia más alta.

4.6 Ejemplo: Demandas compensadas de $U(X,Y) = \sqrt{XY}$

Las funciones de demanda marshallianas en este ejemplo eran

$$x^* = \frac{I}{2P_x}$$

$$y^* = \frac{I}{2P_y}$$

Para obtener las funciones de demanda compensadas basta con despejar I de $V(P_X, P_Y, I)$ y sustituirlo en estas funciones.

$$V(P_X, P_Y, I) = \frac{I}{2\sqrt{P_X P_Y}}$$

$$V2\sqrt{P_X P_Y} = I$$

$$h_x = \frac{V2\sqrt{P_X * P_Y}}{2P_x} = V\frac{\sqrt{P_Y}}{\sqrt{P_x}}$$

$$h_y = \frac{V2\sqrt{P_X * P_Y}}{2P_Y} = V\frac{\sqrt{P_X}}{\sqrt{P_Y}}$$

Utilizando ambas demandas podemos ver que cuando $P_X = 0,25, P_Y = 1, I = 2, V = 2$, ambas dan los mismo resultados $(X = 4, Y = 1)$

Pero, por ejemplo, cuando P_X sube a $P_X = 1$

$$d_x = 1$$

$$h_x = 2$$

La cantidad demandada de x cae menos segun h_x que d_x porque h_x no incluye el efecto ingreso (negativo en este caso).

5 Análisis Matemático de las Variaciones en los Precios

Hasta ahora lo vimos básicamente con gráficos.

Queremos analizar $\frac{\partial x}{\partial P_X}$

Enfoque directo: $\frac{\partial d_x}{\partial P_X}$. Fácil y poco interesante.

Enfoque indirecto

Dos bienes X e Y. Queremos ilustrar la relación entre h_x y d_x.

Por definición

$$h_x(P_X, P_Y, U) = d_X(P_X, P_Y, E(P_X, P_Y, U))$$

Dierenciando parcialmente con respecto a P_X

$$\frac{\delta h_x}{\delta P_X} = \frac{\delta d_X}{\delta P_X} + \frac{\delta d_X}{\delta E} * \frac{\delta E}{\delta P_X}$$

Re-ordenando los términos:

$$\frac{\delta d_X}{\delta P_X} = \frac{\delta h_x}{\delta P_X} - \frac{\delta d_X}{\delta E} * \frac{\delta E}{\delta P_X}$$

Donde:

$\frac{\delta h_x}{\delta P_X}$ es la pendiente de la h_x (efecto sustitución)

$\frac{\delta d_X}{\delta E} * \frac{\delta E}{\delta P_X}$ es la variación en la cantidad demandada de x ante un cambio en su precio a través del cambio en el gasto (**efecto ingreso**). Cuando aumenta P_X el gasto necesario para mantenerse en la misma curva de indiferencia (la misma U) tiene que aumentar. Por lo tanto $\frac{\delta E}{\delta P_X} > 0$. Sabemos que $\frac{\delta d_X}{\delta E} > 0$. Pero como cuando aumenta P_X el efecto ingreso es negativo $\frac{\delta d_X}{\delta E} * \frac{\delta E}{\delta P_X}$ va precedido por un signo de $-$.

6 La Ecuación de Slutsky

Introducimos primero algunos cambios en la notación:

(1) Efecto sustitución: $\frac{\delta h_x}{\delta P_X} = \frac{\delta X}{\delta P_X}_{U \text{ constante}}$

(2) Efecto ingreso: $-\frac{\delta d_X}{\delta E} * \frac{\delta E}{\delta P_X} = -\frac{\delta X}{\delta I} * \frac{\delta E}{\delta P_X}$, ya que las variaciones del ingreso o de los gastos son equivalentes en d_x.

(3) Aplicando el teorema del envolvente en el problema de minimización de gasto, se puede demostrar que

$$\frac{\delta E}{\delta P_X} = X$$

Demostración: Por el teorema del envolvente....

Por lo que si el problema es minimizar $E = P_X * X + P_Y * Y$ sujeto a $\overline{U} = U(X,Y)$, y $L = P_X * X + P_Y * Y \ +\lambda(\overline{U} - U(X,Y))$, el teorema del envolvente nos dice que

$$\frac{\delta E}{\delta P_X} = \frac{\delta L}{\delta P_X} = X$$

Intuición: Cuando P_X sube \$1, el gasto mínimo necesario para alcanzar $\overline{U}$ sube $\$X$ $(= \$1 * X)$.

Combinando (1), (2) y (3)

$$\frac{\delta d_x}{\delta P_x} = \frac{\delta X}{\delta P_X}_{U \text{ constante}} - X * \frac{\delta X}{\delta I}$$

Ecuación de Slutsky

Que dice que el cambio en la cantidad demandad de X ante un cambio en su precio es igual al efecto sustitución menos el efecto renta.

$\frac{\delta h_x}{\delta P_X} < 0$ Efecto sustitución. Negativo si RMS decreciente

$\frac{\delta X}{\delta I} > 0$ si X es un bien normal. Por lo que $-\frac{\delta X}{\delta I} * X < 0$ si X es un bien normal.

En el caso de un bien normal, el efecto sustitución y el efecto ingreso actúan en el mismo sentido para generar una d_x con pendiente negativa

6.1 Ejemplo con las funciones de demanda de $U(X,Y) = \sqrt{XY}$

$$\begin{aligned} d_x &= \frac{I}{2P_x} \\ h_x &= V\frac{\sqrt{P_Y}}{\sqrt{P_x}} \end{aligned}$$

$\frac{\delta d_x}{\delta P_x} = -\frac{2I}{4Px^2} = -\frac{I}{2Px^2}$

Esto tiene que ser igual a

$\frac{\delta h_x}{\delta P_x} = -V\frac{\sqrt{P_y}*1/2*P_x^{-1/2}}{P_x} = -\frac{V}{2}\frac{\sqrt{P_y}}{P_x^{3/2}}$

Para eliminar V utilizamos la función de utilidad indirecta $V(P_X, P_Y, I) = \frac{I}{2\sqrt{P_X P_Y}}$

$\frac{\delta h_x}{\delta P_x} = -\frac{\frac{I}{2\sqrt{P_X P_Y}}}{2}\frac{\sqrt{P_y}}{P_x^{3/2}} = -\frac{I}{4P_x^2}$

La segunad parte de la ecuación de Slutsky viene dada por:

$-X * \frac{\delta X}{\delta I} = -\frac{I}{2P_x}\frac{1}{2P_x} = -\frac{I}{4P_x^2}$

Combinando los dos últimos resultados:

$$\frac{\delta d_x}{\delta P_x} = \frac{\delta X}{\delta P_X}_{U \text{ constante}} - X * \frac{\delta X}{\delta I} = -\frac{I}{4P_x^2} - \frac{I}{4P_x^2} = -\frac{I}{2Px^2}$$

7 La preferencia revelada y el efecto sustitución

Samuelson (1947) demostró que el efecto sustitución es negativo sin necesidad de suponer que existe una $U(.)$ que no se puede observar, lo cual era criticado. Samuelson denominó a esta demostración *Teorema de la Preferencia Revelada.*

Define un pincipio de racionalidad que se basa en la conducta observada y lo utiliza para deducir una función de utilidad del individuo. Una persona que siga el principio de racionalidad de Samuelson se comporta *como* si maximizara realmente una $U(.)$ y muestra un efecto sustitución negativo.

7.1 Demostración gráfica del principio de racionalidad en la teoría de las preferencias reveladas

Considere dos canastas: A y B. Si dada una combinación de precios e ingreso tal que tanto A y B son asequibles y el individuo eligge A, decimos que el individuio a "revelado su preferencia" por A frente a B. El principio de racionalidad afirma que bajo ninguna otra combinación de precios e ingresos tal que ambas canastas A y B sean asequibles el individuo podrá elegir B en lugar de A. Si elige B en lugar de A es por que A ya no es más asequible. El principio se presenta en la siguiente gráfica:

Figura 5.8 del Nicholson aquí.

Si con I_1 el individuo compra la canasta A en lugar de la canasta B es porque prefiere A a B. Si con otra combinación de precios e impuestos comprara B es porque no puede alcanzar A. Con I_2 elige B porque no llega a A. Nunca puede preferir B a A con otros precios e impuestos. Con I_3 no elegirá A, pero tampoco B, sino otra canasta como C.

Observar que *este enforque utiliza las reacciones observables frente diferentes restricciones presupuestales en lugar de suponer que existe una función de utilidad.*

7.2 Negatividad del efecto sustitución

Utilizando el principio de racionalidad demostramos ahora que el efecto sustitución es negativo o cero.

Supongamos que un individuo es indiferente entre dos cestas: la C, que está compuesta por (X_c, Y_c) y la D, que esta compuesta por (X_D, Y_D). Sean P_X^C y P_Y^C los precios a los que se elige la canasta C y P_X^D y P_Y^D los precios a los que se elige la canasta D.

Dado que el individuo es indiferente entre C y D, deber ser que si elige la canasta C ésta cuesta al menos tanto como la D (Si D costara menos hubiera elegido D)[1] :

$$P_X^C X_c + P_Y^C Y_c \leq P_X^C X_D + P_Y^C Y_D$$

Cuando elige D debe cumplirse algo similar:

$$P_X^D X_D + P_Y^D Y_D \leq P_X^D X_c + P_Y^D Y_c$$

Reordenando ambas ecuaciones obtenemos:

$$P_X^C (X_C - X_D) + P_Y^C (Y_C - Y_D) \leq 0$$
$$P_X^D (X_D - X_C) + P_Y^D (Y_D - Y_C) \leq 0$$

Si las sumamos obtenemos

$$(P_X^C - P_X^D)(X_C - X_D) + (P_Y^C - P_Y^D)(Y_C - Y_D) \leq 0$$

Supongamos que sólo varía el P_x y que $P_Y^C = P_Y^D$

$$(P_X^C - P_X^D)(X_C - X_D) \leq 0$$

Esta desigualdad dice precisamente que los precios y las cantidades demandadas varían en sentido contrario. Recordando que partimos del supuesto de que el individuo era indiferente entre C y D, ésta no otra cosa que una versión en términos de desigualdad de

$$\frac{\partial X}{\partial P_X}_{U \text{ constante}} \leq 0$$

Aplicación: En la construcción de índices de precios de Pasche por ejemplo (la canasta no está fija), para concluir que cuando hay un aumento general de precios y un cambio de precios relativos el individuo está peor necesariamente debemos partir de la teoría de preferencia revelada: si con los precios viejos la canasta que consume hoy no era elegida es porque no la prefería.

[1] La demostración (que se basa en Samuelson) no es del todo correcta porque la teoría de la preferencia revelada no contiene una definición de indiferencia.

7.3 Generalización (n bienes)

Si a los precios P_i^0 se elige la cesta X_i^0 y la cesta X_i^1 es también asequible, entonces

$$\sum_i P_i^0 X_i^0 \geq \sum_i P_i^0 X_i^1$$

es decir, se ha revelado que se puede consumir la cesta 1 pero se prefiere la cesta 0.

Por consiguiente, cuando se compra la cesta 1 a los precios P_i^1 debe suceder que la cesta 0 no es asequible

$$\sum_i P_i^1 X_i^0 > \sum_i P_i^1 X_i^1$$

esta versión introductoria de la preferencia revelada centra la atención en dos canastas. En el caso de más de dos canastas requiere un grado de transitividad de las preferencias entre un número arbitrariamente grnade de canastas.

Esto se resume en el

Axiom 1 *Axioma fuerte de la preferencia revelada: si se revela que se prefiere la canasta* 0 *a la* 1, *la* 1 *a la* 2, *... y la* $K-1$ *a la* K, *entonces no puede revelarse que se prefiere la* K *a la* 0 *(donde* K *es un número arbitrario de canastas de bienes)*

Casi todas las demás propiedades que se han desarrollado utilizando el enfoque de una función de utilidad puede utilizarse con el enfoque de la preferencia revelada.

8 El Excedente del Consumidor

Un problema importante en economía aplicada es saber cómo afecta al bienestar de la gente las variaciones en los precios. Por ejemplo, si en un mercado no competitivo los oferentes se ponen de acuerdo para subir el precio, esto repercutirá negativamente en el bienestar de los compradores. Para asignarle un valor económico a esta pérdida calculamos la variación en el Excedente de los Consumidores.

¿Cómo varía el bienestar del consumidor cuándo varía P?

$$E(P_X, P_Y, U^0)$$

Gastos necesarios para alcanzar U^0 con P_x^0 : $E_0 = E(P_X^0, P_Y, U^0)$

Gastos necesarios para alcanzar U^0 con P_x^1 : $E_1 = E(P_X^1, P_Y, U^0)$

Variación del bienestar: $E_0 - E_1$

Cuando P_x sube de P_x^0 a P_x^1, $E_0 - E_1 < 0$ - pérdida

Cuando P_x baja de P_x^0 a P_x^1, $E_0 - E_1 > 0$ - ganancia

Conociendo la función de gastos es suficiente.

Pero podemos también calcular la variación del bienestar de otra forma; utilizando las curvas de demanda.

Por el teorema del envolvente

$$\frac{\partial E(P_X, P_Y, U^0)}{\partial P_x} = h_x(P_X, P_Y, U^0)$$

este resultado ya se vio antes y es cierto "en el margen".

Pero para evaluar las variaciones en los gastos necesarios correspondiente a una variación "no marginal" o "grande" en los precios debemos integrar la ecuación anterior.

$$\text{Variación del bienestar} = \int_{P_x^0}^{P_x^1} \frac{\partial E(P_X, P_Y, U^0)}{\partial P_x} dP_x = \int_{P_x^0}^{P_x^1} h_x(P_X, P_Y, U^0) dP_x$$

8.1 Las variaciones en el bienestar y la curva de demanda marshalliana

El individuo en realidad pierde poder adquisitivo cuando sube P_x y por lo tanto se ubica en una CI menor. Esto trae el problema de la existencia de cierta ambiguedad respecto a qué curva de demanda compensada utilizar para medir el EC : la original (U_0) o la correspondiente al nivel de utilidad posterior al cambio $U_1, h_x(U_1)$.

FIGURA 5.10

Se puede ver en el gráfico que el EC que sale del al d_x es una medida intermedia entre ambos EC que salen de la $h_x(U_1)$ y $h_x(U_0)$, por lo que resulta ser una salida honrosa del problema antes mencionado. Además, resulta ser el único que se es capaz de estimar en la realidad.

8.1.1 Ejemplo

$$h_x = V\frac{\sqrt{P_Y}}{\sqrt{P_x}}$$

Calculamos la pérdida de bienestar de un aumento de $P_x^0 = 0,5$ a $P_x^1 = 1$. La variación del bienestar vimos que viene dada en este caso por:

$$\int_{0,25}^{1} V\frac{\sqrt{P_Y}}{\sqrt{P_x}}dP_x = 2V\sqrt{P_Y}\sqrt{P_x}_{P_x=0,25}^{P_x=1}$$

Si suponemos que el nivel de utilidad inicial es $V = 2$, puesto que $P_y = 1$,

$$\text{Pérdida} = 4 - 4\left(\sqrt{1/4}\right) = 4 - 2 = 2$$

Ésta pérdida es igual a lo que tiene que aumentar el gasto para mantenerse en $U = 2$

Si tomamos $V = 1$ como el nivel "adecuado" de utilidad,

$$\text{Pérdida} = 2 - 2\left(\sqrt{1/4}\right) = 2 - 1 = 1$$

Si utlizamos $d_x = I/2P_x$,

$$\text{Pérdida} = \int_{0,25}^{1}\frac{I}{2P_x}dP_x = I\frac{\ln Px}{2}{}_{xP_x=0,25}^{P_x=1} = 0 - (\ln 0.25) = 1.386\,3$$

Práctico N^{o}4: 5.4, 5.6, 5.7, 5.8.