02 - PREFERENCIAS Y UTILIDAD

Marcelo Caffera

1 Axiomas de la Elección "Racional"

¿Que características debe cumplir la conducta "racional"? Si el individuo es racional, se enfrenta a una situación en la cual debe elegir entre dos canastas o situaciones *cualesquiera* A y B, sus preferencias con respecto estas canastas o situaciones deben ser tales que cumplan con las siguientes propiedades o *axiomas:*

1. **Completitud**: Si A y B son dos situaciones, el individuo
   a. Prefiere A a B, o
   b. Prefiere B a A, o
   c. Es indiferente entre A y B
2. **Transitividad**: Si una persona declara que "prefiere A a B" y que "prefiere B a C", también debe declara que "prefiere A a C".
3. **Continuidad**: Si una persona declara que "prefiere A a B" también debe preferir debidamente las situaciones parecidas a A y B. Este supuesto de continuidad es necesario para analizar las respuestas de los individuos antes cambios pequeños en las situaciones.

2 La Utilidad

Dadas estas propiedades, es posible demostrar formalmente que los individuos van a ser capaces de ordenar todas las situaciones posibles de la menos a la más deseable. Siguiendo a J. Bentham (1848) diremos que las situaciones más deseables reportan más *utilidad (U).* Si un individuo prefiere A a B, entonces $U(A) > U(B)$, donde $U(.)$ es la *función de utilidad.*

2.1 Inexistencia de un Único Método para Medir la Utilidad

Lo que hace la función de utilidad es asignar un número a la preferencia (utilidad) del individuo por cada situación. Pero este número puede no ser único. Cualquier escala de números (*ranking)* que refleje la misma ordenación de preferencias explicará las mismas elecciones. Es decir, da lo mismo decir que $U(A) = 5$ *y* $U(B) = 4$ que decir que $U(A) = 1.500$ y $U(B) = \ 0,5$. En ambos casos quiere decir que A es preferible a B y eso es todo lo que le pedimos a una ordenación de preferencias.

En términos más formales, cualquier ordenación de preferencias representada por U puede también ser representada por $F(U)$ siempre que $F'(U) > 0$ para todo U. F es una *transformación monotónica* de U. Ejemplos: $F(U) = U^2$ $(U > 0)$ o $F(U) = \ln U$.

No tiene sentido preguntarse cuánto más prefiere el individuo A a B porque la pregunta puede tener más de una respuesta. Ello es porque podríamos representar su ordenación de preferencias con más de una función (escala), como en el ejemplo de arriba. Las ordenaciones de preferencias son *ordinales*. Tan solo podremos decir que prefiere A a B.

Tampoco podemos comparar las utilidades de dos personas diferentes. Si el individuo 1 dice que $U_1(A) = 5$ y el individuo 2 dice que $U_2(A) = 100$ no podemos decir cuál de los dos valora más A porque podrían estar utilizando escalas muy diferentes.

Tampoco podemos decir que el traspaso de una situación A a una B reporta más utilidad a una persona que a otra.

2.2 Función de utilidad

Suponemos que el mundo está compuesto por dos bienes, X e Y (o que el consumo del resto de los bienes permanece constante) y llamamos $U(X, Y)$ a esta función de utilidad. Esta representará las preferencias en torno a las cantidades de los bienes X e Y en una canasta compuesta por estos dos bienes.

Supuesto de Insaciabilidad: Los individuos siempre prefieren una cantidad mayor de cada bien a una menor. En base a este supuesto podemos establecer las relaciones de preferencias entre una canasta con las cantidades X' e Y' de estos bienes y el resto de las canastas posibles que se ilustran en la siguiente figura:

[redacted]

2.3 Curvas de Indiferencia

Un **curva de indiferencia** muestra un conjunto de canastas de consumo que le reportan al individuo el mismo nivel de utilidad. El individuo es indiferente entre todas las canastas en una una curva de indiferencia.

Una Curva de Indiferencia

Las canastas $(y1, x1)$ y $(Y2, X2)$ le reportan al individuo la misma satisfacción.

2.3.1 Características de las Curvas de Indiferencia

Pendiente negativa

Convexidad de las curvas de indiferencia Un conjunto es estrictamente convexo si dos puntos cualesquiera de ese conjunto pueden unirse por una línea recta contenida totalmente en el conjunto. El conjunto celeste en el gráfico (incluída la curva de indiferencia) es el conjunto de las canastas que son preferidas a o brindan la misma utilidad que $(X\acute{}, Y\acute{})$.

Mapas de Curvas de Indiferencia

Existe un número infinito de Curvas de Indiferencia (CI) porque el individuo se supone que puede ordenar todas las canastas (X,Y) lo que significa que, por cada (X,Y) debe pasar una CI.

Curvas de indiferencia y transitividad: las curvas de indiferencia no se pueden cruzar. La propiedad de transitividad de la ordenación de preferencias representada por la función de utilidad implica que las CI no se pueden cortar

De acuerdo al supuesto de insaciabilidad, A se prefiere a B y C se prefiere a D. Pero B y C están en la misma curva de indiferencia, por lo que debería cumplirse que "A se prefiere a D". Sin embargo, esto no es cierto ya que A y D están sobre la misma CI. $\Longrightarrow$las CI no se deben cortar.

Pendiente negativa creciente: de $-\infty$ a 0. Significa que la tasa a la que está dispuesta a cambiar Y por X decrece a medida que aumenta el consumo de X. Esta tasa se llama:

3 Relación Marginal de Sustitución

Es la pendiente de la curva de indiferencia en un punto. decir que las CI son (estrictamente) convexas equivale a decir que la RMS es decreciente. Ni siquiera hay segmento rectos.

3.1 Definición:

$$RMS = -\frac{dY}{dX}_{U=U1}$$

3.2 La RMS como cociente de las Utilidades marginales

3.2.1 Definición de utilidad marginal

La función de utilidad de un individuo tiene muchos argumentos porque la utilidad de muchas cosas. Estos argumentos o cosas pueden ser de distinta naturaleza: bienes de consumo, situaciones (salir con los amigos), tiempo dedicado al surfing, horas dedicadas a practicar el bajo, etc. En términos matemáticos:

$$\text{Utilidad} = U(x_1, x_2, .., x_n)$$

Donde las variables $(x_1, x_2, .., x_n)$ representan a este conjunto de bienes, situaciones, etc. Como éstas suelen ser muchas, y con frecuencia estaremos interesados en analizar el efecto que tiene sobre el bienestar de un individuo el cambio en la cantidad que consume de un determinado bien, o de una sola situación, nos interesa aprender el concepto de *utilidad marginal:*

$$\boxed{\text{Utilidad marginal de } X_1 = \tfrac{\partial U}{\partial x_1} = Ux_1 = UMx_1}$$

Este es el cambio en la utilidad del individuo ante un cambio de una unidad en la cantidad que consume del bien x_1, *dejando fija la cantidad que consume del resto de los bienes.* Es decir, *ceteris paribus.*

El valor de la utilidad marginal depende del punto en que se evalúa esta derivada parcial y de la escala que se utilice para medir la utilidad.

3.2.2 Diferencial Total de U

Si queremos ver cómo cambia la utilidad cuando cambia **infinitesimalmente** la cantidad consumida o experimentada de todos los bienes, servicios y situaciones que se incluyen en la función de utilidad debemos hacer el diferencial total de la función de utilidad. Esto es:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n \\ &= UMx_1.dx_1 + UMx_{2.}dx_2 + ... + UMx_{n.}dx_n \end{aligned}$$

3.2.3 Obtención de la RMS

¿Que pasa si sólo varían dos bienes, x e y, de tal manera que la utilidad del individuo no cambia?

$$dU = 0 = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = UMx.dx + UMy.dy$$

De donde podemos obtener que

$$-UMydy = UMx.dx \Longrightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{UMx}{UMy}$$

Más formalmente:

$$-\frac{dy}{dx}|_{\mathrm{U=CONS\,tan\,TE}} = \frac{UMx}{UMy} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}$$

Esta es la definición de la RMS.

No depende de la escala de U. Sea $F(U)$ una transformación monotónica de $U : F'(U) > 0$ Entonces:

$\boxed{RMS = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{F'(U).\partial U/\partial x}{F'(U).\partial U/\partial y} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}} \Longrightarrow$ RMS correspondiente a la función de utilidad U

3.2.4 La UM decreciente y la RMS

Por más que intuitivamente pueda parecerlo, la UM decreciente no implica RMS decreciente.

Demostración:

$$U = f(x, y)$$

$$RMS = \frac{fx}{fy} = -\frac{dy}{dx} = \frac{f_1}{f_2}$$

RMS decreciente implica que $\frac{dRMS}{dx} < 0$. Sustituyo $dy/dx =f_1/f_2$

$$\frac{dRMS}{dx} = \frac{[f_{11}+f_{12}.dy/dx].f_2-[f_{21}+f_{22}.dy/dx]f1}{f_2^2}$$
$$= \frac{f_{11}f_2-f_{12}f_1-f_{21}f_1+f_{22}f_1^2/f_2}{f_2^2}$$

Reconociendo que $f_{12}=f_{21}$

$$= \frac{f_2 f_{11}-2f_1 f_{12}+f_{22}f_1^2/f_2}{f_2^2}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por f_2:

$$\frac{dRMS}{dx} = \frac{f_2^2 f_{11}-2f_1 f_2 f_{12}+f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

Si suponemos que $f_2>0$ (la UM es positiva)

$$\frac{dRMS}{dx}<0 \iff f_2^2.f_{11}-2.f_1.f_2.f_{12}+f_1^2.f_{22}<0$$

$(+)\,(-)$

$(+)\,(+)\,(?)$ $(+)\,(-)$

$-$ $-$

si suponemos UM decreciente

No alcanza con que (f_{11} y $f_{22}<0$) para que RMS sea decreciente. También debemos conocer f_{12}, que puede ser positiva pero también negativa y aún cumplirse $\frac{dRMS}{dx}<0$.

Por lo general no es posible predecir el signo de f_{12}.

3.2.5 Ejemplo: la UM y la RMS

$$U(X,Y)=\sqrt{XY}$$

$$UM_x = 1/2X^{-1/2}Y^{1/2}$$

$$UM_Y = 1/2X^{1/2}Y^{-1/2}$$

$$RMS = \frac{UM_X}{UM_Y} = \frac{1/2X^{-1/2}Y^{1/2}}{1/2X^{1/2}Y^{-1/2}} = \frac{Y}{X}$$

Una transformación monótona de esta U no afecta la RMS.

$$F(U) = ln(U)$$

$$UM_x = F'(U)\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{U}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2X}$$

$$UM_Y = \frac{1}{2Y}$$

$$RMS = \frac{UM_X}{UM_Y} = \frac{Y}{X}$$

4 Ejemplos de Funciones de Utilidad

4.1 La Utilidad Cobb-Douglas

El ordenamiento que hacen los individuos y las funciones de utilidad que implican este orden no son observables. Pero veamos algunos ejemplos con dos bienes.

$$U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$$

, $\alpha, \beta > 0$.Ver ejemplo anterior α y β representan el "peso" de cada bien en las preferencias del individuo.

La Función de utilidad Cobb-Douglass genera las curvas de indiferencia convexas vistas:

Curvas de Utilidad de una Función de Utilidad Cobb-Douglas

¿Como sabemos ésto? Una curva de indiferencia de una función de utilidad Cobb-Douglas es de la forma:

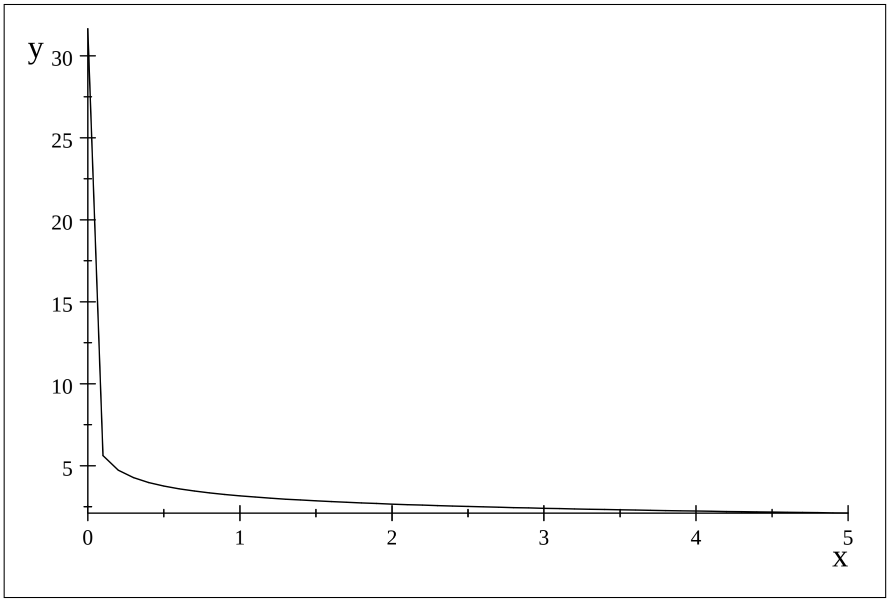
$$y = \sqrt[\beta]{\frac{U}{x^{\alpha}}} = \left(\frac{U}{x^{\alpha}}\right)^{1/\beta}$$

Supongamos que $\alpha + \beta = 1$. Supongamos más aún, $\alpha = \beta = 1/2$.

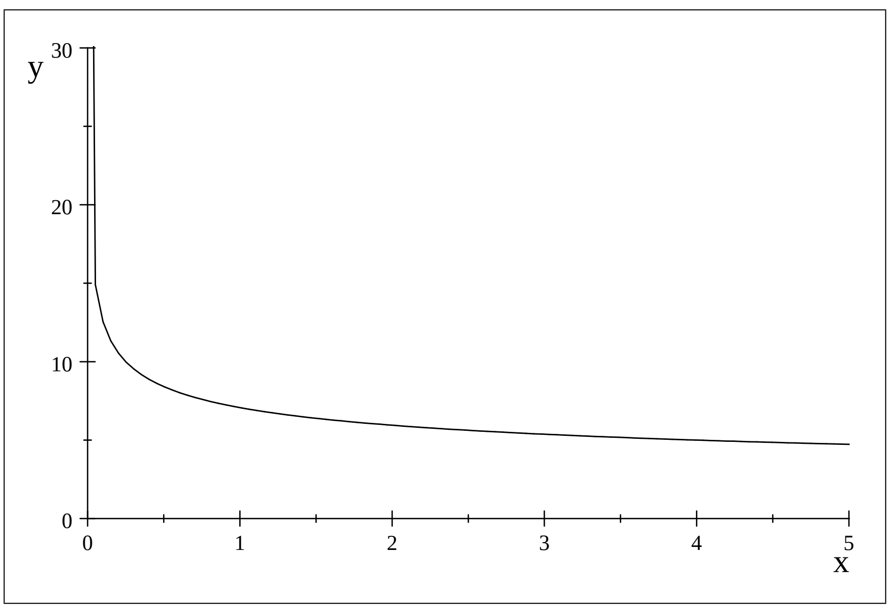
$$y = \left(\frac{U}{x^{1/2}}\right)^{1/2}$$

En este caso, la curva de indiferencia correspondiente a $U = 10$ es

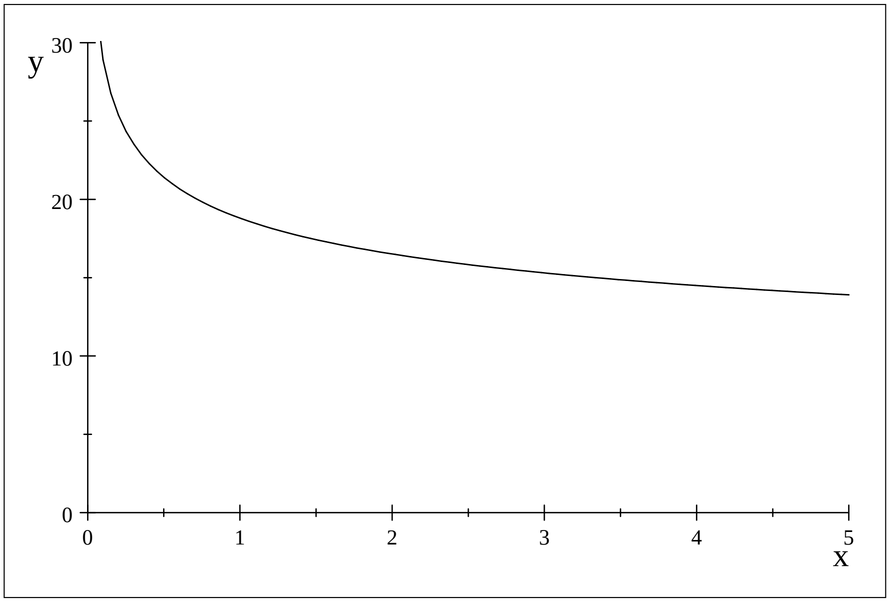
$$y = \left(\frac{10}{x^{1/2}}\right)^{1/2}$$



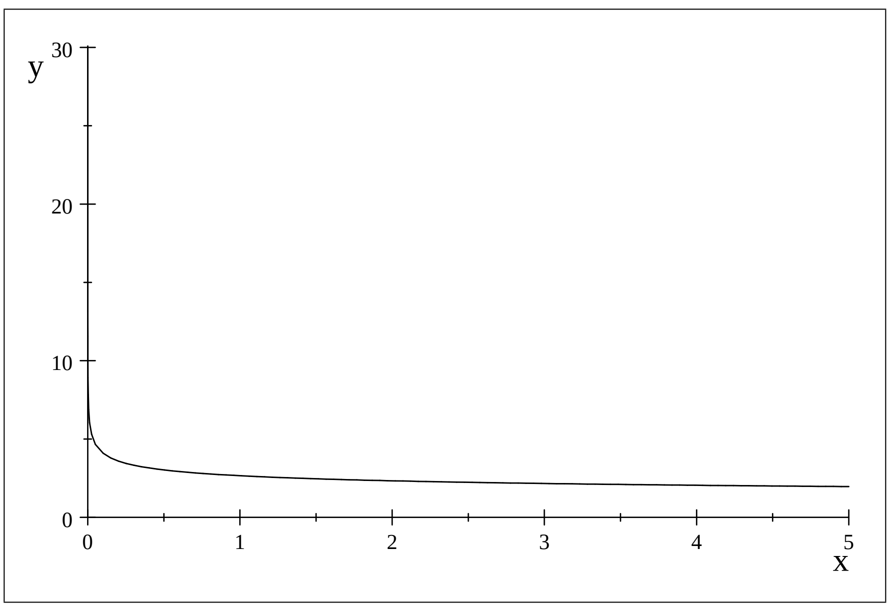
y luce. Cuando $u = 50$, $y = \left(\frac{50}{x^{1/2}}\right)^{1/2}$



Cuando $\alpha = 1/4$ y $\beta = 3/4$, $y = \left(\frac{50}{x^{1/4}}\right)^{3/4}$



Y cuando $\alpha = 3/4$ y $\beta = 1/4$, $y = \left(\frac{50}{x^{3/4}}\right)^{1/4}$



Por último, cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 3$, $y = \left(\frac{50}{x^3}\right)^3$

4.2 Bienes sustitutos perfectos

$$U(X,Y) = \alpha X + \beta Y$$

, $\alpha, \beta > 0$. Las curvas de indiferencia son rectas:

$$\alpha X + \beta Y = U_1$$

$$\beta Y = U_1 - \alpha X$$

$$Y = \frac{U_1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} X$$

$\Longrightarrow$ RMS constante

4.3 Bienes Complementarios Perfectos

$$U(X, Y) = \min(\alpha X, \beta Y)$$

Zapatos=$\alpha = 1, \beta = 1$ $\qquad x = izq, y = der$

$U(1,1) = U(1,2) = U(2,1) = U(3,1) = 1$

4.4 Utilidad con ESC

Los tres casos anteriores son casos particulares de al U con ESC:

$$U(X,Y) = \frac{X^\delta}{\delta} + \frac{Y^\delta}{\delta}$$

cuando $\delta \leq 1$ y $\delta \neq 0$, y

$$U(X,Y) = \ln X + \ln Y$$

cuando $\delta = 0$.

Cuando $\delta = 1$ sustitutos perfectos.

Cuando $\delta = 0$ Cobb-Douglas.[1]

Cuando $\partial = -\infty$ complementarios perfectos (puede demostrarse tomando límites)

[1]En ambos casos hemos supuesto implícitamente que $\alpha = \beta = 1$. La función ESC se puede generalizar para otros valores de α y β

5 Preferencias Homotéticas

Todas las funciones de utilidad anteriores son *homotéticas*: la RMS depende del cociente entre X e Y y no de la cantidad $X + Y$. En otras palabras, las preferencias son homotéticas cuando la RMS es constante a lo largo de cualquier rayo que sale del origen.

1. RMS sustitutos perfectos : α/β
2. RMS complemetarios perfectos
   (a) RMS infinita cuando $\frac{y}{x} > \frac{\alpha}{\beta}$
   (b) RMS indefinida cuando $\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$
   (c) RMS cero cuando $\frac{y}{x} < \frac{\alpha}{\beta}$
3. RMS Cobb-Douglas: $RMS = \frac{UMx}{UMy}$

$$UMx = \alpha X^{\alpha-1} Y^{\beta}$$

$$UMy = \beta X^{\alpha}.Y^{\beta-1}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{UMx}{UMy} = \frac{\alpha X^{\alpha-1}.Y^{\beta}}{\beta X^{\alpha}.Y^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{Y^{\beta}.Y^{\beta+1}}{X^{\alpha}.X^{-\alpha+1}}$$

$$RMS = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{y}{x}$$

La importancia de las preferencias homotéticas es que es como las curvas de indiferencias son muy parecidas unas con otras en cuanto a su forma, podemos estudiar el comportamiento de un individuo con estas preferencias estudiando una sola curva sin preocuparnos de que su comportamiento vaya a cambiar mucho cuando la utilidad de referencia varíe.

6 Práctico Capítulo 3:

2010:
1. 3.1 Novena edición
2. ¿Implica la UM decreciente una RMS decreciente?
3. 3.4 Novena edición

Antes: 3.1, 3.2, 3.3, 3.10

7 Ampliaciones

7.1 Preferencias especiales

Las funciones de utilidad vistas son lo suficiente generales como para ser fácilmente modificadas para incluir casos especiales de preferencias.

7.1.1 Calidad

Suponga un bien q (metros cuadrados de hogar) con dos atributos: luz solar (a_q^1) y (a_q^2). En este caso la utilidad puede escribirse como:

$$U = U\left[q, a_q^1, a_q^2\right]$$

y las mejoras en utilidad pueden surgir porque el individuo consume mayor cantidad del bien o porque sin variar la cantidad consme bienes con mayor calidad/cantidad de un atributo.

7.1.2 Hábitos y adicciones

Adicciones:

$$U = U_t\left(X_t, Y_t, S_t\right)$$

con

$$S_t = \sum_{i=1}^{\infty} X_{t-i}$$

O

$$U = U_t\left(X_t^*, Y_t\right)$$

donde X_t^* es un función simple de X_t y X_{t-1}, como $X_t^* = X_t$ - X_{t-1}, o $X_t^* = X_t / X_{t-1}$. Éstas formas implican que cuanto mayor X_{t-1}, más será la cantidad de X_t que tendrá que consumir el individuo para estar mejor. (Lo veremos en el siguiente capítulo, Stigle y Becker, 1977).

7.1.3 Preferencias sobre terceros

$$U = U_i\left(X_i, Y_i, U_j\right)$$

Si $\partial U_i/\partial U_j > 0$, altruista, si < 0 envidia. Caso habitual en la microeconomía clásica: $\partial U_i/\partial U_j = 0$

References

[1] Nicholson, Capítulo 3.