La Eficiencia del Equilibrio General Competitivo

1 Supuestos:

1. Dos consumidores, A y B
2. Dos bienes de consumo, 1 y 2
3. Dos insumos, K y L

2 Eficiencia Técnica

Funciones de producción cóncavas

$$y = f(L_y, K_y)$$

$$x = g(L_x, K_x)$$

Disponibilidad de recursos:

$$L_x + L_y = L$$

$$K_x + K_y = K$$

Para caracterizar la eficiencia técnica elegimos L_x, L_y, K_x, K_y que maximizan

$$y = f(L_y, K_y)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x^0 &= g(L_x, K_x) \\ L &= L_x + L_y \\ K &= K_x + K_y \end{aligned}$$

Lagrange

$$\Phi = f(L_y, K_y) - \lambda \left[x^0 - g(L_x, K_x)\right] + \lambda_L \left[L - L_x - L_y\right] + \lambda_K \left[K - K_x - K_y\right]$$

Las condiciones necesarias son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial L_y} &= \frac{\partial f}{\partial L_y} - \lambda_L = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial K_y} &= \frac{\partial f}{\partial K_y} - \lambda_K = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial L_x} &= \lambda\frac{\partial g}{\partial L_x} - \lambda_L = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial K_x} &= \lambda\frac{\partial g}{\partial K_x} - \lambda_K = 0 \\
\frac{\partial\Phi}{\partial \lambda} &= \frac{\partial\Phi}{\partial \lambda_L} = \frac{\partial\Phi}{\partial \lambda_K} = 0
\end{aligned}$$

Estas condiciones implican

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial L_y} &= \lambda\frac{\partial g}{\partial L_x} = \lambda_L \\
\frac{\partial f}{\partial K_y} &= \lambda\frac{\partial g}{\partial K_x} = \lambda_K
\end{aligned}$$

Y dividiendo ambos lados de la primera igualdad obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial f/\partial L_y}{\partial f/\partial K_y}=\frac{\partial g/\partial L_x}{\partial g/\partial K_x}}$$

Esto no es otra cosa que

$$\boxed{RMST_y = RMST_x}$$

3 Frontera de Posibilidades de Producción

Escribimos las solciones del problema anterior (las cantidades de insumos a utilizar en cada sector para que la economía sea técnicamente eficiente)Las soluciones de este problema las escribimos como función de los parámetros del mismo

$$L_y = L_y^*(x, L, K)$$

$$K_y = K_y^*(x, L, K)$$

$$L_x = L_x^*(x, L, K)$$

$$K_x = K_x^*(x, L, K)$$

sustituyendo estos valores en $y = f(L_y, K_y)$ obtenemos la máxima cantidad de y, y^*, que se puede producir, dados x, L y K.

$$y^* = f(L_y^*, K_y^*) = y^*(x, L, K)$$

Esta es la *frontera de posibilidades de producción (FPP).* Nos la cantidad máxima de y que podemos producir para cada nivel de x, dadas las dotaciones de K y L.

Aplicando el Teorema del Envolvente, podemos obtener la expresión de la pendiente de la FPP

$$\frac{\partial y^*}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\lambda^*$$

De las condiciones de primer orden del problema anterior tenemos

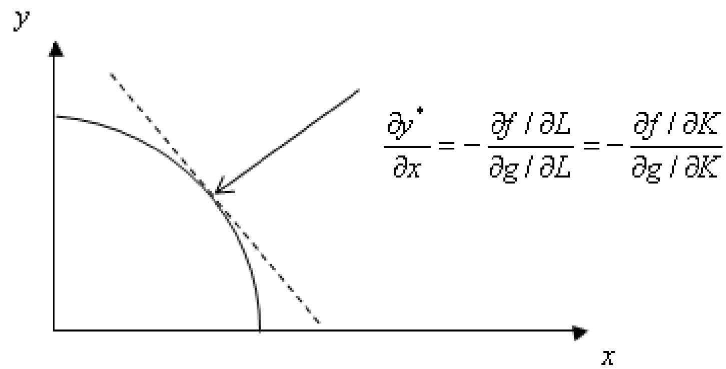
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial L_y} &= \lambda_L \\
\frac{\partial f}{\partial K_y} &= \lambda_K \\
\lambda &= \frac{\lambda_L}{\frac{\partial g}{\partial L_x}} \\
\lambda &= \frac{\lambda_K}{\frac{\partial g}{\partial K_x}}
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\partial f / \partial L_y}{\partial g / \partial L_x} = \frac{\partial f / \partial K_y}{\partial g / \partial K_x} > 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial y^*}{\partial x} = -\lambda^* < 0$$

La pendiente de la FPP es llamada Tasa o *Relación Marginal de Transformación (RMT)*. Si chequean la derivada segunda de $y^*(x, L, K)$, pueden ver que es strictamente cóncava si ambas $f(L_y, K_y)$ y $g(L_x, K_x)$ son estrictamente cóncavas.



La FPP es el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) conformado por las combinaciones de ambos bienes que son técnicamente eficientes. *La eficiencia técnica es una condición necesaria para la eficiencia en el sentido de Pareto.* De otra manera, con los mismos recursos, la economía podría estar produciendo más. Esa producción adicional podría repartirse de cualquier manera y la nueva asignación sería una mejora de Pareto con relación al punto inicial.

4 Eficiencia de Pareto

Pata encontrar un conjunto de asignaciones eficientes en el sentido de Pareto elegimos los consumos (y_A, y_B, x_A, x_B) para resolver

$$\max U_A(y_A, x_A)$$
$$\text{sujeto a}$$
$$(1)\ U_B(y_B, x_B) = U_B^0$$
$$(2)\ y_A + y_B = y$$
$$(3)\ x_A + x_B = x$$
$$(4)\ y = y^*(x, L, K)$$

Las restricciones (2) - (4) son restricciones de factibilidad. Las restricciones (2) y (3) dicen que la cantidad demandada debe ser igual a la cantidad producida. La restricción (4) dice que la producción debe ser técnicamente eficiente.

Combinando estas restricciones en una sola

$$y_A + y_B = y^*(x_A + x_B, L, K)$$

La ecuación de Lagrange queda entonces

$$L = U_A(y_A, x_A) + \mu \left(U_B^0 - U_B(y_B, x_B)\right) + \theta \left(y_A + y_B - y^*(x_A + x_B, L, K)\right)$$

Entre las condiciones de primer orden de este problema tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y_A} &= \frac{\partial U_A}{\partial y_A} + \theta = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_A} &= \frac{\partial U_A}{\partial x_A} - \theta \frac{\partial y^*}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y_B} &= -\mu \frac{\partial U_B}{\partial y_B} + \theta = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_B} &= -\mu \frac{\partial U_B}{\partial x_B} - \theta \frac{\partial y^*}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

De las dos primeras obtenemos

$$\frac{\partial U_A / \partial x_A}{\partial U_A / \partial y_A} = -\frac{\partial y^*}{\partial x}$$

Y de las dos últimas

$$\frac{\partial U_B / \partial x_B}{\partial U_B / \partial y_B} = -\frac{\partial y^*}{\partial x}$$

O sea,

$$\frac{\partial U_A / \partial x_A}{\partial U_A / \partial y_A} = \frac{\partial U_b / \partial x_b}{\partial U_B / \partial y_B} = -\frac{\partial y^*}{\partial x}$$

Lo que dice que

$$\boxed{RMS_A = RMS_B = -RMT}$$

5 Comportamiento Competitivo

5.1 Maximización de Beneficios

sean (p_y, p_x, p_L, p_K) los precios de la economía. El productor del bien y elige (K, L) para maximizar sus beneficios

$$\max\ p_y f(K_y, L_y) - p_L L_y - p_K K_y$$

Las condiciones necesarias son

$$\begin{aligned} p_y \frac{\partial f(K_y, L_y)}{\partial K_y} &= p_K \\ p_y \frac{\partial f(K_y, L_y)}{\partial L_y} &= p_L \end{aligned}$$

De amnbas obtenemos

$$\frac{\frac{\partial f(K_y, L_y)}{\partial K_y}}{\frac{\partial f(K_y, L_y)}{\partial L_y}} = \frac{p_K}{p_L}$$

Similarmente, de las condiciones de maximización de beneficios del productor del bien x obtendremos

$$\frac{\frac{\partial f(K_x, L_x)}{\partial K_x}}{\frac{\partial f(K_x, L_x)}{\partial L_x}} = \frac{p_K}{p_L}$$

Por lo que nos queda

$$\frac{\partial f / \partial K_y}{\partial f / \partial L_y} = \frac{\partial f / \partial K_x}{\partial f / \partial L_x} = \frac{p_K}{p_L}$$

ó

$$\boxed{RMST_y = RMST_x}$$

que era la condición para la eficiencia técnica. Es decir, el comportamiento de maximización de beneficios por parte de los productores nos asegura la eficiencia técnica.

5.2 Maximización de Utilidad

Cada consumidor elegirá (x_i, y_i) para maximizar

$$U_i(x_i, y_i)$$
$$\text{sujeto a}$$
$$p_x x_i + p_y y_i = I_i$$

donde I_i es el nivel de ingresos del consumidor.

Sabemos que las condiciones necesarias de este problema implican

$$\frac{\partial U_A/\partial x_A}{\partial U_A/\partial y_A} = \frac{\partial U_B/\partial x_B}{\partial U_B/\partial y_B} = \frac{p_x}{p_y}$$

O sea

$$\boxed{RMS_A = RMS_B}$$

Podemos qu la maximización de utilidad por parte de los consumidores asegura que las RMS se igualen, por lo que estamos en una asignación del consumo que es óptima en términos de Pareto.

Nos queda por demostrar si éstas RMS son a su vez igual a $-RMT$. De las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios del productor y podemos escribir

$$p_y = \frac{p_K}{\partial f/\partial K_y} = \frac{p_L}{\partial f/\partial L_y}$$

Y de las condiciones del productor de x

$$p_x = \frac{p_K}{\partial f/\partial K_x} = \frac{p_L}{\partial f/\partial L_x}$$

De ambas,

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\partial f/\partial K_y}{\partial f/\partial K_x} = \frac{\partial f/\partial L_y}{\partial f/\partial L_x}$$

Esto es, el cociente de precios es igual al cociente de los productos marginales de cada factor en la producción de ambos bienes. Por ende

$$\frac{\partial U_A/\partial x_A}{\partial U_A/\partial y_A} = \frac{\partial U_B/\partial x_B}{\partial U_B/\partial y_B} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{\partial f/\partial K_y}{\partial f/\partial K_x} = \frac{\partial f/\partial L_y}{\partial f/\partial L_x} = -\frac{\partial y^*}{\partial x}$$

Ó

$$\boxed{RMS_A = RMS_B = -RMT}$$

que eran exactmente las condiciones que caracterizan a una asignación de recursos Pareto-eficiente.

Concluimos que el equilibrio general competitivo produce una asignación de recursos que es pareto-eficiciente.