

Soluciones Ejercicios Nicholson (Novena Edición)

Cap. 4: Maximización de Utilidad

Marcelo Caffera

4.1 a.

$$L = \sqrt{ts} + \lambda(1 - 0,1t - 0,25s)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{t}} - 0,1\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{s}} - 0,25\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1,00 - 0,10T - 0,25S = 0$$

Las primeras dos ecuaciones implican:

$$\frac{S}{T} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4 \quad S = 0,4T$$

Por lo tanto:

$$1,00 = 0,10T + 0,25 * 0,4T = 0,2T$$

$$\mathbf{T = 5 \quad S = 2}$$

$$\mathbf{Utilidad = \sqrt{10}}$$

b. Utilidad = $\sqrt{10}$ o $TS = 10$ y en el óptimo $TMS = \frac{S}{T} = \frac{0,4}{0,25} = \frac{8}{5}$

$$T = \frac{5}{8}S$$

Sustituyendo en la curva de indiferencia $U = 10 = TS$

$$\frac{5}{8} S^2 = 10$$

$$S^2 = 16 \quad S = 4 \quad T = 2.5$$

El costo de esta canasta es $0,25(4) + 0,40(2.5) = 2,00$.

Pablo necesita un peso más.

4.2 Simplificando la notación: $U(F, C) = F^{2/3} C^{1/3} \quad I = 300$

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & P_F F + P_C C = 300 \quad 20F + 4C = 300 \\ & L = F^{2/3} C^{1/3} + \lambda (300 - 20F - 4C) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 2/3 (C/F)^{1/3} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = 1/3 (F/C)^{2/3} - 4\lambda = 0$$

Por lo tanto,

$$5 = 2 \frac{C}{F}$$

$$2C = 5F$$

Restricción presupuestaria:

$$20F + 4C = 300$$

Sustituyendo

$$30F = 300,$$

$$\mathbf{F = 10, C = 25.}$$

b. Nueva restricción:

$$10F + 4C = 300$$

$$5/2 = 2C/F$$

$$4C = 5F$$

$$10F + 5F = 300$$

$$\mathbf{F = 20, C = 25}$$

Notar que esta persona siempre gasta $2/3$ de su ingreso en F y $1/3$ en C . Ésta es una característica de las funciones de utilidad Cobb – Douglas.

- c. ¿Cuánto ingreso le tendrías que sacar al sujeto para que a los precios del punto b vuelva a tener la utilidad del punto a?

Del punto a, sabemos que el sujeto era capaz de alcanzar una utilidad

$$U(10,25) = 13,52$$

En el punto b, por su lado, alcanza un nivel de utilidad

$$U(20,25) = 21,54$$

Lo que tenemos que calcular es cuánta le tendríamos que sacar de ingreso para volver a ponerlo en el nivel de utilidad del punto a, manteniendo el precio del vino francés en \$10. Para ello, primero debemos calcular cuál es el gasto mínimo en que tiene que incurrir el sujeto para llegar a $U=13,52$ con $p_F = 10$ y $p_C = 4$. Para esto necesitamos la función de gasto. Esta es la inversa de la función de utilidad indirecta. La función de utilidad indirecta es:

$$V = \left(\frac{2I}{3p_F}\right)^{2/3} \left(\frac{1I}{3p_C}\right)^{1/3}$$

Queremos hallar el I que hace:

$$V(p_F = 10, p_C = 4, I) = \left(\frac{2I}{3 \times 10}\right)^{2/3} \left(\frac{1I}{3 \times 4}\right)^{1/3} = 13,52$$

Despejando y operando:

$$I = \frac{13,52}{\left(\frac{2}{30}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{12}\right)^{1/3}} = 188$$

Con los precios del punto a, necesitaba 300 pesos para alcanzar este nivel de utilidad, con el precio del vino francés a 10, necesita 188. Es decir, estaría dispuesto a dar hasta $300-188=112$ pesos de su ingreso para que el precio del vino francés baje de 20 a 10, ya que si da \$112 y baja el precio, queda indiferente. \$112 es entonces una medida monetaria de aumento en la utilidad que le ocasiona la bajada del precio de F de \$20 a \$10.

4.3 $U = 20C - C^2 + 18B - 3B^2$

a. $\frac{\partial U}{\partial C} = 20 - 2C = 0, \quad C = 10$

$$\frac{\partial U}{\partial B} = 18 - 6B = 0, \quad B = 3$$

$$U = 127.$$

b. Restricción: $B + C = 5$

$$L = 20C - C^2 + 18B - 3B^2 + \lambda (5 - B - C)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C} = 20 - 2C - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 18 - 6B - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = B + C - 5 = 0$$

$$20 - 2C = 18 - 6B$$

$$C = 3B + 1$$

$$B + 3B + 1 = 5$$

$$B = 1, C = 4, U = 79$$

4.4 $U(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$ Restricción presupuestaria: $50 - 3X - 4Y = 0$

Maximizando U^2 en lugar de $\max U$.

a. $L = X^2 + Y^2 + \lambda (50 - 3X - 4Y)$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X - 3\lambda = 0 \quad \lambda = 2/3X$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 2Y - 4\lambda = 0 \quad \lambda = 1/2Y$$

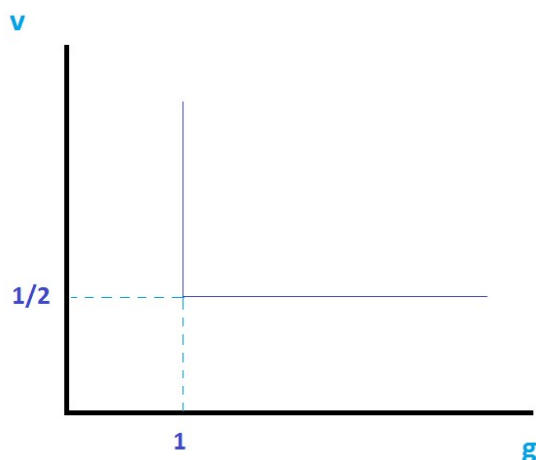
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3X + 4Y = 50,$$

$$3X + 4(4/3X) = 50 \quad X = 6, Y = 8 \quad U = 10$$

- b. Este no es un máximo local porque las curvas de indiferencia no tienen RMS decreciente. Por lo tanto, las condiciones necesarias no son suficientes para un máximo.

$$4.5 \quad U(M) = U(G, V) = \min \left(\frac{G}{2}, V \right)$$

- a. Sin importar los precios relativos (i.e., la pendiente de la restricción presupuestaria) la intersección entre curvas de indiferencia y la restricción presupuestaria que maximiza la utilidad siempre va a estar en el vértice de las curvas de indiferencia, donde $G = 2V$.



- b. Como $G = 2V$ y $P_G G + P_V V = I$, tenemos

$$2 P_G V + P_V V = I \text{ o } V = \frac{I}{2 P_G + P_V} .$$

Similarmente,

$$G = \frac{2I}{2P_G + P_V}$$

Es fácil de ver que estas dos funciones de demanda son homogéneas de grado cero en P_G , P_V , y I .

- c. Utilidad = $\frac{G}{2} = V$ por lo que, sustituyendo por las funciones de demanda recién halladas

$$\text{Utilidad indirecta es } V = \frac{I}{2P_G + P_V}$$

- d. La función de gasto se halla resolviendo por I ,

$$I = E = V(2P_G + P_V).$$

- 4.6 a. Se puede hacer de dos maneras:

La más rápida es empezar por averiguar cuál es valor (máximo) que alcanza la utilidad del individuo en el óptimo:

$$\text{Si } X = 4, Y = 1, Z = 0, U^* = 2$$

El individuo no puede consumir cantidades negativas de Z , por lo que cabe preguntarse qué pasa si $Z = 0,1$.

En este caso $U = (X)^{-5} (Y)^{-5} (1.1)^{-5}$. Podemos hallar los correspondientes X^* e Y^* igual que siempre:

$$\text{Lagrange} = (X)^{-5} (Y)^{-5} (1.1)^{-5} + \lambda(2 - 0,25 * X - Y - 2 * 0,1)$$

$$(1) \frac{\partial L}{\partial X} = 1,05 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} - 0,25\lambda = 0$$

$$(2) \frac{\partial L}{\partial Y} = 1,05 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} - \lambda = 0$$

De estas dos condiciones de primer orden sale que

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{4} \Rightarrow X = 4Y$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria

$$2 - 0,25 * 4Y - Y - 2 * 0,1 = 0$$

$$2Y = 1,8$$

$$Y^* = 0,9$$

Y sustituyendo $X^* = 0,9/0,25 = 3,66$

El valor de U en esta canasta es $U = (3.6)^{.5} (.9)^{.5} (1.1)^{.5} = 1.89$, menor que 2, lo que se alcanza con la canasta (4,1,0).

Podemos repetir el análisis para un valor superior de Z, por ejemplo $Z = 1$.

Si lo hacemos llegaremos a que $X = Y = 0$, ya que el individuo gasta todo su ingreso ($I=2$) consumiendo una unidad de Z a un $P_Z = 2$. Por lo que $U^* = 0$.

Concluimos que cuanto mayor Z menor el nivel de utilidad máximo que puede alcanzar el individuo y por ende éste va a elegir $Z = 0$ y maximizar en (X,Y).

Pueden llegar a la misma conclusión maximizando $U(X,Y,Z)$ con respecto a la restricción presupuestaria. Van a llegar a que en Z^* es negativo. Si el Z^* nos da negativo, cuando le ponemos la restricción de que no podemos consumir un $Z < 0$, el Z óptimo va a ser necesariamente $Z = 0$.

b. Aun cuando $X = 4$, $Y = 1$, $Z = 0$ no se llega a igualar: $UM_X/P_X = UM_Y/P_Y = 1$, mientras que $UM_Z/P_Z = 1/2$. El consumidor podría incrementar sus utilidad si dejara de consumir de Z y consumiera más de X e Y. El tema es que ya no puede dejar de consumir más de Z porque $Z = 0$, por lo que debe parar allí.

c. Como U es una Cobb-Douglas, el individuo gasta cantidades iguales en X, Y y (1+Z). O sea:

$$P_X X = P_Y Y = P_Z (1 + Z)$$

Sustituyendo esto en la restricción presupuestaria obtenemos:

$$2P_z(1+Z) + P_zZ = I \quad \text{o} \quad 3P_zZ = I - 2P_z$$

Por lo tanto, para que $Z > 0$ debe cumplirse que $I > 2P_z$. En este caso $I > 4$.

Otra forma de hacerlo es calculando Z^* en función de I a través del método de Lagrange, y viendo que valor debe alcanzar I para que Z^* sea positivo.

EJERCICIO 4.7

Para el caso de una función de utilidad Cobb-Douglas $U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Calcule la función de utilidad indirecta.
- Calcule la función de gasto.
- Demuestre la forma en que la compensación requerida para equilibrar el efecto de un aumento del precio de x está relacionado con el tamaño del exponente α .

EJERCICIO 4.8 – NOVENA EDICIÓN

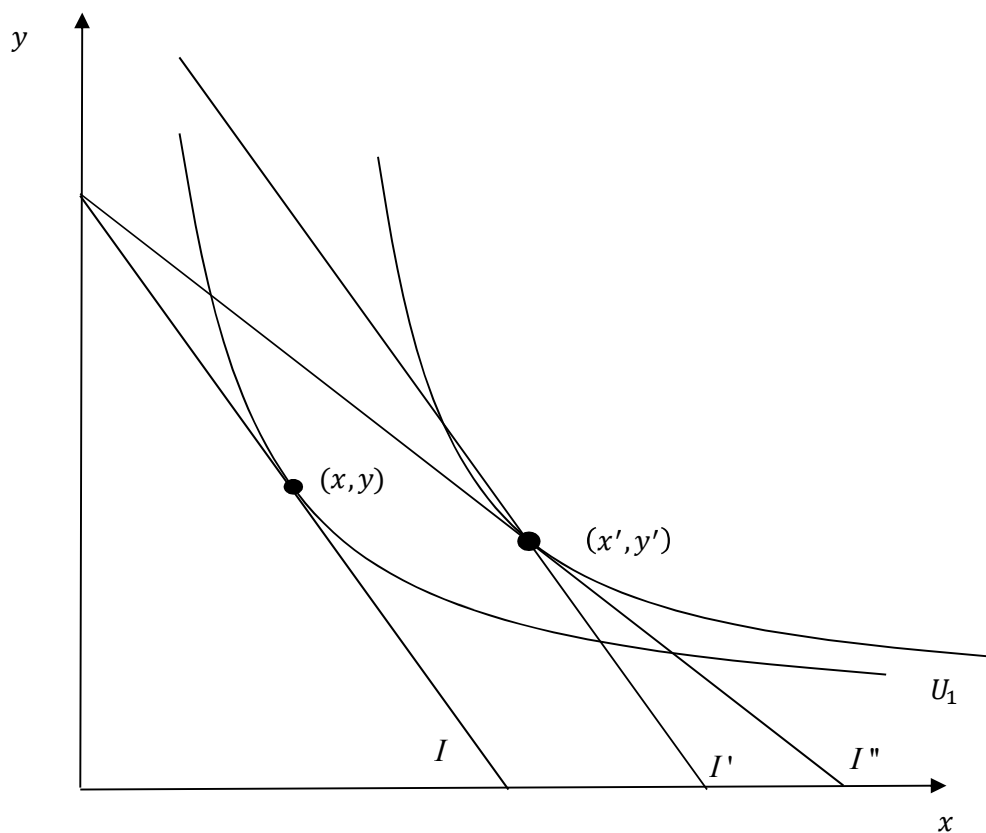
- Utilice un gráfico para demostrar el caso general en que un individuo está mejor en el caso que recibe un subsidio a los ingresos (dinero en su bolsillo de parte del gobierno) que en el caso en el cual el gobierno le subsidia el precio del bien x , y el gobierno gasta lo mismo en ambos casos.
- Derive (haga todas las cuentas para obtener) la función de gasto de una función de utilidad Cobb-Douglas con $\alpha=\beta=0,5$.
- Suponga que por alguna razón un gobierno quiere aumentar la utilidad de una persona cuyas preferencias vienen representadas por esta función de utilidad de $U=2$ a $U=3$.
 - Si $p_x = 1, p_y = 4$, ¿cuánto dinero le cuesta al gobierno lograr este objetivo si el instrumento es un subsidio a los ingresos?
 - ¿Cuánto le costaría al gobierno lograr el mismo objetivo (aumentar la utilidad del individuo de $U=2$ a $U=3$) con un subsidio al precio de x ?
- ¿Cómo cambian los resultados anteriores si en vez de una función de utilidad Cobb-Douglas con $\alpha=\beta=0,5$ el individuo consumiera x e y en proporciones fijas?
 - En la gráfica de abajo, la restricción presupuestaria inicial es I . Sin ningún tipo de subsidios, el individuo elige la canasta (x, y) .

Un subsidio s al precio de x , tal que el nuevo precio de x es $p'_x = p_x - s$, disminuiría el precio de x y por lo tanto la restricción presupuestaria rotaría hacia afuera como lo hace I'' .

Con este subsidio a los precios el individuo consume (x', y') .

Ahora bien, si suponemos que el gobierno le da una cantidad de subsidio sobre su ingreso S tal que su nuevo ingreso con subsidio es $I' = I + S$, y en ambos casos el gobierno gasta la misma cantidad de dinero, la nueva restricción presupuestaria tiene que pasar por (x', y') . Esto se puede ver de la siguiente manera. En (x', y') , tenemos que $I = (p_x - s)x' + p_y y'$, por lo que $I + sx' = p_x x' + p_y y' = I + S = I'$. Por lo que podemos concluir que $sx' = S$. Con esto hemos demostrado que si con ambos tipos de subsidios el individuo puede consumir la canasta (x', y') , entonces el monto de ambos tipos de subsidios es igual.

Pero si esto es así, podemos observar en la gráfica que con I' el individuo puede alcanzar curva de indiferencia más alta de la que alcanza consumiendo (x', y') . Por ende, no elegirá (x', y') si le dan I' sino otra canasta que lo deja mejor. Va a preferir un subsidio al ingreso que un subsidio que le baje el precio de x . Esto es porque el primer subsidio no distorsiona los precios y deja al individuo elegir a los precios "reales".



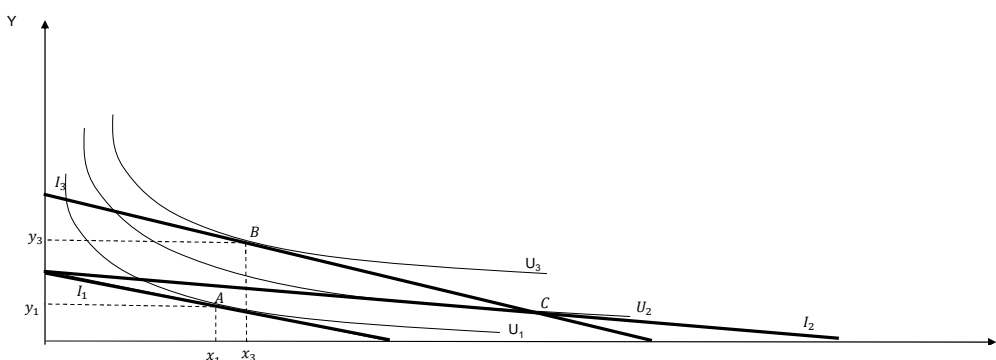
Los puntos intermedios parecen una variación del viejo 4.8:

Ejercicio 4.8

El principio de suma única ilustrado en la figura 4.5 se puede aplicar tanto a impuestos como a subsidios.

- a. Utilice una gráfica similar a la figura 4.5 para demostrar que una dotación de ingresos (un subsidio a los ingresos) a una persona proporciona más utilidad que un subsidio al bien x , que le cuesta la misma cantidad de dinero al gobierno.

En el gráfico de abajo, el individuo se halla originalmente en el punto A. Su ingreso es I_1 y consume la canasta (x_1, y_1) . Un subsidio a los ingresos lo pone en un punto como B (el sujeto tiene un aumento de I_1 a I_3). Un subsidio al precio de x le rota la restricción presupuestaria a I_2 . En esta situación, el individuo se ubica en el punto C. El punto C está sobre la recta I_3 , por lo que en C el individuo gasta lo mismo que en B. Si gasta lo mismo en C que en B, el ingreso después del subsidio es igual en ambos casos (el programa de subsidiar ingreso le sale la misma cantidad de plata al gobierno que el programa de subsidiar x). Pero claramente, el individuo prefiere un subsidio al ingreso. Con este subsidio alcanza un nivel de utilidad U_3 , mientras que con el subsidio a x alcanza U_2 y $U_2 < U_3$.



Ver Ejemplo 4.5 del libro: $E = 2\bar{U} P_X^{0,5} P_Y^{0,5}$. Con $P_X = 0,25$, $P_Y = 1$, $\bar{U} = 2$, $E = 2$

Transferencia de renta: $\bar{U} = 2,5$ $E = 2,50$. Transferencia = 0,5

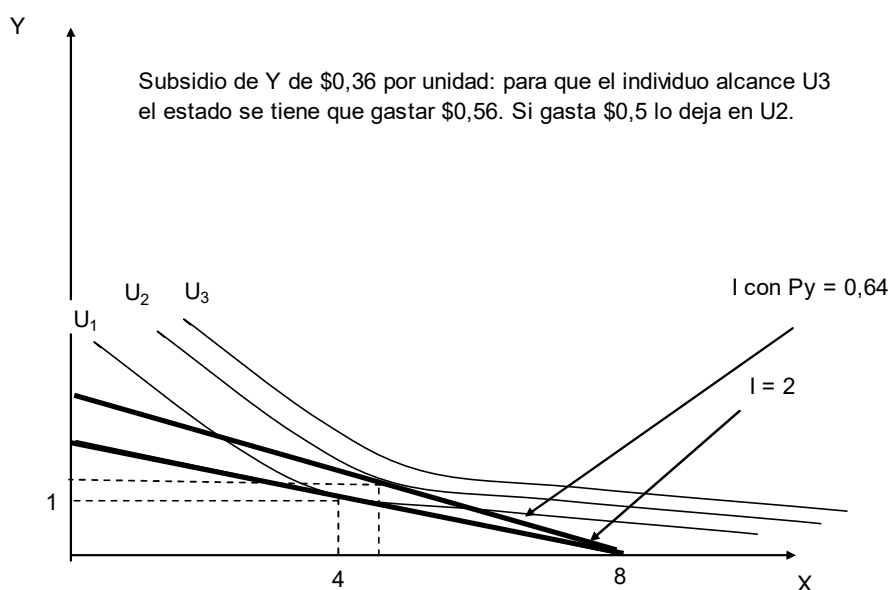
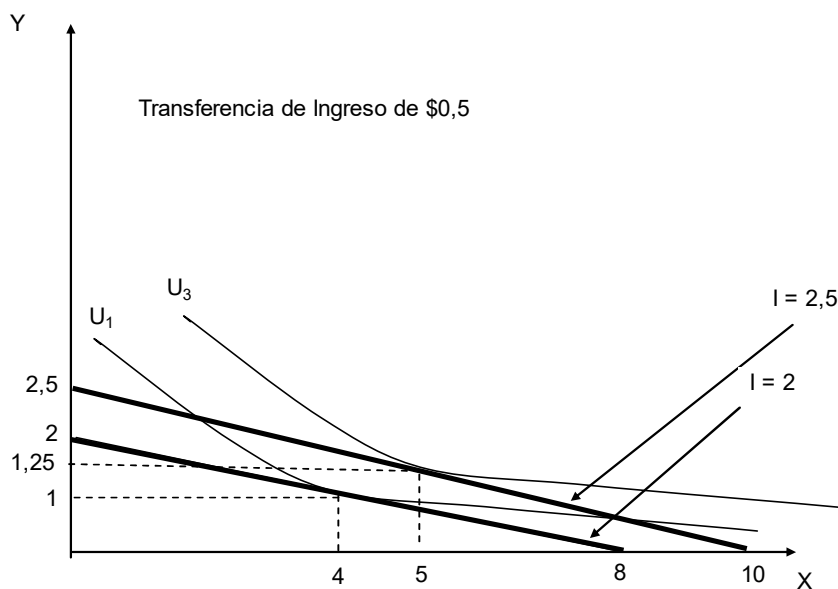
Subvención del costo de Y: $E = 2$ y resuelvo para P_Y ,

$$P_Y = [E/2 \bar{U} P_X^{0,5}]^2 = [2/2 (2,5)(0,5)]^2 \\ = (2/2,5)^2 = 0,64.$$

Con $P_Y = 0,64$, $Y = 2/2(0,64) = 1,56$

Subsidio = $0,36 * 1,56 = 0,56$ el cuál es \$0,06 superior a la transferencia de ingreso de \$0,5.

b.



Subsidiar las compras del bien Y corre el punto de maximización de utilidad a X_1 , Y_1 y aumenta la utilidad a U_2 . Una transferencia de ingreso de suma-fija corre la restricción presupuestaria a $I=2,5$ e incrementa la utilidad a U_3 . $U_3 > U_2$.

- e. Con proporciones fijas, la maximización de utilidad ocurre en (X', Y') bajo ambos I' e I'' .

4.9 a.
$$RMS = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{x^{\delta-1}}{y^{\delta-1}} = (X/Y)^{\delta-1}$$

Para que se maximice la utilidad: $(X/Y)^{\delta-1} = P_X / P_Y$

Por lo tanto, $X/Y = (P_X / P_Y)^{1/\delta-1}$

- b. Si $\delta = 0$, $X/Y = P_Y / P_X$ por lo que $P_X X = P_Y Y$. El gasto en x es igual al gasto en y , en el óptimo

- c. De acuerdo a la parte a: $P_X X / P_Y Y = \frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{P_X}{P_Y} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} = (P_X / P_Y)^{\delta/\delta-1}$

Para $0 < \delta < 1$ y $P_X / P_Y > 1$, $(P_X / P_Y)^{\delta/\delta-1} = P_X X / P_Y Y < 1$.

Para $\delta < 0$ y $P_X / P_Y > 1$, $(P_X / P_Y)^{\delta/\delta-1} = P_X X / P_Y Y > 1$.

Cuanto menor es δ mayor es el cociente.

Otra forma de verlo:

$$\frac{\partial \left(\frac{p_x x}{p_y y} \right)}{\partial \delta} = \frac{\partial \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\partial \delta} = \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} \left(\frac{(\delta-1)-\delta}{(\delta-1)^2} \right) = \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} \left(\frac{-1}{(\delta-1)^2} \right) < 0$$

(Recordar que la Elasticidad de Sustitución $\sigma = 1/(1 - \delta)$). Por lo que cuanto menor δ , menor sustituibilidad. Lo que está diciendo este análisis entonces es que cuanto menor la sustituibilidad entre x e y , mayor es el peso relativo del gasto en el bien más caro (estamos suponiendo $\frac{p_x}{p_y} > 1$).

Ejercicio 4.10

- a. Si $X < X_0$, el individuo se muere. Por lo que el ejercicio tiene como dominio las $x \geq x_0$. Gastará $P_X X_0$ primero y elegirá cuánto más consumir de x (o sea, cuánto consumir de $(x - x_0)$) y cuánto consumir de y con lo que le reste de ingreso: $I - P_X X_0$.
El problema del consumidor es entonces

$$L = (x - x_0)^\alpha y^\beta + \lambda(I - p_x x_0 - p_x(x - x_0) - p_y y)$$

Por lo que las soluciones (funciones de demanda) son:

$$(X - X_0) = \frac{\alpha (I - P_X X_0)}{P_X}$$

$$Y = \frac{\beta (I - P_X X_0)}{P_Y}$$

El gasto total en cada uno de los bienes será entonces:

$$P_X (X - X_0) = \alpha (I - P_X X_0)$$

$$p_x(x - x_0) + p_x x_0 = \alpha(I - p_x x_0) + p_x x_0$$

$$p_x x = \alpha I + (1 - \alpha)p_x x_0$$

$$Y = \frac{\beta (I - P_X X_0)}{P_Y}$$

b.

De la parte a sale que:

$$\frac{P_X X}{I} = \alpha + \frac{(1 - \alpha) P_X X_0}{I}, \text{ por lo que } \frac{\partial \frac{P_X X}{I}}{\partial I} = -\frac{(1 - \alpha) P_X X_0}{I^2}$$

$$\frac{P_Y Y}{I} = \beta - \frac{(1 - \alpha) P_X X_0}{I}, \text{ por lo que } \frac{\partial \frac{P_Y Y}{I}}{\partial I} = \frac{(1 - \alpha) P_X X_0}{I^2}$$