Control Cap. 4
Micro I - 2020

Solución

<u>**EXPLIQUE O JUSTIFIQUE CON CÁLCULOS**</u> **SU RESPUESTA EN TODOS LOS CASOS**

1 Ejercicio 1

Considere un sujeto con la función Cobb-Douglas $\boldsymbol{U(x,y) = 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}}$, e $\boldsymbol{I = 100, p_x = 2 \text{ y } p_y = 4}$

a) Calcule las cantidades de x e y que consumirá este sujeto.

$$\mathcal{L} = 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} + \lambda\left(I - p_x x - p_y y\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 * \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 * \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_x x - p_y y = 0$$

De las dos primeras obtenemos

$$2 * \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}} = \lambda p_x$$

$$2 * \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} = \lambda p_y$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y}$$

$$\frac{y}{3x} = \frac{p_x}{p_y}$$

Despejamos y:

$$y = \frac{3 * p_x x}{p_y}$$

Suplantamos en la restricción presupuestal:

$$I = p_x x + p_y \left(\frac{3 * p_x x}{p_y}\right)$$

$$I = p_x x + 3p_x x$$

$$I = 4p_x x$$

$$x^* = \frac{I}{4p_x}$$

Hallamos la demanda de y^*, suplantando x en la expresión $y = \frac{3p_x x}{p_y}$:

$$y = \frac{3p_x \frac{I}{4p_x}}{p_y}$$

$$y^* = \frac{3I}{4p_y}$$

Entones, con $p_x = 2, p_y = 4, I = 100$:

$$\boldsymbol{x^* = \frac{100}{4 * 2} = 12,5}$$

$$\boldsymbol{y^* = \frac{3 * 100}{4 * 4} = 18,75}$$

b) ¿Cómo cambian estas cantidades cuando $\boldsymbol{p_x = 3}$?

Simplemente ponemos el nuevo precio en las demandas que ya habíamos calculado en la parte a) y calculamos la nueva utilidad.

$$\boldsymbol{x^* = \frac{100}{4 * 3} = 8,33}$$

$$\boldsymbol{y^* = \frac{3 * 100}{4 * 4} = 18,75}$$

c) **Calcule la diferencia en utilidad del sujeto entre el punto a y b**

La utilidad que alcanza el sujeto en el punto a es:

$$U(12{,}5; 18{,}75) = 2 * (12{,}5)^{\frac{1}{4}}(18{,}75)^{\frac{3}{4}} = 33{,}8$$

La utilidad que alcanza el sujeto en el punto b es:

$$U(9{,}33; 18{,}75) = 2 * (8{,}33)^{\frac{1}{4}}(18{,}75)^{\frac{3}{4}} = 30{,}615$$

La diferencia es entonces $33{,}8 - 30{,}615 = 3{,}185$

d) Halle la *función* de utilidad indirecta de este sujeto, $\boldsymbol{V(p_x, p_y, I)}$.

$$V(p_x, p_y, I) = U(x^*, y^*) = 2 * \left(\frac{I}{4p_x}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3I}{4p_y}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$V(p_x, p_y, I) = 2 * \frac{I^{\frac{1}{4}} I^{\frac{3}{4}} * 3^{\frac{3}{4}}}{4^{\frac{1}{4}} p_x^{\frac{1}{4}} p_y^{\frac{3}{4}} 4^{\frac{3}{4}}} = 2 * \frac{I * 3^{\frac{3}{4}}}{p_x^{\frac{1}{4}} * p_y^{\frac{3}{4}} * 4} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2} \frac{I}{p_x^{\frac{1}{4}} p_y^{\frac{3}{4}}}$$

e) Halle la *función* de gasto de este sujeto, $\boldsymbol{E(p_x, p_y, U)}$

Despejamos I de la función de utilidad indirecta:

$$I = V \frac{2 p_x^{\frac{1}{4}} p_y^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$

Suplantamos I por E, e I por U.

$$E(p_x\ , p_y\ , U) = U \frac{2 p_x^{\frac{1}{4}} p_y^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}$$

f) Calcule una medida monetaria (en $) de la variación de utilidad del punto c.

La utilidad que alcanza el sujeto en el punto a es 33,8. La utilidad que alcanza el sujeto en el punto b es 30,615. Existen dos posibles maneras de medir el valor monetario de esta disminución en su utilidad. El primero, quizás el más intuitivo es de calcular una compensación. Una compensación es una cantidad de dinero (ingreso) adicional que lo deja al sujeto con el mismo nivel de utilidad que alcanzaba con $p_x = 2$. Para calcular este monto, debemos primero calcular cuánta plata necesita como mínimo para alcanzar el nivel de utilidad de punto a (33,8) cuando $p_x = 3$. Esta información nos la da la función de gasto:

$$E(3;4;33{,}8) = 33{,}8 \times \frac{2 \times 3^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}} = 110{,}39$$

Como su ingreso es de $100, habría que darle $10,39 al sujeto para compensarlo por el aumento de p_x de $2 a $3.

La segunda manera de calcular este monto sería calcular lo que está dispuesto a pagar como máximo el sujeto para que el aumento de p_x de $2 a $3 no suceda. Esto es igual a la cantidad de dinero en que tiene que disminuir su ingreso para que su utilidad baje de 33,8 a 30,615 con $p_x = 2$. De nuevo, esto lo obtenemos con la función de gasto:

$$E(2;4;30{,}615) = 30{,}615 \times \frac{2 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}} = 90{,}35$$

Como su ingreso es de $100, su disposición a pagar sería $100-$90,35 = $9,65.

La razón por la cual no da exactamente igual un caso que el otro ($\$10{,}39 \neq \$9{,}65$), es que los precios no son los mismos en un caso que en el otro. No estamos calculando un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestaria.

Un cálculo que no es correcto es tomar la canasta del punto a) y valorar a los precios de b). Esto da: $12{,}5 * 3 + 18{,}75 * 4 = 112{,}5$. Lo que llevaría a concluir que hay darle 12,5 para que pueda acceder a esta canasta. Pero esto no es una buena medida monetaria de la pérdida de utilidad que sufrió el individuo porque con el aumento del precio la canasta del punto a) ya no es óptima. Otra forma de verlo, es que con 112,5 pesos y $p_x = 3$ él está mejor de lo que estaba antes de que subiera el precio ($I = 100\ y\ p_x = 2$):

$$V(3;\ 4;112{,}5) = \frac{3^{\frac{3}{4}} \times 112{,}5}{2 \times 3^{\frac{1}{4}} \times 4^{\frac{3}{4}}} = 34{,}5 > 33{,}8$$

g) Partiendo de la situación del punto b, calcule:

a. **El gasto del gobierno si éste decidiera subsidiar al sujeto complementando su ingreso hasta el punto en que el sujeto vuelva a su nivel de utilidad del punto a).**

Este cálculo ya fue hecho más arriba:

$$E = 33{,}8 * \frac{4 * 3^{\frac{1}{4}} 4^{\frac{3}{4}}}{2 * 3^{\frac{3}{4}}} = 110{,}39$$

Entonces, dado que el individuo tiene $I = 100$, el gasto del gobierno sería $10,39.

b. El gasto del gobierno si decidiera subsidiar el consumo de x con un monto de dinero por unidad (un subsidio al precio de x), tal que el sujeto vuelve a su nivel de utilidad del punto a).

Tomamos la diferencia de precios entre los puntos a) y b) del comienzo del ejercicio y lo multiplicamos por la cantidad del bien x que el individuo compra en a): $(3 - 2) * 12{,}5 = 12{,}5$. El gasto del gobierno debe ser $12,5.

El gobierno gasta menos subsidiando el ingreso porque en este caso el sujeto consume menos de *x*, que ahora es más caro.

2 Ejercicio 2

Considere la siguiente función CES:

$$\boldsymbol{U(x, y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta}}$$

a) **Demuestre que las condiciones de primer orden para una utilidad máxima con restricción con esta función, exige que los individuos elijan los bienes en la proporción**

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{\delta - 1}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\delta x^{\delta - 1}}{\delta} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\delta y^{\delta - 1}}{\delta} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_x x - p_y y = 0$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\delta x^{\delta-1}}{\delta} = \lambda p_x}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\delta y^{\delta-1}}{\delta} = \lambda p_y}$$

$$\frac{x^{\delta-1}}{y^{\delta-1}} = \frac{p_x}{p_y} \rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{\delta-1} = \frac{p_x}{p_y}$$

Elevando ambos lados a $\frac{1}{\delta}$ obtenemos:

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{\delta-1}}$$

b) Demuestre que el resultado del inciso a) implica que los individuos asignarán su ingreso en partes iguales al consumo de x e y en el caso Cobb-Douglas ($\delta = 0$).

En el caso de una Cobb-Douglas ($\delta = 0$), entonces tenemos, por la parte a):

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{0-1}} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{p_y}{p_x}$$

$$p_x x = p_y y$$

c) Para el caso en que $\delta = \frac{1}{2}$, halle los valores de la canasta óptima. Considere $p_x = 4, p_y = 5, I = 144$.

Con estos valores, tenemos:

$$U(x, y) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 2y^{1/2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 * \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 * \frac{1}{2} * y^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_x x - p_y y = 0$$

$$\frac{2*\frac{1}{2}*x^{-\frac{1}{2}}}{2*\frac{1}{2}*y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{p_x}{p_y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{y}{x}=\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2$$

$$y=\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x$$

Suplantamos en la restricción presupuestal:

$$I=p_x x+p_y\left(\frac{p_x^2}{p_y^2}*x\right)$$

$$I=p_x x+p_x^2*\frac{x}{p_y}$$

$$I=x\left(p_x+\frac{p_x^2}{p_y}\right)$$

$$I=x*p_x\left(1+\frac{p_x}{p_y}\right)$$

$$x^*=\frac{I}{p_x\left(1+\frac{p_x}{p_y}\right)}$$

Para hallar y^* sustituimos la expresión anterior en $y=\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x$.

$$y=\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2\frac{I}{p_x\left(1+\frac{p_x}{p_y}\right)}=\frac{p_x I}{p_y^2\left(1+\frac{p_x}{p_y}\right)}=\frac{p_x I}{p_y^2\left(\frac{p_y+p_x}{p_y}\right)}$$

$$y^*=\frac{I}{p_y\left(1+\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

Entonces consume:

$$\boldsymbol{x^*=\frac{144}{4\left(1+\frac{4}{5}\right)}=20}$$

$$\boldsymbol{y^* = \frac{144}{5\left(1+\frac{5}{4}\right)} = 12,8}$$

$$\boldsymbol{U(x,y) = 2x^{\frac{1}{2}} + 2y^{1/2} = 2 * 20^{\frac{1}{2}} + 2 * 12,8^{\frac{1}{2}} = 16,099}$$