Universidad de Montevideo

Microeconomía I
Solucion Primer Parcial 2006
Prof.: Marcelo Caffera

EJERCICIO 1:

(a) El problema que resuelve el individuo es:

$$\begin{aligned}\max_{(x,y)} U(x,y) &= x^{\alpha}y^{\beta} \\ \text{sujeto a } I &= p_x x + p_y y\end{aligned}$$

donde p_x y p_y son los precios de los bienes x e y respectivamente, e I es el ingreso del individuo en el período. El Lagrangeano de este problema es:

$$L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda\left(I - p_x x - p_y y\right)$$

Y las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}(1)\frac{\partial L}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda p_x = 0 \\ (2)\frac{\partial L}{\partial y} &= \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \\ (3)\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0\end{aligned}$$

De (1) y (2) tenemos que:

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

Despejando y en función de x obtenemos:

$$y = \frac{p_x}{p_y}\frac{\beta}{\alpha}x \tag{1}$$

Sustituyendo esta expresión en (3) :

$$\begin{aligned}I - p_x x - p_y\frac{p_x}{p_y}\frac{\beta}{\alpha}x &= 0 \\ I &= p_x x(1+\frac{\beta}{\alpha}) \\ I &= p_x x(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}) \\ x^* &= d_x = \frac{\alpha I}{p_x}\end{aligned}$$

Sustituyendo en 1 obtenemos:

$$y^* = d_y = \frac{\beta I}{p_y}$$

Q.E.D que el individuo asigna un porcentaje fijo (α y β respectivamente) de su renta a la adquisición de x e y. Alternativamente, si definimos las proporciones del gasto en ambos bienes respectivamente como s_x y s_y, vemos que son fijas:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{p_x x}{I} = \alpha \\ s_y &= \frac{p_y y}{I} = \beta \end{aligned}$$

(b) Esta característica de la función de utilidad Cobb-Douglas no resulta un aspecto positivo de la misma ya que dice que la proporción del gasto de los distintos bienes conrelación al ingreso no depende ni de los precios ni del ingreso del individuo. Esto hace que no sea muy adecuada para estudiar el consumo (sí la producción). Los datos sobre el mundo real (por ejemplo en alimentos) contradicen esta propiedad de la Cobb-Douglas. La proporción del ingreso que destinan a alimentos depende tanto del nivel de los precios relativos entre alimentos y otros bienes como del nivel de ingresos.

(c) Si el individuo tiene una función de utilidad ESC, resuelve:

$$\begin{aligned} \max_{(x,y)} U(x,y) &= x^{0,5} + y^{0,5} \\ \text{sujeto a } I &= p_x x + p_y y \end{aligned}$$

El Lagrangeano de este problema es ahora:

$$L = x^{0,5} + y^{0,5} + \lambda \left(I - p_x x - p_y y \right)$$

Y las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} (1) \frac{\partial L}{\partial x} &= 0,5x^{-0,5} - \lambda p_x = 0 \\ (2) \frac{\partial L}{\partial y} &= 0,5y^{-0,5} - \lambda p_y = 0 \\ (3) \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0 \end{aligned}$$

De (1) y (2) tenemos que:

$$\frac{0,5x^{-0,5}}{0,5y^{-0,5}} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Despejando y en función de x obtenemos:

$$y = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x \tag{2}$$

Sustituyendo esta expresión en (3) :

$$\begin{aligned} I - p_x x - p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x &= 0 \\ I - p_x x - p_x x \left(\frac{p_x}{p_y}\right) &= 0 \\ I &= p_x x(1 + \frac{p_x}{p_y}) \\ x^* &= d_x = \frac{I}{p_x(1 + \frac{p_x}{p_y})} \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2 obtenemos:

$$\begin{aligned} y^* &= d_y = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \frac{I}{p_x(1 + \frac{p_x}{p_y})} \\ &= \frac{1}{p_y} \frac{I}{(1 + \frac{p_y}{p_x})} \end{aligned}$$

Q.E.D que el individuo asigna un porcentaje de su renta a la adquisición de x e y que no es fijo sino que depende del cociente de precios. En este sentido la función de utilidad CES resuelve en parte este problema ya que se puede apreciar claramente que en este caso

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{p_x x}{I} = \frac{1}{(1 + \frac{p_x}{p_y})} \\ s_y &= \frac{p_y y}{I} = \frac{1}{(1 + \frac{p_y}{p_x})} \end{aligned}$$

Lo que dice que cuanto más caro un bien en términos relativos menor será la proporción del gasto en este bien.

Decimos que el problema se resuelve en parte (y no todo) ya que en la función de utilidad CES sigue siendo irreal que la proporción del gasto en un bien no dependa del ingreso del individuo. Esto se contradice con muchos ejemplos de bienes en la realidad. Tomemos el caso del consumo de servicios de jardinería, por ejemplo. Es natural observar que para cierto nivel de ingresos la demanda de servicios de jardinería es cero.

Este defecto compartido entre las funciones de utilidad Cobb-Douglas y CES obedece al hecho de que ambas representan preferencias homotéticas. Cuando las funciones de utilidad representan preferencias homotéticas la relación de precios determina el cociente y/x mediante la igualdad $RMS = p_x/p_y$. Por lo que la composición del gasto dependerá exclusivamente de los precios relativos.

(d) Como ya fue comentado, las variaciones en el ingreso no afectan a las composiciones del gasto en ambas funciones de utilidad, lo que resulta una desventaja para su aplicación.

Ejercicio 2

(a) De acuerdo a la letra, la utilidad de Ian viene dada por

$$U(x,y) = 0,75x + 2y$$

o cualquier transformación monótona de esta función.

(b) Como se trata de bienes perfectamente sustitutos, la curva de indiferencia de Ian entre x e y es una recta:

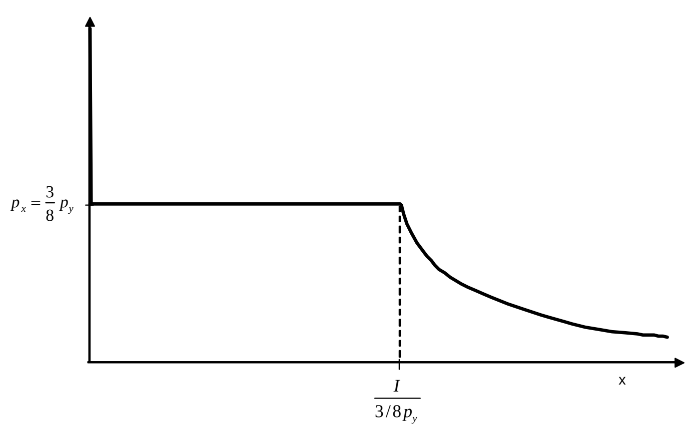
$$y = \frac{U - 0,75x}{2}$$

La RMS es constante e igual a $0,75/2 = 3/8$. Por lo tanto, la función de demanda de x vendrá dada por

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } \frac{p_x}{p_y} > \frac{3}{8} \\ \text{Cualquier cosa entre 0 y } I/p_x \text{si } \frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{8} \\ I/p_x \text{si } \frac{p_x}{p_y} < \frac{3}{8} \end{array} \right\}$$

(Para comprender mejor esta respuesta conviene realizar un gráfico con la restricción presupuestaria y las curvas de indiferencia en el cuadrante (x, y)).

(c) Curva de demanda de x.



(d) Los cambios en I corren el punto $I/(3/8)p_y$ y el segmento hiperbólico hacia la derecha o la izquierda. Los cambios en p_y desplazan hacia arriba o hacia abajo el segmento horizontal de la curva.

(e) La curva de demanda compensada de x es un punto (x, p_x) ya que cuando p_x varía la utilidad del consumidor también varía para todo $p_x < 3/8 p_y$

Ejercicio 3
La cantidad demanda por cada consumidor en función del precio es

$$\begin{aligned} q_1 &= 100 - 2p \\ q_2 &= 160 - 4p \\ q_3 &= 150 - 5p \end{aligned}$$

Se puede ver que si $p \geq 30$ el consumidor 3 no demanda nada, si $p \geq 40$ el dos tampoco y si $p \geq 50$ nadie demanda nada porque el 1 tampoco lo hará.

En consecuencia, la curva de demanda del mercado será:

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} q_1 + q_2 + q_3 = 410 - 11p, 0 \leq p < 30 \\ q_1 + q_2 = 260 - 6p, 30 \leq p < 40 \\ q_3 = 150 - 5p, 40 \leq p < 50 \\ 0 \text{ si } p \geq 50 \end{array} \right\}$$