Utilidad Esperada

En estas notas nos interesaremos en la representación de preferencias cuando el conjunto de las posibles elecciones es el conjunto de todas las loterías (o distribuciones de probabilidad) sobre un cierto espacio finito X. La mayoría de las situaciones de interés en economía son de elecciones en condiciones de incertidumbre. Por eso es muy importante tener una teoría de la decisión que sea útil para estas situaciones. Eso es lo que trataremos de desarrollar en estas notas.

Sea X un conjunto finito, $x_1, ..., x_n$ interpretado como el conjunto de las posibles canastas de consumo. Sea P el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre X, interpretado como el conjunto de todas las loterías cuyos premios son canastas posibles de consumo. Formalmente,

$$P = \left\{ p \in \mathbf{R}^n : p_i \in [0,1] \text{ para todo } i, \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Vemos que si $p, q \in P$, entonces para cualquier $\lambda \in (0,1)$, el punto $\lambda p + (1-\lambda)r$ de $\mathbf{R}^n$ también pertenece a P, pues

$$\lambda p + (1-\lambda)r = (\lambda p_1 + (1-\lambda)r_1, ..., \lambda p_n + (1-\lambda)r_n)$$

es tal que cada una de sus componentes es positiva, y además suman 1. Por lo tanto, si tomamos dos distribuciones de probabilidad p y q, y las "mezclamos" como hicimos recién, obtenemos otra distribución de probabilidad.

Decimos que una relación de preferencias satisface

Independencia si para todo $p, q, r \in P$ y todo $\lambda \in (0,1)$

$$p \succsim q \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda p + (1-\lambda)r \succsim \lambda q + (1-\lambda)r.$$

Continuidad si para todos los $p, q, t \in P$ tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, los conjuntos $\{\alpha : \alpha p + (1-\alpha)q \succeq t\}$ y $\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1-\alpha)q\}$ son cerrados.

Sobre Independencia se han dicho millones de cosas. A continuación presentamos algunas.

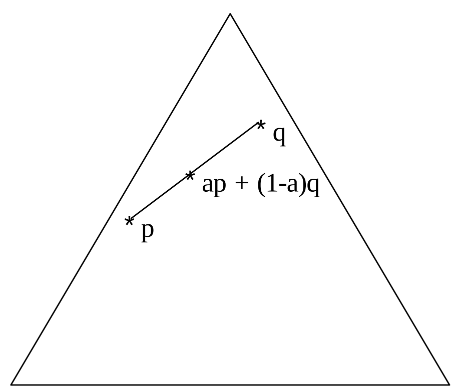
Defensa A. Argumentaremos ahora que es un axioma intuitivo. Para ver porqué, pensemos en lo siguiente. Supongamos que una persona, Inés por ejemplo, prefiere p a q, es decir $p \succeq q$. Ahora, a Inés se le pregunta cual de las siguientes dos loterías prefiere, si $\lambda p + (1-\lambda)r$ o $\lambda q + (1-\lambda)r$. La lotería $\lambda p + (1-\lambda)r$ se puede interpretar como una lotería en dos etapas. En la primera etapa, se tira una "moneda" que tiene probabilidad λ de caer en cara, y $1-\lambda$ de caer en número. Si cae en cara, Inés recibirá la lotería p, y si sale número recibirá r. Ahora, comparando $\lambda p + (1-\lambda)r$ con $\lambda q + (1-\lambda)r$, Inés piensa:

> "Cuando tiren la moneda, si sale número, me da exactamente lo mismo $\lambda p + (1-\lambda)r$ o $\lambda q + (1-\lambda)r$, porque en ambos casos recibiré r. Si sale cara, en un caso recibiré p y en el otro q, por lo que mi decisión entre $\lambda p + (1-\lambda)r$ y $\lambda q + (1-\lambda)r$ debería reducirse sólo a la comparación entre p y q. Como dije que prefería p a q, debo también preferir $\lambda p + (1-\lambda)r$ a $\lambda q + (1-\lambda)r$." ■

Defensa B. También se ha argumentado que el axioma se debe cumplir pues se puede diseñar un "truco" para que aquellos cuyas preferencias no satisfacen el axioma entreguen voluntariamente todo su dinero. Supongamos por ejemplo que hay tres loterías p, q y r tales que $p \succ q$ y $p \succ r$. En el Ejercicio 1 se le pide que demuestre que el axioma de Independencia implica que para todo $\lambda \in (0,1)$, $p \succ \lambda q + (1-\lambda) r$. Supongamos que un individuo tiene preferencias que violan el axioma de Independencia, de tal forma que $\lambda q + (1-\lambda) r \succ p$, y que la persona posee la lotería p. Como $\lambda q + (1-\lambda) r$ es preferido a p, el individuo estará dispuesto a pagar una pequeña suma de dinero por obtener $\lambda q + (1-\lambda) r$ y entregar p. Una vez que haya pagado ese dinero, se ejecuta la primera parte de la lotería (la que da q con probabilidad λ, y r con probabilidad $1-\lambda$). Ahora el individuo está en posesión de r o de q, y como $p \succ q$ y $p \succ r$, estará dispuesto a pagar una pequeña suma de dinero por cambiar q o r por p. Una vez que haya hecho el cambio, estará igual que al principio, poseyendo p, pero dos pequeñas sumas de dinero más pobre.■

Ejercicio 1 Demuestre que si $p \succ q$ y $p \succ r$ y $\lambda \in [0,1]$ y las preferencias son transitivas y cumplen el axioma de Independencia, entonces $p \succ \lambda q + (1-\lambda) r$.

Presentado así, con esas dos defensas, el axioma suena sumamente razonable. Uno empieza a sospechar que quizás no sea tan inocuo cuando se da cuenta que de todas las formas posibles que podrían tener las curvas de indiferencia sobre P, cuando hay sólo 3 premios posibles, el axioma de Independencia implica que son rectas paralelas! Veamos ahora porqué. Primero, P se puede representar por un triángulo equilátero: si dibujan P en $\mathbf{R}^3$, P es un triángulo equilátero, y no hace falta dibujar todo el resto de $\mathbf{R}^3$ para dibujar sólo un triángulo. Tomemos ahora dos loterías p y q en P tales que $p \sim q$, y tomemos otro punto cualquiera s entre medio de ellas. Eligiendo $a \in (0,1)$ apropiadamente, podemos hacer que $s = ap + (1-a)q$



Vamos a mostrar ahora que $p \sim s \sim q$, por lo que todas las curvas de indiferencia son rectas. Como $p \succeq q$, tomando $r = q$ en el axioma de Independencia obtenemos

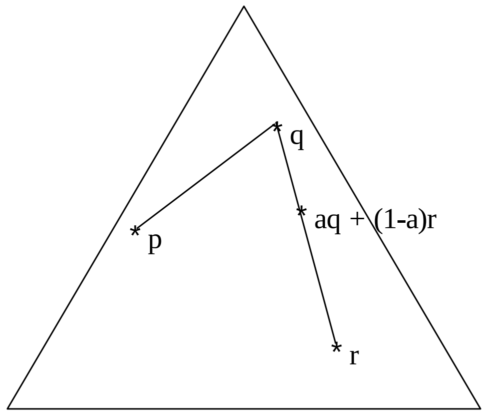
$$\begin{aligned} p &\succeq q \Rightarrow ap + (1-a) r \succeq aq + (1-a) r \Leftrightarrow \\ ap + (1-a) q &\succeq aq + (1-a) q \Leftrightarrow s \succeq q \end{aligned}$$

De forma similar, como $q \succeq p$ y tomando $r = q$ en el axioma de Independencia, obtenemos

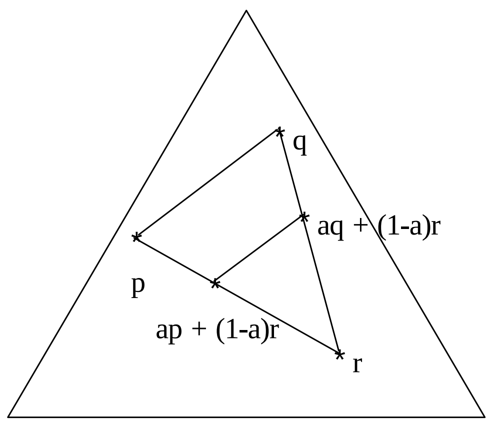
$$\begin{aligned} q &\succeq p \Rightarrow aq + (1-a) r \succeq ap + (1-a) r \Leftrightarrow \\ aq + (1-a) q &\succeq ap + (1-a) q \Leftrightarrow q \succeq s \end{aligned}$$

lo que termina de demostrar que $q \sim s$. Por transitividad de $\sim$ obtenemos también que $p \sim s$, como queríamos demostrar.

Falta mostrar ahora que además de ser rectas, las curvas de indiferencia son también paralelas. Para eso, tomamos cualquier s que no esté entre p y q, y encontramos un r tal que $s = aq + (1-a)\,r$, como en el dibujo.



Las curvas de indiferencia son paralelas si y sólo si $aq + (1-a)\,r \sim ap + (1-a)\,r$, pues el triángulo p, q, r es semejante al triángulo por $aq + (1-a)\,r, ap + (1-a)\,r$ y r :



En efecto, aplicando el axioma de Independencia directamente, vemos que

$$p \sim q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \succeq q \Rightarrow ap + (1-a)\,r \succeq aq + (1-a)\,r \\ q \succeq r \Rightarrow aq + (1-a)\,r \succeq ap + (1-a)\,r \end{array} \right\} \Rightarrow ap + (1-a)\,r \sim aq + (1-a)\,r$$

como queríamos demostrar.

Además de esta restricción tan seria sobre la forma de las curvas de indiferencia, se han propuesto muchísimas críticas tanto al axioma de Independencia directamente, como a sus consecuencias. Presentamos ahora la crítica más conocida al axioma: la paradoja de Allais.

Crítica A: La Paradoja de Allais (Econometrica 21, año 1953). En este experimento hay tres premios posibles: $x_{10} = 10.000.000$, $x_1 = 1.000.000$ y $x_0 = 0$, que vamos a interpretar como 10, 1 y 0 millones de dólares respectivamente. A Inés se le ofrecen primero dos loterías, $p = (p_{10}, p_1, p_0) = (0, 1, 0)$ y $q = \left(\frac{10}{100}, \frac{89}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Típicamente, la gente elige p, quizás porque da un millón de dólares seguro, y no tiene chance de salir 0, que sería horrible. En el segundo experimento de elección, se le ofrecen a Inés otras dos loterías, $r = \left(0, \frac{11}{100}, \frac{89}{100}\right)$ y $s = \left(\frac{10}{100}, 0, \frac{90}{100}\right)$. Típicamente, aca la gente elige s, quizás porque $\frac{11}{100}$ y $\frac{10}{100}$ son muy parecidos, pero 10 millones es mucho más que un millón. El problema es que la gente que elige de esa forma tiene preferencias que no satisfacen el axioma de Independencia. Se puede ver directamente usando el axioma, pero es más fácil usar una de sus consecuencias para ver que en efecto se viola. En el Teorema 7 veremos que si se satisface el axioma de Independencia, existe una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ tal que $p \succeq q$ si y sólo si $\sum_x u(x) p(x) \geq \sum_x u(x) q(x)$. Por lo tanto, la gente que elige p sobre q nos está diciendo que

$$u(1) > \frac{10}{100} u(10) + \frac{89}{100} u(1) + \frac{1}{100} u(0) \Leftrightarrow 11u(1) > 10u(10) + u(0).$$

Por otro lado, esa misma gente, al elegir s sobre r nos está diciendo que

$$\frac{10}{100} u(10) + \frac{90}{100} u(0) > \frac{11}{100} u(1) + \frac{89}{100} u(0) \Leftrightarrow 10u(10) + u(0) > 11u(1)$$

lo que contradice la ecuación anterior.■

Ejercicio 2 Dibuje las loterías p, q, r y s, y muestre que las curvas de Indiferencia de alguien que elige p sobre q y s sobre r no son paralelas. Muestre también que se viola el axioma de Independencia.

Crítica B: La Paradoja de Machina (Journal of Economic Perspectives 1, año 1987). Sea

$$X = \{\text{un viaje a Venecia, mirar una buena película sobre Venecia, quedarse en casa}\}$$

y sean v, p y q las loterías que dan el *v*iaje, la *p*elícula y *q*edarse con probabilidad 1 respectivamente. Supongamos también que la persona que va a elegir prefiere ir a Venecia, antes que mirar la película, y prefiere la película antes que quedarse en casa. Es decir $v \succ p \succ q$. A la persona en cuestión se le ofrecen dos loterías. En la primera la probabilidad del viaje a Venecia es 99,9% y la probabilidad de la película es 0,1%. Es decir, $l_1 = (l_v, l_p, l_q) = \left(\frac{999}{100}, \frac{1}{1000}, 0\right)$. En la segunda, la probabilidad del viaje sigue siendo 99,9%, pero con probabilidad 0,1% sale quedarse en casa: $l_2 = \left(\frac{999}{100}, 0, \frac{1}{1000}\right)$. Como $p \succ q$, el axioma de independencia nos dice que

$$l_1 = \frac{1}{1000} p + \frac{999}{1000} v \succ \frac{1}{1000} q + \frac{999}{1000} v = l_2.$$

Sin embargo, sería sumamente razonable que la gente prefiriera l_2 a l_1 : si uno elige l_1, pero le toca la película, uno estará muy enojado, y preferirá quedarse en casa antes que ver una película sobre el lugar al que no pudo ir.■

Crítica C: La Paradoja de Ellsberg (Quarterly Journal of Economics 75, año 1961). Hay una urna con 200 pelotas: hay 50 Rojas y 50 Azules, y hay 100 que son algunas Verdes y otras Blancas, pero no se sabe en qué proporción. Al tomador de decisiones se le plantean dos problemas de decisión. En el primero, se sacará una bola, y debe elegir entre las loterías

p : \$1.000 si la bola es R o A y \$0 en los demás casos q : \$1.000 si la bola es R o V y \$0 en los demás casos

En el segundo problema de decisión, se saca una nueva bola, después de haber repuesto la anterior, y el individuo debe elegir entre las loterías

r : \$1.000 si la bola es V o B y \$0 en los demás casos s : \$1.000 si la bola es A o B y \$0 en los demás casos

Antes de seguir, piense qué elegiría. Típicamente la gente elige p y r. Esas elecciones son inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada y con el axioma de independencia. Para ver porqué, notamos que si se cumplieran todos los axiomas de la utilidad esperada, el individuo tendría una función de utilidad, y al elegir p sobre q, nos dice que

$$\begin{aligned}
(p_R + p_A)\, u(1000) + (p_V + p_B)\, u(0) &> (p_R + p_V)\, u(1000) + (p_A + p_B)\, u(0) \Leftrightarrow \\
p_A u(1000) + p_V u(0) &> p_V u(1000) + p_A u(0) \Leftrightarrow p_A > p_V
\end{aligned}$$

A su vez, al elegir r sobre s, nos dice que

$$\begin{aligned}
(p_V + p_B)\, u(1000) + (p_R + p_A)\, u(0) &> (p_A + p_B)\, u(1000) + (p_R + p_V)\, u(0) \Leftrightarrow \\
p_V u(1000) + p_A u(0) &> p_A u(1000) + p_V u(0) \Leftrightarrow p_V > p_A
\end{aligned}$$

lo cual contradice $p_A > p_V$. ■

Sin perjuicio de las críticas, el axioma de Independencia es muy útil, pues nos da el Teorema de la Utilidad Esperada:

Teorema 3 *La relación de preferencias $\succeq$ es completa, transitiva, continua y satisface independencia si y sólo si existe una función $u : X \to \mathbf{R}$ tal que*

$$p \succeq q \text{ si y sólo si } \sum_x u(x)\, p(x) \geq \sum_x u(x)\, q(x). \tag{1}$$

Además, v también satisface (1) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$.

Prueba. Si para todo p, q en P, tenemos $p \sim q$, el teorema es trivial, por lo tanto asumimos que existen r y s tales que $r \succ s$. La prueba será una serie de muchos pasos.

Paso 1. Si $p \succ q$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces $p \succ \alpha p + (1 - \alpha)\, q \succ q$.

Por el "sólo si" de independencia tenemos que $p = \alpha p + (1 - \alpha)\, p \succeq \alpha p + (1 - \alpha)\, q$. También, si fuera el caso que $\alpha p + (1 - \alpha)\, q \succeq \alpha p + (1 - \alpha)\, p = p$, obtendríamos por el "si" de independencia que $q \succeq p$, lo cual no es cierto. Deducimos que $p \succ \alpha p + (1 - \alpha)\, q$. El razonamiento para $\alpha p + (1 - \alpha)\, q \succ q$ es similar y se omite.

Paso 2. Sean $\alpha, \beta \in (0, 1)$ y $p \succ q$. Entonces $\beta p + (1 - \beta)\, q \succ \alpha p + (1 - \alpha)\, q$ si y sólo si $\beta > \alpha$.

Supongamos $\beta p + (1 - \beta)\, q \succ \alpha p + (1 - \alpha)\, q$ para mostrar que $\beta > \alpha$. Si fuera el caso contrario y $\alpha \geq \beta$, tendríamos por independencia que

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta}\left(\beta p + (1-\beta)\, q\right) + \left(1 - \frac{1-\alpha}{1-\beta}\right) p \succeq \frac{1-\alpha}{1-\beta}\left(\beta p + (1-\beta)\, q\right) + \left(1 - \frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)\left(\beta p + (1-\beta)\, q\right).$$

El lado izquierdo es igual a $\alpha p + (1 - \alpha)\, q$ y el derecho a $\beta p + (1 - \beta)\, q$, por lo que obtenemos una contradicción.

Supodremos ahora que $\beta > \alpha$ y demostraremos que $\beta p + (1 - \beta)\, q \succ \alpha p + (1 - \alpha)\, q$. Por el paso 1 sabemos que $\beta p + (1 - \beta)\, q \succ q$, y aplicando el paso 1 nuevamente, vemos que

$$\beta p + (1-\beta)\, q \succ \frac{\alpha}{\beta}\left(\beta p + (1-\beta)\, q\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) q = \alpha p + (1-\alpha)\, q.$$

Paso 3. Para $p, q, t \in P$ cualesquiera tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, existe algún $\alpha_{pq}^t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim t$. Por continuidad, sabemos que los conjuntos $A^+ = \{\alpha : \alpha p + (1 - \alpha q) \succeq t\}$ y $A^- =$

$\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1 - \alpha q)\}$ son cerrados, y son no vacíos. Como las preferencias son completas, sabemos que $[0,1] \subseteq A^+ \cup A^-$. Para demostrar que existe algún α_{pq}^t tal que $\alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim t$ alcanzará entonces con mostrar que $A^+ = [a, 1]$ para algún a, y $A^- = [0, b]$ para algún b (sólo lo demostraremos para A^+, pues la demostración para A^- es similar). Como sabemos que A^+ es cerrado, alcanzará con mostrar que es un intervalo. Por el paso 2 sabemos que si $\beta > \alpha$ y $p \succ q$, entonces $\beta p + (1-\beta) q \succ \alpha p + (1-\alpha) q$. Por lo tanto, si $\alpha \in A^+$ y $\beta > \alpha$, por transitividad obtenemos que $\beta p + (1-\beta) q \succeq t$ por lo que $\beta \in A^+$

Paso 4. Para $p, q, t \in P$ cualesquiera tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, existe un único $\alpha_{pq}^t \in [0,1]$ tal que $\alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim t$. Por el paso 3 sabemos que existe algún α_{pq}^t con la propiedad deseada. Supongamos entonces que existe otro $\beta \in [0,1]$ tal que

$$\beta p + (1-\beta) q \sim \alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim t.$$

Demostraremos ahora que no podemos tener $\beta > \alpha_{pq}^t$, el caso para $\beta < \alpha_{pq}^t$ es análogo y será omitido. Si $\alpha_{pq}^t = 1$, β no puede ser menor o igual a 1, y mayor que α_{pq}^t, por lo que no hay nada que demostrar. Asumiremos entonces que $\alpha_{pq}^t < 1$. Tampoco podemos tener $\alpha_{pq}^t = 0$ y $\beta = 1$, pues quedaría

$$q = \alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim \beta p + (1-\beta) q = p$$

lo que contradice $p \succ q$. Si $\alpha_{pq}^t = 0$ y $\beta \in (0,1)$, por el paso 1 obtenemos que

$$\beta p + (1-\beta) q \succ q = \alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q \sim t$$

lo que contradice $\beta p + (1-\beta) q \sim t$. Supongamos entonces que $\alpha_{pq}^t, \beta \in (0,1)$ y $\beta > \alpha_{pq}^t$. En ese caso, el paso 2 nos dice que $\beta p + (1-\beta) q \succ \alpha_{pq}^t p + \left(1 - \alpha_{pq}^t\right) q$, lo cual es una contradicción.

Paso 5. Existen x_m y x_M (piensen en mínimo y máximo) tales que $\delta_{x_M} \succeq p \succeq \delta_{x_m}$ para todo $p \in P$ (donde δ_x es la lotería que le asigna probabilidad 1 a la canasta x). Primero debemos ranquear todas las loterías δ_{x_i} de acuerdo a las preferencias. Dentro de las que sean las mejores (si hay más de una) elegimos una, y la llamamos δ_{x_M}. Dentro de las peores, elegimos δ_{x_m}. Ahora demostraremos que $\delta_{x_M} \succeq p$ para todo $p \in P$. El caso para $p \succeq \delta_{x_m}$ es análogo y se omite. Tenemos que $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, donde p_i es la probabilidad que se le asigna a x_i y por lo tanto,

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}.$$

Aplicando independencia tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{x_M} &\succeq p_1 \delta_{x_1} + (1-p_1) \delta_{x_M} \succeq p_1 \delta_{x_1} + (1-p_1) \left(\frac{p_2}{1-p_1} \delta_{x_2} + \left(1 - \frac{p_2}{1-p_1}\right) \delta_{x_M} \right) \\
&= p_1 \delta_{x_1} + p_2 \delta_{x_2} + (1 - p_1 - p_2) \delta_{x_M} \\
&\succeq p_1 \delta_{x_1} + p_2 \delta_{x_2} + (1 - p_1 - p_2) \left(\frac{p_3}{1-p_1-p_2} \delta_{x_3} + \left(1 - \frac{p_3}{1-p_1-p_2}\right) \delta_{x_M} \right) \\
&= p_1 \delta_{x_1} + p_2 \delta_{x_2} + p_3 \delta_{x_3} + (1 - p_1 - p_2 - p_3) \delta_{x_M} \\
&\succeq \ ... = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Paso 6. La función $U(p) = \alpha_{\delta_{x_M} \delta_{x_m}}^p$ representa a $\succeq$. Debemos demostrar que $U(p) \geq U(q)$ si y sólo si $p \succeq q$.

Paso 6.i. Asumamos que $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$ (pues si son iguales se obtiene trivialmente que $p \sim q$). Si $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, obtenemos $p \succeq \delta_{x_m} \sim q$, por lo que asumimos $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \in (0,1)$. Si $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 1$, obtenemos $p \sim \delta_{x_M} \succeq q$, por lo que asumimos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \in (0,1)$. El paso 2 nos dice ahora que

$$\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m}$$

como queríamos demostrar.

Paso 6.ii. Demostraremos ahora que $p \succeq q$ implica $U(p) \geq U(q)$. No podemos tener $p \succeq q$ y $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 1$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, pues tendríamos $q \sim \delta_{x_M} \succ \delta_{x_m} \sim p$. Tampoco podemos tener $p \succeq q$ y

$$1 > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$$

pues el paso 1 nos dice que

$$q \sim \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \delta_{x_m} \sim p$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $p \succeq q$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, obtenemos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$.

Si $p \succeq q$ y $1 = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > 0$, el paso 1 nos daría

$$q \sim \delta_{x_M} \succ \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \sim p$$

otra contradicción. Por lo tanto, si $p \succeq q$ y $1 = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, obtenemos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$.

Resta ahora analizar el caso en que $p \succeq q$ y $1 > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > 0$. Si tuviéramos $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, el paso 2 nos diría que

$$q \sim \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \sim p$$

lo cual constituye una contradicción. Debemos tener entonces $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \geq \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, como queríamos demostrar.

Paso 7. Se dice que una función $U : P \to \mathbf{R}$ es **lineal** si

$$U(ap + (1-a)q) = aU(p) + (1-a)U(q)$$

para todo $p, q \in P$ y $a \in [0,1]$. Mostraremos que la función U dada en el paso 6 es lineal. Tenemos que por independencia,

$$\begin{aligned} ap + (1-a)q &\sim a(U(p)\delta_{x_M} + (1-U(p))\delta_{x_m}) + (1-a)q \\ &\sim a(U(p)\delta_{x_M} + (1-U(p))\delta_{x_m}) + (1-a)(U(q)\delta_{x_M} + (1-U(q))\delta_{x_m}) \\ &= [aU(p) + (1-a)U(q)]\delta_{x_M} + [1 - aU(p) - (1-a)U(q)]\delta_{x_m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando que $U(ap + (1-a)q)$ es aquél número para el cual

$$U(ap + (1-a)q)\delta_{x_M} + (1 - U(ap + (1-a)q))\delta_{x_m} \sim ap + (1-a)q,$$

vemos que $U(ap + (1-a)q) = aU(p) + (1-a)U(q)$ como queríamos demostrar.

Paso 8. Mostraremos ahora que si $U : P \to \mathbf{R}$ es lineal, existe una función $u : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$U(p) = \sum_x u(x)p(x) \tag{2}$$

Para hacer eso, necesitamos una definición. El **soporte** de una distribución de probabilidad p es el conjunto de puntos para los cuales $p_i > 0$. Vamos a mostrar que para una U lineal, $u(x) \equiv U(\delta_x)$ satisface (2). Lo haremos por inducción en el tamaño del soporte de p. Si el soporte tiene un elemento, $p = \delta_x$ para algún x. Por lo tanto, $U(p) = U(\delta_x) = u(x) = u(x) * 1$. Supongamos ahora que (2) se cumple para todas las distribuciones p con soporte de tamaño $m-1$, y tomemos una p con soporte de tamaño m. También, sea z un elemento cualquiera del soporte de p, y sea q tal que

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z \\ \frac{p(x)}{1-p(z)} & \text{si } x \neq z \end{cases}$$

Vemos que q tiene soporte de tamaño $m-1$ y

$$p = p(z)\,\delta_z + (1 - p(z))\,q.$$

Como U es lineal y satisface (2) para q, tenemos

$$\begin{aligned} U(p) &= p(z)\,U(\delta_z) + (1-p(z))\,U(q) \\ &= p(z)\,u(z) + (1-p(z))\sum_{x\neq z}\frac{p(x)}{1-p(z)}u(x) \\ &= \sum_x p(x)\,u(x) \end{aligned}$$

y la demostración está completa.■

Falta ahora demostrar que v también satisface (1) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$. Y falta también demostrar que si $\succeq$ tiene una representación como (1), entonces satisface los axiomas. Eso se deja como ejercicio.

Ejercicio 4 Las funciones u y v satisfacen (1) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$.

Ejercicio 5 Mostrar que si $\succeq$ satisface (1) para alguna función de utilidad u, entonces tiene que ser completa, transitiva, continua, y satisfacer independencia.

El Teorema de la Utilidad Esperada tiene infinidad de aplicaciones. Veamos por ejemplo una de sus primeras aplicaciones.

Aplicación A. La Paradoja de San Petesburgo. Esta paradoja fue descrita por Daniel Bernoulli en un artículo en 1738. Contaré la versión basada en la leyenda, no la del artículo, porque no lo he leído. En San Petesburgo había una casa de apuestas que le ponía un precio a cualquier apuesta, y la jugaba. Bernoulli se imaginó el siguiente experimento: comenzar a tirar una moneda, y si la primera cara salía en la n-ésima tirada, la casa de apuestas le pagaba a él \$$2^n$. En la época se pensaba que la gente evaluaba este tipo de apuestas por su valor esperado: si la casa de apuestas le ponía a la apuesta cualquier precio menor al valor esperado de las ganancias, la persona "debía" aceptar. Haciendo un simple cálculo vemos que el valor esperado de la apuesta es infinito

Primera cara en tirada	1	2	3	4	...	n	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...
Plata	2	4	8	16	...	2^n	...
Producto	1	1	1	1	...	1	...

Si lo que creía la gente en aquél entonces era correcto, Daniel tendría que haber estado dispuesto a pagar cualquier suma de dinero que le propusiera la casa de apuestas. La realidad del asunto es que nadie estaría dispuesto a pagar mucho más que, digamos, \$1000. Bernoulli se preguntó ¿por qué? Su respuesta fue que la gente tiene funciones de utilidad cóncavas, para las cuales la utilidad marginal del dinero (la derivada primera) es decreciente: a Bill Gates tener \$100.000 más, no le cambia nada, en cambio a cualquiera de nosotros sí nos cambia mucho. En particular, él dijo que la gente se comporta como si tuviera una función de utilidad logarítmica: $u(x) = \log x$. En ese caso la utilidad esperada de la apuesta propuesta, asumiendo que después de pagar el precio la riqueza es 0, es

$$\sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{1}{2^t} \log 2^t = \ln 4$$

que es mucho menos que infinito!■

Un pequeño desvío en la ruta: que el valor esperado de la apuesta de San Petesburgo sea infinito quiere decir que para cualquier precio fijo que nos quieran cobrar por cada intento, si hacemos el experimento una cantidad suficiente de veces podemos asegurarnos que nuestra ganancia será más grande que cualquier número que nos fijemos como objetivo. En general a la gente le suena muy raro eso. Supongamos que la casa de apuestas nos quiere cobrar \$1000 por cada intento. Si sale cara en la primera tirada, habremos perdido \$998. Si probamos otra vez, y sale cara por primera vez en la tirada 4, habremos perdido \$984. Sin embargo, hay una forma fácil de convencerse que se terminará ganando cualquier cantidad de dinero casi seguramente con suficientes tiradas.

En Excel, pongan en la celda A1 la fórmula "=Aleatorio()". Esa fórmula nos da un número aleatorio entre 0 y 1, distribuido uniformemente: tiene la misma probabilidad de caer en cualquier parte del intervalo. De acuerdo a esta distribución, la probabilidad de que el número caiga en cada intervalo es igual a la longitud del intervalo. Así por ejemplo, la probabilidad de que caiga en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ es $\frac{1}{2}$, y por tanto, es como si la primera cara hubiera salido en la primera tirada. Similarmente, la probabilidad de que el número aleatorio caiga en el intervalo $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right)$ es $\frac{1}{16}$ y es como si la primera cara hubiera caido en la cuarta tirada. Esa información se resume en la tabla siguiente:

Intervalo	$\left[0, \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$	...	$\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right)$	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...
Primera Cara en Tirada	1	2	3	...	n	...

Por lo tanto, si llamamos x al número aleatorio, y

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^n}$$

es que salió cara en la n-ésima tirada. Igualando x al primer término, y despejando n obtenemos n como función de x :

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} = x \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow \log(1-x) = (-n+1)\log 2 \Leftrightarrow n = 1 - \frac{\log(1-x)}{\log 2}.$$

Ahí fijamos el x más chico para el cual sale cara en la n-ésima tirada, pero para cualquier otro x, nos puede dar n un número no entero. Por lo tanto, alcanza con encontrar la parte entera de $1 - \log(1-x)/\log 2$. Así, poniendo en Excel, en la celda B1 "=Entero(1-Log(1-A1)/Log(2))" obtenemos para cada x que se genere en la celda A1, a qué tirada corresponde la primera cara. En la celda C1 ponemos +2^B1 - 1000, y sale la cantidad de dinero que se ganaría en un experimento, con un precio de 1000. Copiando esas tres celdas en las filas de abajo, tanto como quieran, obtendrán lo que hubiera obtenido Bernoulli en varios experimentos independientes. Sumando las "ganancias" de cada experimento, se obtiene que cuando el número de filas se hace más y más grande, las ganancias van creciendo. Pero hay que ser paciente: si el experimento se repite 65.000 veces, la cantidad esperada de experimentos donde sale la primera cara en la tirada 16 es 1, y es obviamente la mitad para la primera cara en 17, y así sucesivamente. A pesar de lo difícil que es sacar cara en la tirada 16, "sólo" se obtienen \$65.536. Peor aún, la probabilidad que en todos los experimentos la primera cara salga antes de la tirada 23 es 99%!

El ejemplo de la Paradoja de San Petesburgo sirve para ilustrar varias cosas. Primero, el concepto de "utilidad marginal decreciente del dinero", pero también para indicar que en general la gente es "aversa al riesgo", no le gusta tomar riesgos. Definiremos ahora la aversión al riesgo formalmente. Hasta ahora hemos trabajado con un conjunto X finito, pero para tratar loterías sobre cantidades de dinero, y temas de aversión al riesgo es más conveniente trabajar con un intervalo $X \subseteq \mathbf{R}$, y con P el conjunto de loterías sobre X.

Ejercicio 6 Suponga que $X = \{1, 2, 3\}$, y que $\succeq$ sobre $\Delta(X) = \left\{p \in \mathbf{R}^3_+ : \sum_{i=1}^3 p_i = 1\right\}$ satisfacen Independencia. Asuma también que una función U representa a las preferencias $\succeq$, con $U\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = U(0, 1, 0) = \frac{1}{2}$ y $U(0, 0, 1) = 1$. ¿Podemos saber cuánto es $U(1, 0, 0)$? Y si en vez de saber que $\succeq$ satisface independencia supiéramos que u es lineal, ¿podríamos saber cuánto es $U(1, 0, 0)$?

Definición. Una relación de preferencias $\succeq$ en P es **aversa al riesgo** si para toda lotería p, la lotería que es degenerada en el valor esperado de p, δ_{Ep}, es preferida a $p : \delta_{Ep} \succeq p$. Es decir, la persona prefiere recibir una cantidad de dinero segura, antes que una lotería que en promedio da esa cantidad, pero que tiene cierta variabilidad. Por ejemplo, una persona aversa al riesgo prefiere 1 millón de dólares seguro, antes que una lotería 50-50 de recibir \$0 o 2 millones de dólares.

Si las preferencias se pueden representar con una función de utilidad esperada u, cuya derivada segunda existe para todo x, hay otras dos condiciones que podrían parecer adecuadas para ser la definición de aversión al riesgo:

Condición A. La función u exhibe utilidad marginal decreciente del dinero. Formalmente, esto quiere decir que u' es decreciente. Para ver porqué esta podría ser una definición de aversión al riesgo, imaginemonos un individuo que evalúa quedarse seguro con la cantidad de dinero que tiene, o tomar una lotería con probabilidades $50 - 50$ de perder o ganar un peso. En este contexto, la persona piensa:

> Si gano un peso, la utilidad marginal de ese peso va a ser chica, no gano tanto, mientras que si pierdo un peso, la utilidad marginal de ese peso es alta, pierdo mucho. Por lo tanto, no tomo esa apuesta.

Por lo tanto, la persona elige la opción sin riesgo.

Condición B. La función u es cóncava: para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda) u(y). \tag{3}$$

Para ver porqué la concavidad de u es razonable como definición de aversión al riesgo, es útil interpretar a λ como la probabilidad que salga x. Así, que u sea cóncava nos dice que la persona prefiere recibir seguro $\lambda x + (1-\lambda) y$ pesos, antes que una lotería que le da \$$x$ con probabilidad λ y \$$y$ con probabilidad $1-\lambda$, ya que el lado derecho de la desigualdad (3) es la utilidad esperada de esa lotería.

Por suerte, la definición de aversión al riesgo es equivalente a la Condición A y a la Condición B. Para ver que A y B son equivalentes, alcanza con saber que si u tiene derivada segunda, u es cóncava si y sólo si, su derivada segunda es negativa. Eso es lo mismo que decir que la derivada primera es decreciente, que es la Condición A. Para ver la conexión entre la Condición B y la definición, vemos que la persona es aversa al riesgo si y sólo si para todo p

$$u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq E_p\left(u\left(x\right)\right). \tag{4}$$

Demostraremos que la Condición B y la definición son equivalentes si demostramos que u es cóncava si y sólo si se cumple la ecuación (4). Eso es el contenido del siguiente Teorema.

Teorema 7 ***Desigualdad de Jensen.*** *La función $u : X \to \mathbf{R}$ es cóncava si y sólo si para toda lotería p se cumple la ecuación (4).*

Prueba. Asumamos primero que la ecuación (4) se cumple para todas las loterías. Entonces, se cumple en particular para cualquier lotería que asigne probabilidades λ y $1-\lambda$ a x e y, por lo que la función debe ser cóncava.

Para ver el converso, recordamos que para las funciones cóncavas, la recta $y = m\left(x - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right)$ pasa por el punto $\left(E_p\left(x\right), u\left(E_p\left(x\right)\right)\right)$ y está siempre por encima de $u\left(x\right)$, cuando m es menor que la derivda por la izquierda de u, y mayor que la derivda por la derecha de u (las derivadas por izquierda y derecha siempre existen) en el punto $E_p\left(x\right)$. Es decir, para un m adecuado, para todo x,

$$m\left(x - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq u\left(x\right).$$

Para completar la demostración sólo hace falta tomar esperanzas con respecto a p en ambos lados de esa ecuación para obtener $u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq E_p\left(u\right)$. Eso es equivalente a hacer lo siguiente: si p le asigna probabilidades positivas a $x_1, x_2, ..., x_n$, reescribiendo la ecuación de arriba obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
m\left(x_1 - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq u\left(x_1\right) & \Rightarrow & m\left(p_1 x_1 - p_1 E_p\left(x\right)\right) + p_1 u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq p_1 u\left(x_1\right) \\
m\left(x_2 - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq u\left(x_2\right) & \Rightarrow & m\left(p_2 x_2 - p_2 E_p\left(x\right)\right) + p_2 u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq p_2 u\left(x_2\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
m\left(x_n - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq u\left(x_n\right) & \Rightarrow & m\left(p_n x_n - p_n E_p\left(x\right)\right) + p_n u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq p_n u\left(x_n\right) \\
\text{sumando la columna derecha} & : & u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq E_p\left(u\right)
\end{array}$$

como queríamos demostrar.■

En la demostración usamos que la cuerda $y = m\left(x - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right)$ está siempre por encima de $u\left(x\right)$, para m entre las derivadas por la izquierda y por la derecha de u. Si la derivada de u existe, $m = u'\left(E_p\left(x\right)\right)$, y la ecuación se transforma en

$$u'\left(E_p\left(x\right)\right)\left(x - E_p\left(x\right)\right) + u\left(E_p\left(x\right)\right) \geq u\left(x\right).$$

Para ver por qué es cierta esa afirmación, pongamos $E_p\left(x\right) = x_0$ para que quede

$$u\left(x\right) \leq u\left(x_0\right) + u'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \tag{5}$$

que se parece mucho a una expansión de Taylor. Recordemos que una versión de Taylor es que para todo x y x_0 (no para x cerca de x_0) y para algún x^* entre x y x_0,

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x^*)}{2}(x - x_0)^2.$$

Como u es cóncava, obtenemos $u'' \leq 0$, y por tanto se cumple la ecuación (5).
Comentario Jensen: El Teorema 7 está formulado en términos de una función cóncava, pero como u es cóncava si y sólo si $-u$ es convexa, la desigualdad de Jensen también nos dice que u es convexa si y sólo si $u(E(p)) \leq E_p(u)$.

Crítica D: Rabin, "Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem", Econometrica. Esta es una crítica a la utilidad esperada, y no al axioma de Independencia.

Aplicación B. Demanda de Activos Riesgosos. Hay un activo que cuesta 1 peso por cada unidad. Por cada unidad del activo que el inversor compre hoy, recibirá un retorno aleatorio, variable, de $\$z$ mañana. La variable z se distribuye de acuerdo a una probabilidad p. Sólo sabemos que el valor esperado de z, la cantidad promedio de dinero que dará, es mayor que 1, es decir, $E(z) > 1$. Cada peso no invertido en el activo puede ser guardado debajo del colchón hasta mañana, sin generar intereses. El que debe tomar la decisión de cuanto comprar posee una riqueza de $\$r$, y tiene una función de utilidad esperada $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, donde $u(x)$ es la utilidad del individuo de tener una riqueza de x mañana. La función u es diferenciable y cóncava: es averso al riesgo. Es común que la gente piense que con sólo esa información no se puede decir nada sobre si la persona invertirá algo, poco, mucho o nada en el activo riesgoso. Eso está mal. Con la información que poseemos, sabemos que el individuo invertirá seguro algo en el activo riesgoso.

El tomador de decisiones debe elegir la cantidad c de dinero para maximizar

$$\sum_i u(r - c + cz_i)\, p_i.$$

Para cada retorno z que pueda dar el activo, la riqueza mañana será $r - c$, que se guardó debajo del colchón, más cz que es el retorno del activo, multiplicado por la cantidad de unidades. Si tomamos las condiciones de primer orden obtenemos

$$\frac{d \sum_i u(r - c + cz_i)\, p_i}{dc} = \sum_i \frac{du(r - c + cz_i)\, p_i}{dc} = \sum_i u'(r - c + cz_i)(z_i - 1)\, p_i.$$

Si esta derivada es estrictamente positiva en $c = 0$, quiere decir que si la persona está evaluando invertir 0 en el activo riesgoso, puede aumentar su utilidad eligiendo algún $c > 0$. Vemos ahora que la última expresión, evaluada en 0 es

$$\sum_i u'(r)(z_i - 1)\, p_i = u'(r)\left(\sum_i z_i p_i - 1\right)$$

que es estrictamente positiva pues $\sum_i z_i p_i = E(z) > 1$, como queríamos demostrar.■

Ejercicio 8 Hay un activo que cuesta 1 peso por unidad invertida en el activo. El mismo da retornos de 2.5 y 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$. El individuo puede comprar cualquier proporción que quiera del activo (es decir, si quiere comprar un décimo, puede hacerlo, pagando $\frac{1}{10}$ pesos, y obtiene, en caso que el activo de el retorno positivo, $\frac{1}{4}$). Si su riqueza inicial es un peso, y su utilidad es

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Cuál es el valor esperado de la riqueza si se adquieren z unidades del activo? ¿Cuánto comprará del activo? ¿Hay algo "raro" en esto, dada la Aplicación 13?

Ejercicio 9 Hay un activo que cuesta \$1 por unidad. El activo valdrá v_i en el estado i de la naturaleza $(i = 1, ..., n)$. Para fijar ideas, supongamos que $v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n$. El estado i ocurre con probabilidad p_i, y asumimos que $E(v) > 1$. Un individuo tiene una riqueza inicial de w y una función de utilidad sobre niveles finales de riqueza z dada por $u(z) = z - az^2$, para $a > 0$. Asumimos que $wv_n \leq 1/2a$ (eso asegura que la función de utilidad sea creciente en todos los tramos relevantes).

Parte A. Encuentre la cantidad q óptima del activo que comprará el individuo.
Parte B. Defina $r_i = v_i - 1$, el retorno del activo (el valor, menos el precio). Escriba la cantidad óptima q hallada en la Parte A como función de la media del retorno, $\mu = E(r_i)$ y de la varianza del retorno, $\sigma^2 = E\left(r^2\right) - \left(E(r)\right)^2$.
Parte C. Calcule la derivada de q con respecto a μ,y verifique que podría haber dos activos, A y B tales que tuvieran la misma varianza, $\mu_A \geq \mu_B$ y sin embargo, el individuo demandara más de B que de A. ¿cómo es posible?

Aplicación C. Demanda de Seguros. Este ejemplo muestra la contracara de la Aplicación B. Esa decía que si era beneficioso tomar riesgos, el individuo iba a tomar algo, aunque fuera averso al riesgo. Esta dice que si existe un seguro con una prima "justa" el individuo se asegurará completamente.

El individuo posee una casa valuada en $\$D$, que puede quemarse con una probabilidad p, y pasar a valer $\$D - L$. La persona puede comprar tantas unidades como quiera, a un precio de $\$q$ por unidad, de un seguro que paga \$1 en caso de accidente, y 0 en caso contrario. Como hay competencia en el mercado de seguros, los beneficios esperados de las compañías son 0 :

$$q - p * 1 - (1 - p) * 0 = 0 \Leftrightarrow p = q.$$

¿Cuánto comprará el individuo de seguro si su función de utilidad esperada es tal que $u'' < 0$?

El individuo debe elegir x, la cantidad de unidades de seguro, para maximizar su utilidad esperada

$$pu(D - L + x - px) + (1 - p)u(D - px).$$

La condición de primer orden (como u es cóncava, es necesaria y suficiente) es

$$pu'(D - L - px + x)(1 - p) = (1 - p)u'(D - px)p \Leftrightarrow u'(D - L - px + x) = u'(D - px).$$

Como $u'' < 0$, eso implica que se debe cumplir que $D - L - px + x = D - px$ o lo que es lo mismo, $x = L$. Es decir, el individuo se asegura completamente. Otra forma fácil de ver que la solución es la propuesta, es ver que si el individuo compara asegurarse completamente con tomar un seguro con $x \neq L$, ambas loterías tienen la misma media, $D - pL$, pero una tiene riesgo y la otra no: para cada x, el valor esperado de la riqueza es

$$E(w) = p(D - L - px + x) + (1 - p)(D - px) = D - Lp.$$

Por definición de aversión al riesgo, el individuo preferirá el seguro total.

Otra forma de verlo, es pensando que la compañía de seguros ofrece dos niveles de riqueza al individuo, w_n en caso de *no* fuego, y w_f en caso de fuego. Es fácil ver que cada x que uno elige se tranforma en un par de niveles de riqueza w_n y w_f; pero también es cierto que se puede pasar de un "contrato" w_n, w_f a un x, notando que si uno elige un nivel de riqueza $w_n = w$, está eligiendo el x tal que $D - px = w \Leftrightarrow x = \frac{D-w}{p}$. Es decir, se puede pasar de un tipo de contrato al otro. Si la firma nos ofreciera contratos en la forma w_n, w_f, la condición de beneficio 0 sería que el individuo puede elegir los w_f y w_n que quiera, mientras cumplan $pw_f + (1-p)\, w_n = D - pL$. Graficando eso en un par de ejes con w_n en las abcisas y w_b en las ordenadas, queda como una restricción presupuestal. El individuo debe maximizar $pu\,(w_f) + (1-p)\, w_n$ sujeto a esa restricción, y se maximiza en $w_n = w_f$.

Ejercicio 10 Continuado de la Aplicación D. El individuo posee una casa valuada en $\$D$, que puede quemarse con una probabilidad p, y pasar a valer $\$D - L$. La persona puede comprar tantas unidades como quiera, a un precio de $\$q$ por unidad, de un seguro que paga \$1 en caso de accidente, y 0 en caso contrario. Asuma que $q > p$, y demuestre que el individuo no se asegurará completamente.

Aplicación E. La inflación es buena para las empresas. La función de beneficios es convexa, entonces la inflación es buena (volatilidad en los precios relativos no es mala, como dice la gente). Explicación: el dueño puede ser averso al riesgo, o hay monopolios. Que el dueño sea averso importa poco: si con mayor volatilidad aumenta el valor esperado de los beneficios, eso aumentará el valor de la firma, y el dueño podría vender la firma y ganar más (seguro, con la venta) que si se quedara con la firma. Que la firma sea un monopolio tampoco es una buena defensa de la aseveración "a las firmas no les gusta la volatilidad de precios": si la firma no es tomadora de precios no podés decir "A las empresas no les gusta que varíen los precios," y al mismo tiempo decir que "las empresas son monopolios y por lo tanto fijadoras de precios").

Ejercicio 11 Calcular las utilidades esperadas de cada función de utilidad, con cada una de las distribuciones. Algunas utilidades esperadas pueden no existir. Indique cuáles.

	$u\,(x)$	*distribución*	*distribución*
a.I	x^a para $a \in [0,1]$	uniforme en $[0,1]$	$p\,(0) = \alpha, p\,(1) = 1-\alpha$
a.II	$\log x$	uniforme en $[0,1]$	$p\,(0) = \alpha, p\,(1) = 1-\alpha$
a.III	$ax + b$	uniforme en $[0,1]$	$p\,(0) = \alpha, p\,(1) = 1-\alpha$
a.IV	$-x + 1$	uniforme en $[0,1]$	$p\,(0) = \alpha, p\,(1) = 1-\alpha$
a.V	$-x^{-1}$	uniforme en $[0,1]$	$p\,(0) = \alpha, p\,(1) = 1-\alpha$

Antes de pasar a la siguiente aplicación, daremos la definición de lo que significa que un individuo sea más averso al riesgo que otro.

Definición. Una relación de preferencias $\succeq_2$ es **más aversa al riesgo** que la relación de preferencias $\succeq_1$ si siempre que $p \succeq_2 \delta_{\overline{x}}$, tenemos que $p \succeq_1 \delta_{\overline{x}}$. Es decir, podemos decir que Woody Allen es más averso al riesgo que Schwarzenegger si siempre que Woody Allen elige algo riesgoso sobre algo sin riesgo, Schwarzenegger también elige la alternativa riesgosa.

Esta formulación parece bastante intuitiva, pero no muy útil. Además, uno podría pensar que hay otras condiciones que también parecen razonables, y que parecen más útiles. Por ejemplo, damos dos ahora.

Condición A. Para preferencias $\succeq_1$ y $\succeq_2$ que tienen funciones de utilidad u_1 y u_2, decimos que u_2 es más cóncava que u_1 si existe una función cóncava y creciente f tal que $u_2\,(x) = f\,(u_1\,(x))$. Como habíamos asociado concavidad a aversión al riesgo, esta parece una condición razonable.

Condición B. Definimos el coeficiente de aversión al riesgo de Arrow y Pratt como

$$r\,(x) = -\frac{u''\,(x)}{u'\,(x)}.$$

Decimos que u_2 es más aversa al riesgo que u_1 si para todo x, $-\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} \geq -\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)}$.

Si la curvatura es una señal de aversión al riesgo, cuanto más curva u, más grande $-u''$, y más grande $r(x)$. La razón para dividir entre u', es que u'' depende de la representación que elijamos para $\succeq$: por ejemplo, según el teorema de la utilidad esperada, tanto $u(x) = \sqrt{x}$ como $v(x) = 2\sqrt{x}$ representan a las mismas preferencias. Si el coeficiente de aversión al riesgo fuera sólo $-u''$, obtendríamos que el coeficiente de aversión al riesgo de v sería mayor que el de u, lo cual no tendría demasiado sentido, porque son las mismas preferencias. Al dividir entre u' se arregla ese problema.

Por suerte, otra vez, la definición de "más averso al riesgo" es equivalente a las Condiciones A y B.

Teorema 12 *Asuma que las relaciones de preferencias $\succeq_1$ y $\succeq_2$ se pueden representar por funciones de utilidad u_1 y u_2 con derivadas segundas negativas. La relación de preferencias $\succeq_2$ es más aversa al riesgo que $\succeq_1$ si y sólo si $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x, si y sólo si existe una función cóncava f tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$.*

El siguiente ejercicio pide la demostración de una de las "flechitas" (Definición $\Leftrightarrow$ Condición A $\Leftrightarrow$ Condición B: habría que demostrar 2 flechitas. La forma habitual es hacer Definición $\Rightarrow$ Condición A $\Rightarrow$ Condición B $\Rightarrow$ Definición. Con eso nos ahorramos de hacer las otras flechitas).

Ejercicio 13 Deberes. Muestre que si $u_2 = f(u_1)$, para f cóncava y creciente, entonces $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x.

Otra de las cosas relativamente fáciles de demostrar del Teorema es el objeto del siguiente ejercicio.

Ejercicio 14 Si $u_2 = f(u_1)$ para f cóncava y creciente, entonces las preferencias $\succeq_2$ representadas por u_2 son más aversas al riesgo que las preferencias $\succeq_1$ representadas por u_1.

Como siempre, para que las definiciones tengan algún sentido, deben tener alguna implicación testeable que sea razonable. Por ejemplo, si digo que Juan es más averso al riesgo que Pedro, debería suceder que, a igualdad de otras cosas, Pedro invierte más en un activo riesgoso que Juan. La próxima aplicación demuestra precisamente eso.

Aplicación F. Como en la Aplicación B, hay un activo que cuesta 1 peso por cada unidad. Por cada unidad del activo que el inversor compre hoy, recibirá un retorno aleatorio, variable, de \$$z$ mañana. La variable z se distribuye de acuerdo a una probabilidad p con $E_p(z) > 1$. Sean u_1 y u_2 tales que u_2 es más aversa al riesgo que u_1, es decir, $u_2 = f(u_1)$ para f cóncava. Sea c_k la cantidad que resuelve el problema de elegir c para maximizar

$$v_k(c) = \sum_i u_k(r - c + cz_i)\, p_i. \tag{6}$$

Para que la definición de "más averso al riesgo" tenga algo de sentido en términos de comportamiento, debería suceder que, como u_2 es más averso al riesgo que u_1, c_2 debería ser más chico que c_1. En particular, debería suceder que $v_2'(c_1)$ sea negativo. Eso quiere decir que si al individuo 2 le preguntamos "¿cómo te sentís invirtiendo lo mismo que el superarriesgado individuo 1?" él nos contesta "mal, me doy cuenta que invirtiendo un poco menos en el activo riesgoso estoy más contento". Demostraremos entonces que $v_2'(c_1) \leq 0$.

En la demostración precisaremos usar que, como f' es decreciente,

$$f'(u_1(r + c_1(z-1)))(z-1) \leq f'(u_1(r))(z-1) \tag{7}$$

pues

$$\begin{array}{rll} z>1\Rightarrow & u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\geq u_1\left(r\right)\Rightarrow & f'\left(u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\right)\leq f'\left(u_1\left(r\right)\right) \\ z<1\Rightarrow & u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\leq u_1\left(r\right)\Rightarrow & f'\left(u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\right)\geq f'\left(u_1\left(r\right)\right) \end{array}$$

y en ambos casos se obtiene la ecuación (7).

La condición de primer orden para el individuo 1 en el problema (6) es

$$v_1'\left(c_1\right)=Eu_1'\left(r-c_1+c_1z\right)\left(z-1\right)=0$$

y tenemos que v_2' evaluada en c_1 es

$$\left.\frac{dv_2}{dc}\right|_{c_1}=\left.\frac{dEf\left(u_1\left(r-c+cz\right)\right)}{dc}\right|_{c_1}=E\left[f'\left(u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\right)u_1'\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\left(z-1\right)\right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} v_2'\left(c_1\right) &= E\left[f'\left(u_1\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\right)u_1'\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\left(z-1\right)\right]\leq E\left[f'\left(u_1\left(r\right)\right)u_1'\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\left(z-1\right)\right] \\ &= f'\left(u_1\left(r\right)\right)E\left[u_1'\left(r+c_1\left(z-1\right)\right)\left(z-1\right)\right]=f'\left(u_1\left(r\right)\right)*0=0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.■

La última aplicación de utilidad esperada que consideraremos es al problema de analizar cómo cambia el ahorro de una persona en el primer período de su vida si aumenta la incertidumbre respecto a los ingresos en el segundo período de su vida.

Aplicación G. Un individuo recibe riquezas w_0 y w_1 en los períodos 0 y 1 de su vida. Debe decidir sólo cuánto ahorrar, o pedir prestado, en el primer período de su vida, para maximizar su utilidad. La tasa de interés es r y asumiremos que la utilidad se puede escribir como u_0+u_1 para u_0 y u_1 cóncavas. El problema es entonces el de elegir el ahorro s para maximizar

$$v\left(s\right)=u_0\left(w_0-s\right)+u_1\left(w_1+s\left(1+r\right)\right).$$

Por la concavidad de las u, la condición de primer orden es necesaria y suficiente para encontrar el s óptimo:

$$v'\left(s^*\right)=0\Leftrightarrow u_0'\left(w_0-s^*\right)=u_1'\left(w_1+s^*\left(1+r\right)\right)\left(1+r\right)$$

Supongamos ahora que en vez de ser la riqueza del segundo período un número cierto w_1, es w_1+z, donde z es aleatorio, y $Ez=0$. En ese caso, el individuo debe elegir s para maximizar

$$V\left(s\right)=u_0\left(w_0-s\right)+Eu_1\left(w_1+z+s\left(1+r\right)\right).$$

Otra vez, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes. El individuo incrementará su ahorro con incertidumbre si y sólo si $V'\left(s^*\right)\geq 0$; la utilidad marginal de ahorrar lo mismo que cuando no había incertidumbre. Eso se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} u_0'\left(w_0-s^*\right) &\leq Eu_1'\left(w_1+z+s^*\left(1+r\right)\right)\left(1+r\right)\Leftrightarrow \\ u_1'\left(w_1+s^*\left(1+r\right)\right)\left(1+r\right) &\leq Eu_1'\left(w_1+z+s^*\left(1+r\right)\right)\left(1+r\right)\Leftrightarrow \\ u_1'\left(w_1+s^*\left(1+r\right)\right) &\leq Eu_1'\left(w_1+z+s^*\left(1+r\right)\right) \end{aligned}$$

que se cumple si y sólo si u_1' es convexa (ver Comentario Jensen). Es decir, el individuo aumenta su ahorro cuando aumenta la incerticumbre ($V'\left(s^*\right)\geq 0$) si y sólo si u_1' es convexa. Entonces, se dice que el individuo es prudente si u_1' es convexa.

Ejercicio 15 Deberes. Supongamos que tengo $W = 100$ dólares para invertir en dos activos. Por cada dólar que invierto en la fábrica de Paraguas gano \$10 si el año es lluvioso y \$3 si el año es seco. Por cada dólar que invierto en la fábrica de Helados gano \$2 si el año es lluvioso y \$9 si es seco. El año es lluvioso con probabilidad 0.5 y seco con 0.5. Mi función de utilidad esperada es $u(x) = \sqrt{x}$ cuando mi riqueza final es x. Supongamos que invierto una fracción λ de mi riqueza en Paraguas y el resto en los Helados.

Parte A. ¿Cuál es el valor de λ que maximiza el retorno esperado?

Parte B. ¿Cuál es el valor de λ que maximiza mi utilidad esperada?

Ejercicio 16 Deberes. Suponga que la relación de preferencias $\succeq$ definida en el conjunto P de distribuciones de probabilidad sobre $X = \{1, 2, 3\}$ es completa, transitiva y satisface continuidad. Para todo $p \in P$,

$$p = (a, b)$$

querrá decir que la probabilidad que p le asigna a 1 es a, y a 2 es b. Si la relación de preferencias es tal que

$$(0,1) \succ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ y además } \left(\frac{3}{4}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

¿puede satisfacer independencia?

Ejercicio 17 Sea $X = \{0, 200, 1.200, x_L, x_M\}$ y sea P el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X. Sean las loterías (distribuciones de probabilidad)

$$L = \begin{cases} 200 & \text{dólares con probabilidad } 0,7 \\ 0 & \text{dólares con probabilidad } 0,3 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} 1.200 & \text{dólares con probabilidad } 0,1 \\ 0 & \text{dólares con probabilidad } 0,9 \end{cases}$$

y sean x_L y x_M las cantidades de dinero que son indiferentes a L y M respectivamente. Diremos que una relación de preferencias $\succeq$ en P es monótona si para todo $x, y \in X$, la lotería que le asigna probabilidad 1 a x es estrictamente preferida a la lotería que le asigna probabilidad 1 a y si y sólo si $x > y$. Demostrar que si las preferencias son transitivas y monótonas, $L \succ M \Leftrightarrow x_L > x_M$. (En la solución no tendrán que usar las formas específicas de L y M, pero el punto es que en experimentos mucha gente revela con sus elecciones que $L \succ M$, pero $x_L < x_M$).

Ejercicio 18 Suponga que X, el espacio de los premios, es $X = \{1, 2, 3\}$ y que $\delta_2 \sim \frac{3}{4}\delta_3 + \frac{1}{4}\delta_1$. Si existe una función de utilidad u tal que

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum_x u(x)\, p(x) \sum_x u(x)\, q(x)$$

encuentre α para que la lotería $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim \alpha\delta_3 + (1-\alpha)\,\delta_1$.

Ejercicio 19 . Un consumidor tiene una función de utilidad dada por $u(w) = \ln w$. Se le ofrece una apuesta que le dejará una riqueza final de w_1 con probabilidad p y w_2 con probabilidad $1 - p$. ¿Cuál es el nivel de riqueza w que lo deja indiferente entre tener una riqueza w y aceptar la apuesta?

Ejercicio 20 Sea $X = \{a, b, c\}$ y sea $\succeq$ en P (el conjunto de probabilidades sobre X) dada por

$$p \succeq q \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_c < q_c \\ o \\ p_c = q_c \text{ y } p_b \leq q_b \end{array} \right\}.$$

La interpretación es que c es muy malo y que a es mejor que b. Con argumentos similares a los utilizados para demostrar que las preferencias lexicográficas no tenían una función de utilidad, se puede demostrar que estas preferencias tampoco tienen una función de utilidad. Por tanto, no tienen una función de utilidad esperada, y ello significa que deben violar alguno de los siguientes axiomas: completas; transitivas; continuas; independencia. Determine cual o cuáles satisface y cual o cuáles viola.

Ejercicio 21 Sea $X = \{a, b, c\}$ y sea P el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X. Suponga que $p = (p_a, p_b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (q_a, q_b) = q$, y que $\succeq$ satisface independencia. Cuáles de las siguientes alternativas son Verdaderas, Falsas, o Imposibles de determinar con la información dada:

(i) $\delta_a \succeq p$

(ii) $\delta_a \succeq q$

(iii) $\delta_b \sim p$

(iv) $\left(\frac{1}{4}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

Ejercicio 22 Deberes. El temeroso. Un individuo se va a ir a estudiar un doctorado a Estados Unidos. Al terminar tendrá tres opciones: volver (v), irse a Europa (e) o quedarse en Estados Unidos (q). Él sabe que las preferencias de la gente cambian con el tiempo, y evalúa que sus utilidades posibles al terminar son u y w, que vienen dadas por: $u(v) = 1$, $u(e) = 2$ y $u(q) = 3$ o $w(v) = 3$, $w(e) = 2$ y $w(q) = 1$. Para irse a estudiar, precisa elaborar una propuesta de trabajo, y cada propuesta genera una distribución de probabilidades sobre v, e y q (por ejemplo, si en la propuesta el individuo dice que va a estudiar las causas de la pobreza en Uruguay, la probabilidad de conseguir trabajo en Europa o Estados Unidos son 0, por lo que volverá seguro). Como el individuo es muy temeroso, y piensa que la naturaleza le jugará una mala pasada con la elección de sus preferencias en el futuro, evalúa la utilidad de cada distribución de probabilidades $p = (p_v, p_e, p_q)$ con la fórmula

$$U(p) = \min\{p_v u(v) + p_e u(e) + p_q u(q), p_v w(v) + p_e w(e) + p_q w(q)\}.$$

Parte A. Calcule las utilidades de las loterías $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Parte B. Grafique la curva de indiferencia que pasa por la lotería que es degenerada en e, y grafique la curva de indiferencia que pasa por la lotería $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Parte C. Diga (no demuestre) cuáles de los axiomas del teorema de la utilidad esperada satisfacen las preferencias de este individuo, y si se viola alguno, demuestre con un ejemplo porqué se viola.

Ejercicio 23 Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\succeq$ definida sobre $P(X)$. Sea $u : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum u(x) p(x) \geq \sum u(x) q(x)$$

y tal que $u(1) = 1$, $u(2) = 3$ y $u(3) = 5$. Para las siguientes funciones de utilidad $u_i : X \to \mathbf{R}$ determine si: u_i también representa a $\succeq$; si u_i no representa a $\succeq$; no se puede saber si u_i representa a $\succeq$.

$$\begin{aligned} u_1(1) &= 1, u_1(2) = 2, u_1(3) = 5. \\ u_2(1) &= 1, u_2(2) = 5, u_2(3) = 9. \end{aligned}$$

Ejercicio 24 Deberes. Sean $u(x) = -e^{-x}$ y $v(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$, para $a \in (0, 1)$, dos funciones de utilidad esperada definidas sobre $X = \mathbf{R}_+$. ¿Se puede decir que las preferencias representadas por u son más aversas al riesgo que las representadas por v? ¿Y lo contrario?

Ejercicio 25 Sea $X = \{1, 2, 3\}$, y suponga que para cada $p = (p_1, p_2, p_3) \in P$, p_i es la probabilidad que p le asigna a que salga el número i. Suponga además que $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$ y las preferencias $\succeq$ satisfacen independencia.

Parte A. Si $\delta_2 \sim \frac{2}{3}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_1$, encuentre el número α tal que $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \sim \alpha\delta_3 + (1 - \alpha)\delta_1$.

Parte B. Si las preferencias son transitivas, ¿cuál de las siguientes aseveraciones es cierta: $\delta_2 \succ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, o $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \succ \delta_2$?

Ejercicio 26 Deberes. Hay un activo que cuesta \$1 por cada unidad comprada y, por cada unidad, da retornos de \$0, \$1 y \$2 con probabilidades $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Una persona con una riqueza inicial de $\$r$ intenta decidir cuánto invertir en ese activo y cuánto poner debajo del colchón. Su función de utilidad es $u(x) = x^a$ para $a \in (0, 1)$.

Parte A. Muestre que la persona invertirá

$$c^* = r\frac{2^{\frac{1}{1-a}} - 1}{2^{\frac{1}{1-a}} + 1}$$

en el activo riesgoso, y que pondrá $w - c^*$ debajo del colchón.

Parte B. Muestre que cuanto más chico es a, menos se invierte en el activo riesgoso.

Parte C. Muestre de al menos dos formas que cuanto más chico es a, más aversa al riesgo es la persona.

Ejercicio 27 Sea $u(x)$ una función de utilidad con $u'' < 0$.. Hay un activo z que se rinde $M > 0$ o 0 con probabilidad 1/2 cada uno, por unidad de dinero invertida. El individuo puede invertir la proporción que desee de su riqueza w en el activo, y el resto lo puede poner debajo del colchón.

Parte A. Si $M = 2$, ¿Cuanto invertirá en z?

Parte B. Si $M > 2$, y $u(x) = -e^{-rx}$, ¿Cuánto invertirá en z?

Parte C. ¿Cómo cambia su demanda cuando cambian r y M? Sin hacer los cálculos en la Parte B, ¿sabemos algo sobre cómo cambia la demanda cuando cambia r?

Ejercicio 28 Mostrar que si para todo $t \in P$, $U_t = \{p : p \succeq t\}$ y $L_t = \{p : t \succeq p\}$ son cerrados, entonces $\succeq$ es continua. Es decir, el axioma de continuidad que usamos antes (en las notas de preferencias y utilidad) es más fuerte que el que estamos usando en estas notas.

Ejercicio 29 Deberes. Sea z un activo que se distribuye uniformemente en $[0,2]$, y que cuesta \$1 por unidad invertida. Sea $w = 2$ la riqueza inicial, y sea $u(x) = -x(x-20)$ la utilidad si la riqueza final es x.

Parte A. Encuentre la inversión óptima. Explique.

Parte B. Encuentre la inversión óptima si z se distribuye uniformemente en $[0,3]$.

Ejercicio 30 Deberes. Muestre que para una función de utilidad dada por $u(x) = -e^{-ax}$, si una lotería es mejor que otra para una riqueza inicial w, entonces sigue siendo mejor para cualquier otro nivel inicial de riqueza $w' \neq w$. Es decir, suponga que la lotería π arroja premios $x_1, ..., x_n$ con probabilidades $\pi_1, ..., \pi_n$ y que la lotería ρ arroja los mismos premios con probabilidades $\rho_1, ..., \rho_n$. Muestre que si π es mejor que ρ para el nivel de riqueza inicial w, entonces sigue siendo mejor que ρ para cualquier otro nivel de riqueza inicial w'. Como el nivel de riqueza inicial no afecta las actitudes frente al riesgo de quienes tienen esta función de utilidad, se las llama de aversión al riesgo constante. Para verificar que el nombre tiene sentido, calcule el coeficiente de aversión al riesgo de esta utilidad, y verifique que no depende del nivel de riqueza.

Ejercicio 31 Hay una lotería que arroja un pago Alto, A, con probabilidad p, y uno Bajo, B, con probabilidad $1-p$. El individuo posee una riqueza inicial w y tiene una función de utilidad esperada u.

Parte A. Encuentre el precio π más chico al cual el individuo estaría dispuesto a vender la lotería, si fuera el dueño.

Parte B. Encuentre el precio π más alto que estaría dispuesto a pagar por la lotería si no fuera el dueño.

Parte C. ¿Por qué no son iguales los precios? Argumente que es por el efecto de la riqueza inicial sobre la aversión al riesgo. ¿Bajo qué condiciones sobre A, B, p y u son iguales?

Parte D. Sean $A = 25$, $B = 7$, $w = 9$, $p = 1/2$ y $u(x) = \sqrt{x}$. Calcule los precios de compra y venta para este caso. Verá que es más grande el de la Parte A que el de la Parte B, y eso es porque esta utilidad, y cualquiera de la forma x^a tienen aversión al riesgo decreciente en x (Verifíquelo).

Parte E. Sean $A = 25$, $B = 7$, $w = 9$, $p = 1/2$ y $u(x) = -e^{-x}$. Calcule los precios de compra y venta para este caso.

Ejercicio 32 Suponga que $X = \{1,2,3\}$ y sea $P = \left\{p \in \mathbf{R}^3_+ : \sum p_i = 1\right\}$. El individuo tiene preferencias $\succeq \subset P \times P$ que satisfacen independencia y son transitivas. El vector $p \in P$ le asigna una probabilidad p_1 a 1, p_2 a 2 y $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ a 3. Asuma que

$$\delta_3 = (0,0,1) \succ (0,1,0) = \delta_2 \sim \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right).$$

Parte A. Muestre que las preferencias del individuo son completas.

Parte B. Encuentre una vector $u \in \mathbf{R}_+^3$ (una función de utilidad) que represente a las preferencias: $p \succeq q \Leftrightarrow \sum p_i u_i \geq \sum q_i u_i$. Pista: fíjese en la demostración del teorema de von Neumann y Morgenstern qué utilidad se le asigna a cada lotería, y trate de construir la utilidad en este caso de la misma forma. En particular, encuentre $U(\delta_i)$ para $i = 1, 2, 3$, y luego observe que

$$\begin{aligned} U(p) &= U\left(p_1(1,0,0) + (1-p_1)\left(0, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}\right)\right) = p_1 U(\delta_1) + (1-p_1) U\left(0, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}\right) \\ &= p_1 U(\delta_1) + (1-p_1) U\left(\frac{p_2}{1-p_1}(0,1,0) + \frac{p_3}{1-p_1}(0,0,1)\right) = p_1 U(\delta_1) + p_2 U(\delta_2) + p_3 U(\delta_3) \end{aligned}$$

Ejercicio 33 Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea

$$P = \left\{ p \in \mathbf{R}^3 : p_i \in [0,1] \text{ para todo } i, \text{ y } \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \right\},$$

con la interpretación que p_1 es la probabilidad que p le asigna a 1, p_2 la probabilidad de 2, y p_3 la probabilidad de 3. Suponga que unas preferencias $\succeq$ sobre P satisfacen independencia. Suponga que

$$\delta_2 = (0,1,0) \sim \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Parte A. Asuma que existe $u \in \mathbf{R}^3$ tal que $p \succeq q \Leftrightarrow u.p = \sum u_i p_i \geq \sum u_i q_i = u.q$, y utilizando esta función de utilidad muestre que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \sim \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

Parte B. Usando sólo el axioma de independencia muestre que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \sim \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 34 Calcule la utilidad esperada de un individuo que: tiene una riqueza inicial de $r = 10$; que compra 2 unidades de un activo que cuesta \$1 por unidad; que ese activo tiene un retorno aleatorio de z, por cada unidad comprada, con $z \in \mathbf{R}_+$; que z tiene una densidad dada por

$$f(z) = 2e^{-2z};$$

y la función de utilidad del individuo, para una riqueza final de w es $-e^{-3w}$.

Ejercicio 40. There are three prizes an individual can receive $x_1 = \$1$, $x_2 = \$4$ and $x_3 = \$9$.

Part A. 4% If we set $U(x_1) = 0$ and $U(x_3) = 1$, what is $U(x_2)$ according to the Von Neumann Morgenstern construction of utilities?

Part B. 4% If the individual had to pay \$4 to participate in a bet that would give \$1 with probability $\frac{5}{8}$ and \$9 with probability $\frac{3}{8}$, would that bet be actuarially fair?

Part C. 4% Suppose the individual's initial wealth is \$4, and that he has a utility function $U(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$. Would he take the bet in Part B?

Part D. 6% Suppose the individual with utility $\sqrt{x}$ has a car worth \$9 (and no other wealth) which would be worth \$1 if it caught fire, and assume that the probability of fire is 5/8. What would be a fair price for the insurance, and how much would the individual be willing to pay?

Ejercicio 41: Suponga que un agente, con utilidad sobre la riqueza $u(w) = w^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ va a un casino a jugar a la ruleta. Suponga que puede jugar a cualquiera de los juegos de la ruleta una cantidad $z \in [0, +\infty)$. (es decir, no es discreto: si quisiera, podría jugar π pesos, o $\sqrt{2}$ pesos). También implica que el individuo no tiene cota para endeudarse: puede jugar todo lo que quiera. Se supone que la ruleta tiene 0 y 00 entre las posibilidades.

Parte A. Sabiendo que la casa paga 36 a 1 lo apostado a un numero cualquiera: ¿cual es la apuesta óptima del agente dependiendo del parámetro α ?

Parte B. Sabiendo que la casa paga 2 a 1 lo apostado a color: ¿cual es la apuesta óptima del agente dependiento del parámetro α?

Parte C. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente presenta aversión al riesgo

Parte D. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente es amante del riesgo (es decir, su función de utilidad es convexa)

Parte E. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente es neutral al riesgo (es decir, su función de utilidad es convexa y cóncava)

Parte F ¿Que relación encuentra entre los resultados de las partes A y B con las partes C a E?

Ejercicio 42 Sea $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad sobre estados, definida sobre niveles de riqueza.

Parte A. Pruebe que si u es de la forma: $u(x) = \alpha x + \beta$, entonces, para toda distribución de probabilidades F (continua o discreta) sobre la variable aleatoria X (definida como riqueza) se cumple que:

$$\mathbb{E}_F(u(X)) = u(\mathbb{E}_F(X))$$

A este tipo de funciones se les llama **funciones afines** y a agentes que presentan funciones lineales o afines se los llama **neutrales al riesgo**. Interprete esta definición.

Parte B. En general, se define función lineal a aquella que, dados $x, y \in \mathbb{R}_+$ cumple que:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda y)) = \lambda u(x) + (1 - \lambda) u(y) \qquad \text{para todo } \lambda \in [0, 1]$$

Pruebe que si u es diferenciable dos veces, si u es lineal, obtenemos que $u'' = 0$. (**Sugerencia:** pruebe que este tipo de funciones de utilidad son de agentes tanto amantes del riesgo como aversos al riesgo)

Parte C. Asumiendo que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pruebe que si u no es afín, entonces existe una distribución F_u tal que

$$\mathbb{E}_{F_u}(u(X)) \neq u(\mathbb{E}_{F_u}(X))$$

(**Sugerencia:** Estudie el significado de que una función no sea afín, e intente encontrar una distribución F_u discreta)

Ejercicio 43. Hay un agente con función de utilidad sobre la riqueza $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con u diferenciable dos veces (es decir, existen u' y u'') tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$. Suponga ademas, que el individuo cuenta con una riqueza fija w. Suponga ahora que se le presenta la siguiente lotería:

$$\begin{cases} \text{gana } 100\varepsilon\% \text{ de } w & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}+\pi \\ \text{pierde } 100\varepsilon\% \text{ de } w & \text{con probabilidad } \frac{1}{2}-\pi \end{cases}$$

Parte A. Sea W la riqueza esperada de enfrentar esta lotería. Pruebe que $\mathbb{E}(W) = w(1+2\pi\varepsilon)$. Usando esto, pruebe que $\mathbb{E}(W) \to w$ cuando $\varepsilon \to 0$.También vea que si $\pi = 0$ entonces $\mathbb{E}(W) = w$. Interprete.

Definimos **premio en probabilidad relativo por riesgo** a la probabilidad $\pi(\varepsilon)$ que depende de la cantidad que puede ganar (o perder) a aquella probabilidad que hace que el individuo sea indiferente entre tomar la loteria y quedarse con la riqueza w. Esto es, $\pi(\varepsilon)$ se define **implícitamente** a partir de la siguiente ecuación:

$$u(w) = \left[\frac{1}{2} + \pi(\varepsilon)\right] u[w(1+\varepsilon)] + \left[\frac{1}{2} - \pi(\varepsilon)\right] u[w(1-\varepsilon)]$$

Parte B. Si el agente es averso al riesgo, argumente (con palabras) porque debería suceder que $\pi(\varepsilon) \geq 0$ para todo $\varepsilon > 0$

Parte C. Pruebe que $\pi(0) = 0$. Para esto, diferencie ambos lados de la igualdad respecto de ε y pruebe que:

$$\pi(\varepsilon)\{u'(w(1+\varepsilon)) + u'(w(1-\varepsilon))\} w + \pi'(\varepsilon)\{u(w(1+\varepsilon)) - u(w(1-\varepsilon))\} + \frac{1}{2}[u'(w(1+\varepsilon)) - u'(w(1-\varepsilon))] w = 0$$

Y luego valúe esta igualdad en $\varepsilon = 0$

Parte D. Pruebe que $\pi'(0) = -\alpha \frac{u''(w)w}{u'(w)} = \alpha\sigma(w)$ con $\sigma(w)$ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt y $\alpha \in \mathbb{R}$ (**Sugerencia:** diferencie la igualdad encontrada en el punto anterior y valúela luego en $\varepsilon = 0$. No se asusten: son muchos terminos, pero cuando $\varepsilon = 0$ luego son facilmente simplificables). Esto nos dice que el coeficiente de aversión relativa al riesgo mide la tasa a la cual el premio en probabilidad relativo por riesgo crece cuando estamos en situaciones con poco riesgo (medidos por ε)

Ejercicio 44 (Mas Collel). Pruebe las siguientes afirmaciones:
Parte A. Una función de utilidad sobre estados $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente, tiene coeficiente de aversión relativa al riesgo $\sigma = -\frac{u''(x)}{u'(x)}x$ constante para todo $x \in \mathbb{R}_+$ si y solo si $u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$ con $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$

Parte B. Una función de utilidad sobre estados $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente, tiene coeficiente de aversión relativa al riesgo constante e igual a 1 para todo $x \in \mathbb{R}_+$ si y solo si $u(x) = \beta \ln(x) + \gamma$ con $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$
Parte C. $\lim_{\rho \to 1} \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} = \ln(x)$ para todo $x > 0$.

Sugerencias: Para las Partes A y B utilice lo que conoce de resolución de ecuaciones diferenciales, de matematica 3. Para la Parte C utilice la regla de L'Hopital, que dice que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejercicio 45 (Mas Collel) Sea $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad de estados sobre riqueza, con la forma:

$$u(x) = \beta x^2 + \gamma x$$

Parte A. Pruebe que la utilidad esperada para cualquier distribución F depende unicamente del valor esperado de la riqueza bajo $F, \mathbb{E}_F(X)$ y de su varianza, $\mathbb{V}_F(X)$.

Parte B ¿Para que valores de x y valores de los parametros β y γ es la función de utilidad creciente y cóncava?

Ejercicio 47. Suponga que el espacio de estados es $X = \mathbb{R}_+^2$. Es decir, los estados son las posibles canastas de consumo . Suponga que la función de utilidad sobre estados es una Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. Suponga que los precios de los bienes son $p_1, p_2 > 0$ y que el ingreso es $w > 0$.

Parte A. Pruebe que la solución de problema del consumidor, sin incertidumbre, consiste en elegir consumos óptimos (x_1^*, x_2^*) tales que

$$x_1^* = \alpha \frac{w}{p_1} \text{ y } x_2^* = (1-\alpha)\frac{w}{p_2}$$

Parte B. Suponga que ahora, el agente no puede comprar directamente los bienes, sino que puede comprar activos A_1 y A_2 tales que si compro z_1 unidades del activo A_1, obtengo $z_1 X_1$ unidades del bien 1, con X_1 una variable aletoria que toma valores positivos. De la misma manera, si compro z_2 unidades del activo A_2, obtengo $z_2 X_2$ unidades del bien 2, con X_2 otra variable aleatoria que toma también valores positivos. El vector aleatorio (X_1, X_2) tiene densidad $f(x_1, x_2)$ con $f(x_1, x_2) > 0$ siempre que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Es decir:

$$(X_1, X_2) \sim f(x_1, x_2)$$

Cada unidad del activo A_1 cuesta q_1 pesos y cada unidad del activo A_2 cuesta q_2 pesos. explique con palabras, que el problema a resolver es el de elegir z_1, z_2 para maximizar

$$\begin{array}{rl} & \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u(z_1x_1, z_2x_2) f(x_1x_2)\, dx_1 dx_2 \\ \text{sujeto a} \quad : & q_1 z_1 + q_2 z_2 \leq w \end{array}$$

Parte C. Suponiendo que existe la esperanza de la variable aleatoria $H = X_1^\alpha X_2^{1-\alpha} = u(X_1, X_2)$, pruebe que, para el caso de $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ se cumple que:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u(z_1x_1, z_2x_2) f(x_1x_2)\, dx_1 dx_2 = u(z_1, z_2)\,\mathbb{E}[u(X_1, X_2)] = u(z_1, z_2)\,\mathbb{E}(H)$$

Parte D. Utilizando la parte anterior, y sin resolver explícitamente el problema, pruebe que la solución al problema planteado en la Parte B consiste en elegir cantidades de activos (z_1^*, z_2^*) tales que:

$$z_1^* = \alpha \frac{w}{q_1} \text{ y } z_2^* = (1-\alpha)\frac{w}{q_2}$$

Parte E. Resuelva el mismo problema cuando $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con

$$\begin{aligned} X_1 &\sim U[0,1] \\ X_2 &\sim U[0,2] \end{aligned}$$

Interprete.

Ejercicio 35 Deberes (basado en Mas-Collel) Suponga que una agencia de seguridad nacional esta pensando en establecer un criterio bajo el cual un área que es suceptible de enfrentar huracanes sea evacuada o no. La probabilidad de que haya un huracán es de 1%. Hay 4 posibles resultados:

1. No es necesario envacuar la ciudad (no hay huracán) y no se realiza la evacuación (que llamaremos escenario A)

2. No es necesario evacuar (no hay huracán) y se realiza una evacuación innecesaria (que llamaremos escenario B)

3. Es neceasario evacuar (hay huracán) y se hace la evacuación (que llamaremos escenario C)

4. Es necesario evacuar, pero no se realiza una evacuación (que llamaremos escenario D)

Suponga que la agencia está indiferente entre el escenario B y una loteria que con probabilidad 0.9 da el escenario A y con probabilidad 0.1 da el escenario D. También suponga que la agencia esta indiferente entre el escenario C y una lotería que con probabilidad 0.95 da el escenario A y con probabilidad 0.05 da el escenario D. Suponga también que las preferencias son tales que el escenario A es estrictamente preferido al escenario D (y ademas, son el mejor y el peor) y que las preferencias sobre loterias sobre los estados son tales que se cumplen los supuestos del teorema de Von Neumman y Morgenstern.

Parte A. Construya una función de utilidad sobre estados para calcular la utilidad esperada de la agencia (Sugerencia: Siempre se puede suponer que la utilidad de la peor lotería degenerada es 0 y que la utilidad de la mejor loteria degenerada es 1)

Parte B. Considere los siguientes criterios:

- Criterio 1: Se evacúa el 90% de los casos en los que un huracán pasa por la ciudad; si no hay huracán, se evacúa en el 10% de los casos;

- Criterio 2: Se evacúa el 95% de los casos en los que un huracán pasa por la ciudad; si no hay huracán, se evacúa en el 15% de los casos.

Derive las distribuciones de probabilidad de los 4 escenarios bajo ambos criterios, y en base a la Parte A encuentre cual de los dos criterios debería ser escogido por la agencia.

Ejercicio 48 (Basado en Mas Collel) El siguiente ejercicio es un argumento por el cual a veces se pide que la función de utilidad sobre riqueza $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sea acotada. Decimos que una funcion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es acotada si existe $K \in \mathbb{R}_+$ tal que $|u(x)| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$

Parte A. Suponga que un agente tiene utilidad sobre la riqueza $u(w)$ tal que u es una función no acotada. Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un nivel de riqueza x_n tal que $u(x_n) > 2^n$

Parte B. A este agente se le presenta la siguiente apuesta: "Se tira una moneda hasta que sale cara. Si sale cara en la $n-$ésima tirada, se paga x_n al agente" con la secuencia x_n la definida en el punto anterior. Pruebe que la utilidad esperada de esta lotería es infinito (**Sugerencia:** utilice el primer criterio de comparación para series infinitas que dice si tengo dos sucesiones tales que $a_n > b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_1^\infty b_n = +\infty$ entonces $\sum_0^\infty a_n > \sum_0^\infty b_n = +\infty \Longrightarrow \sum_0^\infty a_n = +\infty$)

Parte C. Suponga que usted tiene una casa de apuestas, y que hay dos tipos de personas a las cuales puede enfrentarse: aquellas con función de utilidad $u(x) = \log(x)$ y aquellas con funcion de utilidad $v(x) = \sqrt{x} - 5$. En base a lo visto en las partes anteriores, diseñe una loteria en base a tiradas repetidas de una moneda, tal que cualquiera de los dos individuos estaría dispuestos a pagar cualquier suma de dinero por esta lotería. ¿Encuentra algo extraño en esta aseveración, si quisiera testearse a nivel empírico?

Ejercicio 49. Suponga que tiene un individuo con función de utilidad sobre riqueza $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Este individuo tiene riqueza $w = 1$. Al individuo se le presentan dos activos: un activo A_1 que por unidad comprada, paga un rendimiento de $R_1 = (1 + \tau_1)$ con τ_1 la "tasa de interes", aleatorio, y un activo A_2 que paga un rendimiento R_2 aleatorio por unidad comprada. Ambos activos cuestan \$1 la unidad. Asuma, asimismo, que el individuo puede comprar cualqueir cantidad de estos activos (es decir, puede llegar a comprar mas que lo que puede con la riqueza w) Suponga que los rendimientos aleatorios de ambos activos, (R_1, R_2) son un vector aleatorio con la siguiente función de densidad:

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } r_1 + r_2 \leq 2, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Parte A. Bosqueje el soporte de la densidad f (es decir, el conjunto en $\mathbb{R}^2_+$ donde $f > 0$)
Parte B. Encuentre las densidades marginales para R_1 y R_2
Parte C. Calcule $\mathbb{E}(R_1)$, $\mathbb{E}(R_2)$ y $\mathbf{Cov}(R_1, R_2)$
Parte D. Argumente (con palabras) que el problema que debe resolver el agente es el de elegir $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+$ para maximizar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u[w - z_1(1 - r_1) - z_2(1 - r_2)] f(r_1, r_2) \, dr_1 dr_2$$

Parte E Usando la Parte B encuentre las demandas óptimas de estos activos si existiera solamente el activo 1 y el activo 2: es decir, si llamamos $g_1(r_1)$ a la marginal de R_1, encuentre la solución al problema de elegir z_1 para maximizar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u[w - z_1(1 - r_1)] g_1(r_1) \, dr_1$$

y análogamente para el activo A_2.
Parte F. Sin resolver el problema planteado en la Parte D, investigue si las soluciones separadas para cada activo encontradas en la Parte E son también solución del problema de la Parte D. (Sugerencia: encuentre las condiciones de primer órden del problema de la Parte D sin resolverlas, e investigue si las soluciones particulares que encontró en la Parte E la satisfacen)
Parte G. Explique, en base a los datos que a encontrado a lo largo del ejercicio, porque pasa lo que vió en la parte F (Sugerencia: investigue los momentos encontrados para la distribución f)

Ejercicio 50. Un fabricante de lamparas de halógeno es monopolista en el mercado local. La intendencia municipal le solicita un presupuesto para hacer el alumrado público de un parque: especificamente, una lampara. El fabricante de lampara debe elegir la calidad de la lampara que vendera. La calidad viene dada por la duración esperada de la lampara: especificamente, se supone que si llamamos T a la duracion de la lampara, tenemos que $T \sim \exp(\lambda)$, o más especificamente, T tiene densidad

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{1}{\lambda} t\right) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Puede probarse que $\mathbb{E}(T) = \lambda$. Justamente es el parámetro λ el indicador de "calidad" de la lampara. El tiempo se mide en días. Por otra parte, el fabricante tiene un costo para la tecnología de producción de calidad λ : específicamente, $c(\lambda) = \rho\lambda^\beta$ con $\rho, \beta > 0$. El contrato que propone la intendencia es el siguiente: si las lamparas duran t días, pagará $P(t) = at$, con $a > 0$ El fabricante debe elegir λ para maximizar beneficios.

Parte A. Dada una calidad λ, demuestre que la utilidad esperada del fabricante es $u(\lambda) = a\lambda - \rho\lambda^\beta$

Parte B. Encuentre la calidad óptima λ^* dependiendo de los parámetros a y ρ

Parte C. Suponga que $\beta = 1$ y que en el contrato, se exige una duración mínima de D días: si la lampara se rompe antes de los D dìas, la intendencia no paga nada por ella. Plantee y resuelva el problema: ¿como cambia la solución del problema anterior?

Parte D ¿ Cual es el tiempo esperado de duración de las lamparas en ambos problemas?

Ejercicio 51. Tenemos un conductor, que puede chocar o no chocar. Esto depende de la cantidad de esfuerzo que realiza al conducir, teniendo en cuenta las señales de tránsito, respetando los límites de velocidad, etc. El nivel de esfuerzo que realiza afecta la probabilidad de chocar: explicitamente, suponemos que el nivel de esfuerzo es una variable $e \in [0,1]$, tenemos que $\Pr[\text{chocar} \mid e] = 1 - e$. Obviamente, tendremos entonces que $\Pr[\text{no chocar} \mid e] = e$, por lo que el esfuerzo se interpretara como la probabilidad de no tener accidentes de transito. La utilidad del individuo en los siguientes estados de la naturaleza es la siguiente:

- Utilidad de esforzarse e si no choca: $-e^2$
- Utilidad de esforzarse e si choca: $-(a+s) - e^2$

Con $a \in (0,1)$ y $s \in (0,1)$ las desutilidades por la destrucción del auto (a) y por los gastos médicos luego del accidente (s). El conductor elige el nivel de esfuerzo óptimo $e \in [0,1]$

Parte A. Plante el problema de elección del nivel de esfuerzo óptimo del conductor, suponiendo que puede aplicarsele el teorema de la utilidad esperada.

Parte B. Encuentre el nivel de esfuerzo óptimo e^* dependiendo de los parametros (a,s). Encuentra la utilidad esperada en el nivel de esfuerzo óptimo e^*. ¿Como cambia la solución e^* ante cambios en los parámetros? Explique la intuición detrás de los resultados

Parte C. Suponga que ahora se le obliga al conductor usar cinturón de seguridad. Esto hace que, en caso de accidente, el costo por gastos médicos sea $s' < s$. Sin embargo, por tener que utilizar cinturón de seguridad, tiene desutilidad $c \in (0,1)$. Es decir:

- Utilidad de esforzarse e si no choca: $-e^2 - c$
- Utilidad de esforzarse e si choca: $-(a+s') - e^2 - c$

Plantee y resuelva para e. Encuentre la utilidad esperada para el valor de $\overline{e}$ óptimo

Parte D. Suponga ahora que se le da a elegir libremente al conductor entre usar cinturón de seguridad y no usarlo. ¿Cual es la elección óptima del conductor? (**Sugerencia:** Compare las utilidades esperadas maximas de los puntos **(b)** y **(c)**

Parte E. En no mas de 5 líneas, y sin usar ninguna formula matemática, discuta la siguiente afirmación: "La obligatoriedad del cinturón de seguridad ha contribuido a la disminución de los accidentes de tránsito"

Ejercicio 36 Consider a world in which there are exactly two assets (labelled A and B) and two states of nature (labelled 1 and 2). The payoff of the assets in the two states is as follows:

	Asset A	Asset B
State 1	5	20
State 2	6	0

Denote by x_A and x_B the number of units of assets A and B purchased by an investor. If it ever matters, we assume that $x_A, x_B \geq 0$.

We say that the Fundamental Valuation Relationship is satisfied if for both assets, in the optimum,

$$E\left(u'(w)\left(1+r_A\right)\right) = E\left(u'(w)\left(1+r_B\right)\right).$$

Parte A. The investor is assumed to have preferences which depend on the total amount received in each state, not whether the return comes from one asset or the other. Apart from this, the investor's preferences are unspecified (for example we don't know if his utility is an Expected Utility). If the preferences are represented by an objective function, what are the arguments of the function?

Parte B. Suppose that the investor behaves according to the expected utility hypothesis and believes that the probability of state 1 is 1/3 and the probability of state 2 is 2/3. How would you express the investor's objective function (ie the function that the investor seeks to maximize)? Write out the investor's objective function in as much detail as you can, given the information which is provided.

Parte C. Suppose that the von Neumann Morgenstern utility function (or the Bernoulli utility function) is $u(w) = \sqrt{w}$, that the initial wealth level of the individual is 390, and that $p_A = p_B = 2$. Calculate the optimal portfolio for this individual. Verify that the FVR holds.

Parte D. Calculate the optimal portfolio when the asset's values are given by

	Asset A	Asset B
State 1	6	18
State 2	6	0

and the probabilities, income and prices are as in the previous parts. Explain (hint: is the individual risk averse?)

Parte E. Calculate the optimal portfolio when the asset values are given by

	Asset A	Asset B
State 1	6	17
State 2	6	0

and the probabilities, income and prices are as in the previous parts. Is the FVR satisfied?

Ejercicio 37 An investor chooses a portfolio comprising one risky asset with expected rate of return $\mu_Z = 0.15$, and standard deviation of return $\sigma_Z = 0.40$, and lending or borrowing at a risk-free rate, $r_0 = 7\%$. Let μ_P denote the expected rate of return on the investor's portfolio, and let σ_P denote the standard deviation of the rate of return on the portfolio. Let q denote the proportion of the portfolio invested in the risky asset.

Part A. In a diagram, sketch the trade-off of feasible pairs of (μ_P, σ_P) (i.e. pairs that the investor could choose). In the diagram, identify the points for which $q = 0$ (all capital invested at the risk-free rate) and $q = 1$ (all capital invested in the risky asset). Show that the slope of the trade-off equals 0.20.

Part B. Assume that the investor acts to maximise the objective function: $G(\mu_P, \sigma_P) = \mu_P - 0.5\sigma_P^2$. Sketch the indifference curves for the investor in (μ_P, σ_P) space. Show that the slope of each indifference curve for this objective function equals σ_P (i.e. $d\mu_P/d\sigma_P = \sigma_P$). Generalise your answer to show that if $G(\mu_P, \sigma_P) = \mu_P - \alpha\sigma_P^2$, then the slope of each indifference curve equals $2\alpha\sigma_P$. (Note: is a parameter that expresses the investor's risk preferences.)

Part C. In a diagram, depict the pair (μ_P, σ_P) corresponding to an optimal portfolio. Using the information given above, show that for this investor, one-half of the portfolio is invested in the risky asset and one-half in the risk-free asset, i.e. $q = 1/2$. [Hint: $\sigma_P = q\sigma_Z$, and equate the slope of the indifference curve at the optimum with the slope of the trade-off of feasible portfolios.] Generalise your result to show that $q = (\mu_Z - r_0)/2\alpha\sigma^2 Z$.

Part C. Suppose that the interest rate increases to 11% (μ_Z and σ_Z, remaining unchanged). Sketch the effect on the optimal portfolio in a diagram and calculate the new value of q, given the numerical information provided.

53. La utilidad es $u(m) = \ln(m)$, la riqueza inicial es $m = 30$. En una apuesta, si sale $hh = +20$, $ht = -24$, $tt = +4$, $th = -6$.
53.A. Cual es el valor esperado? $EV = \frac{20+4-30}{4} = -\frac{3}{2}$
53.B. Cual es la utilidad esperada? $Eu = \frac{\ln(50)+\ln(6)+\ln(34)+\ln(24)}{4} = 3.102$
53.C. Cuanto esta dispuesto a pagar para salirse de la apuesta? $u(30-x) = 3.102 \Leftrightarrow \ln(30-x) = 3.102$, Solution is: 7.7576

There's an asset that costs $p = 1$ and that has returns of 4 and 16 in states 1 and 2 respectively; the states have probability 1/2 each. The consumer has an initial wealth of w and a utility function for consumptions in periods 0 and 1 given by

$$U(c_0, c_1) = \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \delta E\left(\frac{c_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

where E is the expectation operator. Find how much will the individual save.

The individual must choose s to maximize

$$\begin{aligned} &\frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \delta E\left(\frac{c_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \\ s.t. c_0 &= w - s \\ c_{11} &= 4s \\ c_{12} &= 16s \end{aligned}$$

Substituting, we get

$$U = \frac{(w-s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\delta}{2}\left[\frac{(4s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(16s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = \frac{(w-s)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\delta}{2}\left[\frac{4^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{16^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] s^{1-\gamma}$$

and the first order condition is

$$U = -(w-s)^{-\gamma} + \frac{\delta}{2}\left[4^{1-\gamma} + 16^{1-\gamma}\right] s^{-\gamma} = 0 \Leftrightarrow (w-s)^{-\gamma} = \frac{\delta}{2}\left[4^{1-\gamma} + 16^{1-\gamma}\right] s^{-\gamma}$$

so that elevating both sides to the power of $-1/\gamma$ we get

$$w-s=\left[\frac{\delta}{2}\left(4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right)\right]^{\frac{-1}{\gamma}}s\Leftrightarrow s=\frac{w}{1+\left[\frac{\delta}{2}\left(4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right)\right]^{\frac{-1}{\gamma}}}$$

Suppose asset returns are given by

	Asset A	Asset B
State 1	5	20
State 2	6	0

and that the probability of state 1 is 1/3 while that of state 2 is 2/3. Suppose that the von Neumann Morgenstern utility function (or the Bernoulli utility function) is $u(c_0,c_1)=\sqrt{c_0}+\delta E\sqrt{c_1}$ (the price of the consumption good is 1 in both periods) that the initial wealth level of the individual is w, and that $p_A=p_B=2$. Calculate the optimal portfolio for this individual.

He must choose c_0, x_A, x_B to maximize

$$\begin{aligned}&\sqrt{c_0}+\delta E\left(\sqrt{c_1}\right)\\ w&=c_0+2x_A+2x_B\\ c_{11}&=5x_A+20x_B\\ c_{12}&=6x_A\end{aligned}$$

Getting rid of x_B using the budget constraint, we see that the individual must choose c_0 and x_A to maximize

$$\sqrt{c_0}+\delta\left(\frac{1}{3}\sqrt{5x_A+20\frac{w-c_0-2x_A}{2}}+\frac{2}{3}\sqrt{6x_A}\right)$$

The first order conditions with respect to c_0 and x_A imply

$$c_{11}=\delta^2\frac{100}{9}c_0\quad\text{and}\quad 8c_{11}=75x_A$$

respectively. Using $c_{11}=5x_A+20\frac{w-c_0-2x_A}{2}$ (which contains the budget constraint and $c_{11}=5x_A+20x_B$) we get

$$c_0=9\frac{w}{26\delta^2+9},\quad\text{and}\quad x_A=32w\frac{\delta^2}{78\delta^2+27}.$$

Then, using the budget constraint we get $x_B=7w\frac{\delta^2}{78\delta^2+27}$.

If, for example $w=795$ and $\delta=\frac{3}{20}\sqrt{5}$ we get $c_0=600$ and $x_A=80$ and $x_B=35/2$.