1 El problema del agente y el principal

pag 132 y 133 de bolton

Muchas situaciones de interés para la economía se pueden analizar utilizando el siguiente marco teórico. Hay un "principal", que en la mayoría de los casos que analizaremos es el dueño de la empresa. También hay un "agente", que es un empleado de la empresa. El principal quiere inducir al agente a hacer la "acción" que sea mejor para la empresa. Habitualmente se asume que lo que se hace es escribir un contrato en el cual se dice que el agente debe hacer tal acción, en cuyo caso se le pagará una cierta suma, y que si no cumple tendrá ciertas consecuencias. Sin embargo, en muchos casos es muy difícil, sino imposible, para el principal observar las acciones del agente.[1] Se presenta entonces un caso de información asimétrica: el agente sabe qué acción tomó, y el principal no. Se plantea entonces el problema de qué debe hacer el principal para inducir al agente a hacer lo "correcto". En este capítulo estudiaremos la forma que toman los contratos óptimos para el principal, cuando sólo puede observar las "consecuencias" de las acciones del agente. En particular, asumiremos que el principal puede observar los niveles de producto que resultan de las acciones del agente.

Aunque no recibe mucho crédito, uno de los primeros modelos de agente principal fue elaborado en un contexto bastante distinto por Joseph Stiglitz, quien analizó la "racionalidad" económica de la medianería (una institución milenaria en la cual un cultivador que corre con los gastos de una plantación divide a la mitad los frutos de su cosecha con el dueño de la tierra). Otros nombres para el problema de agente principal son "riesgo moral" o "moral hazard" y modelos de "acción oculta" o "hidden action".

Formalmente entonces, asumiremos que hay n niveles de producto x_i, $i = 1, 2, ..., n$, que recibe el principal, y unas acciones a, b, etc (en general serán sólo dos) que puede tomar el agente. También, cada acción tiene un determinado costo para el agente. Por ejemplo, esforzarse mucho es más costoso que esforzarse poco. Para cada acción i, $c(i)$ será el costo para el agente. Asumiremos que el principal no puede observar la acción, pero sí el nivel de producto. Para que el supuesto tenga sentido, no puede suceder que a cada acción corresponda un solo nivel de producto, pues si así fuera, observar el producto sería equivalente a observar la acción. Por lo tanto, a cada acción $i = a, b, ...$ le corresponderá una distribución de probabilidades π_i sobre los niveles de producto. Así por ejemplo si la acción a hace que ocurra un nivel de producto de 1 con probabilidad $\frac{1}{3}$ y un nivel de producto de 2 con probabilidad $\frac{2}{3}$, tendremos

$$\pi_a(1) = \frac{1}{3} = 1 - \pi_a(2).$$

Algunas veces, en vez de $\pi_a(x_i)$ escribiremos π_{ia} para el nivel de producto i. Asumiremos también que hay un cierto nivel de "utilidad de reserva" $\overline{u}$ para el agente. Este nivel de utilidad representa la utilidad que recibiría si trabajara en la mejor alternativa a trabajar en la empresa.

Para tratar de inducir al agente a hacer la acción correcta el principal debe diseñar un sistema de incentivos s que le pague al trabajador $s(x_i)$ cuando ocurra el producto x_i. Algunas veces escribiremos s_i en vez de $s(x_i)$. El "valor" que le asigna el trabajador a cada cantidad de dinero s viene especificado por una función de utilidad u. Si el trabajador recibe $\$s$, el nivel de utilidad que alcanza es de $u(s)$ menos lo que le haya costado en términos de utilidad la acción que eligió. Asumiremos en todo momento que u es estrictamente creciente, y con derivada estrictamente positiva. En general se asumirá también que el agente es averso al riesgo, o lo que es lo mismo, que la derivada segunda de u es negativa.

En el proceso de diseño del esquema de incentivos, el principal enfrentará dos tipos de restricciones. La primera es la **restricción de participación**: si el principal quiere que el trabajador elija la acción a, por ejemplo, deberá cumplirse que el trabajador quiera elegir a, y no irse de la empresa. En términos formales

[1] O puede ser que el principal las observe, pero que sea imposible demostrar ante un juez cuál fue la acción tomada por el agente. En ese caso, el contrato tampoco tiene mucho sentido.

tenemos que la restricción de participación es

$$\sum_{1}^{n} \pi_a(x_i)\, u(s(x_i)) - c(a) \geq \overline{u}. \qquad \text{(PARTICIPACION)}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es la utilidad de elegir la acción a: la sumatoria representa la utilidad esperada y $c(a)$ son los costos para el agente de hacer a.

La segunda restricción es la **restricción de incentivos**: si el principal quiere que el agente elija la acción a, por ejemplo, deberá cumplirse que el trabajador quiera elegir a, y no b u otra acción. Formalmente,

$$\sum_{1}^{n} \pi_a(x_i)\, u(s(x_i)) - c(a) \geq \sum_{1}^{n} \pi_b(x_i)\, u(s(x_i)) - c(b). \qquad \text{(INCENTIVOS)}$$

El lado izquierdo es, igual que antes, la utilidad para el agente de elegir la acción a. El lado derecho es la utilidad para el agente de elegir la acción b: la distribución de probabilidades sobre los pagos $s(x_i)$ es la correspondiente a b, y el costo de la acción, es el costo de b.

El problema del principal se resuelve en dos etapas. Primero el principal debe imaginarse que quiere implementar la acción a, por ejemplo, y encontrar la mejor forma de hacerlo. Una vez que resuelve ese problema calcula la utilidad que recibiría en ese caso. Luego hace lo mismo para todas las demás acciones. La segunda etapa es comparar todas las utilidades calculadas en la primera etapa y elegir la acción que le da la mayor utilidad.

En la primera etapa del problema del principal el problema de elegir el esquema óptimo para implementar la acción b es entonces: Elegir $s_1, s_2, ..., s_n$ para maximizar

$$\begin{aligned} & & \sum_{1}^{n} \pi_{ib}(x_i - s_i) \\ \text{sujeto a } & \sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) & \geq & \overline{u} \\ & \sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) & \geq & \sum_{1}^{n} \pi_{ia} u(s_i) - c(a), \text{ para todo } a \neq b \end{aligned}$$

El primer renglón es la función objetivo del principal: debe maximizar el valor esperado de sus ingresos x_i menos sus costos. La disyuntiva que enfrenta el principal es que si elige sueldos s_i muy bajos, el trabajador se irá de la empresa. También, debe elegir los sueldos de tal forma que el trabajador elija la acción que el principal quiere. Analizaremos ahora la solución a este problema asumiendo que hay sólo dos acciones posibles a y b.

El Lagrangiano para el problema del principal es

$$L = \sum_{1}^{n} \pi_{ib}(x_i - s_i) + \lambda \left(\sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) - \overline{u} \right) + \mu \left(\sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) - \sum_{1}^{n} \pi_{ia} u(s_i) + c(a) \right)$$

y la condición de primer orden con respecto a s_i es

$$\begin{aligned} -\pi_{ib} + \lambda \pi_{ib} u'(s_i) + \mu(\pi_{ib} u'(s_i) - \pi_{ia} u'(s_i)) &= 0, \text{ para } i = 1, 2, ..., n \\ \frac{1}{u'(s_i)} &= \lambda + \mu \left[1 - \frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}} \right], \text{ para } i = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Aunque en general puede resultar difícil computacionalmente resolver este sistema (junto con las restricciones de participación e incentivos), hay cuatro lecciones muy importantes y generales que se desprenden de la ecuación (1.1):

1. Si para un sistema de incentivos $s_1, ..., s_n$ "candidato" a ser óptimo, la restricción de incentivos está inactiva (es decir, el lado izquierdo es más grande que el derecho) entonces el esquema de sueldos debe ser constante si el agente es averso al riesgo. Para ver eso, notamos que si la restricción de incentivos está inactiva, entonces su multiplicador asociado μ debe ser 0. En ese caso, la ecuación (1.1) nos dice que $1 = \lambda u'(s_i)$ para todo i. Como u' es estrictamente decreciente, ello es posible sólo si $s_1 = s_2 = ... = s_n$. La intuición detrás de este resultado es bien general y fácil: si el agente es averso al riesgo, y el principal no, no tiene sentido que el agente absorba ningún tipo de riesgo, pues para el principal es "gratis" absorverlo él. Para asegurarle el nivel de utilidad de $\overline{u}$ al agente, el principal tiene que pagar más en promedio si los sueldos tienen riesgo (son distintos para distintos niveles de producto) que si no lo tienen. Vemos entonces que si el principal quiere implementar la acción con el costo c más bajo, el problema es muy sencillo: se pone un sueldo constante, en cuyo caso la restricción de incentivos se satisface automáticamente, y se elige dicho sueldo para que el nivel de utilidad alcanzado con ese sueldo sea $\overline{u}$. Para ver formalmente que la solución para implementar la acción de costo más bajo son óptimos los sueldos constantes, puedo resolver el problema del principal *sin* la restricción de incentivos. Eso nos da la ecuación (1.1) pero con $\mu = 0$ (es decir, sin el segundo término) lo que implica sueldos constantes. Como la solución *sin* la restricción de incentivos es también la solución *con* la restricción (siempre que la solución cumpla con la restricción ignorada, que la cumple en este caso), vemos que los sueldos constantes son óptimos.

2. La contracara de la primera lección, es que si se quiere implementar una acción que no es la de mínimo costo para el agente, los sueldos no serán constantes. Si se ponen sueldos constantes, el agente elegirá la acción de mínimo costo. Esta transferencia de riesgo del principal al agente genera una ineficiencia relativo a lo que sucedería si se pudieran observar las acciones del agente: el principal podría bajar el promedio de sueldos, manteniendo el nivel de utilidad del agente constante, y así aumentar su propia utilidad. La parte "observable" de esta lección, es que en muchas circunstancias los pagos de los trabajadores dependen de su productividad: para los gerentes están los "bonos" y para los trabajadores manuales, está el pago a destajo.

3. La tercera lección es que los pagos serán más altos cuanto más "informativo" sobre la acción elegida es el nivel de producto ocurrido. El número $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ se llama el ratio de verosimilitud de a con respecto a b si ocurrió x_i. Nos dice cuán probable es que el agente haya elegido a y no b, si ocurrió el nivel de producto x_i : si π_{ia} es grande, quiere decir que es muy probable que ocurra x_i cuando el agente hace a, y si π_{ib} es pequeño, quiere decir que el nivel de producto x_i es poco probable si se hace b. Para ver eso, calculemos con la regla de Bayes la probabilidad que el agente haya elegido a y no b, si ocurrió el nivel de producto x_i:

$$P(a \mid x_i) = \frac{P(x_i \mid a) P(a)}{P(x_i \mid a) P(a) + P(x_i \mid b) P(b)} = \frac{\pi_{ia} P(a)}{\pi_{ia} P(a) + \pi_{ib} P(b)} = \frac{P(a)}{P(a) + \frac{\pi_{ib}}{\pi_{ia}} P(b)}$$

   Por lo tanto, si $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es grande, quiere decir que es muy probable que el agente haya elegido a y no b. Por lo tanto, si queremos implementar b, sería razonable "castigar" al agente con un sueldo bajo en este caso. Eso ocurre en el esquema óptimo, ya que si $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es grande, el lado derecho de la ecuación (1.1) es pequeño, por lo que $u'(s_i)$ debe ser grande, o lo que es lo mismo, s_i pequeño.

   Una sutileza que se desprende de la tercera conclusión es que los pagos de bonos y esas cosas, no tendrían que ser crecientes con el nivel de producto alcanzado, sino que tendrían que depender de cuán informativos son los niveles de producto sobre la acción elegida. Por supuesto, si se cree que $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es decreciente en x_i, los bonos serán crecientes en el nivel de producto.

4. Finalmente, de la ecuación (1.1) vemos también que si el agente es averso al riesgo, y dos niveles de producto i y j tienen iguales ratios de verosimilitud, tendrán el mismo salario. Eso en general sirve para reducir la dimensionalidad del problema. Por ejemplo, con dos acciones y tres niveles de producto, será relativamente difícil resolver para los salarios óptimos. Pero si hay dos niveles de producto con iguales ratios de verosimilitud, el problema se reducirá a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

A menudo, en la discusiones de política económica, o de gerenciamiento, se ignora una lección fundamental del problema que estamos analizando: por más que sea obvio que se está eligiendo una acción que no es la que genera mayores niveles de producto, puede ser muy caro inducir al agente a elegir la acción correcta. Para ilustrar esto, resolveremos uno de los problemas más sencillos de agente principal, en el marco de una discusión de política económica y educativa.

Ejemplo 1 Los vouchers para educación. En la actualidad, en muchos países se está discutiendo la posibilidad de implementar en la educación pública un sistema de vouchers. Mediante el mismo, se premiaría a las maestras, escuelas, o directoras que tuvieran mejores rendimientos. Para medir rendimientos se utilizan unas pruebas que se dan a todos los estudiantes del país y se comparan los rendimientos de las distintas escuelas en dichos exámenes.

Para analizar la conveniencia de esta medida de política, analizamos un modelo de agente principal. El principal es el gobierno, y el agente es la directora de la escuela. Hay dos acciones posibles para la directora: actuar como una vaga a o trabajar b (piensen en b como la acción "buena" y en a como la "alternativa"). Hay dos niveles posibles de "producto" para cada acción: $x_1 = 0$ es el evento "más de la mitad de la clase reprueba los exámenes generales"; $x_2 = 1$ es "menos de la mitad reprueba". Las distribuciones de probabilidad vienen dadas por: $\pi_{1a} = \frac{1}{2}$ y $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$. La utilidad de la maestra de un sueldo de s es $u(s) = \log s$. Los costos son $c(a) = 1$, $c(b) = b \geq 1$ y la utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Para implementar a, debemos poner un sueldo constante s que le de a la directora una utilidad de 0 :

$$\pi_{1a} u(s) + \pi_{2a} u(s) - c(a) = \overline{u} \Leftrightarrow u(s) - 1 = 0 \Leftrightarrow s = e.$$

La utilidad del gobierno en este caso es

$$V(a) = \frac{1}{2}(0 - e) + \frac{1}{2}(1 - e) = \frac{1}{2} - e$$

Para implementar b, sabemos que ambas restricciones están activas: la de participación está "siempre" activa, pues de si no lo estuviera, se podrían bajar ambos sueldos un poquito; la de incentivos está activa, pues si no lo estuviera, la ecuación (1.1) nos dice que los sueldos deberían ser constantes, pero con sueldos constantes, el agente hace a. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b &= 0 \\ \frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b &= \frac{1}{2}\log s_1 + \frac{1}{2}\log s_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Llamando u_i a $\log s_i$ tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - b = 0 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1 = 3 - 2b \\ u_2 = 2b - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = e^{3-2b} \\ s_2 = e^{2b-1} \end{array}$$

Tenemos ahora que

$$V(b) = \frac{1}{4}(0 - e^{3-2b}) + \frac{3}{4}(1 - e^{2b-1})$$

por lo que conviene implementar b si y sólo si

$$V(b) \geq V(a) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(0 - e^{3-2b}) + \frac{3}{4}(1 - e^{2b-1}) \geq \frac{1}{2} - e.$$

Definiendo $x = e^{2b}$, tenemos que vale la pena implementar la acción b si y sólo si

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x^2 e^{-1} + \left(\frac{1}{4} + e\right)x - \frac{1}{4}e^3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}e + \frac{2}{3}e^2 + \frac{1}{6}\sqrt{e^2 + 8e^3 + 4e^4} \geq x \\ &\Leftrightarrow b \leq 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 4e + \sqrt{1 + 8e + 4e^2}}{6e} \end{aligned}$$

La conclusión de política económica es que puede ser muy caro implementar un sistema de vouchers en el cual las maestras se esfuercen. ■

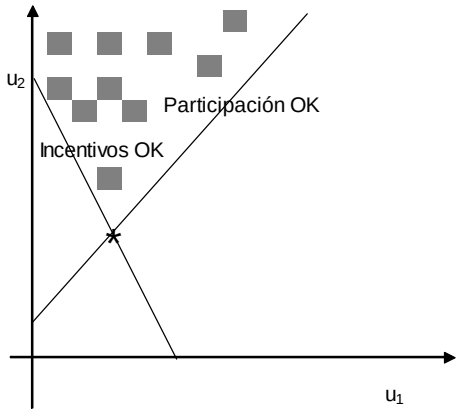
Análisis gráfico del problema de 2×2. Asumamos que hay dos acciones a, b y dos niveles de producto x_1, x_2. Pondremos $a \equiv \pi_{1a}$ y $b \equiv \pi_{1b}$ con $a > b$. Sea $f \equiv u^{-1}$, de tal manera que $f(u_1)$ nos dice cuál es la cantidad de dinero que hará que el agente tenga una utilidad de u_1.[2] Como la utilidad es estrictamente creciente, la inversa existe. Además, el problema de elegir niveles de salarios es equivalente al de elegir niveles de utilidad, pues a cada nivel de utilidad le corresponde un solo nivel de salario. Por eso estudiaremos el problema desde esta nueva perspectiva. El problema del principal cuando quiere implementar b, es entonces el de elegir los niveles de utilidad u_1, u_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & & b(x_1 - f(u_1)) + (1-b)(x_2 - f(u_2)) \\ \text{sujeto a } bu_1 + (1-b)u_2 - c_b &\geq \overline{u} \\ bu_1 + (1-b)u_2 - c_b &\geq au_1 + (1-a)u_2 - c_a \end{aligned}$$

Nos quedan entonces dos restricciones lineales

$$\begin{aligned} u_2 &\geq \frac{\overline{u} + c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1 \\ u_2 &\geq u_1 + \frac{c_b - c_a}{a-b} \end{aligned}$$

que determinan que la región de donde se pueden elegir los pares de u_1 y u_2 es la pintada con cuadritos grises en la siguiente gráfica.



[2] Formalmente, definimos $f(u)$ (para cada u tal que existe s con $u(s) = u$) como el número s tal que $f(u) = f(u(s)) \equiv u^{-1}(u(s)) = s$.

Cuando queremos implementar b, las dos restricciones están activas, por lo que el óptimo se encuentra en el punto marcado con *. El agente está completamente asegurado cuando para todo nivel de producto, tiene el mismo sueldo, es decir cuando $u_2 = u_1$. Cuando el principal maximiza su utilidad sólo sujeto a la restricción de participación, sabemos que $u_1 = u_2$, por lo que las curvas de indiferencia del principal son tangentes a la restricción de participación a lo largo de la línea de 45°. Formalmente, sustituyendo la restricción de participación en la función objetivo del principal obtenemos

$$b\left(x_1 - f\left(u_1\right)\right) + \left(1-b\right)\left(x_2 - f\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right)\right)$$

y la condición de primer orden es

$$\begin{aligned} -bf'\left(u_1\right) + \left(1-b\right)f'\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right)\frac{b}{1-b} &= 0 \Leftrightarrow \\ f'\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right) &= f'\left(u_1\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

De la definición de f, dada por $f\left(u\left(s\right)\right) \equiv u^{-1}\left(u\left(s\right)\right) = s$, y derivando con respecto a s, obtenemos el resultado del teorema de la función inversa: para u tal que existe s para el cual $u = u\left(s\right)$,

$$\frac{du^{-1}\left(u\left(s\right)\right)}{du}\frac{du\left(s\right)}{ds} = 1 \Leftrightarrow \frac{du^{-1}\left(u\left(s\right)\right)}{du} = \frac{1}{u'\left(s\right)} \Leftrightarrow f'\left(u\right) = \frac{du^{-1}\left(u\right)}{du} = \frac{1}{u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)}.$$

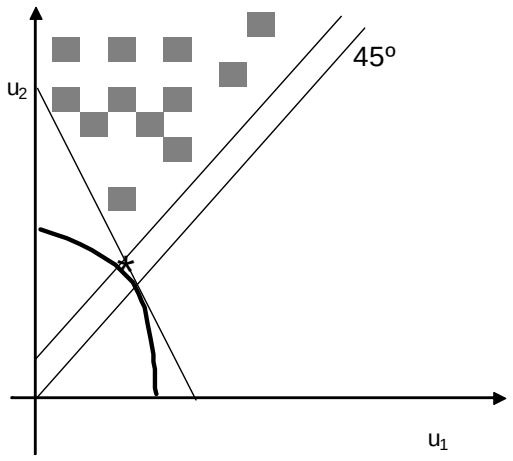
Por lo tanto, f'' se obtiene derivando esta ecuación:

$$f''\left(u\right) = \frac{d^2u^{-1}\left(u\right)}{du^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\frac{du^{-1}(u)}{du}}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\frac{1}{u'(u^{-1}(u))}}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^3} > 0.$$

Esto implica que f' es monótona, y por la ecuación (1.2) tenemos que

$$\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1 = u_1 \Leftrightarrow u_2 = u_1.$$

Lo que nos dice esto es que en ausencia de problemas de información (cuando se puede ignorar la restricción de incentivos) es óptimo asegurar al agente completamente. En términos gráficos tenemos



La curva gruesa es la curva de indiferencia del princpal en el óptimo. Comparando las soluciones con y sin información asimétrica, vemos que en ambos casos el agente recibe $\overline{u}$, pero con información asimétrica,

la utilidad del principal es menor, pues está en una curva de indiferencia más alta (la utilidad del principal crece cuanto más bajas están sus curvas de indiferencia). Esta pérdida de bienestar y eficiencia se debe a que en el caso de información asimétrica el agente recibe su nivel de utilidad $\overline{u}$ con sueldos con riesgo, mientras que en el caso de información simétrica, los sueldos son sin riesgo. Como el agente es averso al riesgo, el nivel de $\overline{u}$ se consigue con sueldos más altos en promedio cuando los mismos tienen riesgo. El principal preferiría sacarle el riesgo al trabajador, y bajar los sueldos en promedio. El problema es que si hace eso, el trabajador hace a y no b. ■

Ejemplo 2 Otro ejemplo de 2×2**.** Sean: $x_i = i$ y $\pi_{ia} = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2$; $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$; $c_a = \frac{1}{4}$ y $c_b = \frac{1}{2}$; $u(s) = \sqrt{s}$ y $\overline{u} = \frac{3}{4}$. Para implementar a, ponemos $s_1 = s_2 = s$ y la utilidad del agente igual a $\overline{u}$ para obtener $s = 1$ y unos beneficios para el principal de $\frac{1}{2}$. Para implementar b,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt{s_1} + \frac{3}{4}\sqrt{s_2} - \frac{1}{2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{s_1} + \frac{1}{2}\sqrt{s_2} - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

resolviendo para $\sqrt{s_1}$ y $\sqrt{s_2}$ (un sistema lineal) y elevando al cuadrado obtenemos $s_1 = \frac{1}{4}$ y $s_2 = \frac{9}{4}$ y los beneficios del principal son 0. ■ ** arreglar lo que viene. introducir iguales ratios. adelantar el lema**

Ejemplo 3 Un ejemplo con tres niveles de producto.

	x_1	x_2	x_3	
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	salarios no crecientes.
b	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Ejemplo 4 a es $\frac{1}{3}$ en los tres niveles de producto, b es $\frac{1}{4}$ en dos, $\frac{1}{2}$ en el tercero. costo de a es 0, de b es 1. Utilidad cuadrática, $\overline{u} = 4$. productos 10, 30 y 40.

Ejemplo 5 Otro ejemplo con tres niveles de producto. Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$. El problema que debe resolver el principal si desea que el agente elija la acción k (para $k = a, b$) es: elegir s_1, s_2 y s_3 para maximizar

$$\sum_1^3 (x_i - s_i)\,\pi_{ik}$$

sujeto a

$$\sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{ik} - c_k \geq \overline{u} \tag{1.3}$$

$$\sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{ik} - c_k \geq \sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{im} - c_m \text{ para } m = a, b \tag{1.4}$$

Las condiciones de primer orden para este problema se obtienen derivando con respecto a s_i y son

$$\frac{1}{u'(s_i)} = \lambda + \mu\left[1 - \frac{\pi_{im}}{\pi_{ik}}\right], \text{ para } i = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

donde λ es el multiplicador de la restricción de participación y μ el de la de incentivos.

Supongamos que $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, $c_a = \overline{u} = 0 < c = c_b$. Supongamos además que $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$, $\pi_{2b} = d$ y $\pi_{3b} = \frac{3}{4} - d$ y que $u(s) = \log s$.

Resolveremos dos casos: $d = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$, pero antes, un resultado que será útil en muchas circunstancias.

Lema 6 *Si la función de utilidad es continua, y no acotada por debajo, si caen $\overline{u}$ o el costo de la acción que se quiere implementar, aumentan estrictamente los beneficios. Como corolario, el agente recibirá un nivel de utilidad $\overline{u}$.*

Prueba: Supongamos que (s_i^z) es una solución al problema del principal, cuando quiere implementar la acción z, cuando el costo de z es c_z y la utilidad es $\overline{u}$. Encontraremos un esquema de pagos (s_i^*) para el caso en que $c_z^* \leq c_z$ y $\overline{u}^* \leq \overline{u}$, con alguna de las dos desigualdades estricta, y que: satisface las restricciones de participación y de incentivos; y además $s_i^* < s_i^z$ para todo i. Definimos $\Delta \equiv c_z + \overline{u} - c_z^* - \overline{u}^* > 0$ y para cada i definimos $v_i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ mediante $v_i(r) = u(s_i^z - r)$ que hereda de u la continuidad y que no es acotada por debajo. Como $v_i(0) > u(s_i^z) - \Delta$ y para r suficientemente grande $u(s_i^z) - \Delta > v_i(r)$, existe un r_i^* tal que $v_i(r_i^*) = u(s_i^z) - \Delta$. Por lo tanto, para $s_i^* = s_i^z - r_i^*$ tenemos

$$u(s_i^*) = u(s_i^z - r_i^*) = v_i(r_i^*) = u(s_i^z) - \Delta.$$

Tenemos entonces que $s_i^* < s_i^z$, para todo i, por lo cual los beneficios para el principal son estrictamente mayores bajo (s_i^*) que bajo (s_i^z). Además,

$$\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{iz} = \sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{iz} = \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - \Delta = \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - (c_z + \overline{u} - c_z^* - \overline{u}^*)$$

por lo que $\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{iz} - c_z^* \geq \overline{u}^*$ si y sólo si $\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z \geq \overline{u}$, que se cumple pues (s_i^z) era óptimo; por lo tanto (s_i^*) cumple la restricción de participación cuando el costo es c_z^* y la utilidad de reserva $\overline{u}^*$. Ahora, verificaremos que satisface la de incentivos:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{iz} - c_z^* &\geq \sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ia} - c_a \Leftrightarrow \sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{iz} - c_z^* \geq \sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{ia} - c_a \Leftrightarrow \\
\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - \Delta - c_z^* &\geq \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{ia} - \Delta - c_a \Leftrightarrow \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z^* \geq \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{ia} - c_a
\end{aligned}$$

y como $\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z^* \geq \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z$, y además $\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z \geq \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{ia} - c_a$ porque habíamos empezado suponiendo que (s_i^z) era una solución (y por tanto cumple la restricción de incentivos) obtenemos $\sum u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z^* \geq \sum u(s_i^z)\pi_{ia} - c_a$, como queríamos demostrar.

Un corolario es que el agente recibirá $\overline{u}$. Imaginemos que no fuera así, y que en el óptimo del problema (con c_z y $\overline{u}$), el agente recibiera una utilidad de $\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z \equiv \widehat{u} > \overline{u}$. En ese caso, (s_i^z) también es óptimo para el problema de implementar z, cuando el costo es c_z y la utilidad de reserva $\widehat{u}$; y sin embargo, cuando cae la utilidad de reserva de $\widehat{u}$ a $\overline{u}$, el óptimo sigue siendo (s_i^z), por lo que no aumentan los beneficios del principal (contradiciendo la primera parte del lema). ■

Comentario. Otra forma de ver que la restricción de participación siempre estará activa con utilidad continua y no acotada por debajo (en el caso en que hay sólo dos acciones posibles) es la siguiente. Supongamos lo contrario y sea (s_i^z) es una solución al problema del principal, cuando quiere implementar la acción z pero que

$$\sum u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z > \overline{u}.$$

Tomemos un nivel de producto i tal que $\pi_{iz} < \pi_{ia}$ para la otra acción a (la que no se quiere implementar). En tal caso, reduciendo s_i^z en ε, para ε chico, las dos restricciones aún se cumplirán, y el nuevo plan arroja mayores beneficios que (s_i^z). Eso contradice que (s_i^z) fuera óptimo.

Volvemos ahora al ejemplo que estábamos tratando antes del Lema.

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Primera parte: beneficios de implementar b.* La condición de primer orden en la ecuación (1.5) implica que

$$s_1 = s_2 \overset{(1.3)}{\Rightarrow} u_2 = 2c - u_3 \overset{(1.4)}{\Rightarrow} u_3 = 4c.$$

(aquí ya usamos que la ecuación (1.3) se satisface con igualdad) Por lo tanto, obtenemos $u_1 = u_2 = -2c$. Como además $u_i = \log s_i$, encontramos

$$s_1 = s_2 = e^{-2c} \text{ y } s_3 = e^{4c}.$$

El valor de los beneficios esperados (máximos) cuando el principal quiere implementar b es entonces

$$V_b = \sum_1^3 (x_i - s_i)\, \pi_{ib} = 3 - \frac{e^{-2c} + e^{4c}}{2}.$$

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Segunda parte: beneficios de implementar a.* En el problema de implementar a, la restricción de incentivos (ecuación 1.4) no es operante, pues $c_a = 0 \leq c_b$. Por lo tanto, $\mu = 0$ en la ecuación 1.5, y obtenemos que $s_i = s$ para todo i. El problema ahora es hallar el nivel s óptimo. Eso se resuelve sustituyendo $s_i = s$ en la ecuación 1.3, para obtener $u(s) = 0$, o equivalentemente, $s_i = 1$ para todo i. Obtenemos entonces que los beneficios máximos cuando queremos implementar a son

$$V_a = \frac{0 + 2 + 3}{3} = \frac{5}{3}$$

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Tercera parte: elegir la acción a implementar.* Una vez que tenemos los beneficios máximos si implementamos a, y aquellos si implementamos b, debemos decidir qué acción es la mejor.

$$V_b \geq V_a \Leftrightarrow \frac{8}{3} \geq e^{-2c} + e^{4c} \equiv g(c)$$

Como $g'(c) = -2e^{-2c} + 4e^{4c} > 0$ para todo c, $\lim_{c\to\infty} g(c) = \infty$ y $g(0) = 2 < \frac{8}{3}$, obtenemos que existe un c^* tal que $V_b \geq V_a$ si y sólo si, $c \leq c^*$.

Una característica de este problema, con $d = \frac{1}{4}$, es que cuanto más grande el producto, más grande el salario. Ahora veremos un caso en que no es así.

Caso 2: $d = \frac{1}{2}$. Haciendo exactamente lo mismo que en el caso 1, obtenemos $s_1 = s_3 = e^{-2c}$ y $s_2 = e^{4c}$. Luego, $V_b = \frac{11}{4} - \frac{e^{-2c}+e^{4c}}{2}$ y, por supuesto, $V_a = \frac{5}{3}$. Una cosa que debemos verificar, es que V_b debería ser menor ahora que en el caso 1 (y lo es). La razón es que cuesta lo mismo implementar b en ambos casos (pues el contenido informacional es el mismo en ambos casos) pero el producto obtenido en este caso es menor que en el caso 1, ya que la distribución sobre productos es peor. Como antes,

$$V_b \geq V_a \Leftrightarrow \frac{13}{6} \geq e^{-2c} + e^{4c} \equiv g(c)$$

y otra vez, existe un $\widehat{c} < c^*$ tal que $V_b \geq V_a$ si y sólo si, $c \leq \widehat{c}$. Para $c \in (\widehat{c}, c^*)$, vale la pena implementar b si $d = \frac{1}{4}$ y no si $d = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 7 Encuentre V_b, V_a y s_i, para $i = 1, 2, 3$, para $d \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. Encuentre los niveles de c para los cuales es óptimo implementar la acción b.

Ejercicio 8 En el ejemplo desarrollado más arriba, suponga que $x_i = i$, y demuestre que con $d = \frac{1}{2}$, b no es una acción óptima para ningún nivel de $c > 0$.

Ejercicio 9 En el modelo de agente principal con dos acciones, $u'' < 0$ y n niveles posibles de producto para cada acción, suponga que cae únicamente el costo de la acción b. Es decir, suponga que c_b cae desde un nivel $\widetilde{c_b}$ a un nivel $c_b^* < \widetilde{c_b}$ y que c_a se mantiene constante. Demuestre que $V_b(c_b^*) \geq V_b(\widetilde{c_b})$. Pista: esto se puede hacer explícitamente, o con el Lagrangiano, o con el Teorema de la Envolvente (ver Sección 5). Demuestre que si la función de utilidad del agente es esctrictamente creciente, continua y no está acotada por debajo, entonces $V_b(c_b^*) > V_b(\widetilde{c_b})$ (Pista: utilice la construcción que hicimos en la demostración del Lema 6). Otra forma, dado que las dos restricciones quedan con desigualdad estricta (si ponemos los sueldos óptimos $\widetilde{s_i}$, con c_b^* es restarle ε a todos los sueldos: el principal gana más plata, y se siguen cumpliendo las restricciones.

Ejercicio 10 Muestre que en el problema con dos acciones, es mejor usar una zanahoria (bajar el costo de la acción a, que se quiere implementar) que un garrote (subir el costo de la acción b, la alternativa). Por supuesto, la suba de un costo debe ser igual o "comparable" a la baja del otro (si no, no tiene gracia). En particular, demuestre que la solución al problema del principal con costos $(c_a, c_b) = \left(c_a^0 - \Delta, c_b^0\right)$ para $\Delta > 0$, es mejor que la solución cuando los costos son $(c_a, c_b) = \left(c_a^0, c_b^0 + \Delta\right)$. (Si quieren, pueden hacerlo con Δ arbitrariamente pequeño, y usando el teorema de la envolvente).

Ejercicio 11 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. Supongamos que $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, $c_a = 1 < c_b$ y $\overline{u} = -\frac{3}{2}$. Supongamos además que $\pi_{1b} = \pi_{2b} = \frac{1}{4}$, $\pi_{3b} = \frac{1}{2}$ y que $u(s) = -e^{-s}$.

Parte A. Encuentre los contratos óptimos para implementar a y b.

Parte B. Encuentre los niveles de c_b para los cuales el principal quiere implementar b.

Parte C. ¿Hay algún c_b para el cual sea conveniente implementar b, cuando $\pi_{1b} = \pi_{3b} = \frac{1}{4}$? Encuentre el contrato óptimo para implementar b si $\pi_{1b} = \pi_{3b} = \frac{1}{4}$ con $x_2 = 4$ y $x_3 = 5$.

Ejercicio 12 Deberes. El gerente de una empresa puede ejercer un esfuerzo alto $e_a = 2$ o un bajo esfuerzo $e_b = 1$. El ingreso de la empresa -sin contar los costos- puede ser o bien $\pi_1 = 16$ o $\pi_2 = 2$. La elección del gerente afecta la probabilidad de que un beneficio particular se dé. Si elige e_a entonces ocurre π_1 con probabilidad $p = 3/4$, mientras que si elige e_b el resultado π_1 se da con probabilidad $1/4$. El dueño de la empresa es neutral al riesgo y diseña un contrato que especifica un pago y_i contingente a los ingresos π_i. La función de utilidad del gerente es $u(s, e) = \sqrt{s} - e$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$.

Parte A. Resuelva el contrato de información completa y establezca la acción que querrá inducir el dueño. ¿Qué acción querrá hacer el gerente?
Parte B. Pruebe que el contrato anterior no es de equilibrio cuando el esfuerzo del gerente no es observable. Resuelva el contrato de segundo óptimo (el mejor, cuando el gerente no puede observar la acción del gerente). Compare los beneficios que obtiene el dueño en esta situación respecto de la del punto anterior.
Parte C. Comente las implicaciones que tiene la existencia de información asimétrica para compartir los riesgos entre agente y principal.

Ejercicio 13 Considere el siguiente modelo de Agente-Principal. Sean: $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, $\pi_{ia} = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2$; $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$; $c_a = \frac{1}{4}$ y $c_b = \frac{1}{2}$; $u(s) = \sqrt{s}$ y $\overline{u} = 1$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada acción, y la acción que querrá implementar el principal.
Parte B. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada acción, y la acción que querrá implementar el principal si en cambio $\overline{u} = 0$ (cuidado con las utilidades negativas).

Ejercicio 14 Un agente puede hacer un esfuerzo alto $e_a = 2$ o bajo $e_b = 0$; si el esfuerzo es alto, la probabilidad del producto bueno $x_2 = 10000$ es $\frac{3}{4}$, mientras que si es bajo la probabilidad de x_2 es $\frac{1}{4}$; el producto malo es $x_1 = 100$. La función de utilidad del agente sobre salarios s y esfuerzo e es $u(s,e) = s^{\frac{1}{4}} - e$, y la utilidad de reserva es $\overline{u} = 1$

Parte A. Encuentre los contratos óptimos para el principal si puede observar el esfuerzo. Calcule los beneficios para el principal, y diga qué nivel de esfuerzo querrá implementar.
Parte B. Encuentre los contratos óptimos para implementar cada nivel de esfuerzo si el principal no puede observarlo. Calcule los beneficios para el principal y diga cuál querrá implementar.
Parte C. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el principal por poder observar el nivel de esfuerzo?

El siguiente ejercicio, en su Parte B, explora qué pasa cuando la función de utilidad está acotada por debajo y cómo debe resolverse. En definitiva, tenemos que agregar restricciones que habitualmente no ponemos, que son que cada u_i debe ser mayor o igual que la cota inferior de la utilidad.

Ejercicio 15 Una empresa turística tiene que contratar a un trabajador para atender al público. Las ventas pueden ser de \$1, \$10 o \$300, donde \$1 corresponde a una temporada pésima, y \$300 a una temporada top. El esfuerzo del trabajador no afecta las probabilidades relativas de \$1 o \$300 (digamos que un esfuerzo alto incluye un elemento de riesgo que aumenta las probabilidades de ambos extremos). Con esfuerzo alto $e_a = 1$, las probabilidades de $1, 10$ y 300 son $\frac{1}{3}$ cada una, mientras que si el es bajo $e_b = 0$, las probabilidades de 1 y 300 son $\frac{1}{4}$. La función de utilidad del trabajador es $\sqrt{s} - e$ donde s es el sueldo y e el esfuerzo; su utilidad de reserva es $\overline{u} = 4$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada esfuerzo, y el contrato que elegirá el principal.
Parte B. Repita la Parte A, pero con $\overline{u} = 0$

Ejercicio 16 En este ejercicio no diseñamos un contrato óptimo, pero comparamos varios contratos "cualesquiera". The driver of a car can exert effort to avoid an accident ($e = 1$) or not exert any effort ($e = 0$). If $e = 1$, the probability of an accident is $\frac{1}{2}$, if $e = 0$ it is 1. The driver's wealth without accident is: $w = 100$. In case of an accident, the repair of the car costs 64. So, if there is an accident, the driver has $w = 100 - 64$ left. The driver's utility of wealth is $\sqrt{w}$, that is, the driver is risk averse. The cost of effort, $C(e)$, are 0 if effort is $e = 0$, and 1 if effort is $e = 1$. The driver's utility function is: $u(w; e) = \sqrt{w} - C(e)$

Parte A. Will the driver choose to exert effort? Compare the expected utility of the driver when exerting effort ($e = 1$) with the expected utility when exerting no effort ($e = 0$).
Parte B. Now suppose there is a risk neutral insurance company. This insurance company acts like a principal with the driver being the agent. Suppose the insurance company cannot monitor the driver's behavior. The insurance company considers three contracts, labeled A, B and C. Each contract specifies the price p and the amount of money the driver gets in case of an accident, d. Given p and d, the final wealth of the driver in case of no accident is $w_0 = 100 - p$ and the final wealth in case of an accident is $w_A = 36 - p + d$. Contracts are

Contract	Price p	Payment d
A	36	64
B	19	47
C	19	32

For each of the contracts, calculate the final wealths, w0 and wA, in the two outcomes, and list them in a table of the following type:

Contract	w_0	w_A
A		
B		
C		

Which contract offers full insurance to the driver?

Parte C. For each of these contracts, determine which of the two effort levels, e = 0 or e = 1, would be expected utility maximizing for the driver if he accepted that contract. Assume that the driver, if both effort levels yield the same expected utility, chooses e = 1.

Parte D. Which of these contracts are such that the driver would accept the contract rather than staying uninsured? (For each contract, compare the expected utility from being uninsured with the expected utility when having the contract and choosing the optimal effort level. Assume that the driver accepts a contract if indifferent between insuring and not insuring.)

Parte E. Which of the three contracts gives the insurance company the highest expected profits? What are the expected profits of the insurance company if it offers this contract?

En general, pero no siempre, asumiremos que todas las acciones le asignan probabilidad positiva a todos los niveles de producto. Para ver por qué, imaginemos que una acción (digamos la a) le asigna probabilidad positiva a un cierto x_i, pero la acción b (de costo alto) no. Si queremos implementar la acción b, no habrá "problema" de agencia, pues alcanzará con pagarle un sueldo fijo al agente (que le asegure $\overline{u}$ si hace b) para todos los niveles de producto menos para x_i, y pagarle "menos infinito" si ocurre x_i. En ese caso, el agente no querrá hacer la acción a, pues con una probabilidad positiva ocurrirá el nivel de producto x_i y ello le dará una utilidad muy pequeña (que más que compensará la ganancia de costo por hacer a en vez de b). Este tipo de contrato se llama "burning oil" pues es como avisarle al agente: "si sale el producto x_i te quemo en aceite hirviendo". En algunos casos, cuando la utilidad está acotada por debajo, o los sueldos admisibles tienen una cota inferior, no se podrá hacer el burning oil, y volverá a surgir el problema de la agencia aunque no todas las acciones le asignen probabilidad positiva a todos los niveles de producto.

Ejemplo 17 Supongamos que hay: tres niveles de producto x_1, x_2 y x_3; dos acciones a y b, con $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, y $\pi_{1b} = 0$, $\pi_{2b} = \frac{1}{3}$ y $\pi_{3b} = \frac{2}{3}$. El costo de a es $c_a = 0$ y el de b es $c_b = 1$. La utilidad es $u(s) = \log s$ y $\overline{u} = 0$. Para implementar a ponemos $s_1 = s_2 = s_3 = s$ y nos queda $\log s = 0 \Leftrightarrow s = 1$. Para implementar b ignoramos la restricción de incentivos; sabemos que en ese caso lo óptimo es fijar sueldos constantes $s_2 = s_3 = z$ (el sueldo s_1 no aparece en el problema) y queda $\log z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = s_2 = s_3 = e$. Luego, podemos elegir s_1 para hacer que se cumpla la restricción de incentivos: $\log z - 1 \geq \frac{1}{3}\log s_1 + \frac{2}{3}\log z \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{3}\log s_1 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow s_1 \leq e^{-2}$.

Un lector atento notará que aunque $\frac{\pi_{2a}}{\pi_{2b}} \neq \frac{\pi_{3a}}{\pi_{3b}}$ igual se cumple que $s_2 = s_3$, lo que parece contradecir la ecuación (1.1). Sin embargo, una mirada más atenta nos indica que en realidad no hay contradicción, ya que como la restricción de incentivos no está activa, $\mu = 0$. Más concretamente, lo que hemos hecho para resolver el problema de implementar b es: resolvemos sin la restricción de incentivos, y nos queda $s_2 = s_3$ como siempre y nos queda s_1 libre. Luego, planteamos la de incentivos, y utilizamos s_1 para que se satisfaga. Eso demuestra que esta propuesta (y no la que saldría de la ecuación (1.1) con $\mu > 0$) con sueldos constantes es la óptima (pues sale del problema con una sola restricción).

Para ver que la solución propuesta es la correcta, imaginemos lo siguiente. Para implementar b, nos olvidamos momentáneamente de la restricción de incentivos. Ya sabemos por la ecuación (1.1) cuando no hay multiplicador μ, que la solución óptima es con sueldos constantes: $1/u'(s_i) = \lambda$. Pero eso vale sólo para los sueldos con $\pi_{ib} > 0$ (en el problema, aquellos niveles de producto con $\pi_{ib} = 0$ no aparecen; escríbalo y verifíquelo). Entonces tenemos que sueldos constantes que hacen que la utilidad de hacer b sea $\overline{u}$ es la solución al problema sin la restricción de incentivos. Pero ahora tenemos la libertad de elegir s_1 (en el ejemplo anterior, y cualquier s_i tal que $\pi_{ib} = 0$ en general) de cualquier manera que querramos. Entonces, si elegimos s_1 de tal forma que se cumpla la restricción de incentivos, tendremos una solución al problema, porque s_1 no afecta ni la restricción de participación, ni la función objetivo. **completar**

Ejemplo 18 El agente puede elegir cualquier $a \geq 0$, y el producto es $x = a + \varepsilon$, donde ε se distribuye en el intervalo $[-k, k]$. En este caso, elegimos la acción óptima, cuando no hay información incompleta, digamos a^*; si ocurre cualquier producto entre $a^* - k$ y $a^* + k$ le pagamos un sueldo constante que lo deje indiferente entre participar y no participar; si ocurre otro producto, lo matamos.

Ejercicio 19 Hay dos acciones a y b, con costos 0 y $c > 0$ respectivamente. Hay dos niveles posibles de producto, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. La acción a da un nivel de producto x_1 con probabilidad 1 y la acción b da el nivel de producto x_2 con probabilidad 1. La función de utilidad del agente es $u(s) = \sqrt{s}$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} < 0$, pero con $\overline{u} + c > 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar a.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para implementar b.

Parte C. ¿Para qué niveles de c conviene implementar a y para cuáles b?

Ejercicio 20 Hay tres niveles de producto $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ y $x_3 = 83$, y tres acciones que puede tomar el agente, a, b y d, con $\pi_a = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\pi_b = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\pi_d = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Los costos de las acciones son $c_a = 0$, $c_b = 1$ y $c_d = 2$. La utilidad del agente es $u(s) = \sqrt{s}$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} = 4$. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada acción, y cuál es el contrato que más le conviene al principal.

En el próximo ejercicio, hay dos contratos candidatos a óptimos para implementar la acción b.

Ejercicio 21 Un agente puede tomar una de tres acciones a, b y d, que generan distribuciones de probabilidad sobre los productos $x_1 = 10$ y $x_2 = 20$ dadas por

	a	b	d
costo	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\Pr(x_1)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0

La función de utilidad del agente es $u(s) = -2^{-s}$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = -1$; los sueldos pueden ser negativos.

Encuentre los contratos óptimos para implementar cada acción.

Ejercicio 22 En el modelo de agente principal, suponga que hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Suponga que $\pi_{ia} = \frac{1}{2}$ para todo i, $\pi_{1b} = p < \frac{1}{2}$, y $c_a = \overline{u} = 0 < c = c_b$. La función de utilidad del agente es $u(s) = \log s$. Encuentre cuanto cuesta implementar cada acción, y cuál es la acción óptima. Los resultados deben estar sólo como función de c y p.

Ejercicio 23 De Alessandro Lizzeri. Para cada nivel de trabajo $t \in \mathbf{R}_+$ que haga el agente, los niveles de producto son uniformes en $[t, t+1]$. El esfuerzo o trabajo no es observable para el principal, pero el producto si. La utilidad del agente es $U(w,t) = \log w - \frac{t^2}{10}$ y su utilidad de reserva es 0. El principal es neutral al riesgo, y maximiza el valor esperado del producto menos el sueldo esperado.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar cada $t > 0$.
Parte B. Encuentre el e óptimo.

Ejercicio 24 Efficiency Wages. Salarios de eficiencia. Esta es la teoría de Shapiro y Stiglitz (Shapiro, C. and Stiglitz, J. (1984), "Equilibrium unemployment as a worker discipline device," American Economic Review, June 1984) de por qué los salarios son más altos que lo que "deberían ser", y por qué no bajan, aún si hay desempleo: si bajan los salarios, los trabajadores no ejercen esfuerzo. Este ejercicio tiene un "aire" de agente principal, pero no se precisa saber nada de agente principal para resolverlo. La utilidad de cada trabajador de una firma depende de su sueldo w y su esfuerzo e de acuerdo a la función $U(w,e) = w - e$. El trabajador puede elegir niveles de esfuerzo 0 o 1. El valor del producto de la firma es αm, donde $\alpha > 0$ y m es el número de empleados que eligen $e = 1$ (el α se puede interpretar como la probabilidad de éxito de la tarea que realiza el trabajador si se está esforzando: por ejemplo si se esfuerza produce \$1 con probabilidad α; en ese caso el valor esperado del producto es αm). La firma puede monitorear el esfuerzo de sólo un trabajador. Si $e = 0$ para el trabajador, no se le paga ese período. Si $e = 1$, se le paga w. Todos los trabajadores no monitoreados ganan w, y todos los trabajadores tienen iguales chances de ser monitoreados. Suponga que la firma emplea n trabajadores.

Parte A. Encuentre los valores de n y w para los cuales los trabajadores elegirán $e = 1$.

Parte B. Escriba el problema que debe resolver la firma para maximizar beneficios, asumiendo que puede elegir n y w.

Parte C. Encuentre los valores óptimos de n y w.

Parte D. Muestre (hay tres maneras distintas) que cuando sube α suben los beneficios del principal.

Ejercicio 25 El agente puede ejercer un esfuerzo $a \in [0, A]$, que resultará en una probabilidad $p(a)$ de éxito del proyecto: el proyecto puede rendir \$1 o \$0 y $p(a)$ es la probabilidad que salga \$1. La función $p(\cdot)$ es estrictamente creciente y cóncava con $p(0) = 0$ y $p'(0) > 1 > p'(A)$. Tanto el agente como el principal son neutrales al riesgo, pero los salarios pagados al agente deben ser mayores o iguales que 0. Concretamente, para un sueldo w y un esfuerzo a, la utilidad del agente es $w - a$. El agente tiene una utilidad de reserva de $\overline{u} = 0$.

En cualquier caso, el principal debe elegir que a quiere que haga el agente, encontrar el esquema óptimo para implementarlo, y luego elegir el a óptimo.

Parte A. Suponga que el principal puede pagar $\$M$ por monitorear perfectamente las acciones del agente. Si decide hacerlo, encuentre el esquema óptimo para implementar cada a, y luego encuentre la condición que deberá cumplir el a óptimo (verifique por ejemplo que si $p(a) = \sqrt{a}$, entonces el a óptimo es $a^* = \frac{1}{4}$).
Parte B. Suponga ahora que el principal decide no monitorear perfectamente. En este caso, el principal debe elegir una acción a para implementar. Luego, inspecciona al trabajador, pero una inspección por parte del principal se equivoca con probabilidad π : si un individuo no está ejerciendo el esfuerzo requerido por el principal, a, con probabilidad π el principal no se entera.

Los sueldos son función no del éxito del proyecto, sino de si el individuo está trabajando cuando se lo monitorea: si trabaja a, o si no está trabajando a y lo inspeccionan y la inspección se equivoca, recibe un sueldo (digamos w_A); pero si no trabaja a, y la inspección lo detecta, le pagan otro sueldo w_B.

El principal fija un a cualquiera; después debe elegir w_A y w_B para implementar cada a, y luego debe elegir el a óptimo.

Encuentre el esquema óptimo para implementar cada a, y encuentre el a óptimo. Muestre que a cae cuando sube π. Verifique que para $A \geq \frac{1}{4}$ y $p(a) = \sqrt{a}$ el a óptimo es $\left(\frac{1-\pi}{2}\right)^2$ (si $\left(\frac{1-\pi}{2}\right)^2$ fuera mayor que A, el principal querría implementar $a = A$, pero la condición de primer orden no se cumple).

Ejercicio 26 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y $b > a > 0$. Los niveles posibles de producto son x_1 y $x_2 > x_1$. Las acciones del agente no son observables, y la función de utilidad del agente es $u(s,k) = -e^{-s} - k$, para $k = a, b$ y s el salario (que puede ser negativo). El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u} < -1 < -b$.

Parte A. Si $\pi_{2a} = \frac{9}{10}$ y $\pi_{2b} = 1$ y $\frac{x_1 - x_2}{10} < \ln\left(\frac{b+\overline{u}}{a+\overline{u}}\right)$, diseñe un contrato de equilibrio.

Parte B. Si $\pi_{2a} = a$ y $\pi_{2b} = b$, para $1 > b > a > 0$, diseñe un contrato de equilibrio.

Ejercicio 27 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b, con $a = \log 5/4$ y $b = 3a/2$. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$. Las acciones del agente no son observables y la función de utilidad del agente es $u(s,k) = \log s - k$ para $k = a, b$. La utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$. Si el agente hace la acción a, la distribución de probabilidades sobre los niveles de producto es $\pi_{1a} = \pi_{2a} = 1/2$, y si hace la acción b, la distribución es $\pi_{1b} = 1/4 = 1 - \pi_{2b}$.

Parte A. Calcule las utilidades del principal cuando implementa a, y cuando implementa b. ¿Qué acción querrá implementar el principal?

Parte B. Repita la Parte A, asumiendo que $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ejercicio 28 Deberes. En teoría, este problema fue el causante de la crisis que golpeó a Argentina y Uruguay en el 2001 y 2002. El federalismo argentino es así: las provincias recaudan impuestos, los pasan al gobierno central, y éste reparte lo recaudado entre las provincias. Este diseño sería bueno si la recaudación no dependiera de la voluntad de las provincias, y fuera aleatoria (en ese caso, el diseño está bueno porque al compartir lo recaudado es como un seguro para las provincias). Pero como la recaudación depende del esfuerzo que hagan las provincias, y sólo una parte de la recaudación vuelve a la provincia, las mismas tienen incentivos a no recaudar nada. Esta falla en el diseño fue la que generó un déficit fiscal gigante que hundió primero a Argentina y después a Uruguay.

Antes de empezar con el ejercicio, va un ejemplo sencillo que muestra por qué, si la recaudación de las provincias no dependiera de su esfuerzo, sería óptimo compartir los ingresos y redistribuirlos. Supongamos que hay dos personas, cada una recibirá $\$a$ (de alto) con probabilidad p, y $\$b < a$ con probabilidad $1 - p$ (recibir a es tener buena suerte, o recaudación alta, y b mala suerte o recaudación baja). Mostraremos ahora que si las personas son aversas al riesgo, les conviene repartir lo que sea que obtengan. Recordamos que una persona es aversa al riesgo si prefiere recibir $\$x$, antes que una lotería con valor esperado $\$x$. Eso implica, para una lotería que da a y b con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una, que

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{2}u(a) + \frac{1}{2}u(b).$$

Obtenemos entonces que la utilidad de compartir es mayor que la que obtendría cada uno por su cuenta:

$$\begin{aligned} p^2 u(a) + 2p(1-p)\, u\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-p)^2 u(b) &> p^2 u(a) + 2p(1-p)\left(\frac{1}{2}u(a) + \frac{1}{2}u(b)\right) + (1-p)^2 u(b) \\ &= pu(a) + (1-p)\, u(b). \end{aligned}$$

Esta misma intuición es cierta en general (no depende de loterías simples, con dos resultados, ni de que haya sólo dos personas, etc).

Imaginemos que hay Gobierno Central y dos provincias. La utilidad de la provincia i es

$$\sqrt{g_i} - t_i$$

donde g_i es el gasto de la provincia y t_i son los impuestos recaudados en esa provincia. Suponga ahora que el gobierno central quiere maximizar su superávit fiscal esperado, sujeto a que las provincias tengan una utilidad mayor que $\overline{u}$ (que puede ser la utilidad de hacer un plebiscito y hacerse independientes. En principio, $\overline{u}$ podría ser negativa, y eso no generaría ningún problema en la resolución del ejercicio, pero asumimos $\overline{u} \geq 0$). Suponga también que las provincias transfieren toda su recaudación al gobierno, y que luego este les devuelve una parte. Las provincias sólo pueden gastar lo que les transfiere el Gobierno. Para simplificar, suponga también que p, la probabilidad de que la recaudación sea alta, puede ser sólo $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$, dependiendo del nivel de "esfuerzo" de la provincia (no hay un esfuerzo explícito en el modelo); asumiremos también que las realizaciones de la recaudación son independientes entre las provincias.[3] El nivel de recaudación alto es \$1 y el bajo es \$0.

Parte A. Llame s_A y s_B a las transferencias del gobierno a las provincias si la recaudación de la provincia fue Alta o Baja respectivamente, y escriba el problema de maximización del Gobierno Central, suponiendo que quiere implementar la acción que hace que la recaudación sea alta con probabilidad $\frac{3}{4}$.

Parte B. Encuentre los niveles óptimos de s_A y s_B, de la parte A.

Parte C. ¿Para qué niveles de $\overline{u}$ el Gobierno prefiere implementar la acción que da recaudación alta con probabilidad $\frac{3}{4}$, y para cuáles la acción que da recaudación alta con probabilidad $\frac{1}{4}$?

Ejercicio 29 Deberes. Suponga que el producto es $x = \varepsilon f(e)$, donde $e \in [0, \infty)$ es el esfuerzo del agente y ε es una variable aleatoria que puede tomar valores ε_1 y ε_2, con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, con iguales probabilidades. La función f es continua y estrictamente creciente. El agente es averso al riesgo, y su utilidad tiende a menos infinito cuando el ingreso tiende a 0. Formalmente, la utilidad del agente cuando recibe \$$s$ y se esforzó e es $u(s) - c(e)$ y $\lim_{s \to 0} u(s) = -\infty$. La función $u(s)$ es estrictamente cóncava y $c(e)$ es estrictamente creciente. El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u}$. El principal puede observar x, pero no puede observar ni e ni ε.

Parte A. Sea e^* el nivel de esfuerzo que maximiza la utilidad del principal si todo es observable. Suponga que el principal ofrece un contrato que paga s^* si el producto no baja de $\varepsilon_1 f(e^*)$, y s_* en caso contrario. Encuentre s^* y s_* para que el principal maximice su utilidad y el agente elija e^*. Para hacerlo, siga los siguientes pasos.

I. Encuentre el s^* para que, si se elige e^*, el agente obtenga $\overline{u}$.

[3] Este supuesto no es muy razonable, en principio, porque cuando a una provincia le va bien, les va bien a todas. Sin embargo, uno puede pensar que esto es "por encima" de cualquier otro ciclo conjunto que estén viviendo las provincias. Además, la independencia es "la razón" por la cual se diseñó el sistema como se diseñó: si la recaudación fuera perfectamente correlacionada entre las provincias, no habría ninguna razón para "compartir riesgos".

II. Sea e_* el mínimo e tal que $\varepsilon_2 f(e) \geq \varepsilon_1 f(e^*)$. Argumente que sea cual sea s_*, el agente sólo debe considerar los niveles de esfuerzo 0, e_* y e^*.

III. Elija s_* para que la utilidad de elegir e^* sea mayor que la utilidad de elegir e_* o 0.

Parte B. Suponga que ahora ε se distribuye uniforme en $[1,2]$. Suponga que la función de utilidad es $\log s - e$ y que $f(e) = e$ y que $\log \frac{3}{2} > \overline{u}$.

I. Encuentre el nivel e^* que el principal querrá implementar si el nivel de esfuerzo es observable.

II. Encuentre los niveles s^* y s_* tales que: el sueldo es s^* si el producto es mayor o igual que e^* y s_* en caso contrario; el agente quiere elegir e^*; s^* y s_* maximizan la utilidad del principal. Esta parte es equivalente a la parte A, pero con la distribución de ε cambiada.

Ejercicio 30 Un trabajador puede hacer dos niveles de esfuerzo, bueno o malo, que inducen probabilidades de error en la producción de 25% y 75% respectivamente. La utilidad del agente (trabajador) es $U(w,e) = 100 - \frac{10}{w} - e$, donde w es el sueldo recibido y e vale 2 si el esfuerzo es bueno y 0 si es malo (la desutilidad del esfuerzo se incurre independientemente de si el producto tiene errores o no). El nivel de utilidad de reserva del agente es 0. Los errores de producción son observables y por tanto se pueden incluir en los contratos. Los niveles de esfuerzo no son observables. El producto obtenido vale 20 si no hay errores y 0 si los hay. La utilidad del principal es $u(z) = z$ cuando z es la riqueza final (típicamente tenemos que $z = x - s$).

Parte A Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo malo, y calcule la utilidad del principal en este caso.

Parte B Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo bueno cuando el nivel de esfuerzo es observable. Calcule la utilidad del principal en este caso.

Parte C Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo alto cuando el esfuerzo no es observable. Calcule la utilidad del principal en este caso. Comparando las partes A y C, ¿Qué nivel de esfuerzo querrá implementar el principal?

Ejercicio 31 Lea el siguiente pedazo de artículo aparecido en La Nación el 7 de Noviembre de 2002.

> En cambio, para la Argentina es mucho más importante el hecho de que un ideólogo de los republicanos en materia económica, como Kenneth Rogoff, que en la actualidad es nada menos que el director de investigaciones y principal economista del Fondo Monetario Internacional, haya comenzado a desmontar la teoría del riesgo moral en los salvamentos. Esa teoría, que fue el caballito de batalla de los republicanos ultraconservadores, dice que los rescates del organismo multilateral hacen que los prestamistas y tenedores de títulos públicos puedan escapar sin sufrir pérdidas. Así, no habría riesgo alguno en colocaciones irresponsables.
>
> El riesgo sería, en cambio, para los contribuyentes de los países centrales. Los Estados Unidos son los mayores accionistas del FMI y por eso el secretario del Tesoro, Paul O´Neill, dijo que no quería poner en riesgo el dinero de los "plomeros y carpinteros". Rogoff, que fue uno de los que desarrolló la teoría que ahora anima las políticas del FMI, ha dicho hace poco en una publicación del organismo que no hay prueba alguna de que la teoría es acertada (para los préstamos entre naciones). Si estas ideas se revisan y las políticas respecto de los salvamentos cambian, habrá más

tranquilidad para quienes podrían necesitar muy pronto de uno, como es el caso de Brasil. Si, por el contrario, la Argentina es lanzada en los próximos días sin miramientos a la cesación de pagos con los organismos multilaterales, Brasil debería poner sus barbas en remojo. Y hay quienes creen que incluso antes de la victoria republicana existía un plan para llevar a la Argentina a lo más profundo del abismo.

En el gobierno hay funcionarios que comentan con la mayor de las reservas que creen que Krueger impulsa esta línea. Aseguran que quiere ver un default completo, para lanzar luego su prometido sistema de resolución de crisis de países similar al que se aplica en los Estados Unidos para las quiebras empresariales. Quienes así opinan dicen que Krueger sueña despierta con que ese esquema puede llevarla a obtener nada menos que el Premio Nobel en economía que alcanzó su implacable crítico, Joseph Stiglitz.

Conteste en no más de 5 renglones cada una de las siguientes preguntas

Parte A ¿Qué tiene que ver la teoría del agente principal con este artículo?

Parte B ¿Si tiene algo que ver, porqué sería malo que el FMI rescatara a los países?

Parte C Si no hubiera problemas de "reputación" o de "juegos repetidos" ¿tendría alguna relevancia esta crítica? Es decir, ¿sería óptimo dejar a los países quebrar si ello no influyera en lo que los países pueden inferir sobre su futuro en caso que les toque dar default?

Ejercicio 32 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre dos niveles de esfuerzo $e = 6$ y $e = 4$, y hay tres estados posibles de la naturaleza, cada uno con probabilidad $\frac{1}{3}$. Los niveles de producción, según los esfuerzos y estados se presentan en la tabla siguiente:

		Estados		
		ε_1	ε_2	ε_3
Esfuerzos	$e = 6$	60.000	60.000	30.000
	$e = 4$	30.000	60.000	30.000

La función objetivo del principal y del agente son respectivamente

$$\pi(x, w) = x - w \quad y \quad U(w, e) = \sqrt{w} - e^2$$

donde x es el nivel de producto, w el salario y e el nivel de esfuerzo. La utilidad de reserva es $\overline{u} = 114$.

Parte A. ¿Cuáles serían los contratos óptimos que implementarían $e = 4$ y $e = 6$ si hubiera información perfecta? ¿Cuál nivel de esfuerzo querría implementar el principal con información perfecta?

Parte B. Con información asimétrica (si sólo el agente puede saber su nivel de esfuerzo), encuentre el mejor contrato que implementa $e = 4$, el mejor contrato que implementa $e = 6$, y calcule los beneficios del principal en cada caso. ¿Qué nivel de esfuerzo querrá implementar el principal?

Ejercicio 33 Considere el siguiente modelo de Agente-Principal. Hay tres estados posibles de la naturaleza, A, M, B (alto, medio y bajo), que tienen probabilidades $20\%, 60\%$ y 20% respectivamente. Según el esfuerzo

del agente, $e_a = 1$ o $e_b = 0$, los estados resultan en niveles de producto 25 y 4 con las siguientes probabilidades

	A	M	B
	20%	60%	20%
e_a	25	25	4
e_b	25	4	4

.

El principal es neutral al riesgo, pero el agente tiene una función de utilidad por sueldo y esfuerzo dada por $u(w, e) = \sqrt{w} - e$, y una utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar cada e cuando los esfuerzos y los estados de la naturaleza no son observables, pero el producto sí.
Parte B. Encuentre el e óptimo para el principal cuando los esfuerzos y los estados de la naturaleza no son observables, pero el producto sí.
Parte C. Suponga que está disponible una tecnología que le dice al principal cuándo ocurrirá el estado B antes de que el agente elija su esfuerzo. El principal, en ese caso podría, si quisiera, decirle al agente "el estado es B, no te calientes y no te esfuerces", y diseñar un contrato que fuera contingente en el producto y en si el estado es B o no. ¿Cuánto aumentarían los beneficios del principal si tuviera disponible esa tecnología? (calcule los contratos óptimos para implementar cada esfuerzo, y calcule los beneficios del principal en este caso). Pista: el problema cuando ocurre B se puede resolver en forma aparte; después sólo hay que calcular las probabilidades de los otros dos estados, dado que no se está en B y resolver un problema de 2x2.

Ejercicio 34 El "problema" de la agencia con un agente neutral al riesgo. Suponga que el agente puede elegir cualquier $b \in [0, 1]$, que el costo para el agente de elegir b es $c_b = b^2$ y que la distribución de probabilidad que la acción b induce sobre los niveles de producto $1, 2$ y 3 es

$$(\pi_{1b}, \pi_{2b}, \pi_{3b}) = \left(\frac{2}{3}(1-b), \frac{1}{3}, \frac{2}{3}b\right).$$

Suponga que la función de utilidad del agente está dada por $u(s) = s$, y su nivel de utilidad de reserva es 0.

Parte A. Demuestre que para cada acción b, el nivel de beneficios esperados del principal si puede diseñar el contrato para implementar b sin las restricciones de incentivos es

$$\frac{2}{3}(1-b) + \frac{1}{3} * 2 + \frac{2}{3}b * 3 - b^2$$

Parte B. Encuentre la acción b^* que maximiza los beneficios (no restringidos por problemas de incentivos) de la Parte A.

Parte C. Encuentre F para que

$$\frac{2}{3}(1-b^*)(1-F) + \frac{1}{3}(2-F) + \frac{2}{3}b^*(3-F) - b^{*2} = 0.$$

En un contrato de franquicia, este F es la suma fija que debe pagar el agente a cambio de quedarse con el producto de la firma.

Parte D. Para el F de la Parte C, demuestre que el contrato

$$(s_1, s_2, s_3) = (1-F, 2-F, 3-F)$$

es óptimo para implementar b^*, aún con las restricciones de incentivos.

Parte E. Demuestre que principal querrá implementar b^*.

Parte F. Explique, en menos de 5 renglones, porqué le parece que el problema del principal es tan fácil –considerando que hay infinitas acciones, tres niveles de producto, etc–.

Ejercicio 35 Deberes. Este es un problema de Agente Principal, sin "problemas" de agencia, pues el empleado es neutral al riesgo. Supongamos que el dueño de una empresa debe contratar a un empleado. El empleado puede esforzarse mucho (acción b) con costo $c_b = 2$, o poco (acción a) con costo $c_a = 0$. La utilidad del agente, si recibe un salario w y hace la acción i, para $i = a, b$, viene dada por $w - c_i$, mientras que su utilidad de reserva es $\overline{u} = 10$. Los salarios pueden ser negativos.

La distribución de probabilidades que genera el esfuerzo sobre los niveles de producto $x_1 = 20$ y $x_2 = x > 20$ viene dada por $\pi_{1b} = \frac{1}{5}$ y $\pi_{1a} = \frac{3}{5}$. Los beneficios del principal (dueño) si el producto es x_i y el salario pagado es w son $x_i - w$.

Parte A. ¿Cuáles son los salarios que pagaría el dueño si quiere que el esfuerzo sea bajo?
Parte B. ¿Cuáles son los salarios que pagaría el dueño si quiere que el esfuerzo sea alto?
Parte C. ¿Cuáles valores de x hacen que el dueño quiera implementar el esfuerzo alto?
Parte D. Para cualquier x que haga que el esfuerzo alto sea óptimo, ¿el contrato óptimo se puede interpretar como una franquicia?
Parte E. Si en vez de ser alto, x es bajo de tal forma que es óptimo implementar un esfuerzo bajo, ¿Hay alguna forma de implementar el contrato óptimo con salarios no constantes? (pista: el agente es neutral al riesgo)

Ejercicio 36 Este ejercicio es una versión más general de los dos anteriores, que muestra que los argumentos anteriores no dependen de los detalles que teníamos antes. Suponga que el principal y el agente son neutrales al riesgo. Hay un conjunto A de acciones que podría tomar el agente, A puede ser finito, o el intervalo $[0, 1]$ o lo que sea. Para cada a, el agente tiene un costo en útiles de c_a, y hay una distribución de probabilidades π_a sobre los posibles niveles de producto X. Fije un esquema de sueldos cualquiera $s(x)$, y sea a^* la acción que maximiza la suma de las utilidades del agente y del principal (el a^* no depende del esquema de sueldos, eso es sólo para que pueda escribir la suma de las utilidades formalmente). Muestre que el principal querrá implementar a^*. Para ello siga los siguientes pasos.

Parte A. Muestre que para cualquier acción a, si se cumple la restricción de participación con igualdad, el principal obtiene beneficios de $E_{\pi_a}(x) - c_a - \overline{u}$.
Parte B. Muestre que si no hay problema de incentivos, el principal quiere implementar a^*.
Parte C. Muestre que si al agente se le ofrece una franquicia donde tiene que pagar cualquier suma fija F independientemente del producto x, elegirá la acción a^*.
Parte D. Argumente que aún si el principal no puede observar el esfuerzo del agente, le convendrá implementar a^*, y encuentre el monto óptimo (para el principal) de la franquicia.

Ejercicio 37 El agente puede elegir cualquier nivel de esfuerzo o trabajo $t \in [0, 1]$; el costo para él de elegir t es t, su función de utilidad es $u(s) = s$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$. Si el agente elige t, la distribución de probabilidades sobre los tres niveles de producto $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 9$ es $\pi_{1t} = 1 - t(1 - t)$, $\pi_{2t} = \frac{t(1-t)}{3}$ y $\pi_{3t} = \frac{2t(1-t)}{3}$. El principal es averso al riesgo y su función de utilidad es $v(w) = \sqrt{w}$.

Encuentre el contrato óptimo para el principal.

Ejercicio 38 Suponga que si el individuo hace la acción a, la distribución de probabilidad sobre los niveles de producto $(1,2,3)$ es $\pi_{1a} = \pi_{2a} = \pi_{3a} = 1/3$. El costo de la acción a para el individuo es $c_a = 0$. Si el individuo hace b en cambio, los retornos son

$$\pi_{1b} = \frac{1}{6},\ \pi_{2b} = \frac{1}{3},\ \pi_{3b} = \frac{1}{2}$$

y el costo es $c_b = 1$. Suponga finalmente que la utilidad de reserva del individuo es $\overline{u} = 0$, y que la función de utilidad del individuo es $u(s) = s$ (no es averso al riesgo).

Parte A. Si las acciones fueran observables, ¿qué acción querría implementar el principal, y cuáles serían sus beneficios? Recuerde que para resolver el problema del principal con acciones observables, debe ignorar la restricción de incentivos.

Parte B. Suponga que las acciones no son observables y encuentre el contrato óptimo para implementar a, el contrato óptimo para implementar b, e inidque qué contrato elegirá el principal.

Parte C. Repita las partes A y B suponiendo que $c_b = 1/10$.

Ejercicio 39 Deberes. La utilidad del agente es $u(s) = \log s$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$ Puede tomar 3 acciones, i, m, d, con costos $c_d = 3, c_m = 2$ y $c_i = 1$. Las distribuciones de probabilidad para los 3 niveles de producto $x_i = e^i$, para $i = 1,2,3$ son (sólo escribimos las probabilidades de x_1 y x_2, dado que las de x_3 salen por diferencia):

	i	m	d
x_1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada una de las acciones. Pista: para implementar d, demuestre que si están activas las restricciones de participación, y la de incentivos con m, al individuo le convendrá hacer i (por lo que no se implementa d en este caso). Y cuando resuelva con la de participación de d y la de incentivos de d contra i activas, no olvide verificar que se cumple la de incentivos de d contra m.
Parte B. Asuma ahora que $x_i = e^i$ para todo i, y que $c_i = 1$, $c_m = 2$ y $c_d = 3$. ¿Cuál es el contrato óptimo?
Parte C. Repita las Partes A y B, asumiendo que la utilidad del agente es $u(s) = s$.

Ejercicio 40 En el curso de Tópicos de Micro hay dos parciales. En cada parcial, a los alumnos les puede ir bien (b) o mal (m), dependiendo si hicieron un esfuerzo alto ($e_A = 2$) o bajo ($e_B = 1$). Para simplificar, asumimos que hay un solo alumno. Las probabilidades de cada resultado como función del esfuerzo vienen dadas por la siguiente tabla

	A	B
b	p	$1-p$
m	$1-p$	p

para $p > \frac{1}{2}$. La función de utilidad del profesor es $e^1 + e^2$. Debe elegir las notas en el primer y segundo parciales, y la nota final del curso como función de las notas de los parciales. A los alumnos sólo les importa la nota final del curso y los niveles de esfuerzo. Sean $n^1, n^2 \in \{n_b, n_m\}$ las notas del primer y segundo parcial. Supondremos $n_m = 1$ y $n_b \geq 1$, y n_b será la variable de elección. Supongamos que el profesor promete al principio del curso que la nota final del curso será

$$F = \min\left\{n^1, n^2\right\}.$$

Para una nota final F y niveles de esfuerzo e^1 y e^2, la utilidad del alumno es

$$u = F - e^1 - e^2.$$

Parte A. Plantee las utilidades de los estudiantes de cada par de esfuerzos.

Parte B. Asuma que los alumnos eligen al principio del curso los niveles de esfuerzo para ambos parciales (es decir, no re-optimizan en la mitad del curso). Plantee el problema que debe resolver el profesor si está obligado a usar $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$.

Parte C. Resolver el problema de la Parte B y calcular la utilidad del profesor. Esta es la utilidad cuando ambas partes pueden "comprometerse" a cumplir un plan.

Parte D.i. Asuma ahora que (inesperadamente) los alumnos pueden decidir luego del primer parcial si desean elegir un esfuerzo alto o bajo para el segundo parcial. Calcule la utilidad esperada del profesor, antes de empezar el curso, si se mantiene la regla $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$ (esta parte es la relevante si el profesor decide cambiar de estrategia inesperadamente: cuando promete algo y los alumnos le creen, pero él decide cambiar).

Parte D.ii. Asuma ahora que los alumnos se imaginan de antemano que podrán re-optimizar luego del primer parcial. Repita la Parte D.i.

Parte E. Suponga que el alumno se cree la promesa original del profesor, pero que le fue mal en el primer parcial. Suponga también que el profesor rompe inesperadamente su promesa de fijar $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$, y asegura que la nota final será n^2. Encuentre qué restricción debe satisfacer n_b para que el alumno quiera elegir e_A.

Parte F. Encuentre la utilidad del profesor, antes de empezar el curso, si sólo él sabe que violará su promesa en caso que al alumno le vaya mal en el primer parcial y el alumno puede re-optimizar en la mitad del curso.

Parte G. Teniendo en cuenta todas las partes anteriores, evalúe en 5 renglones la conveniencia de la regla $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$ para los fines del profesor.

Ejercicio 41 Deberes. Este ejercicio explica en forma sencilla una de las teorías de la estructura de financiamiento óptimo de las empresas. En la teoría clásica, de Modigliani-Miller, al dueño de la empresa le da lo mismo elegir cualquier proporción entre deuda y fondos propios para financiar sus proyectos. Esta teoría dice que la deuda es buena para darle incentivos correctos a los administradores. El dueño de una empresa, el principal, debe elegir qué proporción de un proyecto de \$100 financia con deuda, y qué proporción con fondos propios. La tasa de interés de la deuda es 20%, y la de los fondos propios es 10% (es lo que le saca el dueño a su dinero en el banco).

Tanto el agente como el principal saben que cualquier dinero que se invierta en el proyecto rinde seguro 40%. El problema es que el agente puede usar los fondos para el proyecto, o para su "satisfacción personal", en cuyo caso el dinero le rinde a la empresa 0% (el capital se recupera, pero no rindió nada).

La utilidad del agente de usar $\$d$ en un "desfalco" y $\$c$ en lo "correcto" es

$$u_A(d, c) = d + f(c)$$

donde $f > 0$ y $f' < 1$ para todo c. Si el agente es despedido, tiene una utilidad de 0.

Si el capital recuperado por el principal luego del pago de la deuda es menor estricto que lo que aportó en fondos propios, el administrador pierde su empleo (una restricción alternativa sería que el principal quisiera recuperar, en vez de los fondos invertidos, los fondos invertidos más el interés que éstos hubieran generado. Eso no cambiaría los resultados).

Parte A. Asuma que el principal elige financiar $\$F$ con fondos propios, y $\$100 - F$ con deuda. ¿Cuál será el monto de desfalco elegido por el agente?

Parte B. Calcule la utilidad del principal de financiar F con fondos propios y $100-F$ con deuda (el principal posee \$100, y todo lo que no use en el proyecto le rendirá 10% en el banco). Haga esta parte asumiendo que no sabe cuánto desfalcará el administrador. Es decir, deje el resultado como función de F y d.

Parte C. Asuma ahora que el principal sabe cuánto desfalcará el agente ¿Cuál es la estructura de financiamiento óptima?

Ejercicio 42 Hay dos niveles de esfuerzo posibles $e_a = 1$ o $e_b = 2$, y tres niveles de producto posibles $x_1 < x_2 < x_3$. La distribución de probabilidad generada por cada acción sobre los niveles de producto es

	x_1	x_2	x_3
π_a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
π_b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La función de utilidad del agente es $u(s,e) = \sqrt{s} - ke$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 2$.

Parte A. Resuelva el problema del principal si desea implementar el esfuerzo e_a.

Parte B. Encuentre el valor de k^* tal que el contrato de "burning oil" típico (con sueldo constante en x_2 y x_3, que le da una utilidad de $\overline{u}$ al agente, y un s_1 lo más bajo posible) es óptimo para implementar e_b si y sólo si $k^* > k$. Interprete en 4 renglones porqué los k chicos sirven para el burning oil, y los grandes no.

Parte C. Encuentre el contrato óptimo para implementar e_b si $k = 3$. (Pregunta que "no importa demasiado": ¿Por qué no está activa la restricción de participación?) Con ese valor de k, ¿Que acción querrá implementar el principal si $x = (1,2,3)$? (Pista: debemos tener $s_1 = 0$. La razón es que sólo aparece en el lado derecho de la restricción de incentivos, y cuanto más chico s_1 más grande es el conjunto de s_2 y s_3 que podemos elegir, por lo que conviene s_1 lo más chico posible).

Parte D. Suponga ahora que $\pi_b = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Repita las partes B y C.

Parte E. Suponga ahora que $\pi_b = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Repita las partes B y C.

Hasta ahora hemos analizado casos en los que el número de acciones es finito y reducido. Puede ser útil algunas veces considerar problemas en los que hay un continuo de acciones. Analizaremos ahora uno de esos problemas, y el método para resolverlo: el enfoque de primer orden.

En este problema hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [e_b, e_a]$, y para cada nivel de esfuerzo e, el costo para el individuo es e, y la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e)$ que asumiremos que es cóncava. La función de utilidad del individuo es $u(\cdot)$, no acotada por debajo, y su inversa es $f(\cdot)$. Asumimos que π y u son crecientes, cóncavas y que sus derivadas segundas existen y son estrictamente negativas. La utilidad de reserva es $\overline{u}$.

Comenzaremos con el planteo del problema en su versión difícil. El problema que debe resolver el principal si quiere implementar el nivel de esfuerzo e^* es el de elegir u_1 y u_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & & (1-\pi(e^*))(x_1 - f(u_1)) + \pi(e^*)(x_2 - f(u_2)) \\ \text{sujeto a } & (1-\pi(e^*))u_1 + \pi(e^*)u_2 - e^* & \geq & \overline{u} \\ & (1-\pi(e^*))u_1 + \pi(e^*)u_2 - e^* & \geq & (1-\pi(e))u_1 + \pi(e)u_2 - e \quad \forall e \in [e_b, e_a] \end{aligned} \tag{1.6}$$

Lo difícil de este problema es que hay infinitas restricciones de incentivos. La gracia del enfoque de primer orden es que todas estas restricciones se pueden reducir a una sola ecuación. En particular, lo que nos dicen las restricciones de incentivos es que la función $U(e) \equiv (1-\pi(e))u_1 + \pi(e)u_2 - e$ se debe maximizar en $e = e^*$. Como π es cóncava, U también lo es siempre que $u_2 \geq u_1$ (que siempre se cumple en el óptimo). Por lo tanto, para cualquier $e^* \in [e_b, e_a]$, si el principal elige u_1 y u_2 para que se cumpla $U'(e^*) = 0$, el agente querrá elegir e^* (eso es la suficiencia de la condición de primer orden para un máximo global). Para $e^* = e_b$ o $e^* = e_a$ no es necesario fijar u_1 y u_2 para que se cumpla la condición de primer orden, y de hecho, como veremos, en general no se cumplirá para e_b. Para ver por qué si u_1 y u_2 son óptimos para implementar e_a, no es necesaria la condición de primer orden, piense en el caso de maximizar x con $x \in [0,1]$: el óptimo se da en $x = 1$, pero la condición de primer orden no se cumple (estamos en una esquina).

De la discusión anterior, deducimos que para cualquier $e^* \in (e_b, e_a)$, las infinitas restricciones se pueden cambiar por $U'(e^*) = 0$, que es

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{\pi'(e^*)}.$$

Sustituyendo esto en la restricción de participación, con igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} (1-\pi(e^*))u_1 + \pi(e^*)u_2 - e^* &= \overline{u} \Rightarrow u_1 + \pi(e^*)(u_2 - u_1) - e^* = \overline{u} \Rightarrow u_1 + \frac{\pi(e^*)}{\pi'(e^*)} - e^* = \overline{u} \\ \text{Por tanto, } u_1(e^*) &= \overline{u} + e^* - \frac{\pi(e^*)}{\pi'(e^*)} \quad \text{y} \quad u_2(e^*) = \overline{u} + e^* + \frac{1-\pi(e^*)}{\pi'(e^*)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

El siguiente ejercicio completa la resolución del modelo.

Ejercicio 43 Suponga que hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [e_b, e_a]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e)$. La función de utilidad del individuo es $u(\cdot)$, no acotada por debajo, y su inversa es $f(\cdot)$. Asumimos que π y u son crecientes, cóncavas y que sus derivadas segundas existen. La utilidad de reserva es $\overline{u}$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar e_b.

Parte B. Encuentre el esquema óptimo para implementar e_a. Muestre que se debe cumplir la condición de primer orden. Para ello, formalice la siguiente idea. Supongamos que u_1 y u_2 son óptimos para implementar e_a pero que no se cumple la condición de primer orden. En ese caso se debe cumplir que $u_2 - u_1 > 1/\pi'(e_a)$. En ese caso, se puede subir u_1 en una cantidad pequeña c y bajar u_2 de forma de que se siga cumpliendo la restricción de participación y el principal tendrá beneficios esperados mayores.

Parte C. Utilizando las Partes A y B y las fórmulas de $u_1(e^*)$ y $u_2(e^*)$ muestre que u_1 es decreciente y u_2 creciente. Muestre también que para el $u_1(e)$ de la ecuación (1.7) $u_1(e) \leq \overline{u} + e_b$ para todo e.

Una enseñanza económica en esta vorágine de fórmulas es la siguiente: de la ecuación (1.7) vemos que $u_1(e^*)$ y $u_2(e^*)$ son tales que $\lim_{e^* \to e_b} u_1(e^*) < \lim_{e^* \to e_b} u_2(e^*)$ (es decir, cuando pasamos de e_b a e^* cercano

a e_b los sueldos tienen un salto), por lo tanto, nunca convendrá implementar niveles bajos de esfuerzo. La razón es que al pasar de e_b a cualquier e chiquito pero mayor que e_b, u_1 salta para abajo y u_2 salta para arriba. Eso se desprende de las fórmulas de la ecuación (1.7) y de la Parte A (eso, a menos que $\pi'(e_b) = \infty$). Este incremento "discreto" o "grande" en el riesgo tiene un costo discreto o grande para el principal, porque el agente es averso al riesgo. El beneficio de implementar $e > e_b$ cambia en forma continua, sin embargo. El resultado es que convendrá implementar e_b.

Ejemplo 44 Suponga que hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1 + 1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [0,1]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e) = \frac{1+e}{2}$. La función de utilidad del individuo es $u(s) = -1/s$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} = -2$. El costo del esfuerzo es e.

En este caso tenemos que para implementar $e = 0$ los pagos en útiles y en dinero son $u_1 = u_2 = -2$ y $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$. Los beneficios del principal son $V(0) = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{1}{2}$. Para implementar $e \in (0,1]$ se debe elegir

$$u_1(e) = -2 + e - 1 - e = -3 \quad \text{y} \quad u_2(e) = -2 + e + 2\left(1 - \frac{1+e}{2}\right) = -1.$$

Una cosa curiosa de este ejemplo es que con este esquema de pagos, el agente está indiferente entre todos los niveles de esfuerzo. Por lo tanto, implementa "débilmente" a cualquier esfuerzo: el agente quiere hacer el e que le pedimos, pero podría hacer cualquier otro. La razón es que la utilidad del agente (el lado derecho de la restricción de incentivos en 1.6) es lineal en e. Entonces si la derivada se anula para algún e, se anula para todo e.

En este ejemplo, los sueldos son $s_1 = \frac{1}{3}$ y $s_2 = 1$, y los beneficios del principal

$$V(e) = \frac{1-e}{2}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1+e}{2}(x_2 - 1) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{1}{3}\right)e + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{2}{3}.$$

Esta expresión es creciente en e, por lo que se maximiza para $e = 1$, arrojando unos beneficios máximos de $V(1) = x_2 - 1$, que son mayores que $V(0)$.

Ejercicio 45 Deberes. Hay dos niveles de producto $x_1 = 0$ y $x_2 > 0$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [0,1]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e) = \sqrt{e}$. La función de utilidad del individuo es $u(s) = -1/s$, el costo de un esfuerzo e es e (utilidad de sueldo s y esfuerzo e es $-1/s - e$) y la utilidad de reserva es $\overline{u} = -2$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar cada esfuerzo $e \in [0,1]$.

Parte B. Muestre que en este caso los sueldos $u_1(e^*)$ y $u_2(e^*)$ convergen al mismo número, cuando $e^* \to 0$ (es decir, para esfuerzos cercanos a 0, el salario de x_2 no "salta para arriba" y el de u_1 no salta para abajo).

Parte C. Escriba la fórmula para los beneficios del principal de implementar un esfuerzo e cualquiera.

Parte D. Difícil. Muestre que cuando aumenta x_2, aumenta el e^* óptimo (Si quiere, hágalo asumiendo que los valores de x_2 antes y después del cambio son tales que el e^* óptimo es interior. No es importante, pero sólo para que sepan, para cualquier $x_2 \leq 2/3$, el esfuerzo óptimo es interior). Si no recuerda los métodos de estática comparativa, vea la Sección 7 de estas notas.

ver bolton y dewatripont página 148 a 150 para ejemplo resuelto

Ejercicio 46 Deberes. Un agente es contratado por un principal neutral al riesgo para trabajar en un proyecto. Si el proyecto sale bien, el principal recibe \$1.000, y si el proyecto sale mal, 0. La probabilidad de éxito es $1-e^{-h}$ donde h es el número de horas que el agente dedica al proyecto. El agente tiene una función de utilidad estrictamente creciente $u(s)$, con $u'' < 0$, sobre sus niveles de salario s (que no tienen porqué ser positivos). El agente trabajará en total 40 horas, y cualquier tiempo de ese total que no dedique al proyecto, lo trabajará lavando platos a \$10 por hora.

Parte A. Suponga que el principal puede observar la cantidad de horas trabajadas en el proyecto, y que puede hacer los pagos depender de las horas trabajadas y del éxito del proyecto (le puede pagar un salario total s_e si el proyecto resulta exitoso, o s_f si el proyecto falla). El agente puede aceptar o rechazar el contrato.

I. Escriba el problema que debe resolver el principal para maximizar su ingreso esperado.

II. Muestre que en la solución a este problema, los pagos al agente no dependen del resultado. Utilice esta propiedad para encontrar el número óptimo de horas de trabajo.

Parte B. Suponga ahora que el principal no puede observar las horas trabajadas, y que el contrato sólo puede especificar el pago como función del resultado. Otra vez, el agente puede aceptar o rechazar el contrato.

I. Escriba el problema que debe resolver el principal para maximizar su ingreso esperado.

II. Demuestre que para cualquier $h^* > 0$ que el principal quiera que el agente trabaje, el principal deberá pagar un sueldo más alto si el proyecto es exitoso. En otras palabras, si el principal quiere que el trabajador haga algo (trabaje una cantidad positiva de horas), deberá pagarle más si el proyecto es exitoso, que si no lo es.

Parte C. Notemos que en este ejercicio anterior no hay un costo separado de hacer una cierta acción: el costo de hacer un cierto h, es que deja de lavar platos esas h horas. Eso es relevante, porque muestra que no todos los problemas que vayamos a ver entran exacto en el marco de las notas, sino que hay variaciones, pero las mismas ideas se aplican. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada h.

Parte D. Encuentre el h que querrá implementar el principal.

Ejercicio 47 Un agente debe poner trabajo t para producir un bien b, donde $b = t + \varepsilon$, donde ε es ruido, $\varepsilon \sim N\left(0, \sigma^2\right)$. Para un sueldo de w, la utilidad del agente es $u(w,t) = -e^{-r\left(w - \frac{ct^2}{2}\right)}$ y su utilidad de reserva es $\overline{u}$. La utilidad del principal es $b - w$ (lo que recibe en bienes, menos lo que paga).

Parte A. Encuentre el mejor contrato cuando el principal puede observar la cantidad de trabajo. Para eso, como siempre, debe fijar un t cualquiera, y encontrar el esquema de salarios óptimo. Una vez que se tiene el esquema óptimo para un t, debe comparar los beneficios que arroja al principal cada t, y elegir el t óptimo.

Encuentre ahora el mejor contrato de la forma $w = a + fb$ (un contrato lineal en la cantidad de bien) cuando el principal no puede observar la cantidad de trabajo del agente. La forma de resolución es parecida a la que hicimos con infinitos esfuerzos. Las partes que siguen lo guían por la forma de resolución.

Parte B. Para cada a y f que se le ocurra fijar al principal, encuentre el nivel de esfuerzo que ejercerá el agente (para que chequeen la solución: la respuesta será que el esfuerzo óptimo es una función lineal de f que no depende de a).

Parte C. Ahora el principal debe fijar un t cualquiera, y elegir a y f para maximizar su utilidad, sujeto a las restricciones de participación e infinitas restricciones de incentivos. Sabemos sin embargo, que si el principal fija el f encontrado en la Parte B, el agente elegirá el t elegido por el principal. Por lo tanto, el problema del principal es el de elegir a para maximizar su utilidad, sujeto a la restricción de participación, y que el f sea el apropiado. Encuentre el a óptimo para cada t. Deberá utilizar que para $x \sim N\left(\mu, s^2\right)$, $E\left(e^x\right) = e^{\mu + s^2/2}$ (y por supuesto, si la varianza de y es v, la de my es $m^2 v$).

Parte D. Con el a óptimo de la parte C, y el f de la parte B, encuentre el t óptimo.

Ejercicio 48 El agente y el principal son neutrales al riesgo. Para un esfuerzo de $e \in [0,1]$ la probabilidad de éxito es e; el resultado es éxito cuando el producto es alto a, y de lo contrario es un fracaso y el producto es $b \leq a$. El principal sólo observa el nivel de producto, y debe elegir salarios $s_a, s_b \geq 0$ para maximizar su beneficio esperado. La utilidad del agente es su salario esperado, menos el costo del esfuerzo $c(e)$, con $c(0) = 0$. La utilidad de reserva del agente es $\overline{u} = 0$, que se cumple siempre, pues $s_a, s_b \geq 0$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar cada $e^* \in [0,1]$ cuando $c(e) = c\frac{e^2}{2}$ para algún parámetro $c > 0$. Si lo necesita, escriba los beneficios del principal como

$$\pi(e^*) = IngresoEsperado(e^*) - SalarioEsperado(e^*) = I(e^*) - e^* s_a - (1 - e^*) s_b$$

y note que lo que se pide aquí es minimizar el salario esperado si queremos implementar e^*.

Parte B. Suponga ahora que $c(\cdot)$ es creciente, convexa y dos veces diferenciable, y encuentre el esquema óptimo para cada e^*.

Parte C. Considere nuevamente la función de costos cuadrática, y asuma que los beneficios del principal son $\pi = \frac{1}{k}e - (es_a + (1-e)s_b)$ para algún k (esto es como si el producto alto fuera 1, el bajo 0, y el precio del bien $\frac{1}{k}$). ¿Qué esfuerzo querrá implementar el principal? (tendrá que distinguir los casos en que $kc \geq \frac{1}{2}$ y aquellos en los cuales $kc < \frac{1}{2}$).

Parte D. Suponga ahora que hay un tercer resultado posible, un gran éxito g, que tiene probabilidad e^2, de tal manera que la probabilidad del producto bajo es ahora $1 - e - e^2$. Con la función de costos cuadrática, ¿cuál es el esquema óptimo para implementar cada e^*?

Parte E. Asuma que la función de costos es una función c creciente, convexa, y con $c''' \geq 0 = c'(0)$ (derivada tercera positiva). Encuentre el esquema óptimo para implementar cada e^* (verifique las condiciones de segundo orden).

Ejercicio 49 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre tres niveles de esfuerzo $e_i = i$ y hay cuatro estados posibles de la naturaleza. Las probabilidades de los distintos niveles de producción, según los esfuerzos se presentan en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4
e_0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$e_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
e_1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$

La función de utilidad del agente es $U(s,e) = u(s) - e = \sqrt{s} - e$ y su utilidad de reserva $\overline{u} = 4$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar implementar e_i. Este es el primer ejercicio en el cual hay más de dos (y menos de infinitas) acciones; por supuesto, deberá tener una restricción de incentivos para cada acción que no sea la que se quiere implementar.

Parte B. Si $x_i = i$, encuentre el esfuerzo que querrá implementar el principal.

Ejercicio 50 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre tres niveles de esfuerzo $e_i = i$ y hay cuatro estados posibles de la naturaleza. Las probabilidades de los distintos niveles de producción, según los esfuerzos se presentan en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4
e_0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$e_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
e_1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

La función de utilidad del agente es $u(s) = \log s$ y su utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar implementar e_i.

Parte B. Si $x_i = i$, encuentre el esfuerzo que querrá implementar el principal.

Ejercicio 51 Hay uno parecido en el Mas-Colell et al, pero es más complicado que lo necesario, y la solución está mal. En los modelos de Agente-Principal con dos niveles de esfuerzo, el esfuerzo bajo se implementa con sueldos constantes e iguales a lo que serían si las acciones fueran observables. Para implementar el esfuerzo alto, sin embargo, hay que pagarle al agente más de lo que se le pagaría si las acciones fueran observables. Eso hace que si el esfuerzo alto es óptimo con información perfecta, puede no serlo con información asimétrica. La parte E de este ejercicio ilustra que esta tendencia a siempre reducir el esfuerzo óptimo es especial del caso de dos esfuerzos.

Hay tres niveles posibles de esfuerzo e_1, e_2 y e_3 que inducen las siguientes probabilidades sobre los productos alto y bajo, $x_a = 10$ y $x_b = 0 : \pi_{a1} = \frac{2}{3}, \pi_{a2} = \frac{1}{2}$ y $\pi_{a3} = \frac{1}{3}$. Para el agente hacer el esfuerzo e_i tiene un costo c_i con $c_1 = \frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{8}{5}$ y $c_3 = \frac{4}{3}$. La función de utilidad es $u(s) = \sqrt{s}$ y la utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo cuando el esfuerzo es observable.

Parte B. Muestre que si el esfuerzo no es observable, entonces e_2 no se puede implementar.

Parte C. Encuentre los niveles de c_2 para los cuales se podría implementar e_2.

Parte D. Encuentre el contrato óptimo cuando el esfuerzo no es observable (con $c_2 = \frac{8}{5}$).

Parte E. Suponga ahora que $c_1 = \sqrt{8}$ y sea $\pi_{a1} = 1$. Encuentre los contratos óptimos cuando el esfuerzo es observable y cuando no es observable. El esfuerzo que quiere implementar el principal es mayor ¿con o sin información asimétrica?

Ejercicio 52 A Manuel lo nombraron Gerente General de una empresa, por un día. El dueño de la empresa está considerando dos planes alternativos de pagos para su nuevo gerente. En el primero, le paga un sueldo fijo de \$ S. Bajo esta alternativa, Manuel elegirá la acción que el dueño le pida. En el segundo plan, le paga \$ 5, y además le paga con una opción de compra de una acción de la empresa, con un precio de ejecución de \$ 2 (Manuel puede comprar la acción a \$2 si así lo desea). Tanto Manuel como el dueño tienen una función de utilidad de $u(x) = x$ (donde x es la riqueza final).

Si Manuel elige la acción i (para $i = f, g$) la distribución de probabilidad sobre los precios de la acción estarán dados por i, donde

	1	2	3
f	0	1	0
g	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

La riqueza inicial de Manuel es 0, y la del dueño de la fábrica es \$ 80 y además posee 10 acciones de la empresa (ambas formas de pago se contabilizan como costos de la empresa, con lo cual los costos no deberían entrar en la función de utilidad del dueño). En el país donde viven, la tasa marginal de impuesto a la riqueza es de 0 para riquezas inferiores a 100, y de 100% para riquezas superiores.

Parte A. Si el dueño elige pagarle con la segunda alternativa, ¿Qué acción elegirá Manuel?

Parte B. ¿Cuál es la utilidad esperada del dueño de elegir la primera forma de pago? ¿Cuál es la utilidad del dueño de elegir la segunda forma de pago? ¿Qué forma de pago elegirá?

Ejercicio 53 El objetivo de este ejercicio es mostrar que cuando dos "sistemas" o "acciones" son complementarias, puede convenir ligar los pagos entre ambos, de tal manera que resulta un salario alto si, por ejemplo, fallan los dos sistemas a la vez (ver MacDonald y Marx, "Adverse Specialization", Journal of Political Economy, 2001). Un trabajador en una planta nuclear puede dedicar su día de trabajo a dos actividades, de las cuales una le gusta más que la otra. Sólo tiene tres formas posibles de dividir su jornada entre las actividades I (la que le gusta) y II (la que no): todo el tiempo a I que llamaremos acción a, mitad y mitad que llamaremos acción b (o $b$uena, ya veremos por qué) o todo el tiempo a II que llamaremos acción c. Cada una de las actividades es esencial para que la planta no explote, en el sendido que si el agente no le dedica tiempo a una actividad, ese sistema fallará seguro, y la planta explotará seguro. Las distribuciones de probabilidad sobre fallas de los sistemas son realizaciones independientes, y vienen dadas por

	Probabilidad de falla de I	Probabilidad de falla de II
a	0	1
b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c	1	0

La función de utilidad del agente cuando sus sueldos son s es $\log s$ (digamos log en base 10) su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$. Los costos de las tres acciones son $c_a = 0$, $c_b = 1$ y $c_c = 2$. Lo único que es observable para el principal es qué sistemas fallaron. Es decir, hay 3 acciones y 4 niveles de producto (no falla ningún sistema, falla el sistema I, falla el sistema II y fallan ambos) con beneficios (brutos de salarios, es decir, sin haber descontado los salarios) $\pi^n_n, \pi^f_n, \pi^n_f$ y π^f_f respectivamente (el superíndice indica si $f$alló o no el sistema I, y el subíndice si falló o no el sistema II).

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar a.

Parte B. Encuentre el esquema óptimo para implementar b. Pistas:

a) la restricción de participación está activa (argumente por qué);
b) tiene que haber alguna de las de incentivos activa (argumente por qué)
c) pruebe con la de participación más la de incentivos con respecto a la acción a activa (e ignore la de incentivos con respecto a c), y muestre que la de incentivos con respecto a c se satisface en el óptimo. Para

resolver este caso, note que s_n^n, s_n^f y s_f^f entran en forma simétrica en el problema (y si saca las CPO verá que deben ser iguales los tres valores).
d) pruebe con la de participación más la de incentivos con respecto a la acción c activa (e ignore la de incentivos con respecto a a).

Parte C. Encuentre el esquema óptimo para implementar c.

En la solución se ve que aunque la actividad I sea muy rentable (por ejemplo, abaratar la producción de energía nuclear, mientras se controla un termómetro) y le cueste poco al individuo, el principal quiere que el individuo haga la actividad II también. En particular, en la solución se ve que el sueldo cuando falla sólo la actividad II es más bajo que cuando fallan ambas.

Ejercicio 54 Deberes. Principal averso al riesgo. Supongamos que no hay información asimétrica, y que el principal puede observar las acciones del agente. Hay dos acciones a y b, con costos c_a y $c_b > c_a$ para el agente. Los niveles de producto posibles son un conjunto $X \subset \mathbf{R}_+$ y esas acciones inducen unas distribuciones de probabilidad π_a y π_b sobre los niveles de producto (por ejemplo, si $X = [0,2]$, π_a podría ser la uniforme en $[0,1]$ y π_b una distribución que le asignara probabilidad $1/2$ a los productos 1 y 2). La función de utilidad del agente es u (creciente, cóncava y dos veces derivable), con utilidad de reserva $\overline{u}$, y la del principal es v, con $v' > 0 \geq v''$.

Parte A. Plantee el problema que debe resolver el principal si quiere implementar la acción b. La solución empieza con: para todo $x \in X$, elegir s_x para ...

Parte B. Encuentre cómo cambia s_x cuando cambia x marginalmente: encuentre ds_x/dx. Para ello, obtenga la condición de primer orden, y diferénciela con respecto a x. Luego sustituya por el λ que se obtiene de la condición de primer orden. Muestre que para $r_p = -v''/v'$ y $r_a = -u''/u'$, tenemos

$$\frac{ds_x}{dx} = \frac{r_p}{r_p + r_a}.$$

Eso quiere decir que si el producto sube, el agente recibe cada vez más en sueldo, cuanto más averso al riesgo es el principal. Es decir, el agente está más expuesto al riesgo cuanto más averso es el principal (aún con información completa).

Parte C. Encuentre el contrato óptimo (un sueldo para cada nivel de producto) cuando $c_a = 0$, $c_b = 1$, $X = [0,1]$, π_a es uniforme en $[0,1]$, $\pi_b(x) = 2x$, $u(s) = -e^{-2s}$ y $v(z) = -e^{-z}$. Deje todo como función de $\overline{u}$.

Parte D. Suponga que hay información asimétrica, que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\pi_{1a} = 1/2$, $\pi_{1b} = 1/4$, $c_a = 0$, $c_b = 1$, $u(s) = -e^{-2s}$, $\overline{u} = -\frac{5}{2}$ y $v(z) = -e^{-z}$. Encuentre los contratos óptimos para implementar a y b (los sueldos pueden ser negativos). Indique cuál es mejor para el principal.

Parte E. Pruebe de repetir la Parte D, pero haciendo c_b un poco más chico, de tal manera que la acción óptima a implementar sea la b.

Una de las lecciones del ejercicio anterior es que es difícil encontrar situaciones en las cuales el modelo de agente principal prediga contratos salariales "simples" (como un contrato lineal en el cual me pagan una parte fija, y después $\$x$ por cada unidad adicional que produzco). En particular, se requiere que las funciones

tengan aversión absoluta al riesgo constante, que no es una propiedad razonable (cuanto más rica es la gente, menos aversa al riesgo es). Para que esta conclusión tenga "toda su fuerza", tendríamos que haber hecho la Parte B, pero con información asimétrica.

Ejercicio 55 El gerente de una empresa puede ejercer un esfuerzo alto $e_a = 5$ o un bajo esfuerzo $e_b = 4$. El ingreso de la empresa -sin contar los costos- puede ser o bien $\pi_1 = 48$, $\pi_2 = 12$ o $\pi_3 = 1$. La elección del gerente afecta la probabilidad de que un beneficio particular se dé. Si elige e_a entonces ocurre π_1 y π_2 con probabilidad $p = 2/5$, mientras que si elige e_b los resultados π_2 y π_3 se dan con probabilidad 2/5. El dueño de la empresa es neutral al riesgo y diseña un contrato que especifica un pago y_i contingente a los ingresos π_i. La función de utilidad del gerente es $u(s,\, e) = \sqrt{s} - e$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$.

Parte A. Resuelva el contrato de información completa y establezca la acción que querrá inducir el dueño. ¿Qué acción querrá hacer el gerente?
Parte B. Pruebe que el contrato anterior no es de equilibrio cuando el esfuerzo del gerente no es observable. Resuelva el contrato de segundo óptimo (el mejor, cuando el gerente no puede observar la acción del gerente). Compare los beneficios que obtiene el dueño en esta situación respecto de la del punto anterior.

Ejercicio 56 Suponga un inversor que puede elegir entre dos proyectos: A y B. Ambos proyectos requieren una inversión de I. El pago (retorno) x_j $j = A, B$ ocurre con probabilidad p_j y de lo contrario, el proyecto rinde 0.

Suponga: que el retorno esperado de A es mayor que el de B, mayor que I ($p_A x_A > p_B x_B > I$); que la probabilidad de que A sea exitoso es mayor que la de B y ambas estrictamente entre 0 y 1, $1 > p_A > p_B > 0$; que x_B es mayor estricto que x_A. El inversor debe pedir prestado un monto I a un banco. Suponga también que el interés bruto R se paga sólo si el proyecto es exitoso. El pago esperado del inversor con proyecto j es: $U_j(R) = p_j(x_j - R)$ y el beneficio esperado del banco es: $\pi_j = p_j R - I$.

Parte A. Suponga que R no puede ser contingente en el tipo de proyecto. Defina R^* tal que el inversor elige el proyecto A si $R < R^*$. Encuentre R^*.
Parte B. Suponga que el banco es un monopolista y que hay un solo inversor, ¿cuál es la política de tasa de interés óptima para el banco?
Parte C. Suponga ahora que hay N inversores idénticos y que el banco tiene un monto máximo para prestar de L, con $I < L < NI$. Discuta porqué y cuando puede aparecer el racionamiento de crédito (la demanda de créditos excede a la oferta).

Ejercicio 57 Deberes. Un individuo puede tomar dos acciones: manejar *a*tentamente, o *d*istraído; si maneja atento, choca con probabilidad $\frac{1}{2}$ mientras que si maneja distraído choca seguro. El costo de manejar atento es $\frac{1}{4}$, y el de manejar distraído es 0. La función de utilidad es $u\,(x) = \sqrt{x}$ y la utilidad de no comprar seguro es $\overline{u}$. La empresa debe elegir s_a (el pago neto de la empresa al agente en caso de accidente) y s_n (el pago neto de la empresa al agente en caso de no accidente) para maximizar sus beneficios. Así, si implementa la acción a (atento), los beneficios de la empresa serán $-\frac{1}{2}s_a - \frac{1}{2}s_n$. Típicamente, tendríamos $s_a \geq 0 \geq s_n$ (en caso de no accidente, la empresa le "paga" al agente una cantidad negativa. Es decir, recibe del agente lo que le cobró por la prima.).

Parte A. Asuma que la riqueza inicial del individuo es $w = 0$, que el auto tiene un valor v, y que cuando choca se pierde todo. Así por ejemplo, si no choca, su riqueza será $w + v + s_n = v + s_n$, mientras que si choca será $w + s_a = s_a$. Elija el esquema óptimo para implementar *d*istraído.

Parte B. Elija el esquema óptimo para implementar *a*tento.

Parte C. Suponga que en la ausencia de la compañía de seguros, el individuo manejaría atento. Es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{v} - \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow v \geq \frac{1}{4}$. En este caso, es natural asumir que $\overline{u} = \frac{1}{2}\sqrt{v} - \frac{1}{4}$. Encuentre el esquema preferido por la empresa.

Ejercicio 58 La pareja de árbitros Aguirregaray y Gadea pueden aceptar la coima de Alarcón, el presidente de Nacional, para que asalten a Tacuarembó en el partido de Nacional Tacuarembó (del Apertura 2009), o no. El monto de la coima es $\$ \ln \frac{2e+1}{e+2}$. La acción a es aceptar la coima, la n es no aceptarla. Hay dos niveles posibles de producto: el partido no parece un asalto, x_2, o sí lo parece $x_1 < x_2$. Si se dejaron coimear, el partido parecerá un asalto con probabilidad $\frac{2}{3}$, mientras que si no se dejaron coimear, parecerá un asalto con probabilidad $\frac{1}{3}$. La función de utilidad de la dupla arbitral (imaginemos que la dupla tiene una sola función de utilidad), si reciben $\$s$ es $-e^{-s}$; la utilidad de reseva es $\overline{u} = -\frac{e+2}{3e}$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar a (¿se aplica el análisis hecho en clase, con costos para cada acción?). Para verificar que esté bien, parte de la respuesta es aproximadamente 0.236.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para implementar n.

Parte C. La AUF ha recibido varios pedidos de sanciones para los jueces. Algunos (abogados) argumentan que no se puede sancionarlos porque no hay pruebas de la supuesta coima. Está usted de acuerdo con la aseveración "no importa si recibieron la coima o no; de hecho, probablemente no la hayan agarrado; el castigo está justamente para que no acepten la coima."

Ejercicio 59 Un estudiante debe trabajar en sus "deberes". Si un problema le sale bien al alumno, el profesor recibe $\$x_2$ en términos esperados de aumento de sueldo; y si sale mal, 0. La probabilidad de éxito es $\sqrt{p}$ donde p es el porcentaje de las horas del día que el estudiante dedica al problema. El profesor paga premios en pesos, en vez de dar notas; paga un premio si el problema está bien, y otro si está mal.[4] El estudiante tiene una función de utilidad por un premio de s y porcentaje de horas de ocio $o = 1 - p$ que está dada por $\sqrt{s} + 1 - p$. El estudiante trabajará en total algún porcentaje entre 0 y 1 de su tiempo, y cualquier tiempo de ese total que no dedique al proyecto, lo dedicará al ocio. La utilidad de reserva es $\overline{u} = 2$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para que el agente trabaje un porcentaje p de horas, para $p \in (0, 1)$.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para que el agente trabaje 0% de sus horas y el contrato para que trabaje 100% de sus horas.

Parte C. Encuentre la utilidad del profesor de implementar cada p (lo que llamamos V_p habitualmente). Encuentre el p que quiere implementar el principal, si $x_2 = \frac{7}{2}$.

Parte D. Encuentre los niveles de x_2 para los cuales $p = 1$ es óptimo.

Ejercicio 60 El principal y el agente son neutrales al riesgo, y el resultado del trabajo del agente puede ser un nivel de producto alto o bajo, con una probabilidad de éxito igual al esfuerzo e. El esfuerzo no es observable para el principal, y sólo condiciona los pagos al éxito o fracaso; una cosa importante es que los dos sueldos deben ser positivos. La función de utilidad del agente es su sueldo menos el costo del esfuerzo $c(e)$: $u(w, e) = w - c(e)$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$.

[4] Esto de los premios en plata es una forma reducida de un modelo más natural en el cual el profesor no puede regalar notas (pierde su capacidad de dar incentivos, y con eso los alumnos se vuelven malos, y el profesor pierde plata) y a los alumnos las buenas notas le significan mejores empleos en el futuro.

Parte A. Asuma que $c(e) = \frac{e^2}{2}$ y encuentre el esquema óptimo para implementar cada $e^* \in [0,1]$. Empiece por implementar $e^* = 0$, y luego haga el caso $e^* > 0$. Luego encuentre el e óptimo, asumiendo que el nivel de producto bajo es 0 y el alto es $\frac{1}{k}$ para $k \geq \frac{1}{2}$ (la respuesta dependerá de k).
Parte B. Sin asumir la forma funcional de c, sólo que es convexa, creciente y diferenciable dos veces con $c(0) = 0$, encuentre el esquema óptimo para implementar cada e^*.

Ejercicio 61 Este ejercicio se basa en una exposición de Bolton y Dewatripont sobre el trabajo "Limited Liability and Incentive Contracting with ex-ante action choices," de Robert Innes. Suponga que un empresario puede generar ingresos $y \in [0, \overline{y}]$ ejerciendo esfuerzo e. El ingreso es aleatorio, y la distribución de los ingresos es un densidad $\pi(\cdot, e)$ sobre niveles de ingresos, cuando el esfuerzo es e. Cuando el empresario tiene riqueza w y ejerce esfuerzo e, su utilidad es $v(e, w) = w - g(e)$, con $g', g'' > 0$. El empresario no tiene los recursos necesarios para instalar su fábrica, y debe levantar I pesos de un inversor (en un mercado competitivo). El contrato entre el empresario y el inversor es una función $r(y)$ que dice cuánto le repaga el empresario al capitalista inversor, como función de la realización de y (no se observa el nivel de esfuerzo).

El empresario debe elegir la función r (cuánto pagarle al inversor como función de y) para maximizar su utilidad. Formalmente, el problema es el de elegir $r(\cdot)$ y e para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & \int_0^{\overline{y}} (y - r(y)) \pi(y, e)\, dy - g(e) \\ \text{sujeto a } \int_0^{\overline{y}} (y - r(y)) \pi_e(y, e)\, dy & = & g'(e) \\ \int_0^{\overline{y}} r(y) \pi(y, e)\, dy & = & I \\ 0 & \leq & r(y) \leq y \\ & & r(\cdot) \text{ creciente.} \end{array}$$

La primera es la restricción de incentivos. La segunda es que el mercado es competitivo y le tiene que pagar I al inversor. La tercera es "limited liability" (nadie puede salir perdiendo), y la cuarta es una restricción que se impone sobre la función r.

Ignore las dos últimas restricciones, plantee el Lagrangiano, y muestre que $r = y$ para y chico, y $r = 0$ para y grande cuando $\frac{\pi(y', e)}{\pi(y, e)}$ es creciente en e para $y' > y$ (una cosa que van a tener que usar es que en ese caso $\frac{\pi_e(y,e)}{\pi(y,e)}$ es creciente en y). Agregue la restricción r creciente, y muestre que el contrato óptimo es uno de deuda: hay un nivel D tal que $r(y) = y$ para $y \leq D$ y $r(y) = D$ para $y \geq D$; el empresario paga todo lo que recibe si eso es menos que el monto de la deuda y paga sólo el monto de la deuda en otro caso.

Ejercicio 62 Un agente en la economía posee una unidad de riqueza. Si no se cuida, tiene una probabilidad de $\frac{3}{4}$ de perderla. Si se cuida, la pierde sólo con probabilidad $\frac{1}{4}$. La utilidad por riqueza w y esfuerzo e es $\sqrt{w} - e$, donde no cuidarse es $e = 0$ y cuidarse es $\frac{1}{10}$. Hay competencia entre aseguradoras neutrales al riesgo.

Parte A. Si el esfuerzo fuera obsrevable, ¿qué contrato surgiría como resultado de la competencia? ¿Le parece que es un contrato de equilibrio si el esfuerzo no es observable?

Parte B. Si el esfuerzo no es observable, ¿qué contrato ofrecerán las aseguradoas? ¿lo tomarán los individuos?

Ejercicio 63 Hay tres niveles de producto que pueden suceder, $x_0 = 0$, $x_1 = 1.000$ y $x_2 = 10.000$ Con esfuerzo $a = 0$, x_0 sucede con probabilidad $\frac{1}{2}$, y x_1 y x_2 con igual probabilidad, mientras que si hace esfuerzo $b = 2$, ocurre cada nivel de producto con probabilidad $\frac{1}{3}$. La utilidad del agente es $u(w) = w^{\frac{1}{4}}$ y $\overline{u} = 1$

Parte A. Encuentre los contratos óptimos con esfuerzo observable, y qué acción querrá implementar el principal.
Parte B. Encuentre los contratos óptimos cuando las acciones no son observables, y la acción que querrá implementar el principal.
Parte C. ¿Cuánto está dispuesto a pagar el principal por poder monitorear las acciones?

Ejercicio 64 Esto es un poco distinto de lo de las notas. No hay restricción de participación, pero se cambia por una restricción de beneficio 0 para las empresas. Para implementar el esfuerzo alto, debe estar activa la restricción de incentivos también (de lo contrario, alguna empresa podría ganar dinero ofreciendo un contrato con menos riesgo, que ganara plata, y atrajera a los consumidores).

There are two states G and B, where G is the noloss state and B the loss state. The customer has initial wealth $w_0 = 4$, and will suffer loss $L = 3$ if state B occurs. The customer is an expected utility maximizer with a logarithmic utility-of-consequences function over wealth, so if his final wealth levels (consumption) in the two states are w_G and w_B, and the probability of loss is π, his expected utility is $EU = (1-\pi)\ln(w_G) + \pi\ln(w_B)$.

Note that the probability π will differ in different situations below, and the logarithms are natural (to base e, not 10). The insurance company is risk-neutral and wants to maximize expected profit, but perfect competition in the insurance market keeps its expected profit equal to zero.

Insurance contracts will be characterized by the amounts of wealth (w_G, w_B) that the customer will end up with in the two states. (Thus, if p is the premium and c the coverage, $w_G = w_0 - p$ and $w_B = w_0 - L - p + c$; but forget about p and c and just work with w_B and w_G).

The customer can affect the probability of loss by exerting effort. There are two effort levels, a bad one that has zero cost to the consumer in utility terms, and a good one that has cost k to the customer in utility terms. If the customer makes bad effort, the probability of loss is $\frac{1}{2}$; if the customer makes good effort, the probability of loss is $\frac{1}{4}$.

Parte A. Find the inequality linking w_G, w_B and k such that the customer will make good effort if the inequality holds and bad effort if the opposite inequality holds (la restricción de incentivos). Assume that the customer will make good effort in the borderline case where the relation holds with exact equality.
Parte B. Find the equation for the insurance company's zero expected profit line (el cliente "entrega" su riqueza inicial w_0, y a cambio la compañía de seguros le promete w_G y w_B) when the customer makes bad effort.
Parte C. Find the equation for the insurance company's zero expected profit line when the customer makes good effort.
Parte D. Find the local optimum, namely the values of (w_G, w_B) that maximize the customer's expected utility subject to the insurance company's zero-profit constraint, when the customer is making bad effort, and find the customer's expected utility at this point.
Parte E. Find the local optimum, namely the values of (w_G, w_B) that maximize the customer's expected utility subject to the insurance company's zero-profit constraint, when the customer is making good effort, and find the expression (as a function of k) for the customer's expected utility in this situation.
Parte F. Prove that the optimum in Parte E is the global optimum if $k < 0.207$ approximately.
Parte G. Now suppose $k = 0.1$. Find the customer's expected utility in three situations: first where he gets no insurance at all, second where he gets the globally optimal contract, and third, the hypothetical ideal optimum where effort is observable, and the customer is given full insurance at the statistically fair price

conditional on his making good effort. In each of these three situations, find the magnitude of sure wealth that will yield the customer the same utility.

Notas. La exposición del teórico en las primeras páginas sigue al libro de Varian, Microeconomic Analysis. Dos de los primeros trabajos sobre la teoría de Agente-Principal son "Incentives and Risk Sharing in Sharecropping," de Joseph Stiglitz, en el *Review of Economic Studies*, 1974, 41(2), pp. 219-55, y "The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem," por Stephen Ross, en el *American Economic Review*, 1973, 63(2), pp. 134-39.

Igual que marx, pero con las dos acciones con igual costo. sobre Agente

leland-pyle en carpeta pdf. sobre signalling

ver multitasking de Holmstrom y Milgrom del bolton y dewatripont

Agente-Principal: Soluciones

Ejercicio 7. Implementar b. Tenemos

$$\frac{\ln s_1}{4} + d\ln s_2 + \left(\frac{3}{4} - d\right)\ln s_3 - c = \frac{\ln s_1 + \ln s_2 + \ln s_3}{3} = 0$$

por lo que de la última igualdad sacamos $s_1 = \frac{1}{s_2 s_3}$ y sustituimos en la primera ecuación

$$\left(d - \frac{1}{4}\right)\ln s_2 + \left(\frac{1}{2} - d\right)\ln s_3 - c = 0 \Leftrightarrow s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}}$$

Las tres ecuaciones correspondientes a las condiciones de primer orden son ahora

$$\begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ s_2 - \mu\left[1 - \frac{1}{3d}\right] = \lambda \\ s_3 - \mu\left[1 - \frac{4}{3(3-4d)}\right] = \lambda \end{array} \overset{1=2}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ \frac{3d(s_2-s_1)}{4d-1} = \mu \\ s_3 - \mu\left[1 - \frac{4}{3(3-4d)}\right] = \lambda \end{array} \overset{\lambda \text{ y } \mu \text{ en } 3}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ \frac{3d(s_2-s_1)}{4d-1} = \mu \\ s_3 = \frac{s_1(3-8d)+s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \end{array}$$

Tenemos entonces

$$\begin{array}{c} s_3 = \frac{s_1(3-8d)+s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \\ s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}} \\ s_1 = \frac{1}{s_2 s_3} \end{array} \overset{3 \text{ en } 1}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_3 = \frac{\frac{1}{s_2 s_3}(3-8d)+s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \\ s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}} \end{array} \overset{2 \text{ en } 1}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{4d-2}} = \frac{(3-8d)\, e^{\frac{2c}{2d-1}} s_2^{\frac{8d-3}{2-4d}} + s_2 8d\,(2d-1)}{(4d-1)\,(4d-3)}$$

Esta última ecuación es muy fea, pero implica un único valor de s_2 para cada d (además de $s_2 = 0$), por lo que el ejercicio está resuelto.

Ejercicio 8. Siguiendo los pasos del ejemplo anterior encontramos $s_1 = s_3 = e^{-2c}$ y $s_2 = e^{4c}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} V_b &= \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2c}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - e^{4c}\right) + \frac{1}{4}\left(3 - e^{-2c}\right) = 2 - \frac{1}{2}e^{4c} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(-4c)} \\ &> \frac{1}{3}(1-1) + \frac{1}{3}(2-1) + \frac{1}{3}(3-1) = 1 = V_a \overset{x=e^{-2c}}{\Leftrightarrow} 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{2}x > 0 \end{aligned}$$

y esa ecuación tiene como soluciones x negativos (imposible para ningún c) o mayores que 1 (también imposible para $c > 0$). La razón para esto es que para implementar b, hay que someter al agente a algo de riesgo, por lo cual hay que elevar el valor esperado de los pagos al agente. De hecho, el valor esperado de los pagos al agente es

$$\frac{e^{-2c} + e^{4c}}{2} > 1,$$

donde 1 es el valor esperado de los pagos al agente cuando se implementa a. Por lo tanto, implementar b cuesta más que implementar a, y sin embargo, el producto esperado bajo b es 2, y el producto esperado bajo a, también es 2. Por lo tanto, siempre conviene implementar a.

Ejercicio 9. Para demostrar que $V_b\left(c_b^*\right) \geq V_b\left(\widetilde{c_b}\right)$, basta darse cuenta que el plan óptimo de pagos $(\widetilde{s_i})$ cuando los costos son $\widetilde{c_b}$ y c_a sigue satisfaciendo las restricciones de icentivos, y de participación. Por lo tanto, el plan óptimo cuando el costo es c_b^* tiene que ser al menos tan bueno como el plan $(\widetilde{s_i})$.

Para demostrar la desigualdad estricta, hay dos formas. La más sencilla, es darse cuenta que si al plan viejo $(\widetilde{s}_i)$ le restamos ε_i en todos los sueldos (para restar el mismo ε a todas las utilidades), las dos restricciones, con el nuevo costo c_b^*, se siguen cumpliendo con ε_i pequeños. Por lo tanto, hay un plan $(\widetilde{s}_i - \varepsilon_i)$ que cumple las restricciones y le da estrictamente más beneficios (que el plan $(\widetilde{s}_i)$) al principal. Por lo tanto, el plan óptimo también le debe dar más beneficios.

Para mostrar la desigualdad estricta con un poco más de "cuidado" (aunque el argumento anterior está bien), construiremos un plan (s_i^*) a partir del $(\widetilde{s}_i)$, que cumplirá con las restricciones de incentivos y de participación, y que le dará al principal una utilidad estrictamente mayor que $V_b(\widetilde{c}_b)$, por lo tanto $V_b(c_b^*)$, que es débilmente mayor que la que brinda el plan (s_i^*), es estrictamente mayor que $V_b(\widetilde{c}_b)$.

Sea s_i^* tal que (piense, ¿por qué existe tal s_i^*?)

$$u(s_i^*) - c_b^* = u(\widetilde{s}_i) - \widetilde{c}_b.$$

Como $c_b^* < \widetilde{c}_b$, obtenemos que $s_i^* < \widetilde{s}_i$. Ahora verifico que el plan (s_i^*) satisface las dos restricciones cuando el costo es c_b^* (sabiendo que el plan $(\widetilde{s}_i)$ las satisfacía). Primero, la de participación:

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ib} - c_b^* &= \sum_1^n (u(\widetilde{s}_i) - \widetilde{c}_b + c_b^*)\pi_{ib} - c_b^* \\ &= \sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\pi_{ib} - \widetilde{c}_b \geq \overline{u}\end{aligned}$$

Para verificar la de incentivos, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ib} - c_b^* &= \sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\pi_{ib} - \widetilde{c}_b \\ &\geq \sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\pi_{ia} - c_a \\ &> \sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ia} - c_a\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se verifica pues $s_i^* < \widetilde{s}_i$ y las utilidades son estrictamente crecientes.

Otra solución para ambas partes. Por el Teorema de la Envolvente (ver el Capítulo 5) sabemos que el cambio en $V_b(c_b)$ cuando cambia c_b es el cambio en el lagrangiano

$$L = \sum_1^n (x_i - s_i)\pi_{ib} + \mu\left(\sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b - \overline{u}\right) + \lambda\left(\sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b - \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a\right)$$

provocado por un cambio en c_b. Por lo tanto,

$$\frac{dV_b(c_b)}{dc_b} = -\lambda - \mu$$

y como ambos multiplicadores deben ser mayores o iguales que 0 en el óptimo, obtenermos que $V_b(c_b^*) \geq V_b(\widetilde{c}_b)$.[5] Para demostrar que esta última desigualdad es estricta cuando la utilidad es continua y no acotada por debajo, alcanza con decir que μ es estrictamente positivo. La razón por la cual eso es cierto, es por el lema, que dice que la restricción de participación está siempre activa.

Aunque las dos soluciones pueden parecer distintas son, de hecho, exactamente iguales.

[5] Como $V_b'(c) \leq 0$ para todo c, tenemos que $V_b(c_b^*) - V_b(\widetilde{c}_b) = \int_{c_b^*}^{\widetilde{c}_b} V_b'(c)\,dc \geq 0$.

Ejercicio 10. Veamos primero la solución más básica, sin usar "nada". Supongamos que podemos subir el costo de la acción que no queremos implementar (digamos que queremos implementar a, y que podemos subir el costo de b) en $\Delta > 0$. Imaginemos que el plan óptimo luego de la suba es $s_1, s_2, ..., s_n$, y que por lo tanto satisface

$$\sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ia} - c_a^0 \geq \overline{u} \tag{1.8}$$

$$\sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ia} - c_a^0 \geq \sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ib} - c_b^0 - \Delta. \tag{1.9}$$

Usando la construcción del Lema 6 encontramos $\widetilde{s}_i$ tal que $u(\widetilde{s}_i) = u(s_i) - \Delta$ (para el plan $\{s_i\}$ que era óptimo para implementar a con costos $c_b^0 + \Delta$ de la acción b). Por supuesto, $\widetilde{s}_i$ es estrictamente menor que s_i. Verificamos ahora que este nuevo plan satisface ambas restricciones cuando el costo de a es $c_a^0 + \Delta$ y el de b c_b^0, sabiendo que se cumplen (1.8 y 1.9, ya que s_i era óptimo y las cumplía):

$$\sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\,\pi_{ia} - c_a^0 + \Delta \geq \overline{u} \Leftrightarrow \sum_1^n u(s)\,\pi_{ia} - \Delta - c_a^0 + \Delta \geq \overline{u} \Rightarrow \sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ia} - c_a^0 \geq \overline{u}$$

$$\sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\,\pi_{ia} - c_a^0 + \Delta \geq \sum_1^n u(\widetilde{s}_i)\,\pi_{ib} - c_b^0 \Leftrightarrow \sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ia} - \Delta - c_a^0 \geq \sum_1^n u(s_i)\,\pi_{ib} - \Delta - c_b^0 - \Delta$$

y la ecuación al final de cada renglón se cumple porque se cumplen (1.8) y (1.9).

Una forma alternativa (un poco menos general) es viendo que por el teorema de la envolvente, aplicado al Lagrangiano

$$L = \sum_1^n \pi_{ia}(x_i - s_i) + \lambda\left(\sum_1^n \pi_{ia}u(s_i) - c_a - \overline{u}\right) + \mu\left(\sum_1^n \pi_{ia}u(s_i) - c_a - \sum_1^n \pi_{ib}u(s_i) + c_b\right)$$

tenemos que

$$\frac{dL}{dc_a} = -\lambda - \mu \quad \text{y} \quad \frac{dL}{dc_b} = \mu.$$

Eso nos dice que el cambio en la función de valor (el valor máximo que obtiene el principal) es mayor cuando bajamos c_a (por cada "unidad" que bajemos c_a, los beneficios subirán en $\lambda + \mu$) que cuando subimos c_b (en cuyo caso, por cada "unidad" que subamos c_b, los beneficios subirán en μ). Igual que antes, esto nos muestra que si la restricción de participación estaba activa, λ será estrictamente positivo, y bajar c_a será estrictamente mejor que subir c_b.

Ejercicio 11.A. Para implementar a ponemos sueldos constantes y la de participación con igualdad: $s = -\log\frac{1}{2} = \log 2$. Para implementar b, ponemos $s_1 = s_2$ y las dos restricciones con igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 - c_b = -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 - 1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow u_1 = \frac{3}{2} - 2c_b, u_3 = 4c_b - \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s_1 = s_2 = -\log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) \\ s_3 = -\log\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) \end{array}\right.$$

11.B. Los beneficios de implementar a son

$$\frac{1}{3}\left(1 + \log\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(2 + \log\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(3 + \log\frac{1}{2}\right) = 2 - \ln 2$$

y los de implementar b son $\frac{1}{2}\ln\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) + \frac{9}{4}$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2 + \log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(3 + \log\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) + \frac{9}{4}.$$

Los beneficios de implementar b son mejores que los de a si y sólo si

$$\frac{1}{2}\ln\left(2c_b-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2}-4c_b\right)+\frac{9}{4}\geq 2-\ln 2 \Leftrightarrow c_b\leq 1.0648$$

11.C. Cuando implementamos b, tenemos que $s_1=s_3$ es el mismo que s_1 (igual a s_2) en la parte B, y s_3 es el mismo que s_2 en la parte B. Como el costo de implementar b es más alto que el de implementar a (mayores costos para el agente, y además hay que compensar con riesgo), sólo sería óptimo implementar b, si el producto esperado fuera mayor, que no lo es. No hay forma de que sea óptimo implementar b.

Ejercicio 12.A. Como existe información completa el dueño puede observar el esfuerzo. Planteo el problema de maximización de los beneficios sujeto a la restricción de participación. Esfuerzo alto:

$$\left.\begin{array}{ll} max & \frac{3}{4}(16-s)+\frac{1}{4}(2-s) \\ s.a & \frac{3}{4}(\sqrt{s}-e_a)+\frac{1}{4}(\sqrt{s}-e_a)\geqq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{s}=2 \Longleftrightarrow s_{alto}=4 \Longrightarrow \prod_a = 8,5.$$

y para el esfuerzo bajo,

$$\left.\begin{array}{ll} max & \frac{1}{4}(16-s)+\frac{3}{4}(2-s) \\ s.a & \frac{1}{4}(\sqrt{s}-e_b)+\frac{3}{4}(\sqrt{s}-e_b)\geqq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{s}=1 \Longleftrightarrow s_{bajo}=1 \Longrightarrow \prod_b = 4,5.$$

El gerente es indiferente entre cualquier acción ya que gana su utilidad de reserva haga lo que haga.

12.B. Como el problema de incentivos está en el esfuerzo alto, sigue siendo óptimo el contrato de la Parte A que implementa el esfuerzo bajo. Ahora tengo que agregar al programa de maximización para inducir el esfuerzo alto la restricción de compatibilidad de incentivos, ya que con los valores anteriores el gerente querrá convencer al dueño de que hizo el esfuerzo alto: $u(s_{alto},\, e_{bajo})=\sqrt{4}-1>0$.

Al programa del esfuerzo alto anterior tengo que agregar la restricción de compatibilidad de incentivos:

$$\begin{array}{lll} max & \frac{3}{4}(16-s_1)+\frac{1}{4}(2-s_2) & \\ s.a & \frac{3}{4}\sqrt{s_1}+\frac{1}{4}\sqrt{s_2}-2\geqq 0 & (RP) \\ y & \frac{3}{4}\sqrt{s_1}+\frac{1}{4}\sqrt{s_2}-2\geq \frac{1}{4}\sqrt{s_1}+\frac{3}{4}\sqrt{s_2}-1 & (RI) \end{array}$$

De la de incentivos obtengo: $\sqrt{s_1}=\sqrt{s_2}+2$, y sustituyendo en la de participación obtengo que $s_1=\frac{25}{4}$ y $s_2=\frac{1}{4}$. Los beneficios esperados del dueño son: $\prod_a^*=\frac{3}{4}\left(16-\frac{25}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{4}\right)=\frac{31}{4}$. Este valor es mayor al de esfuerzo bajo con información simétrica, pero menor al beneficio de esfuerzo alto con información completa (tiene que ser: la de incentivos está activa y el multiplicador es positivo, por lo que el "precio sombra" nos dice que el dueño querría pagar algo por relajarla; eso quiere decir que los beneficios sin la restricción serían mayores).

12.C. El gerente recibe un salario mayor al de primer óptimo si se esfuerza y el resultado es bueno, que cuando se esfuerza y el resultado es malo ($\frac{25}{4}>4>\frac{1}{4}$). A la vez, el dueño tiene un beneficio esperado menor cuando el gerente se esfuerza. El contrato con información asimétrica reparte el riesgo entre las partes (dueño, gerente) de forma de inducir al gerente a esforzarse, lo que da una mayor probabilidad de que el resultado sea bueno.

Ejercicio 13.A. Para implementar la de costo bajo ponemos los sueldos constantes, y obtenemos $u-\frac{1}{4}=1$, que arroja $u=\frac{5}{4}$ o $s=\frac{25}{16}$. Los beneficios del principal son $V_a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{25}{16}\right)+\frac{1}{2}\left(4-\frac{25}{16}\right)=\frac{15}{16}$.

Para implementar la de costo alto, ponemos

$$\frac{1}{4}u_1+\frac{3}{4}u_2-\frac{1}{2}=1=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2-\frac{1}{4} \Leftrightarrow u_1=\frac{3}{4}, u_2=\frac{7}{4}$$

con lo que los sueldos son $s_1 = \frac{9}{16}$ y $s_2 = \frac{49}{16}$ y los beneficios $V_b = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{9}{16}\right) + \frac{3}{4}\left(4 - \frac{49}{16}\right) = \frac{13}{16}$.

Al principal le conviene implementar la acción a.

13.B. ParaPara implementar a, ponemos sueldos constantes, $u - \frac{1}{4} = 0$ que implica un sueldo de $s_1 = s_2 = \frac{1}{16}$, con beneficios $V_a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{16}\right) = \frac{39}{16}$.

Para implementar b, probamos con ambas restricciones activas (aunque la de participación puede no estar activa pues la utilidad es acotada por debajo). En este caso,

$$\frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - \frac{1}{2} = 0 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}$$

implica $u_1 = -\frac{1}{4}$ y $u_2 = \frac{3}{4}$. Como eso es imposible, ponemos $u_1 = 0$ y la de incentivos activa, que queda $\frac{3}{4}u_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}$ y por tanto $u_2 = 1$. Los beneficios son $V_b = \frac{1}{4}(1 - 0) + \frac{3}{4}(4 - 1) = \frac{5}{2}$.

Al principal le conviene implementar b.

Ejercicio 14. Para implementar el esfuerzo bajo el principal pone sueldos constantes que le dan al agente su utilidad de reserva: $s^{\frac{1}{4}} - 0 = 1 \Leftrightarrow s = 1$. En este caso la utilidad del principal es $\frac{1}{4}(10000 - 1) + \frac{3}{4}(100 - 1) = 2574$. Si el esfuerzo es observable, también le damos al agente un sueldo fijo en el caso del esfuerzo alto: $s^{\frac{1}{4}} - 2 = 1 \Leftrightarrow s = 81$ y los beneficios del principal son $\frac{3}{4}(10000 - 81) + \frac{1}{4}(100 - 81) = 7444$.

Cuando el esfuerzo no es observable, y queremos implementar la acción de costo alto, ponemos activas ambas restricciones:

$$\frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - 2 = 1 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 \Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 4 \Leftrightarrow s_1 = 0, s_2 = 256.$$

En este caso los beneficios del principal son $\frac{3}{4}(10000 - 256) + \frac{1}{4}(100 - 0) = 7333$.

El principal está dispuesto a pagar $7444 - 7333$ que es la diferencia entre los beneficios máximos.

Ejercicio 15.A. Para implementar e_b ponemos sueldos constantes e iguales a 16 que le dan al principal unos beneficios de $\frac{1+2*10+300}{4} - 16 = \frac{257}{4} = 64.25$. Para implementar e_a ponemos $s_1 = s_3$, por iguales ratios de verosimilitud, y de la restricción de incentivos más la de participación

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_{10} + \frac{1}{3}u_1 - 1 &= 4 \\ \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_{10} + \frac{1}{4}u_1 &= 4 \end{aligned}$$

que arroja $u_1 = u_{300} = 7$ y $u_{10} = 1$. Los beneficios son

$$\frac{(1 - 49) + (10 - 1) + (300 - 49)}{3} = \frac{212}{3} = 70.667$$

por lo que conviene implementar el esfuerzo alto.

15.B. Para implementar e_b ponemos sueldos constantes e iguales a 0 que le dan al principal unos beneficios de $\frac{1+2*10+300}{4} = \frac{321}{4} = 80.25$. Para implementar e_a ponemos $s_1 = s_3$, por iguales ratios de verosimilitud, y de la restricción de incentivos más la de participación

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_{10} + \frac{1}{3}u_1 - 1 &= 0 \\ \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_{10} + \frac{1}{4}u_1 &= 0 \end{aligned}$$

sale $u_1 = 3, u_{10} = -3$, que es imposible. Ponemos entonces $u_{10} = 0$ y de la restricción de incentivos

$$\frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_{10} + \frac{1}{3}u_1 - 1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_{10} + \frac{1}{4}u_1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_1 - 1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_1 \Leftrightarrow u_1 = 6$$

y los beneficios son $\frac{(1-36)+(10-0)+(300-36)}{3} = \frac{239}{3} = 79.667$.

Se vuelve más atractivo el esfuerzo bajo, pues con esfuerzo alto el agente obtiene una renta (no está activa su restricción de participación).

Ejercicio 16.A. Sin seguro elegiría esforzarse pues las utilidades son

$$\begin{aligned} U(e=1) &= \frac{1}{2}\sqrt{100} + \frac{1}{2}\sqrt{36} - 1 = 7 \\ U(e=0) &= \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

16.B. El contrato A ofrece seguro total, pues los contratos arrojan riquezas

Contrato	w_0	w_A
A	$100-36=64$	$36+64-36=64$
B	$100-19=81$	$36+47-19=64$
C	$100-19=81$	$36+32-19=49$

16.C. Tenemos que para cada contrato las utilidades de $e=0$ y $e=1$ son

$$\begin{aligned} A &: U(e=0) = \sqrt{64} = 8; U(1) = \frac{1}{2}\sqrt{64} + \frac{1}{2}\sqrt{64} - 1 = 7 \\ B &: U(e=0) = \sqrt{64} = 8; U(1) = \frac{1}{2}\sqrt{81} + \frac{1}{2}\sqrt{64} - 1 = 7.5 \\ C &: U(e=0) = \sqrt{49} = 7; U(1) = \frac{1}{2}\sqrt{81} + \frac{1}{2}\sqrt{49} - 1 = 7 \end{aligned}$$

entonces para A y B elegiría no esforzarse, y para C elegiría $e=1$.

16.D. Con cualquier contrato le va mejor que sin seguro, y elegirá A o B.

16.E. Los beneficios con cada contrato (sabiendo lo que hace el asegurado) son

$$\begin{aligned} \pi_A &= 36 - 64 = -28 \\ \pi_B &= 19 - 47 = -28 \\ \pi_C &= \frac{1}{2}(19-32) + \frac{1}{2}19 = 3 \end{aligned}$$

y el contrato C es el que maximiza beneficios.

Ejercicio 19.A. Lo que la gente siempre prueba primero es poner s_1 para que esté activa la de participación, y queda $u_1 = \overline{u}$, y $s_1 = \overline{u}^2$, pero eso está mal, porque no se puede poner $u_1 = \overline{u} < 0$. Hay muchos contratos óptimos, pero todos tienen el mismo s_1. Dos contratos que son naturales son: el contrato de sueldos constantes y burning oil. El problema es que con ninguno de los dos estará activa la restricción de participación: si le pagamos 0 al agente, él igual querrá participar, porque $\overline{u} < 0$. La solución es por supuesto, elegir el s_1 más chico posible, que en este caso es $s_1 = 0$. Una forma fácil de ver eso es imaginarnos que el problema es el de elegir s_1 para maximizar $x_1 - s_1$ sujeto a $s_1 \geq 0$. Obviamente la solución de ese problema es con $s_1 = 0$, y es obvio que sigue siendo la solución si le agregamos las restricciones de participación e incentivos: este esquema cumple participación, y con $s_2 = 0$ también cumple incentivos; y la solución al problema con más restricciones (si hubiera otra) no podría ser mejor que la solución del problema con menos restricciones.

19.B. Para implementar b, probamos con $s_1 = 0$ y s_2 para que se cumpla la de participación con igualdad: $s_2 = (\overline{u} + c)^2$. Probamos con la restricción de incentivos y vemos que se viola: si hace a obtendrá 0, que es mayor que $\overline{u}$. Si pensamos un poco, nos damos cuenta que siempre que se cumpla la de participación con igualdad, se violará la de incentivos. Por lo tanto, la de participación estará inactiva. Notamos que no

pueden estar las dos inactivas en el óptimo: si lo estuvieran, podríamos reducir s_2, que tiene que ser positivo porque es la única manera de conseguir que la utilidad de hacer b sea mayor que la de hacer a, aumentando los beneficios del principal. Probamos con la de incentivos activa

$$u_2 - c = u_1 \Leftrightarrow u_2 = u_1 + c$$

y elegimos u_1 lo más chico posible, pero que el individuo quiera participar. Esto es $u_2 - c \geq \overline{u} \Leftrightarrow u_2 \geq \overline{u} + c \Leftrightarrow u_1 + c \geq \overline{u} + c \Leftrightarrow u_1 \geq \overline{u}$. Como u_1 debe ser positivo, elegimos $u_1 = 0$ y obtenemos $u_2 = c$.

19.C. Los beneficios de implementar a son 1 : recibe 1 seguro, y no paga sueldos. Los beneficios de implementar b son $2 - c^2$, pues recibe 2 seguro, y debe pagar c^2 seguro. Conviene implementar b si y sólo si $2 - c \geq 1 \Leftrightarrow c \leq 1$.

Ejercicio 20.A. Para implementar a, ponemos sueldos constantes $u - 0 = 4$, que arroja $u = 4 \Leftrightarrow s_1 = s_2 = s_3 = 16$. Para implementar b, ponemos burning oil con la acción a, sueldos constantes, y la restricción de participación activa (no querrá hacer d, porque b tiene un costo menor, y paga lo mismo): $u - 1 = 4 \Leftrightarrow s_2 = s_3 = 25$ y ponemos $s_1 = 0$. La utilidad del agente de hacer a es $\frac{10}{3} < 4$. Esta es obviamente la solución, pues es la solución al problema de implementar b, olvidándonos de las otras dos restricciones (que logramos poniendo $s_1 = 0$ que elimina la acción a, y usando que con sueldos constantes hace b y no d).

Para implementar d, eliminamos la acción a con burning oil, $s_1 = 0$, y resolvemos con la de incentivos con b activa:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}u_2 + \frac{3}{4}u_3 - 2 = 4 \\ \frac{3}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3 - 1 = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{2}, u_3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow s_2 = \frac{81}{4}, s_3 = \frac{169}{4}.$$

La utilidad de hacer a para el agente es $\frac{11}{3} < 4$. Esta es también obviamente la solución, porque es la solución al problema de implementar d, cuando sólo está disponible la acción b; en ese caso, sabemos que *tienen* que estar activas tanto la de participación como la de incentivos.

Los beneficios para el principal de cada acción son

$$V_a = \frac{160}{3} - 16 = \frac{115}{3},\ V_b = \frac{3}{4}60 + \frac{1}{4}83 - 25 = 40,75 \text{ y } V_d = \frac{81}{2} = 40,5.$$

Le conviene hacer b. Este ejercicio tiene una peculiaridad, y es que si no hubiera información asimétrica sería óptimo hacer d : con sueldos constantes (en 36) y la acción d, el principal obtendría $41,25$, y eso sería mejor que la acción b.

Ejercicio 21. Para implementar a, ponemos sueldos constantes, con $-2^{-s} - 0 = -1 \Leftrightarrow s = 0$.

Para implementar d, hacemos burning oil $u_2 - \frac{3}{4} = -1$, o $u_2 = -\frac{1}{4}$, que implica $s_2 = 2$, y los beneficios del principal son $20 - 2 = 18$. En ese caso s_1 tiene que ser tal que $\frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}\frac{1}{4} - 0 \leq -1 \Leftrightarrow u_1 \leq -\frac{11}{8} \Leftrightarrow s_1 \leq -0.459\,43$, y también $\frac{u_1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \leq -1 \Leftrightarrow u_1 \leq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow s_1 \leq -0.584\,96$.

Para implementar b, probamos con la de participación activa, y con la de incentivos con a activa, y vemos si se cumple la de incentivos contra d. Para eso,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{8} & = & -1 \\ \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 & = & -1 \end{array}$$

que arroja $u_1 = -\frac{5}{4}$ y $u_2 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto se cumple la restricción de incentivos de b con d : si hace d obtiene $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} < -1$. Probamos por si la de b con d activa arroja otra solución posible:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2-\frac{1}{8} &= -1\\ u_2-\frac{3}{4} &= -1\end{aligned}$$

que da $u_1=-\frac{3}{2}$ y $u_2=-\frac{1}{4}$. Con estos valores, si hace a obtiene $-\frac{2}{3}\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{4}=-\frac{13}{12}<-1$, por lo que también se cumple la de incentivos. Para implementar b, tenemos entonces dos contratos posibles. El primero, $u_1=-\frac{5}{4}$ y $u_2=-\frac{1}{2}$ arroja sueldos de $s_1=2-\log_2 5=-0.321\,93$ y $s_2=1$, y unos beneficios de

$$\frac{1}{2}\left(10+0.321\,93\right)+\frac{1}{2}\left(20-1\right)=14.661.$$

Si les asusta el $\log_2 5$, recuerden que $\log_x y=z\Leftrightarrow y=x^z$. Por lo tanto, $\ln y=\ln x^z=z\ln x\Leftrightarrow z=\frac{\ln y}{\ln x}$ y eso implica que si quieren averiguar $\log_2 5$, pueden hacer $\frac{\ln 5}{\ln 2}$. Y sólo para chequear: ustedes saben que $\log_2 32=5$ (es decir $2^5=32$), y si hacen $\frac{\ln 32}{\ln 2}=\frac{3.465\,7}{0.693\,15}=5$.

El otro contrato da sueldos de $s_1=-\log_2\frac{3}{2}=-0.58496$ y $s_2=-\log_2\frac{1}{4}=2$, por lo que los beneficios son

$$\frac{1}{2}\left(10+0.58496\right)+\frac{1}{2}\left(20-2\right)=14.292.$$

El contrato óptimo para implementar b es el primero.

Otra forma intuitiva de ver el mejor contrato para implementar b es la siguiente. Vemos que la restricción de incentivos de b contra a nos dice que debemos tener $\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2-\frac{1}{8}\geq\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2\Leftrightarrow u_2\geq u_1+\frac{3}{4}$, y la de b contra d nos dice $u_2\leq u_1+\frac{5}{4}$ (lo primero es que u_2 debe ser atractivo para que haga b y no a; la segunda restricción nos dice que u_2 no puede ser demasiado atractivo porque si no hará d). Ahora, como el agente es averso al riesgo, siempre le conviene al principal elegir u_2-u_1 lo más chico posible, y por lo tanto la solución será la que tiene la restricción de incentivos de b contra a activa.

El contrato óptimo es aquél que ofrece \$2 si sale x_2 y $s_1\leq-0.59$; el agente hace d, y el principal obtiene beneficios de 18.

Ejercicio 22.A. Costo de implementar a. Ya sabemos que como el costo de a es 0 y el de b es $c>0$, la manera más barata de implementar a es con sueldos constantes. Por lo tanto, debemos tener

$$\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_1=u_1=\overline{u}=0$$

por lo que $u_1=u_2=0$, es decir, $u\left(s\right)=0\Leftrightarrow\ln s=0\Leftrightarrow s=1$. Los beneficios esperados para el principal, de implementar a, son entonces

$$V_a=\frac{1}{2}\left(1-1\right)+\frac{1}{2}\left(2-1\right)=\frac{1}{2}$$

22.B. Costo de implementar b. Del análisis gráfico del Varian, sabemos que el contrato óptimo está donde se intersectan la restricción de participación, con la curva de pendiente 1 definida por la igualdad de la restricción de incentivos. De todas maneras, lo resolveremos matemáticamente. Como siempre, del Lagrangiano sabemos que

$$\frac{1}{u'\left(s_i\right)}=\lambda+\mu\left[1-\frac{1}{2\pi_{ib}}\right],\text{ para }i=1,2$$

por lo tanto, debemos tener que $\mu>0$, pues si no, s_i sería constante, y el agente eligiría la acción a, pues tiene un costo menor. Como la restricción de incentivos está activa y la de participación también, obtenemos

$$p\ln s_1+\left(1-p\right)\ln s_2-c=0=\frac{\ln s_1+\ln s_2}{2}.$$

De la última igualdad deducimos $s_1 = \frac{1}{s_2}$, y sustituyendo en la primera

$$-p \ln s_2 + (1-p) \ln s_2 - c = 0,$$

es decir, $s_2 = e^{\frac{c}{1-2p}}$ y $s_1 = e^{-\frac{c}{1-2p}}$. Los beneficios para el principal de implementar b son

$$V_b = p\left(1 - e^{-\frac{c}{1-2p}}\right) + (1-p)\left(2 - e^{\frac{c}{1-2p}}\right)$$

por lo tanto, b es mejor que a si y sólo si

$$p\left(1 - e^{-\frac{c}{1-2p}}\right) + (1-p)\left(2 - e^{\frac{c}{1-2p}}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Poniendo $x = e^{-\frac{c}{1-2p}}$, obtenemos

$$p - px + (1-p)\,2 - (1-p)\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \geq 0$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} x &\in \left[\frac{3-2p-\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}, \frac{3-2p+\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}\right] \Leftrightarrow \\ -\frac{c}{1-2p} &\in \left[\ln \frac{3-2p-\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}, \ln \frac{3-2p+\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}\right] \end{aligned}$$

etc, etc, y se puede despejar c.

Ejercicio 23. En principio, para cada t^* que el principal quiera implementar, deberá elegir $\{w(\pi)\}_{\pi=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\begin{aligned} & & \int_{t^*}^{t^*+1} (\pi - w(\pi))\, d\pi \\ \text{sujeto a } \int_{t^*}^{t^*+1} \log w(\pi)\, d\pi - \frac{t^{*2}}{10} &\geq 0 \\ \int_{t^*}^{t^*+1} \log w(\pi)\, d\pi - \frac{t^{*2}}{10} &\geq \int_{t}^{t+1} \log w(\pi)\, d\pi - \frac{t^2}{10}, \forall t \end{aligned}$$

Notamos sin embargo que para cada $t \neq t^*$, hay una probabilidad positiva que π caiga fuera de $[t^*, t^*+1]$, por lo que el principal sabrá que el agente no hizo t^*. En ese caso, podrá "prenderlo fuego" al agente, y eso no afectará la restricción de participación. Es decir, es una situación ideal para aplicar burning oil: un sueldo fijo w si $\pi \in [t^*, t^*+1]$, y un sueldo cercano a 0 para cualquier otro nivel de beneficios. Fijamos w de tal forma que $\int_{t^*}^{t^*+1} \log w d\pi - \frac{t^{*2}}{10} = 0 \Leftrightarrow \log w = \frac{t^{*2}}{10} \Leftrightarrow w(t) = e^{\frac{t^{*2}}{10}}$. Para que se cumpla la restricción de incentivos alcanza con poner un sueldo pequeño para $\pi \notin [t^*, t^*+1]$. Sólo para hacerlo más concreto, pero estas cuentas no son importantes, con cualquier $w < 1$, el agente obtiene una utilidad negativa si hace $t < t^* - 1$ (ya que obtiene seguro w, que da $\log w < 0$, y a eso le resta $t^2/10$). Por otro lado, obviamente, el agente no querrá hacer $t \geq t^*$, ya que reduce la probabilidad del sueldo alto, y tiene que hacer más esfuerzo. Por lo tanto, sólo resta fijar un $w < 1$ para que tampoco quiera hacer $t \in (t^*-1, t^*)$. En ese caso el agente obtiene

$$\begin{aligned} (t^*-t)\log w + (1-t^*+t)\,\frac{t^{*2}}{10} - \frac{t^2}{10} &< 0 \Leftarrow (t^*-t)\log w + \frac{t^{*2}}{10} - \frac{t^2}{10} = (t^*-t)\log w + \frac{(t^*-t)(t^*+t)}{10} < 0 \Leftrightarrow \\ \log w + \frac{t^*+t}{10} &< 0 \Leftarrow \log w + \frac{t^*}{5} < 0. \end{aligned}$$

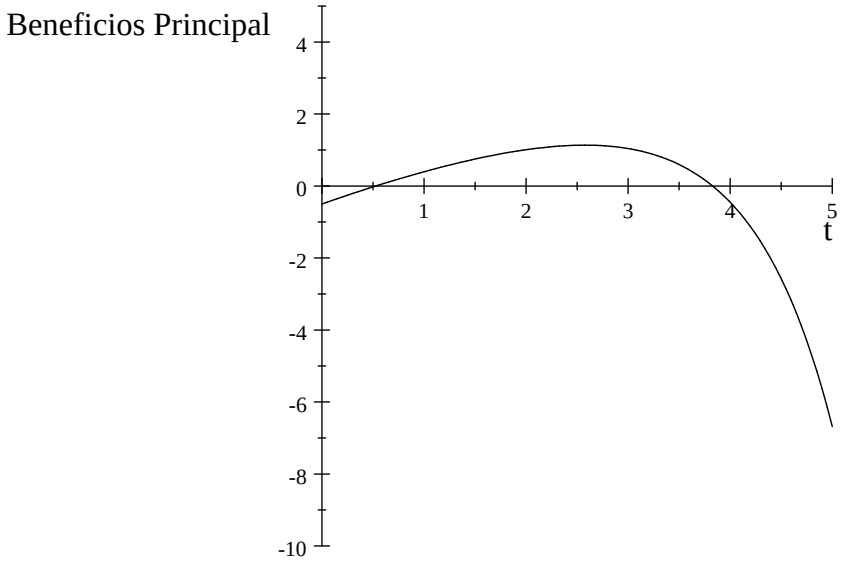
Por lo que si $\log w < -\frac{t^*}{5}$, el agente no querrá elegir $t \in (t^*-1, t^*)$. Otra forma de elegir un w apropiado, es notar que si $\log w < \frac{t^{*2}-2t^*}{10}$ obtendremos que la utilidad de hacer $t \in (t^*-1, t^*)$ es negativa:

$$\begin{aligned}(t^*-t)\log w + (1-t^*+t)\frac{t^{*2}}{10} - \frac{t^2}{10} &< 0 \Leftrightarrow (t^*-t)\log w + (-t^*+t)\frac{t^{*2}}{10} < \frac{t^2-t^{*2}}{10} \Leftrightarrow \\ \log w &< \frac{t^{*2}-t-t^*}{10} \Leftarrow \log w < \frac{t^{*2}-2t^*}{10} < \frac{t^{*2}-t-t^*}{10}.\end{aligned}$$

Para encontrar el t óptimo sustituimos en la función objetivo del principal y queda el problema de elegir t para maximizar

$$\int_t^{t+1}\left(\pi - e^{\frac{t^2}{10}}\right)d\pi = t + \frac{1}{2} - e^{\frac{t^2}{10}}.$$

El gráfico de esta función es



y se maximiza en $t = 2.5756$.

Ejercicio 24.A. Cada trabajador debe comparar la utilidad de $e = 1$, que es $w-1$, con la utilidad de $e = 0$, que es $\frac{n-1}{n}w$, y elegirá trabajar si y sólo si

$$w - 1 \geq \frac{n-1}{n}w \Leftrightarrow w \geq n$$

24.B. La firma elegirá $w = n$, y luego debe elegir n para maximizar

$$B = \alpha n - n^2$$

que es la forma "reducida" de $\alpha m - wn$, pues ya sabemos que si $w = n$, obtenemos $m = n$.

24.C. Tomando la derivada con respecto a n e igualando a 0 obtenemos $n = w = \frac{\alpha}{2}$.

24.D. La primera forma, es notar que si un plan es óptimo cuando $\alpha = \alpha_b$, ese mismo plan sigue siendo admisible cuando $\alpha = \alpha_a > \alpha_b$, y que cualquiera sea el m que ese plan genere, le dará más beneficios al principal. La segunda forma, es calculando todo, y tomando la derivada de los beneficios con respecto a α. La tercera, es con el Teorema de la Envolvente, pues llamando B a los beneficios óptimos, y siendo el

Lagrangiano del problema (cuando se implementa el esfuerzo $e = 1$) $L = \max n(\alpha - w) + \lambda\left(w - 1 - \frac{n-1}{n}w\right)$, obtenemos

$$\frac{dB}{d\alpha} = \frac{dL}{d\alpha} = n^* > 0.$$

Verificamos que esta forma nos da la misma respuesta que haciendo las cuentas directamente: $dB/d\alpha = n^* = \alpha/2$, y como $B = \alpha n^* - n^{*2} = \alpha^2/4$, nos da $dB/d\alpha = \alpha/2$.

Ejercicio 25.A. Para cada a fijo el principal debe elegir w para maximizar $p(a) - w - M$ sujeto a $w - a \geq 0$, $w \geq 0$. El sueldo no dependerá del éxito o del fracaso, ya que se puede monitorear la acción.

En el óptimo $w = a$, ya que no tiene sentido poner $w > a$. Luego, debemos elegir a para maximizar $p(a) - a - M$, que arroja $p'(a^*) = 1$.

Ejercicio 25.B. Para cada a, si el trabajador se va a desviar y no hacer a, hará un esfuerzo de 0, por lo tanto, si el principal quiere que haga el esfuerzo a, los salarios deberán ser tales que $w_A - a \geq \pi w_A + (1 - \pi) w_B$, con las restricciones $w_A, w_B \geq 0$.

No tiene sentido poner $w_B > 0$, ya que encarece darle incentivos al agente (nunca lo pagás si se cumple la restricción de incentivos, pero sube el w_A que tenés que usar). Por lo tanto, el problema del principal es el de elegir w para maximizar $p(a) - w$ sujeto a $w - a \geq \pi w$. De la restricción (activa) obtenemos $a = (1 - \pi) w$ y unos beneficios de $p(a) - \frac{a}{1-\pi}$. El a óptimo satisface $p'(a^*) = \frac{1}{1-\pi}$. Por lo tanto, cuanto más grande es π (la probabilidad de error), más grande el lado derecho de la ecuación, y más chico el a^*.

La idea es que para cada a, cuanto más grande π, más grande tiene que ser w para que el individuo se quiera esforzar. La razón es que no lo van a agarrar si el π es grande, por lo que el costo de desviarse es cada vez más chico: para que quiera esforzarse hay que darle una "renta", el w, grande. A medida que crece π, es mejor implementar acciones a con costo menor para contrarrestar este efecto.

Para $A = 1$ y $p(a) = \sqrt{a}$ el a óptimo es $\frac{1}{2ra} = \frac{1}{1-\pi} \Leftrightarrow a^* = \left(\frac{1-\pi}{2}\right)^2$

Ejercicio 26.A. El costo de implementar a es $s = -\ln(-a - \overline{u})$, y los beneficios para el principal son

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{9}{10}x_2 + \ln(-a - \overline{u})$$

Para implementar la acción b, hacemos el contrato "burning oil": si ocurre el nivel bajo de producto, le tiramos aceite hirviendo al agente. Para formalizar esto, ignoramos la restricción de incentivos, y resolvemos para el sueldo que obtendría el agente si trabajara b:

$$-e^{-s_2} - b = \overline{u} \Leftrightarrow s_2 = -\ln(-b - \overline{u}).$$

Ahora, para asegurarnos que el agente no querrá desviarse y adoptar la acción a, podemos elegir el sueldo que obtendría el agente en caso de que ocurra x_1 tan bajo como querramos:

$$\begin{aligned} \overline{u} &> \frac{1}{10}\left(-e^{-s_1} - a\right) + \frac{9}{10}\left(-e^{-s_2} - a\right) = \frac{9}{10}(\overline{u} + b) - \frac{1}{10}e^{-s_1} - a \Leftrightarrow \\ e^{-s_1} &> 9b - \overline{u} - 10a \Leftrightarrow -\ln(9b - 10a - \overline{u}) > s_1. \end{aligned}$$

Los beneficios para el principal de implementar b son

$$x_2 + \ln(-b - \overline{u})$$

por lo tanto elegirá implementar b si y sólo si

$$\frac{x_1 - x_2}{10} < \ln\left(\frac{b + \overline{u}}{a + \overline{u}}\right)$$

26.B. El costo de a es el mismo de antes, y los beneficios para el principal son

$$(1-a)\,x_1 + ax_2 + \ln(-a-\overline{u})\,.$$

Para implementar b, igualamos la utilidad esperada de b a $\overline{u}$ y obtenemos

$$-(1-b)\,e^{-s_1} - be^{-s_2} - b = \overline{u} \Leftrightarrow s_2 = -\ln\left(-\frac{1-b+(b+u)\,e^{s_1}}{b}\right) + s_1$$

También, sabemos que la restricción de incentivos estará activa, por lo cual

$$\overline{u} = -(1-a)\,e^{-s_1} - ae^{-s_2} - a$$

y sustituyendo el valor encontrado para s_2 en esta ecuación obtenemos

$$s_1 = -\ln(-\overline{u})$$

y por tanto $s_2 = -\ln(-\overline{u}-1)$.

Ejercicio 27. Partes A y B. Para implementar a se eligen sueldos constantes tales que $\log s - a = \overline{u} \Leftrightarrow s = e^{a+\overline{u}}$. Los beneficios son $(x_1+x_2)/2 - e^{a+\overline{u}}$. Para implementar b, hacemos activa a la restricción de incentivos, y como la utilidad es continua y no acotada por debajo, también igualamos la restricción de participación para obtener

$$\frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b = \overline{u} = \frac{1}{2}\log s_1 + \frac{1}{2}\log s_2 - a \Leftrightarrow (s_1, s_2) = \left(e^{3a-2b+\overline{u}}, e^{2b-a+\overline{u}}\right).$$

Los beneficios del principal son entonces

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{1}{4}\left(x_1 - e^{3a-2b+\overline{u}}\right) + \frac{3}{4}\left(x_2 - e^{2b-a+\overline{u}}\right) > \frac{x_1+x_2}{2} - e^{a+\overline{u}} = V(a) \Leftrightarrow \\ \frac{x_2-x_1}{4e^{\overline{u}}} &> \frac{3}{4}e^{2b-a} + \frac{1}{4}e^{3a-2b} - e^{a} \Leftrightarrow \frac{8}{3} > e^{2b-a} = \frac{25}{16} \end{aligned} \tag{1.10}$$

por lo que el principal implementará la acción b.

Si en cambio $x_2 = \frac{3}{2}$, la ecuación (1.10) se transforma en $\frac{3}{2} > \frac{25}{16}$, por lo que el principal implementa a.

Ejercicio 28.A. El gobierno debe elegir s_A y s_B para maximizar

$$\frac{3}{4}\frac{3}{4}2\,(1-s_A) + 2\frac{1}{4}\frac{3}{4}\,(1-s_A-s_B) + \frac{1}{4}\frac{1}{4}2\,(-s_B) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}s_A - \frac{1}{2}s_B$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\left(\sqrt{s_A}-1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{s_B} &\geq \overline{u} \\ \frac{3}{4}\left(\sqrt{s_A}-1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{s_B} &\geq \frac{1}{4}\left(\sqrt{s_A}-1\right) + \frac{3}{4}\sqrt{s_B} \Leftrightarrow \sqrt{s_A} - 1 \geq \sqrt{s_B} \end{aligned}$$

Vemos que llamando a a la acción que hace que la recaudación sea alta con probabilidad $\frac{3}{4}$, y b a la otra, tenemos que este problema es idéntico formalmente al de las notas, si ponemos $c_a = \frac{3}{4}$, $c_b = \frac{1}{4}$, $\pi_{Aa} = \frac{3}{4}$ y $\pi_{Ab} = \frac{1}{4}$.

28.B. Sabemos que, en principio, en el óptimo se cumplen con igualdad las dos restricciones si se quiere implementar la acción con el costo alto (si probamos y vemos que como $\sqrt{s}$ es acotada por debajo, la de participación no queda activa, probamos alguna otra cosa). Tenemos entonces $\sqrt{s_A} - 1 = \sqrt{s_B}$ y, sustituyendo

esto en la primera restricción, $s_B = \overline{u}^2$, de lo que obtenemos $s_A = (\overline{u}+1)^2$. Vemos que si $\overline{u} \geq 0$, entonces $s_A \geq 1$, y entonces $\sqrt{s_B} \geq 0$, por lo que fue correcta nuestra "prueba" con las dos restricciones activas.

28.C. La utilidad del gobierno de implementar a es

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}s_A - \frac{1}{2}s_B = -2\overline{u}^2 - 3\overline{u}.$$

Para encontrar la utilidad de implementar la acción b, debemos calcular el pago constante que dejará a las provincias indiferentes entre participar y no participar cuando implementan la acción b:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{s}-1\right) + \frac{3}{4}\sqrt{s} = \overline{u} \Leftrightarrow s = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\overline{u} + \overline{u}^2.$$

Esto le da al gobierno una utilidad

$$\frac{1}{8}(1-s) + \frac{3}{8}(1-2s) + \frac{9}{8}(-s) = \frac{1}{2} - 2s$$

y sustituyendo por el s óptimo,

$$\frac{3}{8} - \overline{u} - 2\overline{u}^2.$$

Por lo tanto, la acción a es mejor que la b si y sólo si

$$-2\overline{u}^2 - 3\overline{u} - \left(\frac{3}{8} - \overline{u} - 2\overline{u}^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \overline{u} \leq -\frac{3}{16}.$$

Como no pusimos ninguna restricción sobre $\overline{u}$, a veces es mejor a y a veces mejor b.

Ejercicio 29.A.I. Ponemos la utilidad del agente igual a $\overline{u}$, y como no hay incertidumbre sobre su pago si elige e^* tenemos que

$$u(s^*) - c(e^*) = \overline{u} \Leftrightarrow s^* = u^{-1}\left(\overline{u} + c(e^*)\right).$$

29.A.II. El agente nunca elegirá niveles $e > e^*$ pues eligiendo e^* ganará lo mismo, y se esforzará menos. El agente tampoco elegirá niveles $e \in (e_*, e^*)$ pues para todos esos niveles e, su utilidad es

$$\frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e) < \frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e_*).$$

Es decir, para todos esos niveles de e, si tiene suerte, recibe el salario alto s^*, y si no tiene suerte, el salario bajo s_*, pero para todos esos e, la probabilidad de que ocurra el producto alto está fija en $\frac{1}{2}$, y por lo tanto, no vale la pena esforzarse.

Por último, si $e_* > 0$, para todos los niveles $e \in [0, e_*)$ el agente recibirá s_* seguro, por lo que conviene elegir el nivel más bajo de esfuerzo, que es 0.

29.A.III. La utilidad de elegir e^* es $\overline{u}$, como ya vimos. Ahora debemos elegir s_* para que

$$\begin{aligned} \overline{u} &\geq \frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e_*) \Leftrightarrow s_* \leq u^{-1}\left(2\left(\overline{u} + c(e_*)\right) - u(s^*)\right) = u^{-1}\left(\overline{u} + 2c(e_*) - c(e^*)\right) \\ \overline{u} &\geq u(s_*) - c(0) \Leftrightarrow s_* \leq u^{-1}\left(\overline{u} + c(0)\right) \end{aligned}$$

(en la primera ecuación se puede hacer alguna cuenta adicional, usando la definición de e_*). Con s^* y s_* elegidos de esta manera, el agente elegirá siempre e^*.

29.B.I. El principal debe elegir (E, s) para maximizar

$$\begin{aligned} & \int_1^2 (\varepsilon f(E) - s)\, d\varepsilon \\ \text{sujeto a } u(s) - c(E) &= \overline{u} \end{aligned}$$

Reemplazando las formas funcionales, de la restricción obtenemos $s = e^{\overline{u}+E}$, y reemplazando en la función objetivo vemos que el principal debe elegir E para maximizar

$$\int_1^2 \left(\varepsilon f(E) - e^{\overline{u}+E}\right) d\varepsilon = f(E) \int_1^2 \varepsilon d\varepsilon - e^{\overline{u}+E} = \frac{3}{2} f(E) - e^{\overline{u}+E}.$$

La condición de primer orden, sustituyendo $f(e)$ por e, arroja $e^* = \log \frac{3}{2} - \overline{u}$.

29.B.II. Como en la parte A, elegimos s^* de forma que el agente sea indiferente entre participar y no participar si elige e^* :

$$u(s^*) - c(e^*) = \overline{u} \Leftrightarrow s^* = e^{\overline{u}+e^*} = \frac{3}{2}.$$

Debemos considerar dos casos: en el primero, cuando el esfuerzo es "muy bajo", el agente siempre recibe el sueldo bajo s_*; en el segundo, recibe algunas veces s_* y otras s^*. El límite que determina cuándo un esfuerzo es muy bajo viene dado por aquél esfuerzo $\overline{e}$, tal que aún si el trabajador tiene suerte y sale $\varepsilon = 2$, el sueldo es bajo: $2\overline{e} = e^* \Leftrightarrow \overline{e} = e^*/2$. La utilidad de elegir $E \leq \frac{e^*}{2}$ es

$$\begin{aligned} & P(\varepsilon E < e^*) \log s_* + (1 - P(\varepsilon E < e^*)) \log s^* - E \\ = \; & P(\varepsilon < 2) \log s_* + (1 - P(\varepsilon < 2)) \log s^* - E \\ = \; & \log s_* - E. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que s_* debe ser tal que, para todo $E \in \left[0, \frac{e^*}{2}\right]$ debemos tener $\log s_* - E \leq \overline{u}$ por lo que eligiendo $s_* \leq e^{\overline{u}}$ el agente no querrá elegir E en este rango.

La utilidad de elegir $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right]$ es

$$\begin{aligned} U &= P(\varepsilon E < e^*) \log s_* + (1 - P(\varepsilon E < e^*)) \log s^* - E \\ &= P\left(\varepsilon < \frac{e^*}{E}\right) \log s_* + \left(1 - P\left(\varepsilon < \frac{e^*}{E}\right)\right) \log s^* - E \\ &= \left(\frac{e^*}{E} - 1\right) \log s_* + \left(2 - \frac{e^*}{E}\right) \log s^* - E \qquad (1.11) \\ &= \frac{\left(\log \frac{3}{2} - \overline{u} - E\right) \log s_* + \left(2E - \log \frac{3}{2} + \overline{u}\right) \log \frac{3}{2} - E^2}{E} \end{aligned}$$

Esta es una función continua en E (pues como $e^* = \log \frac{3}{2} - \overline{u} > 0$, $e^*/2 > 0$, y entonces el denominador nunca es 0) en un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene un máximo y un mínimo. Para cualquier E^* que minimice la función, tendremos $\log \frac{3}{2} - \overline{u} - E^* > 0$, por lo que alcanza con elegir un s_* suficientemente pequeño: entonces, la utilidad máxima de elegir $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right]$ será menor que $\overline{u}$. Eligiendo s_* como el mínimo s entre este valor y $e^{\overline{u}}$ (que des-incentiva esfuerzos $E \leq e^*/2$), obtenemos que el agente no quiere elegir $e \leq e^*$.

Una forma menos "abstracta" de resolverlo es la siguiente. La utilidad de la ecuación (1.11) es tal que si s_* es suficientemente pequeño, la utilidad se maximiza con $E = e^*$. Para ver eso, tomamos la derivada de (1.11) con respecto a E,

$$\frac{dU}{dE} = \frac{\left(\log \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\log \frac{3}{2} - \overline{u}\right) \log s_* - \overline{u} \log \frac{3}{2} - E^2}{E^2}$$

y notamos que si s_* es suficientemente pequeño, entonces dU/dE es positivo (ya que hemos asumido que $\log \frac{3}{2} - \overline{u}$ es positivo). Eso hace que el único E óptimo sea el más grande posible, $E = e^*$. Como la utilidad de e^* es exactamente $\overline{u}$, nos habremos asegurado que no conviene elegir ningún $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right)$, que era

exactamente nuestro objetivo. Para hacerlo más concreto aún, los s_* que hacen dU/dE positiva son aquellos para los cuales

$$\left(\log\frac{3}{2}\right)^2-\left(\log\frac{3}{2}-\overline{u}\right)\log s_*-\overline{u}\log\frac{3}{2}-E^2>0\Leftrightarrow\log s_*<\frac{\ln\frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\overline{u}\right)-E^2}{\ln\frac{3}{2}-\overline{u}}$$

y para que esta desigualdad se cumpla para todo E, hay que hacer que se cumpla para el mayor E, $E=e^*=\left(\ln\frac{3}{2}-\overline{u}\right)$. Deducimos que eligiendo

$$\log s_*<\overline{u}=\frac{\ln\frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\overline{u}\right)-e^{*2}}{\ln\frac{3}{2}-\overline{u}}\leq\frac{\ln\frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\overline{u}\right)-E^2}{\ln\frac{3}{2}-\overline{u}}$$

el agente no elegirá $E\in\left[\frac{e^*}{2},e^*\right)$, como buscábamos.

Ejercicio 30.A. Como el costo de el esfuerzo malo es menor, ignoramos la restricción de incentivos y ponemos un sueldo constante:

$$\left(100-\frac{10}{w}-0\right)\frac{3}{4}+\left(100-\frac{10}{w}-0\right)\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow w=\frac{1}{10}$$

y la utilidad del principal es $\left(20-\frac{1}{10}\right)\frac{1}{4}+\left(0-\frac{1}{10}\right)\frac{3}{4}=\frac{49}{10}$.

30.B. Como el esfuerzo es observable, se puede poner en el contrato, y no hay restricción de incentivos. Tenemos entonces que el sueldo debe ser constante y obtenemos

$$\left(100-\frac{10}{w}-2\right)\frac{3}{4}+\left(100-\frac{10}{w}-2\right)\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow w=\frac{5}{49}$$

y la utilidad del principal es $\left(20-\frac{5}{49}\right)\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{49}\right)\frac{1}{4}=\frac{730}{49}$.

30.C. El problema que enfrenta el principal es el de elegir w_e, w_n (los sueldos en caso de error y no error respectivamente) para maximizar

$$\begin{aligned}
&&\frac{3}{4}\left(20-w_n\right)-\frac{1}{4}w_e &= 15-\frac{3}{4}w_n-\frac{1}{4}w_e\\
s.a\quad&\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}-2\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}-2\right) &\geq 0\\
&\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}-2\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}-2\right) &\geq \frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}\right)+\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}\right)
\end{aligned}$$

Como la función de utilidad es continua en w y no acotada por debajo, la restricción de participación estará activa, y como en el óptimo la de incentivos estará activa (si no lo estuviera los sueldos serían constantes, y con sueldos constantes el agente hace el esfuerzo malo) el contrato óptimo resuelve el sistema de 2×2 que surge de igualar las dos restricciones

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}-2\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}-2\right) &= 0\\
\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}-2\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}-2\right)-\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{w_n}\right)-\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{w_e}\right) &= 0
\end{aligned}$$

La solución es $w_e=\frac{10}{101},w_n=\frac{10}{97}$, y el beneficio del principal es

$$15-\frac{3}{4}\frac{10}{97}-\frac{1}{4}\frac{10}{101}=14.898>\frac{49}{10}$$

por lo que elige el esfuerzo bueno.

Ejercicio 31.A El FMI es el principal y le presta plata a Argentina que es el agente. El FMI quiere diseñar un esquema que haga que cada vez que le presta a Argentina, Argentina haga algo bueno con la plata.

31.B Si cada vez que ocurre el "producto malo" (que Argentina no tenga posibilidades de repago) el FMI le perdona la deuda (o la rescata), entonces Argentina sabe que el esquema de pagos es un "sueldo constante", y no tendrá incentivos a hacer nada bueno con la plata, y se la gastará en lo que le dé más placer, y no en lo que el FMI quiere.

31.C En cada caso particular, al FMI le gustaría rescatar al fundido (para evitar crisis sociales como la de Argentina en 2002). El problema es que si lo hace, el próximo que pida plata sabrá que puede "timbearse" la plata pues llegado el momento, el FMI le perdonará la deuda, o lo rescatará (no es lo que yo digo, es lo que dice la teoría del agente principal, o de moral hazard, aplicada en este contexto)

Ejercicio 32.A. Para $e = 6$, el principal debe elegir w para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{2}{3}(60.000 - w) + \frac{1}{3}(30.000 - w) \\ s.a \qquad 114 & \leq & \sqrt{w} - 6^2 \end{aligned}$$

lo que arroja $w = 22.500$ y beneficios de 27 500. Para $e = 4$, obtenemos $w = 16.900$ y beneficios de 23.100. El economista elige el contrato con $e = 6$.

32.B. Si hay información asimétrica, cuando se quiere implementar $e = 4$, el contrato es el mismo. Cuando se quiere implementar $e = 6$ se deben elegir w_6 y w_3 para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{2}{3}(60.000 - w_6) + \frac{1}{3}(30.000 - w_3) \\ s.a \qquad 114 & \leq & \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_6} - 6^2\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_3} - 6^2\right) \\ \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_6} - 6^2\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_3} - 6^2\right) & \geq & \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_6} - 4^2\right) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_3} - 4^2\right) \end{aligned}$$

Como las dos restricciones están activas, igualamos ambos lados de la restricción de participación a 114 y obtenemos $w_3 = 12.100$, $w_6 = 28.900$ y beneficios de 26.700, por lo que el economista elige $e = 6$.

Ejercicio 33. Partes A.B. Para implementar e_b ponemos sueldos constantes con la restricción de participación activa y obtenemos$\sqrt{w} = 0 \Leftrightarrow w_1 = w_2 = 0$. Los beneficios del principal son $V_b = \frac{1}{5}25 + \frac{4}{5}4 = \frac{41}{5}$

Para implementar e_a, probamos con participación e incentivos activas

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}u_2 + \frac{1}{5}u_1 - 1 &= 0 \\ \frac{4}{5}u_2 + \frac{1}{5}u_1 - 1 &= \frac{1}{5}u_2 + \frac{4}{5}u_1 = 0 \end{aligned}$$

y vemos que como debemos tener $u_2 > 0$, y $u_1 \geq 0$, la de incentivos no puede cumplirse nunca, si está activa la de participación (el sistema arroja $u_1 = -\frac{1}{3}, u_2 = \frac{4}{3}$, que es imposible). Probamos entonces con $u_1 = 0$ y la de incentivos activa, que arroja

$$\frac{4}{5}u_2 + \frac{1}{5}u_1 - 1 = \frac{1}{5}u_2 + \frac{4}{5}u_1 \Leftrightarrow \frac{4}{5}u_2 - 1 = \frac{1}{5}u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow w_2 = \frac{25}{9}.$$

Los beneficios del principal son entonces $V_a = \frac{4}{5}\left(25 - \frac{25}{9}\right) + \frac{1}{5}(4 - 0) = \frac{836}{45}$.

33.C. Cuando se sabe que ocurrirá B, el problema es sencillo: el principal le dice al agente, que haga e_b, y le paga 0. Si la tecnología no le dice al principal que el estado es B, la probabilidad del estado A es

$$P\left(A\left|\neg B\right.\right)=\frac{P\left(A\&\neg B\right)}{P\left(\neg B\right)}=\frac{P\left(A\right)}{P\left(\neg B\right)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}.$$

La probabilidad de M es entonces $\frac{3}{4}$.

Para implementar e_b si el estado es B, otra vez ponemos sueldos constantes e iguales a 0, que arrojan beneficios $V_b^B=4$. Para implementar e_b si el estado no es B, otra vez ponemos sueldos constantes e iguales a 0, que arrojan beneficios $V_b^{\neg B}=\frac{1}{4}25+\frac{3}{4}4=\frac{37}{4}$. Para implementar e_a, otra vez ponemos $u_1=0$, y ponemos la restricción de incentivos activa, que arroja

$$1.u_2-1=\frac{1}{4}u_2+\frac{3}{4}u_1\Leftrightarrow u_2-1=\frac{1}{4}u_2\Leftrightarrow u_2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow w_2=\frac{16}{9}.$$

Los beneficios del principal son $V_a^{\neg B}=25-\frac{16}{9}=\frac{209}{9}>\frac{37}{4}$. El principal elegirá implementar a si el estado no es B.

Los beneficios a priori del principal serán entonces:

$$P\left(B\right)V_b^B+P\left(\neg B\right)V_a^{\neg B}=\frac{1}{5}4+\frac{4}{5}\frac{209}{9}=\frac{872}{45}.$$

La diferencia con los beneficios de antes es $\frac{872}{45}-\frac{836}{45}=\frac{4}{5}$.

Ejercicio 34.A. El principal debe elegir s_1,s_2 y s_3 para maximizar

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}\left(1-b\right)\left(1-s_1\right)+\frac{1}{3}\left(2-s_2\right)+\frac{2}{3}b\left(3-s_3\right)\\ \text{sujeto a } 0\quad\leq\quad&\frac{2}{3}\left(1-b\right)s_1+\frac{1}{3}s_2+\frac{2}{3}bs_3-b^2.\end{aligned}$$

Cualquier esquema de pagos (s_1,s_2,s_3) que cumpla con la restricción de participación con igualdad será tal que

$$b^2=\frac{2}{3}\left(1-b\right)s_1+\frac{1}{3}s_2+\frac{2}{3}bs_3$$

y por lo tanto obtendrá unos beneficios de

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\left(1-b\right)\left(1-s_1\right)+\frac{2-s_2}{3}+\frac{2}{3}b\left(3-s_3\right)&=\frac{2}{3}\left(1-b\right)+\frac{2}{3}+2b-\left[\frac{2}{3}\left(1-b\right)s_1+\frac{s_2}{3}+\frac{2}{3}bs_3\right]\\&=\frac{2}{3}\left(1-b\right)+\frac{2}{3}+2b-b^2\end{aligned}\tag{1.12}$$

(que es la expresión a la que queremos llegar). Como la función de utilidad del agente es no acotada por debajo y continua, en el contrato óptimo la restricción de participación debe estar activa, y los beneficios serán como en (1.12).

Nota: vemos que cualquier contrato que cumpla la restricción de Participación (para el esfuerzo b) con igualdad es óptimo (para implementar b), pues: todos los contratos que cumplen la restricción de participación con igualdad arrojan la misma utilidad, y el óptimo cumple la restricción con igualdad.

34.B. La solución es $b=\frac{2}{3}$.

34.C. Tenemos que sustituyendo por el b^* de la Parte B se obtiene $F=\frac{16}{9}$.

34.D. Por construcción el contrato satisface la restricción de participación. También, como b^* maximiza

$$\frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2$$

también maximiza

$$\frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2-F.$$

Por lo tanto, para todo b

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(1-b^*)(1-F)+\frac{1}{3}(2-F)+\frac{2}{3}b^*(3-F)-b^{*2} &= \frac{2}{3}(1-b^*)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b^**3-b^{*2}-F\\ &\geq \frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2-F\\ &= \frac{2}{3}(1-b)(1-F)+\frac{1}{3}(2-F)+\frac{2}{3}b(3-F)-b^2.\end{aligned}$$

Es decir, se satisfacen todas las restricciones de incentivos. Ello demuestra que el contrato de la Parte C es óptimo para implementar b^* : lo implementa, pues se cumplen las dos restricciones, y es óptimo pues (como mostramos en la Parte A) cualquier contrato que le de la utilidad de reserva al agente es óptimo.

34.E. Demostraremos que el principal querrá implementar b^* de dos formas "distintas" (son la misma). Para la primera, llamemos $V(b)$ al valor máximo de la utilidad que puede alcanzar el principal cuando quiere implementar b y debe satisfacer las dos restricciones, y llamemos $\widetilde{V}(b)$ al valor máximo de la utilidad que puede alcanzar el principal cuando quiere implementar b y debe satisfacer *sólo* la restricción de participación. Es decir, queremos mostrar que para todo b, $V(b^*)\geq V(b)$.

Notamos que para todo b $\widetilde{V}(b)\geq V(b)$, y recordamos, de la Parte A, que b^* maximiza $\widetilde{V}(b)$:

$$\widetilde{V}(b^*)\geq\widetilde{V}(b)$$

para todo b. Por lo tanto,

$$\widetilde{V}(b^*)\geq\widetilde{V}(b)\geq V(b)$$

Como el plan $(1-F,2-F,3-F)$ es óptimo para implementar b^* en el problema con información asimétrica (de la Parte D) da una utilidad para el principal $V(b^*)$, y como ese plan cumple la restricción de participación con igualdad (por las Parte C) es óptimo para implementar b^* sin la restricción de incentivos (por la Parte A), por lo que $V(b^*)=\widetilde{V}(b^*)$. Tenemos entonces que para todo b,

$$V(b^*)=\widetilde{V}(b^*)\geq\widetilde{V}(b)\geq V(b)$$

como queríamos demostrar.

Para la "segunda" forma de demostrar lo mismo, llamemos: $\widetilde{A}$ al subconjunto de $[0,1]\times\mathbf{R}^3$ formado por cuartetos de la forma $[b,(s_1,s_2,s_3)]$ que satisfacen la restricción de participación (son los pares de [esfuerzo,planes] que satisfacen la restricción); A al subconjunto de $\widetilde{A}$ definido por los $[b,s]\in\widetilde{A}$ tales que

$$\frac{2}{3}(1-b)s_1+\frac{s_2}{3}+\frac{2}{3}bs_3-b^2\geq\frac{2}{3}(1-a)s_1+\frac{s_2}{3}+\frac{2}{3}as_3-a^2,\forall a\in[0,1]$$

(son los planes en $\widetilde{A}$ que no tienen problemas de incentivos). El problema del principal es el de elegir $[b,s]\in A$ para maximizar

$$f(b,s)=\frac{2}{3}(1-b)(1-s_1)+\frac{2-s_2}{3}+\frac{2}{3}b(3-s_3).$$

En las Partes A y C demostramos que $[b^*,(1-F,2-F,3-F)]$ es óptimo en el problema de maximizar $f(b,s)$ con $(b,s)\in\widetilde{A}$ (en la Parte A mostramos que cualquiera que cumpla participación con igualdad es

óptimo para implementar b, y en la C que el plan en cuestión la cumple con igualdad). Como, por la Parte D, $[b^*, (1-F, 2-F, 3-F)] \in A$, tenemos que $[b^*, (1-F, 2-F, 3-F)]$ es óptimo en el problema de maximizar $f(b,s)$ con $(b,s) \in A$.

Ejercicio 35. A y E. Como no hay problemas de incentivos (ya que el agente es neutral al riesgo), habrá muchas opciones para implementar el esfuerzo bajo (y lo mismo para el alto). Comenzamos por notar que por el Lema 1, la restricción de participación estará activa:

$$\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 - 0 = 10 \Leftrightarrow w_2 = \frac{50 - 3w_1}{2}.$$

El objetivo del principal, es elegir w_1 y w_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{3}{5}(20 - w_1) + \frac{2}{5}(x - w_2) \\ \text{sujeto a } \frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 &= 10 & \\ \frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 &\geq \frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}w_2 - 2. & \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo la restricción de participación obtenemos el problema de elegir w_1 para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{3}{5}(20 - w_1) + \frac{2}{5}\left(x - \frac{50 - 3w_1}{2}\right) \\ \text{sujeto a } \frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}\frac{50 - 3w_1}{2} &\geq \frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}\frac{50 - 3w_1}{2} - 2. & \end{aligned}$$

Simplificando la función objetivo, vemos que los beneficios del principal son $\frac{2}{5}x + 2$ independientemente de los sueldos (siempre que se cumpla la restricción de participación). Por lo tanto, cualquier esquema que cumpla la restricción de incentivos será óptimo, y la restricción de incentivos se reduce a: $w_1 \geq 8$. En resumen, cualquier esquema con $w_2 = \frac{50-3w_1}{2}$ y $w_1 \geq 8$ es óptimo (por supuesto, sería razonable que w_2 fuera positivo también). La restricción de $w_1 \geq 8$ debe cumplirse, pues de otra manera (si el salario del producto bueno fuera alto) el agente querría hacer el esfuerzo alto.

La opción más natural es poner $w_1 = w_2$, y en ese caso tendríamos $w_1 = w_2 = 10$.

35.B y D. Otra vez, la restricción de participación estará activa,

$$\frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}w_2 - 2 = 10 \Leftrightarrow w_2 = \frac{60 - w_1}{4}$$

y sustituyéndola en la función objetivo del principal y en la restricción de incentivos obtenemos que el problema del principal es el de elegir w_1 para maximizar

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(20 - w_1) + \frac{4}{5}\left(x - \frac{60 - w_1}{4}\right) &= \frac{4}{5}x - 8 \\ \text{sujeto a } \frac{1}{5}w_1 + \frac{4}{5}\frac{60 - w_1}{4} - 2 &\geq \frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}\frac{60 - w_1}{4} \Leftrightarrow 8 \geq w_1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

No debería sorprendernos que la restricción de incentivos sea el opuesto que lo que era en la Parte A, aún despues de haber reemplazado w_2 por su valor sacado de la restricción de participación. Para ver por qué, recuerden el análisis gráfico del problema de 2x2: los contratos que inducen al agente a hacer una acción son los opuestos que los que lo inducen a hacer la otra acción.

Por lo tanto, cualquier esquema de sueldos con $w_1 \leq 8$ y $w_2 = 15 - w_1/4$ será óptimo. Para hacer que el contrato sea una franquicia, debemos hacer que el principal reciba una suma fija, independiente del resultado

(si salió 20 o salió x) y que el agente sea el que se quede con todo el riesgo. Es decir, debemos elegir w_1 para que

$$20 - w_1 = x - \frac{60 - w_1}{4} \Leftrightarrow w_1 = 28 - \frac{4}{5}x \text{ y } w_2 = \frac{1}{5}x + 8.$$

En esta franquicia, el agente paga siempre $F = \frac{4}{5}x - 8$ (en la ecuación (1.13), son los beneficios máximos que recibe el principal cuando se cumple la restricción de participación).

Cuando al negocio le va mal, pierde $\$\frac{4}{5}x + 12$, y además pierde los 2 de utilidad por el esfuerzo alto. Pero cuando le va bien, gana $\$\frac{1}{5}x + 8$ (x menos los $\frac{4}{5}x - 8$ que le debe pagar al principal) y paga 2 en utilidad. En términos esperados, obtiene una utilidad de

$$\frac{1}{5}\left(20 - \frac{4}{5}x + 8\right) + \frac{4}{5}\left(x - \frac{4}{5}x + 8\right) - 2 = 10$$

como era de esperar.

35.C. Cuando el principal implementa el esfuerzo bajo, obtiene unos beneficios de $\frac{2}{5}x+2$ y cuando implementa el esfuerzo alto los beneficios son $\frac{4}{5}x - 8$. Por lo tanto implementará el esfuerzo alto si y sólo si

$$\frac{4}{5}x - 8 \geq \frac{2}{5}x + 2 \Leftrightarrow x \geq 25$$

Ejercicio 36. La restricción de participación del agente, con igualdad, es $E_{\pi_a} s(x) - c_a = \overline{u}$, mientras que los beneficios del principal son

$$E_{\pi_a}(x - s(x)) = E_{\pi_a}(x) - E_{\pi_a} s(x) = E_{\pi_a}(x) - c_a - \overline{u}.$$

Como la utilidad del agente es continua y no acotada por debajo, la restricción de participación estará activa, y la función objetivo del principal será $E_{\pi_a}(x) - c_a - \overline{u}$, que se maximiza en a^* : como $E_{\pi_a}(x - s(x)) + E_{\pi_a}(s(x)) - c_a = E_{\pi_a}(x) - c_a$, tenemos que para todo a

$$E_{\pi_{a^*}}(x) - c_{a^*} \geq E_{\pi_a}(x) - c_a \Rightarrow E_{\pi_{a^*}}(x) - c_{a^*} - \overline{u} \geq E_{\pi_a}(x) - c_a - \overline{u}.$$

Por otra parte, también tenemos que

$$E_{\pi_{a^*}}(x) - c_{a^*} \geq E_{\pi_a}(x) - c_a \Rightarrow E_{\pi_{a^*}}(x) - F - c_{a^*} \geq E_{\pi_a}(x) - F - c_a \Rightarrow E_{\pi_{a^*}}(x - F) - c_{a^*} \geq E_{\pi_a}(x - F) - c_a$$

por lo que el agente elegirá a^* si tiene una franquicia.

Tenemos entonces que un contrato óptimo en este caso, aún con información asimétrica, es una franquicia que implementa a^*. Para verlo, llamamos $V(a)$ al valor máximo de la utilidad que puede alcanzar el principal cuando quiere implementar a y debe satisfacer participación e incentivos, y sea $\widetilde{V}(a)$ al valor máximo cuando quiere implementar a y debe satisfacer *sólo* la de participación. Queremos mostrar que para todo a, $V(a^*) \geq V(a)$. Para todo a $\widetilde{V}(a) \geq V(a)$, y sabemos que $\widetilde{V}(a^*) \geq \widetilde{V}(a)$ para todo a. Por lo tanto, para todo a,

$$\widetilde{V}(a^*) \geq \widetilde{V}(a) \geq V(a),$$

pero como además la franquicia cumple con la restricción de incentivos, tenemos $V(a^*) = \widetilde{V}(a^*)$, por lo que $V(a^*) \geq V(a)$ para todo a.

El monto de la franquicia óptima es el que deja al agente indiferente: $E_{\pi_{a^*}}(x - F) - c_{a^*} = \overline{u} \Leftrightarrow F = E_{\pi_{a^*}}(x) - c_{a^*} - \overline{u}$.

Ejercicio 37. El problema del principal sin las restricciones de incentivos es el de elegir $\{s_i\}$ para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & \sum \pi_{it} v(x_i - s_i) \\ \text{sujeto a } \sum \pi_{it} s_i - t & \geq & \overline{u} \end{array}$$

que resulta en $-\pi_{it}v'(x_i - s_i) + \lambda\pi_{it} = 0 \Leftrightarrow v'(x_i - s_i) = \lambda$, que quiere decir que $x_i - s_i$ debe ser constante, o lo que es lo mismo, una franquicia. Para cada t que querramos implementar, el principal quiere maximizar el valor de la franquicia F_t, sujeto a que el agente quiera participar: elegir F para maximizar F sujeto a

$$\sum \pi_{it}(x_i - F) - t \geq 0 \Leftrightarrow F_t = \sum \pi_{it}x_i - t = -6t^2 + 5t + 1.$$

El t óptimo para el principal es el que maximiza $\sqrt{F_t}$, o el que maximiza F_t. Por tanto, debe elegir t para maximizar $-6t^2 + 5t + 1 \Rightarrow t^* = \frac{5}{12} \Rightarrow F_{t^*} = \frac{49}{24}$.

Si al agente le ofrecen una franquicia, elegirá el t que maximiza $\sum \pi_{it}x_i - t$, es decir, elegirá $t = t^*$. Llamando $\widetilde{V}_t$ al valor para el principal de implementar t sin restricciones de incentivos, y V_t al valor de hacerlo con la restricción de incentivos, tenemos que como con una franquicia elige t^*, $V_{t^*} = \widetilde{V}_{t^*}$. Por eso, y como agregando las restricciones de incentivos sólo puede caer el valor para el principal, obtenemos

$$V_{t^*} = \widetilde{V}_{t^*} \geq \widetilde{V}_t \geq V_t$$

para todo t. Eso demuestra que el contrato óptimo es una franquicia, y la mejor franquicia es F_{t^*}.

Ejercicio 38.A. Ambas acciones se pueden implementar óptimamente con sueldos constantes, en el caso de a, con $s = 0$, y en el caso de b con $s = 1$. Otros esquemas de sueldos también sirven porque el individuo es neutral al riesgo. El principal elegirá la acción a.

38.B. El contrato óptimo para implementar a es el mismo. El óptimo para b NO será una franquicia, pues como en la Parte A el principal quiere a, si se hace una franquicia, el agente elige a también. Sea cual sea el contrato óptimo para b, el principal elegirá a, pues lo elegía cuando el problema de b tenía una sola restricción, así que lo seguirá eligiendo cuando el problema de b tenga también la restricción de incentivos (el problema de a cuando las acciones no son observables es el mismo).

38.C. En la Parte A el principal elegirá b, y el contrato óptimo en la Parte B es una franquicia.

Ejercicio 39.A. Para implementar i, hacemos salarios constantes, con la restricción de participación activa $\log s = 1 \Leftrightarrow s_i = e$ para todo i.

Para implementar m hacemos burning oil, y ponemos s_2 para que se cumpla la de participación: $\log s_2 = c_m \Leftrightarrow s_2 = e^{c_m}$. Los otros dos salarios se fijan suficientemente bajos para que se cumplan las restricciones de incentivos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log s_1 + \frac{1}{2}\log s_2 - c_i &< \log s_2 - c_m \Leftrightarrow s_1 < e^{2c_i - c_m} \\ \frac{2}{3}\log s_1 + \frac{1}{3}\log s_2 - c_d &< \log s_2 - c_m \Leftrightarrow s_1 < e^{\frac{3}{2}c_d - \frac{1}{2}c_m}. \end{aligned}$$

Este contrato le da al principal una utilidad de $V_m = e^2 - e^2 = 0$.

Para implementar d, ponemos $s_1 = s_3$ (los ratios de verosimilitud son iguales para ambos niveles de producto) y la de participación activa. Alguna de las dos de incentivos (contra i o contra m) tiene que estar activa. Si está activa la de incentivos con m, el problema es

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_1 = c_d \\ u_2 = c_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} u_1 = \frac{3}{2}c_d - \frac{1}{2}c_m \\ u_2 = c_m \end{array}.$$

Si el individuo hace i, obtiene $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}c_d - \frac{1}{2}c_m\right) + \frac{1}{2}c_m - c_i = \frac{3}{4}c_d - c_i + \frac{1}{4}c_m > 0$, que es la utilidad que obtiene de hacer d. Probamos entonces con la de incentivos con i activa:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_1 = c_d \\ \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_1 = c_i \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} u_1 = 3c_d - 2c_i \\ u_2 = 4c_i - 3c_d \end{array}$$

Si ese es el contrato, el individuo no querrá hacer m, pues eso le da u_2 seguro, y una utilidad de $u_2 - c_m = 4c_i - 3c_d - c_m$ que es negativo.

39.B. Nos da

$$V_i = \frac{e + 2e^2 + e^3}{4} - e = 6.7 > V_m = e^2 - e^2 = 0 > V_d = \frac{e - e^7 + e^2 - e^{-5} + e^3 - e^7}{3} = -721.03$$

39.C. La acción más eficiente (la que maximiza el producto esperado menos el costo de la acción) es i :

$$E_i = \frac{e + 2e^2 + e^3}{4} - 1 = 8.4 > E_d = \frac{e + e^2 + e^3}{3} - 3 = 7.1 > E_m = e^2 - 2 = 5.4$$

Por lo tanto, para implementar i, le damos una franquicia al agente, en la cual nos paga $F = E_i$ (cosa de extraerle todo el excedente) y el individuo quiere participar, y su incentivo es a hacer i. También se puede hacer poniendo sueldos constantes e iguales a c_i.

Por otro lado, para hacer m, el principal le paga $s_2 = c_m$ y los sueldos s_1 y s_3 se eligen para que se cumplan las restricciones de incentivos.

Finalmente, para que el agente haga d, ponemos la de participación activa

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} = c_d \Leftrightarrow s_1 = 3c_d - s_2 - s_3$$

(tiene que estarlo; notamos además que cualquier contrato que cumpla esta igualdad arrojará los mismos beneficios al principal, pues la remuneración esperada para el trabajador es c_d) y elegimos los sueldos para que se cumplan las dos restricciones de incentivos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq s_2 - c_m \\ 0 &\geq \frac{s_1 + 2s_2 + s_3}{4} - c_i = \frac{3c_d - s_2 - s_3 + 2s_2 + s_3}{4} - c_i = \frac{1}{4}s_2 + \frac{3}{4}c_d - c_i. \end{aligned}$$

Si elegimos $s_2 = 4c_i - 3c_d$, obtenemos que se cumplen ambas restricciones (también podríamos elegir un s_2 menor). Entonces, una solución es $s_2 = 4c_i - 3c_d$, y $s_1 = s_3$ tal que $s_1 = 3c_d - s_2 - s_1 \Leftrightarrow 2s_1 = 3c_d - s_2 \Leftrightarrow s_1 = s_3 = 3c_d - 2c_i$.

Ejercicio 40.A Tenemos que

$$\begin{aligned} u(e_A, e_A) &= p^2 n_b + \left(1 - p^2\right) n_m - e_A - e_A = p^2 n_b - p^2 - 3 \\ u(e_A, e_B) &= u(e_B, e_A) = p(1-p) n_b + (1 - p(1-p)) n_m - e_A - e_b = p(1-p) n_b - p(1-p) - 2 \\ u(e_B, e_B) &= (1-p)^2 n_b + \left(1 - (1-p)^2\right) n_m - e_B - e_B = (1-p)^2 n_b - (1-p)^2 - 1 \end{aligned}$$

40.B. En términos generales, el problema de agente principal se puede escribir como sigue. Si le llamamos v a la función de utilidad del principal, para cada acción b que el principal quiera implementar, debe resolver el problema de elegir $s = (s_1, ..., s_n)$ para maximizar

$$\begin{aligned} & v(b, s) \\ \text{sujeto a } u(b, s) &\geq \overline{u} \\ u(b, s) &\geq u(a, s) \text{ para todo } a \end{aligned}$$

En este problema, las acciones posibles del agente son $(e_A, e_A), (e_A, e_B), (e_B, e_A)$ y (e_B, e_B). Por lo tanto, para dejar el planteo del problema exactamente igual que uno de agente principal, podemos escribir el problema del profesor de la siguiente manera. Elegir n_b para maximizar

$$\begin{aligned} v(e_A, e_A, n_b) &= 4 \\ \text{sujeto a } u(e_A, e_A, n_b) &\geq u(e_A, e_B, n_b) \\ u(e_A, e_A, n_b) &\geq u(e_B, e_B, n_b) \end{aligned}$$

Como no se especificó que hubiera una restricción de participación, no es necesario plantearla.

En realidad, escribir el problema de esa manera es matar una hormiga con un cañón. Alcanza con decir que, como el profesor siempre quiere implementar los esfuerzos más altos, debe elegir n_b para que

$$u\left(e_A, e_A\right) \geq \max\left\{u\left(e_A, e_B\right), u\left(e_B, e_B\right)\right\}.$$

40.C. Se deben cumplir

$$\begin{aligned} u\left(e_A, e_A\right) &\geq u\left(e_A, e_B\right) \Leftrightarrow n_b \geq \frac{p\left(2p-1\right)+1}{p\left(2p-1\right)} \\ u\left(e_A, e_A\right) &\geq u\left(e_B, e_B\right) \Leftrightarrow n_b \geq \frac{2p+1}{2p-1}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2p+1}{2p-1} \geq \frac{p(2p-1)+1}{p(2p-1)}$ la solución es fijar $n_b \geq \frac{2p+1}{2p-1}$. En ese caso el profesor obtiene una utilidad de $e_A + e_A = 4$.

40.D.i. Para esta parte (i) y la siguiente (ii) asumimos que el profesor eligió la nota n_b como en la Parte C y la deja fija. Si al alumno le va mal en el primer parcial, la nota final será $n_m = 1$, independientemente del esfuerzo del alumno. Por lo tanto, el alumno elegirá e_B, y ello le arroja una utilidad al profesor de $e_A + e_B = 3$. Si al alumno le va bien en el primer parcial se puede verificar que, con n_b como antes, el alumno elegirá e_A nuevamente en el segundo parcial y el profesor obtendrá 4. Por tanto, la utilidad esperada es

$$U = p4 + (1-p)\,3 = p + 3.$$

40.D.ii (esta parte la propuso y resolvió Juan Pedro Gambetta). Veremos, para cada resultado del primer parcial, qué le conviene hacer en el segundo.

Si le fue bien, y se esfuerza la utilidad es $p\left(n_b - e^1 - 2\right) + (1-p)\left(1 - e^1 - 2\right)$ y si no se esfuerza es $p\left(1 - e^1 - 1\right) + (1-p)\left(n_b - e^1 - 2\right)$

$$p\left(n_b - e^1 - 2\right) + (1-p)\left(1 - e^1 - 2\right) \geq p\left(1 - e^1 - 1\right) + (1-p)\left(n_b - e^1 - 1\right) \Leftrightarrow n_b \geq \frac{2p}{2p-1}$$

que se cumple con el n_b elegido en la Parte C. Si le fue mal no le convendrá esforzarse, pues su nota será 1, y deberá pagar el esfuerzo adicional: $1 - e^1 - 1 \geq 1 - e^1 - 2$. El resumen es por lo tanto que si le fue bien, se esfuerza, y si le fue mal, no.

Entonces, las utilidades de esforzarse alto o bajo en el primer período son

$$\begin{aligned} U\left(e^1 = e_A\right) &= p\left[p(n_b - 4) + (1-p)(-3)\right] + (1-p)\left(-2\right) \\ U\left(e^1 = e_B\right) &= p\left(-1\right) + (1-p)\left[p(n_b - 3) + (1-p)(-2)\right] \end{aligned}$$

por lo que conviene esforzarse en el primer período si

$$p\left[p(n_b - 4) + (1-p)(-3)\right] + (1-p)\left(-2\right) \geq p\left(-1\right) + (1-p)\left[p(n_b - 3) + (1-p)(-2)\right] \Leftrightarrow n_b \geq \frac{2p+1}{2p-1}$$

que es la condición de la Parte C. Es decir, al alumno le convendrá esforzarse, aún si puede prever que podrá re-optimizar después del primer parcial.

La utilidad esperada del profesor es por tanto $U = 4p + 3(1-p) = p + 3$.

40.E. Para que el alumno quiera implementar e_A se debe cumplir que

$$\begin{aligned} u(e_A, e_A) &\geq u(e_A, e_B) \Leftrightarrow \\ pn_b + (1-p)\, n_m - e_A - e_A &\geq (1-p)\, n_b + pn_m - e_A - e_B \Leftrightarrow \\ pn_b - p - 3 &\geq (1-p)\, n_b + p - 3 \Leftrightarrow \\ n_b &\geq 2\frac{p}{2p-1} \end{aligned}$$

40.F. El profesor promete $n_b > \frac{2p+1}{2p-1}$ y $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$. El alumno elige e_A en el primer período (porque se cree la promesa) y otra vez e_A en el segundo período cuando el profesor asegura que la nota será n^2. Por tanto la utilidad del profesor es nuevamente 4.

40.G. Obviamente, los alumnos pueden re-optimizar en la mitad del camino, por lo que la regla F proporciona muy malos incentivos una vez que al alumno le fue mal. Por lo tanto, si al profesor no le gusta cambiar las reglas por la mitad del camino, la regla F es mala.

Ejercicio 41.A. El agente no querrá que el monto del desfalco sea tal que el valor post pago de la deuda sea menor que F, por tanto, debe elegir d para maximizar

$$\begin{array}{lll} & & d + f(100-d) \\ \text{sujeto a } \underbrace{\frac{7}{5}(100-d) + d}_{\text{retorno del proyecto}} - & \underbrace{(100-F)\frac{6}{5}}_{\text{pago de deuda e intereses}} & \geq F \end{array}$$

Como la función objetivo es creciente en d, el agente querrá elegir d lo más grande posible, siempre que se cumpla la restricción: $d = 50 + \frac{1}{2}F$

41.B. El retorno total del proyecto (para el principal) de elegir financiar F con fondos propios y $100 - F$ con deuda

$$\underbrace{(100-F)\frac{11}{10}}_{\text{retorno del banco}} + \underbrace{\frac{7}{5}(100-d) + d}_{\text{retorno del proyecto}} - \underbrace{(100-F)\frac{6}{5}}_{\text{pago de deuda e intereses}} = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}d$$

lo cual es obvio: por cada peso desfalcado por el agente, el principal pierde 40% (que es el retorno del proyecto).

41.C. Sustituyendo $d = 50 + \frac{1}{2}F$ en la utilidad del principal obtenemos

$$U_P(F) = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}d^* = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}\left(50 + \frac{1}{2}F\right) = 110 - \frac{1}{10}F$$

y el principal elegirá $F = 0$: todo con deuda, a pesar que es más cara que los fondos propios.

Dos cosas a tener en cuenta. Primero, puede ser inviable para la política de un banco financiar el 100% de un proyecto con deuda, y por eso no observamos que todos los proyectos sean financiados con deuda (eso podría ser porque los bancos quieren un poco de compromiso de parte de los dueños de la empresa). Lo segundo, es ¿porqué no manda preso el principal al agente, por más que sus acciones sean observables? Una de las razones posibles, es que por más que sean observables entre ellos, no se puedan demostrar en una corte.

Ejercicio 42.A. El principal pagará un sueldo fijo w que le de al agente una utilidad de 2 :

$$\sqrt{w} - k = 2 \Leftrightarrow w = (2+k)^2.$$

42.B. El contrato burning oil típico es aquél en cual $w_1 = 0$ y se elige w tal que

$$\sqrt{w} - 2k = 2 \Leftrightarrow w = 4\left(1+k\right)^2.$$

Para este nivel de salario, la utilidad de hacer e_a es

$$\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}\left(2+2k\right) - k = \frac{4}{3} + \frac{k}{3}$$

por lo que si $k > 2 \equiv k^*$, el contrato burning oil no sirve para implementar e_b pues al agente le va mejor haciendo e_a. La razón por la cual los k chicos sirven y los grandes no es que si k es grande, el salario no importa tanto como el esfuerzo, y entonces $w = 0$ no es tan grave. Si la utilidad se pudiera achicar tanto como uno quisiera bajando el salario (por ejemplo usando $\log w$), este problema no aparecería.

42.C. Es obvio que fijar $w_1 = 0$ es óptimo, los otros dos sueldos los fijamos usando la ecuación (1.1), que en este caso nos dice que los sueldos en x_2 y en x_3 deben ser iguales. El nivel se fija para que se cumpla la restricción de incentivos:

$$\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}\sqrt{w} - 3 = \sqrt{w} - 6 \Leftrightarrow w = 81.$$

La de incentivos debe estar activa (de lo contrario, los sueldos serían constantes, y el agente haría la acción de costo bajo). Lo "curioso" es que la de participación no está activa: $\sqrt{w} - 6 = 3 > 2$. La razón sólo puede ser una: que la función de utilidad es acotada por debajo, y por tanto no se cumple el lema.

42.D. La nueva parte B es idéntica: con sueldos constantes, el cambio en la distribución no hace nada, y queda otra vez $k^* = 2$. Lo nuevo, o distinto, es con $k = 3$, donde el burning oil no funciona. Vemos que si hacemos burning oil (con algún $k \leq k^*$), los sueldos son constantes no porque los ratios de verosimilitud sean iguales (en esta nueva Parte B, los sueldos son constantes a pesar de los distintos ratios de verosimilitud) sino porque podemos ignorar la restricción de participación, y en ese caso tenemos sueldos constantes (piensen en la ecuación fundamental, sin restricción de incentivos). En la Parte C anterior, los sueldos eran constantes por iguales ratios de verosimilitud (a pesar de no hacer burning oil, los sueldos son constantes, pero eso es por los ratios iguales).

En esta nueva Parte C, los sueldos no serán constantes, porque los ratios de verosimilitud no son constantes. Para resolver, fijamos $w_1 = 0$ y vemos que la restricción de incentivos es

$$\frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 - 6 \geq \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 - 3 \Leftrightarrow u_3 \geq 9 \Leftrightarrow s_3 \geq 81$$

Poniendo esto con igualdad, y usando la restricción de participación obtenemos $\frac{1}{3}u_2 \geq 2 \Leftrightarrow s_2 \geq 36$. Para ver que esta solución es efectivamente la óptima, vemos que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker, que son suficientes en este caso (es un problema cóncavo):

$$\frac{1}{u'\left(s_i\right)} = \lambda + \mu\left[1 - \frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{u'(s_2)} = \lambda + \mu\left[1-1\right] = \lambda \Leftrightarrow 2\sqrt{36} = \lambda = 12 \\ \frac{1}{u'(s_i)} = \lambda + \mu\left[1 - \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 2\sqrt{81} = 12 + \frac{\mu}{2} \Leftrightarrow \mu = 12 \end{array}$$

42.E. Para implementar a, ponemos $s = \left(k+2\right)^2$, como antes. Para ver si funciona burning oil es igual que antes: $k \leq k^* = 2$. Con $k = 3$, ponemos activas las dos restricciones (usando $u_1 = 0$):

$$\frac{u_2}{4} + 3\frac{u_3}{4} - 6 = 2 = \frac{u_2 + u_3}{3} - 3 \Leftrightarrow u_2 = \frac{13}{2}, u_3 = \frac{17}{2}$$

Ejercicio 43.A. Este es el más fácil, como siempre: sueldo constante que cumpla la restricción de participación. La razón es la misma de siempre y valen los mismos argumentos. Tendríamos entonces

$$u - e_b = \overline{u} \Leftrightarrow u = \overline{u} + e_b \Leftrightarrow s = f\left(\overline{u} + e_b\right).$$

43.B. Notamos primero que no puede ser $u_2 - u_1 < 1/\pi'(e_a)$ pues eso querría decir que $U'(e_a) < 0$, y eso a su vez querría decir que el plan (u_1, u_2) no implementa e_a, pues se violaría la restricción de incentivos, y el agente querría hacer una acción $e < e_a$. Supongamos entonces que en el plan óptimo para implementar e_a se cumple que $u_2 - u_1 > 1/\pi'(e_a)$. En este caso, tenemos que u_2 es "demasiado" grande, y el agente querría seguir aumentando su esfuerzo (para aumentar más la probabilidad de éxito). Si el u_2 es demasiado grande, quiere decir que u_1 debe ser chico (de lo contrario le estaríamos regalando utilidad al agente). Deducimos entonces que este plan tiene "demasiado" riesgo, y que el principal podría ganar más dinero reduciendo el riesgo. Eso nos lleva a tratar el siguiente plan. Para mostrar que (u_1, u_2) no es óptimo, reduciremos el riesgo para el agente, manteniendo la restricción de participación activa, de tal forma que el principal gane más dinero (porque el agente es averso al riesgo). Como π es cóncava, si alteramos u_1 y u_2 sólo marginalmente, de tal forma que se siga cumpliendo esa desigualdad, la acción óptima para el agente seguirá siendo e_a. Si aumentamos u_1 en c, para que se siga cumpliendo la restricción de participación debemos reducir u_2 en un x tal que

$$(1-\pi(e_a))(u_1+c)+\pi(e_a)(u_2-x) = (1-\pi(e_a))u_1+\pi(e_a)u_2 \Leftrightarrow x = c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}.$$

En términos esperados la cantidad de "útiles" que le cuesta al principal este incremento en c de u_1 y reducción de $c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}$ en u_2 es 0. Pero como la utilidad es cóncava, el aumento de u_1 cuesta menos plata que lo que gana con la caída de u_2. Formalizamos ahora, esta idea. El beneficio para el principal de reducir u_1 en c de esta manera es

$$B(c) = (1-\pi(e_a))(x_1 - f(u_1+c)) + \pi(e_a)\left(x_2 - f\left(u_2 - c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}\right)\right)$$

donde $f(u_1+c)$ es lo que se debe pagar en caso de fracaso (x_1) para que el agente obtenga una utilidad de u_1+c. Si reducir u_1 marginalmente de esta manera aumenta los beneficios, el plan original no podía ser óptimo y por tanto se debía cumplir la condición de primer orden. Derivando B con respecto a c, usando $f' = 1/u'$ y evaluando en 0 obtenemos

$$\begin{aligned} B'(0) &= -(1-\pi(e_a))f'(u_1) + \pi(e_a)f'(u_2)\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)} = (1-\pi(e_a))(f'(u_2)-f'(u_1)) \\ &= (1-\pi(e_a))\left(\frac{1}{u'(s_2)} - \frac{1}{u'(s_1)}\right) \end{aligned}$$

y como u es cóncava $u'(s_1) > u'(s_2)$ y queda $B'(0) > 0$.

Surge, por supuesto, la pregunta: ¿pero dónde usamos que $u_2 - u_1 > 1/\pi'$? La respuesta es que eso se usa para argumentar que si aumentamos u_1 un poco y bajamos u_2 un poco, todavía se cumplirá $u_2 - x - u_1 - c > 1/\pi'$, y por tanto el "nuevo plan" seguirá cumpliendo la restricción de incentivos. Es decir, no habíamos usado esa condición explícitamente, pero la necesitamos para asegurarnos que con el plan modificado se siguen cumpliendo todas las restricciones de incentivos.

43.C. Haremos sólo el caso para u_1 decreciente. De la discusión que precede a (1.7) y de la Parte B sabemos que para todo $e \in (e_b, e_a]$ se cumple que

$$u_1(e) = \overline{u} + e - \frac{\pi(e)}{\pi'(e)}.$$

Por lo tanto,

$$u_1'(e) = 1 - 1 + \frac{\pi(e)\pi''(e)}{\pi'^2(e)} < 0$$

como queríamos demostrar. También, tenemos que demostrar que para cualquier $e > e_b$ tendremos $u_1(e) < u_1(e_b)$. Para eso recordamos que para cualquier función estrictamente cóncava π (con derivada segunda negativa) se cumple que

$$\pi(e) = \pi(e_b) + \int_{e_b}^{e} \pi'(s)\, ds \geq \int_{e_b}^{e} \pi'(s)\, ds > \int_{e_b}^{e} \pi'(e)\, ds = \pi'(e)(e - e_b)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \pi(e) &> \pi'(e)(e - e_b) \Leftrightarrow e - \frac{\pi(e)}{\pi'(e)} - e_b < 0 \Leftrightarrow \overline{u} + e - \frac{\pi(e)}{\pi'(e)} - (\overline{u} + e_b) < 0 \\ &\Leftrightarrow u_1(e) - u_1(e_b) < 0 \Leftrightarrow u_1(e) < u_1(e_b) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 45.A. Para implementar $e = 0$, ponemos $u_1 = u_2 = -2$. Para implementar $e^* \in (0, 1]$, ponemos $u_1(e^*) = -2 - e^*$ y $u_2(e^*) = 2\sqrt{e^*} - e^* - 2$. El lado derecho de la restricción de incentivos queda entonces

$$(1 - \pi(e))\, u_1 + \pi(e)\, u_2 - e = \left(1 - \sqrt{e}\right)(-2 - e^*) + \sqrt{e}\left(2\sqrt{e^*} - e^* - 2\right) - e = 2\sqrt{e^*}\sqrt{e} - e - e^* - 2$$

que se maximiza para $e = e^*$, como deseábamos. Una cosa "interesante" es que cuando queremos implementar $e^* = 1$, si probamos de hacer "burning oil", queda $-1/s_2 - e = -2 \Leftrightarrow s_2 = 1$ y un sueldo s_1 que des-incentiva cualquier $e < 1$ debe cumplir

$$(1 - \pi(e))\, u_1 + \pi(e)\, u_2 - e \leq -2 \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{e}\right) u_1 - \sqrt{e} - e \leq -2.$$

Para cualquier $u_1 < -1 = u_2$, el e que maximiza la utilidad es $e = \left(\frac{u_1+1}{2}\right)^2$, y cuanto más chico u_1, más grande el e óptimo (recordar que u_1 es menor que -1). Por lo tanto, precisamos que $\left(\frac{u_1+1}{2}\right)^2 \geq 1$, o lo que es lo mismo, $u_1 \leq -3$, que es lo que arroja la fórmula $u_1 = -2 - e^*$ para $e^* = 1$.

45.B. Ambos sueldos convergen a -2, que son el sueldo usado para implementar $e = 0$. La razón es, por supuesto, que $\pi'(0) = \infty$.

45.C. La función f es la inversa de u si

$$f(u(s)) = s \Leftrightarrow f(-1/s) = s \Leftrightarrow f(u) = -1/u.$$

Por lo tanto, los beneficios de implementar un esfuerzo $e > 0$ cualquiera son

$$(1 - \pi(e^*))(x_1 - f(u_1)) + \pi(e^*)(x_2 - f(u_2)) = \left(1 - \sqrt{e}\right)\frac{1}{-2 - e} + \sqrt{e}\left(x_2 + \frac{1}{2\sqrt{e} - e - 2}\right)$$

45.D. Sea $x_2' \geq x_2$ y sean e' óptimo para x_2' y e óptimo para x_2. Debemos mostrar que $e' \geq e$. Los beneficios del principal son una función $g(e) + \sqrt{e}x_2$. Por la optimalidad de e' y e tenemos

$$g(e) + \sqrt{e}x_2 \geq g(e') + \sqrt{e'}x_2 \quad y \quad g(e') + \sqrt{e'}x_2' \geq g(e) + \sqrt{e}x_2'.$$

Restando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} g(e) + \sqrt{e}x_2 - g(e) - \sqrt{e}x_2' &\geq g(e') + \sqrt{e'}x_2 - g(e') - \sqrt{e'}x_2' \Leftrightarrow \\ \sqrt{e}(x_2 - x_2') &\geq \sqrt{e'}(x_2 - x_2') \Leftrightarrow \left(\sqrt{e} - \sqrt{e'}\right)(x_2 - x_2') \geq 0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Otra demostración posible sería viendo que si un e es óptimo, cumple que $g'(e) + \frac{x_2}{2\sqrt{e}} = 0$ y que localmente, la derivada de esta expresión debe ser negativa:

$$g''(e) - \frac{x_2}{4}e^{-\frac{3}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow 4g''(e)\, e^{\frac{3}{2}} - x_2 \leq 0 \tag{1.14}$$

(puede que $g'(e) + \frac{x_2}{2\sqrt{e}}$ no sea cóncava, pero si e es un máximo, se debe cumplir la condición de segundo orden alrededor del óptimo). En todo caso, si utiliza este método para resolver el signo de de/dx_2 es su deber establecer que se cumple la condición de segundo orden en (1.14).

Para calcular de/dx_2 tomamos el diferencial total en la condición de primer orden escrita como

$$\begin{aligned} x_2 &= -g'(e)\, 2\sqrt{e} \Rightarrow dx_2 = -\left[g''(e)\, 2\sqrt{e} + g'(e)\, e^{-\frac{1}{2}}\right] de = -\left[g''(e)\, 2\sqrt{e} - \frac{x_2}{2\sqrt{e}}e^{-\frac{1}{2}}\right] de \Leftrightarrow \\ \frac{de}{dx_2} &= -\left[g''(e)\, 2\sqrt{e} - \frac{x_2}{2e}\right]^{-1} = -\frac{2e}{g''(e)\, 2e^{\frac{3}{2}} - x_2} \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 46.A.I. Hay dos formas fáciles de ver que los sueldos son constantes. La primera, y más económica, es que es un problema de compartir riesgos en el cual una de las partes es aversa al riesgo y la otra no. Si el agente tuviera sueldos no constantes, estaría sujeto a riesgo; para el principal sería más barato asegurarle ese nivel de utilidad con un sueldo fijo (sin riesgo), y se queda él con más plata. La segunda forma de ver el resultado es acordarnos que cuando la restricción de incentivos no está activa (o no hay restricción de incentivos) el multiplicador μ sería 0, y los sueldos serían constantes. Aunque esa cuenta no vale exactamente (por ejemplo, en este problema no hay "costos" de hacer cada acción porque no hay un c_h por cada h, sino que el costo de hacer un h es lo que deja de ganar lavando platos) vale la misma idea.

Veremos igualmente cómo se resuelve el problema, si uno no se da cuenta de las formas fáciles de resolverlo. Para cada h (fijo) que el principal quiera implementar, debe elegir s_e, s_f para maximizar $\left(1 - e^{-h}\right)(1000 - s_e) - e^{-h}s_f$ sujeto a

$$\left(1 - e^{-h}\right) u\left(s_e + 10\,(40 - h)\right) + e^{-h}u\left(s_f + 10\,(40 - h)\right) \geq u\,(400)$$

(no hay restricción de incentivos pues la cantidad de horas es observable, y por tanto se puede especificar en el contrato). Siendo λ el multiplicador de la restricción, tenemos que las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} -1 + \lambda u'\left(s_e + 10\,(40 - h)\right) &= 0 \\ -1 + \lambda u'\left(s_f + 10\,(40 - h)\right) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica, por la concavidad de u, que $s_e = s_f$.

46.A.II. Como es habitual cuando se pueden observar las acciones, ignoraremos, por el momento, la restricción de incentivos. Dejando la restricción de participación con igualdad, obtenemos $s_{h^*} = 10h^*$ y maximizando la función objetivo con respecto a h^* obtenemos que la cantidad óptima de horas es $h^* = \ln 100$.

46.B.I. Para cada h^* que el principal quiera implementar, debe elegir s_e y s_f, los salarios en caso de éxito y fracaso, para maximizar sus beneficios esperados. Poniendo $S_e(h) = s_e + 10\,(40 - h)$ y similarmente para S_f, el problema es elegir s_e y s_f para maximizar

$$\left(1 - e^{-h^*}\right)(1000 - s_e) - e^{-h^*}s_f$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } \left(1 - e^{-h^*}\right) u\left(S_e\left(h^*\right)\right) + e^{-h^*}u\left(S_f\left(h^*\right)\right) &\geq u\,(400) \\ \left(1 - e^{-h^*}\right) u\left(S_e\left(h^*\right)\right) + e^{-h^*}u\left(S_f\left(h^*\right)\right) &\geq \left(1 - e^{-h}\right) u\left(S_e(h)\right) + e^{-h}u\left(S_f(h)\right) \text{ para todo } h \in [0, 40] \end{aligned}$$

Una vez elegido el esquema de pagos s_e, s_f que implementa cada accion h^*, el principal debe elegir el nivel h^* óptimo.

46.B.II. Para cada $h^* > 0$ que se quiera implementar, si $s_e < s_f$ el agente puede obtener una utilidad de

$$\begin{aligned} u\left(S_f\left(0\right)\right) &= u\left(s_f + 400\right) > u\left(s_f + 10\left(40 - h^*\right)\right) = u\left(S_f\left(h^*\right)\right) \\ &= \left(1 - e^{-h^*}\right) u\left(S_f\left(h^*\right)\right) + e^{-h^*} u\left(S_f\left(h^*\right)\right) > \left(1 - e^{-h^*}\right) u\left(S_e\left(h^*\right)\right) + e^{-h^*} u\left(S_f\left(h^*\right)\right) \end{aligned}$$

por lo que se violaría la restricción de incentivos.

Ejercicio 47 A. El principal fija un t cualquiera, y encuentra el contrato óptimo para ese t. Luego hace lo mismo para todos los t, y luego compara cuánto gana en cada uno. Por eso, la primera etapa es fijar un t cualquiera, y encontrar el contrato óptimo para ese t. Dado un t fijo, la distribución de b es $N\left(t, \sigma^2\right)$, y el principal debe elegir, para cada nivel de b, un salario w_b, para maximizar

$$E\left(b - w_b\right)$$

sujeto a $E\left[-e^{-r\left(w_b - \frac{ct^2}{2}\right)}\right] \geq \overline{u}$. El Lagrangiano para este problema es: elegir $\{w_b\}_{b=-\infty}^{\infty}$ para maximizar

$$E\left(b - w_b\right) + \lambda\left(E\left[-e^{-r\left(w_b - \frac{ct^2}{2}\right)}\right] - \overline{u}\right) = E\left[b - w_b - \lambda e^{-r\left(w_b - \frac{ct^2}{2}\right)} - \lambda\overline{u}\right].$$

La esperanza es la integral de la densidad de la normal, multiplicada por $b - w_b - \lambda e^{-r\left(w_b - ct^2/2\right)} - \lambda\overline{u}$. Cuando fijamos un b, y tomamos la derivada con respecto a w_b, la integral desaparece (porque los otros bs no pinchan ni cortan) y sólo queda la densidad (evaluada en el b particular que fijamos) multiplicada por la derivada de $b - w_b - \lambda e^{-r\left(w_b - ct^2/2\right)} - \lambda\overline{u}$. Como la densidad es positiva, la condición de primer orden es entonces

$$-1 - \lambda e^{-r\left(w_b - ct^2/2\right)}\left(-r\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda r e^{-r\left(w_b - ct^2/2\right)} = 1$$

que quiere decir (como siempre) que el salario no varía con b (si w_b cambiara con b, no se cumpliría la condición de primer orden, porque sólo hay un w_b que cumple con esa condición). Lo que hacemos es entonces elegir w para que se cumpla la restricción de participación con igualdad, y como no hay incertidumbre, queda $-e^{-r\left(w - ct^2/2\right)} = \overline{u} \Leftrightarrow w = \frac{ct^2}{2} - \frac{\log(-\overline{u})}{r}$.

Ese es el contrato óptimo para cada t. Ahora el principal debe elegir el t óptimo y para eso sustituye el w óptimo en su función de utilidad, y debe elegir t para maximizar

$$E\left(t + \varepsilon - \frac{ct^2}{2} + \frac{\log\left(-\overline{u}\right)}{r}\right).$$

La condición de primer orden es $ct = 1$, o $t = \frac{1}{c}$.

47 B. El agente debe elegir t para maximizar

$$E\left[-e^{-r\left(a + f(t+\varepsilon) - \frac{ct^2}{2}\right)}\right].$$

Se puede hacer de tres formas. Una es derivando con respecto a t, y metiendo la derivada para adentro de la esperanza (se puede, aunque no siempre, porque la esperanza es una suma, y la derivada de la suma es la suma de las derivadas); otra es haciendo cuentas y dejando la esperanza con términos que no dependen de t;

y la otra es usando la pista de la Parte C para deshacernos de la esperanza. Lo haremos de las dos primeras formas:

$$\begin{aligned}
\frac{dE\left[-e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right]}{dt} &= E\left[r\left(f-ct\right)e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right] = r\left(f-ct\right)E\left[e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right] = 0 \Leftrightarrow f = ct \Leftrightarrow t = \frac{f}{c} \\
E\left[-e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right] &= -e^{-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)}E\left[e^{-rf\varepsilon}\right] \Rightarrow \frac{dE\left[-e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right]}{dt} = \frac{d\left[-e^{-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)}\right]}{dt}E\left[e^{-rf\varepsilon}\right] \\
&= r\left(f-ct\right)e^{-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)}E\left[e^{-rf\varepsilon}\right] = 0 \Leftrightarrow f-ct = 0.
\end{aligned}$$

47 C. El principal debe elegir a para maximizar

$$\begin{array}{l} E\left(t+\varepsilon-a-f\left(t+\varepsilon\right)\right) \\ \text{sujeto a} \quad E\left[-e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right] \geq \overline{u} \\ \qquad\qquad t = \frac{f}{c} \end{array}$$

o lo que es lo mismo, debe elegir a para poner la restricción de participación con igualdad:

$$\begin{aligned}
E\left[-e^{-r\left(a+f(t+\varepsilon)-\frac{ct^2}{2}\right)}\right] &= \overline{u} \Leftrightarrow -e^{-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)}E\left(e^{rf\varepsilon}\right) = \overline{u} \Leftrightarrow -e^{-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)}e^{\frac{r^2f^2\sigma^2}{2}} = \overline{u} \Leftrightarrow \\
-r\left(a+ft-\frac{ct^2}{2}\right)+\frac{r^2f^2\sigma^2}{2} &= \log\left(-\overline{u}\right) \Leftrightarrow a = \frac{rf^2\sigma^2}{2} - \frac{\log\left(-\overline{u}\right)}{r} - ft + \frac{ct^2}{2} = \frac{rc^2\sigma^2-c}{2}t^2 - \frac{\log\left(-\overline{u}\right)}{r}
\end{aligned}$$

47 D. Podemos ahora sustituir esto en los beneficios del principal para obtener

$$\begin{aligned}
E\left(t+\varepsilon-a-f\left(t+\varepsilon\right)\right) &= t-a-ft = t+\frac{\log\left(-\overline{u}\right)}{r} - \frac{rc^2\sigma^2-c}{2}t^2 - t^2c \\
&= t+\frac{\log\left(-\overline{u}\right)}{r} - \frac{rc^2\sigma^2+c}{2}t^2
\end{aligned}$$

por lo que la condición de prier orden es

$$t = \frac{1}{rc^2\sigma^2+c} \text{ y } f = \frac{1}{1+rc\sigma^2}.$$

Ejercicio 48. A,B. El problema es el de elegir s_a, s_b para maximizar $I\left(e^*\right) - e^*s_a - \left(1-e^*\right)s_b$ sujeto a

$$\begin{aligned}
e^*s_a + \left(1-e^*\right)s_b - c\left(e^*\right) &\geq 0 \\
e^*s_a + \left(1-e^*\right)s_b - c\left(e^*\right) &\geq es_a + \left(1-e\right)s_b - c\left(e\right), \forall e \\
s_a, s_b &\geq 0.
\end{aligned}$$

Poniendo $e = 0$ en el lado derecho de la segunda ecuación, y usando $s_a, s_b \geq 0$ queda $e^*s_a + \left(1-e^*\right)s_b - c\left(e^*\right) \geq 0$, por lo que la restricción de participación se cumple siempre.

Si queremos implementar $e^* = 0$, ponemos sueldos constantes e iguales a 0, y es fácil verificar que es óptimo. Por lo tanto, consideramos ahora $e^* > 0$.

En primer lugar, notamos que para cualquiera de estos e^*, debemos tener $s_a^* > s_b^*$ en el óptimo, de lo contrario se violará la restricción de incentivos, pues será mejor hacer $e = 0$. Lo segundo que hay que notar es que $s_b^* = 0$. Si tuviéramos $s_b^* > 0$, el esquema $\overline{s}_a = s_a^* - s_b^*$, $\overline{s}_b = 0$ cumpliría las restricciones y daría más beneficios (en particular, se incrementarían en s_b^*):

$$\begin{aligned}
e^*s_a^* + \left(1-e^*\right)s_b^* - c\left(e^*\right) &\geq es_a^* + \left(1-e\right)s_b^* - c\left(e\right), \forall e \Leftrightarrow \\
e^*\left(s_a^*-s_b^*\right) + \left(1-e^*\right)\left(s_b^*-s_b^*\right) - c\left(e^*\right) &\geq e\left(s_a^*-s_b^*\right) + \left(1-e\right)\left(s_b^*-s_b^*\right) - c\left(e\right), \forall e \Leftrightarrow \\
e^*\overline{s}_a + \left(1-e^*\right)\overline{s}_b - c\left(e^*\right) &\geq e\overline{s}_a + \left(1-e\right)\overline{s}_b - c\left(e\right), \forall e.
\end{aligned}$$

El problema es entonces el de elegir s_a para maximizar$I(e^*) - e^* s_a$ sujeto a

$$\begin{aligned} e^* s_a - c(e^*) &\geq e s_a - c(e), \forall e \\ s_a &\geq 0, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, que e^* maximiza $e s_a - c(e) : s_a^* = c'(e^*)$ (una sutileza que vimos con Mirrlees es que $s_a \geq c'(1)$ tambien implementa $e^* = 1$, pero no es óptimo). Por las dudas, verificamos también las condiciones de segundo orden: $e = e^*$ maximiza $e s_a - c(e)$, pues la derivada segunda es $-c''(e^*) \leq 0$. La solución es entonces $s_b^* = 0$ y $s_a^* = c'(e^*)$; con la función de costos cuadrática queda $s_b^* = 0$ y $s_a^* = ce^*$.

48.C. Para encontrar el e^* óptimo el principal debe elegir e para maximizar

$$\pi = \frac{1}{k} e - e s_a^* = \frac{1}{k} e - c e^2 \Rightarrow e^* = \begin{cases} \frac{1}{2kc} & kc \geq \frac{1}{2} \\ 1 & kc < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Lo que dice esto es que si es muy beneficioso el esfuerzo para el principal (k chico) o poco costoso el esfuerzo para el agente (c chico) entonces conviene implementar el esfuerzo más alto posible.

48.D,E. Para $e^* = 0$, el esquema óptimo es nuevamente $s_b = s_a = s_g = 0$. Para cualquier otro e^* la restricción de participación sigue siendo redundante. El principal debe elegir entonces s_a, s_g, s_b para maximizar $I(e^*) - e^{*2} s_g - e^* s_a - \left(1 - e^* - e^{*2}\right) s_b$ sujeto a

$$\begin{aligned} e^{*2} s_g + e^* s_a + \left(1 - e^* - e^{*2}\right) s_b - c(e^*) &\geq e^2 s_g + e s_a + \left(1 - e - e^2\right) s_b - c(e) \, \forall e \\ s_a, s_g, s_b &\geq 0. \end{aligned}$$

Para que e^* sea óptimo debemos tener $2e^* s_g + s_a - (1 + 2e^*) s_b = c'(e^*)$, por lo que quedan sólo esta ecuación y $s_a, s_g, s_b \geq 0$. Sustituyendo la restricción de incentivos en la función objetivo, queda que debemos elegir s_b, s_g para maximizar

$$I(e^*) - e^{*2} s_g - e^* s_a - \left(1 - e^* - e^{*2}\right) s_b = I(e^*) + e^{*2} s_g - \left(e^{*2} + 1\right) s_b - e^* c'(e^*). \tag{1.15}$$

Esto nos indica que $s_b = 0$. Eso no lo establecimos antes, porque aunque el argumento de siempre (se podrían bajar todos los sueldos en el mismo monto, sin violar incentivos) establece que un sueldo debe ser 0, no sabíamos cuál de los tres era. También, como seguimos requiriendo $s_a \geq 0$, la restricción de incentivos queda $2e^* s_g \leq c'(e^*)$; como además se debe cumplir la condición de segundo orden (del problema del agente), tenemos también $c''(e^*) \geq 2 s_g$. Las restricciones del problema son entonces

$$\begin{aligned} c''(e^*) &\geq 2 s_g \\ c'(e^*) &\geq 2 e^* s_g \\ s_g &\geq 0 \end{aligned}$$

De la función objetivo en (1.15) vemos que tenemos que elegir s_g lo más grande posible; entonces lo elegiremos de tal manera que se iguale a la más chica de las restricciones: $s_g = \min\left\{\frac{c''(e^*)}{2}, \frac{c'(e^*)}{2e^*}\right\}$. Con eso fijamos $s_a = c'(e^*) - 2e^* s_g$. Igual, hay más que podemos decir: llamemos $f = c'$; es fácil ver entonces que como $f''(e) > 0$, $f(e^*) \leq e^* f'(e^*)$. Eso dice que crece f entre 0 y e^* es menos que lo que crece la recta con pendiente $f'(e^*)$, ya que $f'(e^*) \geq f'(e)$ para todo $e \leq e^*$, hagan un dibujito, o noten que

$$f(e^*) - f(0) = \int_0^{e^*} f'(e)\, de \leq \int_0^{e^*} f'(e^*)\, de = (e^* - 0) f'(e^*) \Leftrightarrow f(e^*) \leq e^* f'(e^*).$$

Eso se puede ver también haciendo la expansión de Taylor de segundo orden de f : para algún $e \in [0, e^*]$,

$$f(0) = f(e^*) + f'(e^*)(0 - e^*) + f''(\overline{e}) \frac{(0 - e^*)^2}{2} \geq f(e^*) + f'(e^*)(0 - e^*) \Rightarrow f(e^*) \leq e^* f'(e^*).$$

En ese caso, $c'(e^*) \leq e^* c''(e^*)$ y por tanto $s_g = \frac{c'(e^*)}{2e^*}$ y $s_a = c'(e^*) - 2e^* s_g = c'(e^*) - 2e^* \frac{c'(e^*)}{2e^*} = 0$. Para el caso de $c(e) = c\frac{e^2}{2}$ queda $s_g = \frac{c}{2}$, $s_a = s_b = 0$.

48. A,C,D. Una versión corta de la solución cuando $c(e) = ce^2/2$ es la siguiente. Como dice la letra, la de participación se cumple siempre. Y si ambos sueldos fueran positivos, podrían bajarse en una cantidad igual sin alterar la restricción de incentivos (eso es obvio, y lo vimos en el Lema de agente principal). Por lo tanto, $s_b = 0$ debemos elegir s_a para maximizar$I(e^*) - e^* s_a$ sujeto a

$$\begin{aligned} e^* s_a - c(e^*) &\geq es_a - c(e), \forall e \Leftrightarrow e^* s_a - c\frac{e^{*2}}{2} \geq es_a - c\frac{e^2}{2}, \forall e \\ s_a &\geq 0. \end{aligned}$$

La restricción de incentivos es entonces que e^* maximice $es_a - c\frac{e^2}{2}$, que sucede si y sólo si $s_a = ce^*$ (eso también es la solución para $e^* = 0$: sueldos constantes iguales a 0). En la Parte C, para encontrar el e^* óptimo el principal debe elegir e para maximizar

$$\pi = \frac{1}{k}e - es_a^* = \frac{1}{k}e - ce^2 \Rightarrow e^* = \frac{1}{2kc}$$

que vale mientras $kc \geq \frac{1}{2}$; si kc es más chico que $\frac{1}{2}$, quedaría $e^* > 1$, que es imposible, por lo que el e^* óptimo sigue siendo $e^* = 1$.

En la Parte D, el principal debe elegir s_a, s_g para maximizar $I(e^*) - e^{*2} s_g - e^* s_a$ sujeto a

$$\begin{aligned} e^{*2} s_g + e^* s_a - c\frac{e^{*2}}{2} &\geq e^2 s_g + es_a - c\frac{e^{*2}}{2} \forall e \\ s_a, s_g &\geq 0. \end{aligned}$$

Para que e^* sea óptimo debemos tener $2e^* s_g + s_a = ce^*$, y para que se cumpla la condición de segundo orden, $2s_g - c \leq 0$. El problema se transforma en el de elegir s_g para maximizar

$$\begin{aligned} I(e^*) - e^{*2} s_g - e^* s_a &= I(e^*) - e^{*2} s_g - e^*(ce^* - 2e^* s_g) = \\ &\quad I(e^*) + e^{*2} s_g - ce^{*2} \text{ sujeto a} \\ c &\geq 2s_g \\ s_g &\geq 0 \end{aligned}$$

De la función objetivo vemos que tenemos que elegir s_g lo más grande posible; entonces elegimos $s_g = \frac{c}{2}$.

48. Por Mirrlees o Franquicia. Otra solución sería ver si se puede resolver con Mirrlees. En ese caso, para que se aplicaran las fórmulas, habría que redefinir el costo (que en Mirrlees es e) como x, y hacer que el esfuerzo sea función de esta x. Tendríamos entonces que $x = c\frac{e^2}{2}$, por lo que el e del problema sería $e = \sqrt{\frac{2x}{c}}$, y la probabilidad de éxito $\pi(x) = \sqrt{\frac{2x}{c}}$ que es en efecto cóncava. La utilidad del agente, como función de x sería también $u(x) = \sqrt{\frac{2x}{c}}$ (pues la utilidad del agente es sencillamente e). En tal caso, las fórmulas de Mirrlees arrojan

$$u_1 = 0 + x^* - \frac{\sqrt{\frac{2x^*}{c}}}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x^*}{c}}}\frac{2}{c}} = x^* - 2x^* < 0$$

que no es posible, ya que el problema no admite sueldos negativos.

Pruebe de hacerlo con una franquicia, a ver si se puede.

Ejercicio 49.A. Para implementar e_0 se pone $s_1 = 0$ y $s_2 = s_3 = s_4$ y se eligen los sueldos para que se cumpla con ingualdad la restricción de participación: $s_2 = s_3 = s_4 = 16$.

Para implementar e_1, eliminamos $e_{1/2}$ con burning oil, y nos imaginamos un problema con sólo dos acciones. En ese caso tendremos las tres condiciones de optimalidad y las dos restricciones activas,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\sqrt{s_2} & = & \lambda - \mu \\ 2\sqrt{s_3} & = & \lambda + \frac{\mu}{5} \\ 2\sqrt{s_4} & = & \lambda + \frac{\mu}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow s_3 = s_4 \quad y \quad \begin{array}{c} \frac{\sqrt{s_2}}{6} + \frac{5\sqrt{s_3}}{12} + \frac{5\sqrt{s_4}}{12} - 1 = 4 \\ \frac{\sqrt{s_2}}{3} + \frac{\sqrt{s_3}}{3} + \frac{\sqrt{s_4}}{3} - 0 = 4 \end{array}$$

De las tres primeras obtenemos $s_3 = s_4$ y sustituyendo en las restricciones obtenemos $s_3 = 36$ y $s_2 = 0$. Verificamos que no vale la pena hacer $e_{1/2}$: $\frac{4}{9}6 - \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$ que es menor que $\overline{u}$.

Para implementar $e_{1/2}$, nos quedaría un sistema gigante (aún asumiendo $s_3 = s_4$, nos quedan 3 CPO, más tres restricciones para encontrar 3 sueldos y tres multiplicadores). Probamos mejor, primero, asumiendo que la de incentivos de e_1 no está activa, y viendo que pasa (si lo pensamos un poco, vemos que se cumplirá la restricción ignorada, porque con $u_2 = u_3 = u_4$ que se cumple en la solución, convendrá hacer e_0 y no e_1 pues ambas pagan el mismo sueldo seguro, pero e_0 tiene un menor costo); después asumiendo que la de incentivos de e_0 no está activa y viendo qué pasa.

Si eliminamos la de incentivos de e_1, nos queda $s_2 = s_3 = s_4$, y las dos restricciones activas:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{2} & = & 4 \\ u_2 & = & 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow u_1 = \frac{11}{2} \text{ y } u_2 = u_3 = u_4 = 4.$$

En este caso, hacer e_1 da un sueldo de u_2 seguro, igual que haciendo e_0, pero con un costo de 1, por lo que se cumple la restricción de incentivos con respecto a e_1.

Probamos ahora de eliminar la de incentivos de e_0. Tendremos $s_3 = s_4$, y debemos averiguar s_1 y s_2 con las condiciones de optimalidad y las dos restricciones activas:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\sqrt{s_1} & = & \lambda + \mu \\ 2\sqrt{s_2} & = & \lambda + \frac{\mu}{4} \\ 2\sqrt{s_3} & = & \lambda - \frac{7\mu}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 = \frac{5}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 \quad y \quad \begin{array}{c} \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{9}u_2 + \frac{4}{9}u_3 - \frac{1}{2} = 4 \\ \frac{1}{6}u_2 + \frac{5}{6}u_3 - 1 = 4 \end{array}$$

Obtenemos $u_1 = \frac{83}{22}, u_2 = \frac{95}{22}$ y $u_3 = \frac{113}{22}$. Sustituyendo en la restricción de incentivos de e_0, vemos que no se cumple: $\frac{1}{3}\frac{95}{22} + \frac{2}{3}\frac{113}{22} = \frac{107}{22}$ que es mayor que 4. Por lo tanto, la solución para implementar $e_{1/2}$ es la calculada en el primer caso (ignorando incentivos de e_1). Una curiosidad del último calculo (la solución ignorando incentivos para e_0) es que el μ queda con un valor negativo y la razón es que el óptimo en este problema (sólo con las dos restricciones usadas) es con la de incentivos inactiva, pues queremos implementar (entre $e_{1/2}$ y e_1) la de costo bajo (y en ese caso la de incentivos no debería estar activa).

Ejercicio 50.A. Para implementar e_0 se pone s_1 muy pequeño y $s_2 = s_3 = s_4$ y se eligen los sueldos para que se cumpla con ingualdad la restricción de participación. Para implementar e_1, eliminamos $e_{\frac{1}{2}}$ con burning oil, y nos imaginamos un problema con sólo dos acciones. En ese caso tendremos las tres condiciones de optimalidad

$$\left.\begin{array}{c} s_2 = \lambda - \mu \\ s_3 = \lambda \\ s_4 = \lambda + \frac{\mu}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow s_4 = \frac{4s_3 - s_2}{3}$$

y las dos restricciones activas:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\log s_2}{6} + \frac{\log s_3}{3} + \frac{\log s_4}{2} & = & 1 \\ \frac{\log s_2}{3} + \frac{\log s_3}{3} + \frac{\log s_4}{3} & = & 0 \end{array}$$

Queda

$$\begin{gathered}\frac{\log s_2}{6}+\frac{\log s_3}{3}+\frac{\log s_4}{2}=1\\ \log s_2+\log s_3+\log s_4=0\\ s_4-\frac{4s_3-s_2}{3}=0\end{gathered}$$

que implica

$$\begin{aligned}s_2 &= -3\exp\left(\frac{1}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6}+4\right)+4\exp\left(-\frac{2}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6}-2\right)=2.015\,3\times10^{-2}\\ s_3 &= \exp\left(-\frac{2}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6}-2\right)=6.102\,9\\ s_4 &= \exp\left(\frac{1}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6}+4\right)=8.130\,5\end{aligned}$$

Ejercicio 51.A. Para implementar e_1 debemos poner $\sqrt{s}-\frac{5}{3}=0\Leftrightarrow s=\frac{25}{9}$ y los beneficios para el principal son $\frac{2}{3}10-\frac{25}{9}=\frac{35}{9}$. Para implementar e_2 fijamos $s=\frac{64}{25}$ y el beneficio es $\frac{61}{25}$. Finalmente, para e_3 el sueldo es $s=\frac{16}{9}$ y el beneficio $\frac{14}{9}$. El contrato óptimo es el que implementa e_1.

51.B. Las restricciones de incentivos cuando se quiere implementar e_2 son:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_a+\frac{1}{2}u_b-\frac{8}{5} &\geq \frac{2}{3}u_a+\frac{1}{3}u_b-\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{15}\geq\frac{1}{6}u_a-\frac{1}{6}u_b\\ \frac{1}{2}u_a+\frac{1}{2}u_b-\frac{8}{5} &\geq \frac{1}{3}u_a+\frac{2}{3}u_b-\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{6}u_a-\frac{1}{6}u_b\geq\frac{4}{15}\end{aligned}$$

que no se pueden cumplir simultáneamente. Vemos (no es casualidad) que para que se cumpla la primera restricción de incentivos la diferencia de sueldos (entre a y b) no puede ser muy grande: si lo fuera, el individuo haría el esfuerzo alto. Similarmente, para que se cumpla la segunda, la diferencia de sueldos no puede ser muy chica: si lo fuera, el agente elegiría e_3.

51.C. Igual que en la Parte B, las restricciones de incentivos son

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_a+\frac{1}{2}u_b-c_2 &\geq \frac{2}{3}u_a+\frac{1}{3}u_b-\frac{5}{3}\Leftrightarrow 10-6c_2\geq u_a-u_b\\ \frac{1}{2}u_a+\frac{1}{2}u_b-c_2 &\geq \frac{1}{3}u_a+\frac{2}{3}u_b-\frac{4}{3}\Leftrightarrow u_a-u_b\geq 6c_2-8\end{aligned}\tag{1.16}$$

por lo que el conjunto de sueldos que cumplen con las restricciones de incentivos es no vacío siempre que

$$10-6c_2\geq 6c_2-8\Leftrightarrow\frac{3}{2}\geq c_2.$$

Verificamos que para $c_2=\frac{3}{2}$ existe al menos un contrato que cumple con las restricciones de participación e incentivos. Luego, como para cualquier $c_2<\frac{3}{2}$ se "relajan" aún más las restricciones (se achica siempre el lado izquierdo de las desigualdades), cualquier $c_2\leq\frac{3}{2}$ hará que e_2 sea implementable.

De las ecuaciones (1.16) tenemos que para $c_2=\frac{3}{2}$ los pares de (u_b,u_a) que cumplen las restricciones de incentivos son $u_a=u_b+1$ (haga la gráfica con u_b en las abcisas). Los pares (u_b,u_a) que cumplen la restricción de participación son $u_a\geq 3-u_b$. Por lo tanto, los (u_b,u_a) que están sobre la recta $u_a=u_b+1$ y que tienen $u_b\geq 1$ cumplen las tres restricciones.

51.D. Ya encontramos el contrato óptimo para implementar e_3, y sabemos que no se puede implementar e_2. Encontramos ahora el contrato óptimo para e_1. Como ya vimos que c_2 es "demasiado alto" probamos de resolver el problema sin e_2, y luego verificamos que el óptimo encontrado también cumpla la restricción de

incentivos de e_1 contra e_2. Con eso alcanzará, pues si un contrato es óptimo para maximizar los beneficios del principal con 2 restricciones, también será óptimo si se agrega otra restricción.

En este caso, como en todos los problemas de 2×2, ponemos las dos restricciones con igualdad y encontramos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_b = 1 \\ u_a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_b = 1 \\ s_a = 4 \end{array}\right\}.$$

La restricción de incentivos de e_1 contra e_2 con estos niveles de utilidad se satisface pues

$$0 = \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} = -\frac{1}{10}.$$

Los beneficios para el principal son

$$\frac{2}{3}(10-4) + \frac{1}{3}(0-1) = \frac{11}{3}$$

que son mayores que los $\frac{14}{9}$ que resultan de implementar e_3.

51.E. Con esfuerzo observable, los beneficios de implementar e_2 y e_3 son como en la Parte A. Para implementar e_1 fijamos $s = 8$ para que se cumpla con igualdad la restricción de participación. Los beneficios son entonces $10 - 8 = 2$. El contrato óptimo es el que implementa e_2.

Con esfuerzos no observables el contrato para implementar e_3 es el mismo. Para implementar e_2 las restricciones son

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq 0 \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq u_a - \sqrt{8} \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \end{array}$$

Como el costo de e_1 aumentó (relativo a las otras partes) probamos de resolver el problema sin la restricción de e_2 contra e_1, y como siempre, ponemos las dos restricciones restantes con igualdad para obtener

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} = 0 \\ \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_a = \frac{12}{5} \\ u_b = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_a = \frac{144}{25} \\ s_b = \frac{16}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow v(e_2) = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{144}{25}\right) - \frac{1}{2}\frac{16}{25} = \frac{9}{5} < 2.$$

La restricción de incentivos de e_2 contra e_1 se cumple pues

$$\frac{8}{5} = \frac{1}{2}\frac{12}{5} + \frac{1}{2}\frac{4}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} > u_a - \sqrt{8} = \frac{12}{5} - \sqrt{8} \simeq -0.43$$

Para implementar e_1, probamos con burning oil: $s_a = 8$, $s_b = 0$ y vemos que funciona pues

$$\begin{array}{l} u_a - \sqrt{8} = 0 > -0.19 \simeq \frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{1}{2}0 - \frac{8}{5} = \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \\ u_a - \sqrt{8} = 0 > -0.39 \simeq \frac{1}{3}\sqrt{8} + \frac{2}{3}0 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \end{array}.$$

El beneficio de este contrato para el principal es

$$v(e_1) = 10 - 8 = 2$$

que es mayor que $v(e_2) = 9/5$ y que $v(e_3) = 14/9$.

Con información asimétrica se implementa e_1 mientras que con información perfecta se implementa e_2, un esfuerzo menor.

Ejercicio 52.A. Para Manuel, g le reporta una utilidad de

$$\frac{1}{2}(5+0) + \frac{1}{2}(5+3-2) = \frac{11}{2}$$

(si la acción vale menos de 2, no la ejecuta, y por tanto obtiene 0, mientras que si vale más de 2, la compra a 2, y la vende al precio de mercado, en este caso 3). Hacer f le reporta 5 que es menor que $\frac{11}{2}$, por lo que elige g.

52.B. Si el dueño elige la primera forma de pago y f obtiene una utilidad de $80+20=100$. Mientras que si elige la primera forma y g, obtiene

$$\frac{1}{2}(80+10)+\frac{1}{2}(80+20)=95$$

(en el segundo paréntesis debería ser $80+30$, pero por los impuestos queda en $80+20$). Por lo tanto, si elige la primera forma, le pedirá a Manuel que haga f y obtendrá una utilidad de 100. Si elige la segunda forma de pago, sabe que Manuel elegirá g, y por tanto su utilidad será 95. Concluimos que elegirá la primera forma de pago.

Ejercicio 53.A. Sueldos constantes, $s=1$. El valor para el principal es $V_a=\pi_n^f-1$.

53.B. Como la función de utilidad es continua y no acotada por debajo, la restricción de participación está activa, y en este caso el principal debe elegir los sueldos s_n^n, s_n^f, s_f^n y s_f^f para maximizar su utilidad

$$\begin{array}{lll} & & \dfrac{\pi_n^n-s_n^n+\pi_f^n-s_f^n+\pi_n^f-s_n^f+\pi_f^f-s_f^f}{4} \\ s.a \quad \dfrac{u(s_n^n)+u\left(s_f^n\right)+u\left(s_n^f\right)+u\left(s_f^f\right)}{4}-c_b & = & 0 \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f=4 \\ \dfrac{u(s_n^n)+u\left(s_f^n\right)+u\left(s_n^f\right)+u\left(s_f^f\right)}{4}-c_b & \geq & u\left(s_f^n\right)-c_a \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f-4\geq 4\log s_f^n \\ \dfrac{u(s_n^n)+u\left(s_f^n\right)+u\left(s_n^f\right)+u\left(s_f^f\right)}{4}-c_b & \geq & u\left(s_n^f\right)-c_c \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f-4\geq 4\log s_n^f-8 \end{array}$$

Vemos entonces que debemos maximizar $-s_n^n-s_f^n-s_n^f-s_f^f$ sujeto a $\log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f=4$, $s_f^n\leq 1$, $\log s_n^f\leq 2$. Alguna de las restricciones de incentivos debe estar activa, pues de otro modo el óptimo sería con sueldos constantes, y ello llevaría al agente a hacer la acción a.

Probamos con las dos primeras activas para obtener $s_f^n=1$ y $\log s_n^n s_n^f s_f^f=4$. Vemos que los tres sueldos serán iguales y $s_n^n=10.000/s_n^f s_f^f$. El problema es entonces el de maximizar $-10.000/s_n^f s_f^f-s_n^f-s_f^f$ y con los sueldos iguales, maximizar $-10000/x^2-2x$, con lo que obtenemos $s_n^f=s_f^f=10\sqrt[3]{10}$. La tercera restricción nos queda

$$\log s_n^f=\log 10\sqrt[3]{10}=\log 10+\log\sqrt[3]{10}=1+\frac{1}{3}\log 10=\frac{4}{3}<2,$$

por lo que estuvo bien haberla ignorado (es decir, nunca habrá una solución con las tres activas). La solución en este caso es $s_f^n=1$, y $s_n^f=s_f^f=s_n^n=10\sqrt[3]{10}$. Esto tiene sentido: queremos desincentivar que la persona sólo se dedique a la actividad I, y el resultado que nos indica que el individuo hizo eso es que falle sólo la actividad II; por eso se le pone un sueldo bajo en ese caso, y alto en cualquier otro caso.

Con la primera y la tercera activas, nos queda $\log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f=4$ y $s_n^f=100$ que implica $\log s_n^n s_f^n s_f^f=2\Leftrightarrow s_n^n=100/s_f^n s_f^f$. Como aparecen los tres salarios en forma simétrica, debemos elegir x para maximizar $-100/x^2-2x$ lo que arroja $s_n^n=s_f^n=s_f^f=10^{\frac{2}{3}}$ y se viola la segunda restricción pues debíamos tener $s_f^n\leq 1$ y sin embargo $10^{\frac{2}{3}}=4.64$.

El valor para el principal es $V_b=\frac{\pi_n^n+\pi_f^n+\pi_n^f+\pi_f^f-1-30\sqrt[3]{10}}{4}$.

53.C. Burning oil. Si falla la actividad II, quiere decir que el agente no hizo c; por lo tanto, pondremos un sueldo que asegure $\overline{u}$ si falla la actividad I y no falla la II, y lo prenderemos fuego si pasa cualquier otra cosa. Entonces $\log s_n^f - 2 = 0 \Leftrightarrow s_n^f = 100$ y $\log s_f^n - 0 \leq 0 \Leftrightarrow s_f^n \leq 1$ y $\log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f \leq 1$ que con $s_f^n = 1$ y $s_n^f = 100$ queda $\log s_n^n s_f^f \leq -1$ que se satisface si $s_n^n = s_f^f = \frac{1}{4}$.

El valor para el principal es $V_c = \pi_n^f - 100$.

Vemos que si π_n^n (o π_f^f, pero eso es medio tonto) es grande relativo a π_n^f y π_f^n, tendremos $V_b \geq V_c$ y $V_b \geq V_a$. En ese caso, como dice la letra, el esquema óptimo implementa b, y en ese esquema tenemos $s_f^f = 10\sqrt[3]{10} > 1 = s_f^n$ (si fallan los dos sistemas, el sueldo es mayor que si falla uno solo).

Ejercicio 54.A. Para todo $x \in X$, elegir s_x para maximizar

$$\int_X v\left(x - s_x\right) d\pi_b\left(x\right)$$

$$\text{sujeto a } \int_X \pi_b\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_b \quad \geq \quad \overline{u}$$

(la integral $d\pi$ incluye como caso particular el de π discreta).

54.B. Para cada x, s_x maximiza

$$L = \int_X \pi_b\left(x\right) v\left(x - s_x\right) + \lambda\left(\int_X \pi_b\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_b - \overline{u}\right) = \int_X \pi_b\left(x\right)\left[v\left(x - s_x\right) + \lambda u\left(s_x\right) dx - c_b - \overline{u}\right] dx.$$

Como la integral es una especie de suma, y cada s_x aparece solamente en uno de los términos de la suma, al derivar con respecto a s_x desaparece la integral y queda sólo

$$-v'\left(x - s_x\right) + u'\left(s_x\right)\lambda = 0 \tag{1.17}$$

Como esa igualdad se satisface para todo x, podemos diferenciar nuevamente con respecto a x, y sustituir por λ de la ecuación (1.17), para obtener

$$\begin{aligned} -v''\left(x - s_x\right)\left(1 - \frac{ds_x}{dx}\right) + u''\left(s_x\right)\frac{ds_x}{dx}\lambda \quad &= \quad 0 \Leftrightarrow -v''\left(x - s_x\right)\left(1 - \frac{ds_x}{dx}\right) + u''\left(s_x\right)\frac{ds_x}{dx}\frac{v'\left(x - s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{ds_x}{dx} \quad &= \quad \frac{v''\left(x - s_x\right)}{u''\left(s_x\right)\frac{v'(x - s_x)}{u'(s_x)} + v''\left(x - s_x\right)} = \frac{\frac{v''(x - s_x)}{v'(x - s_x)}}{\frac{u''(s_x)}{u'(s_x)} + \frac{v''(x - s_x)}{v'(x - s_x)}} \end{aligned}$$

54.C. Usando que r_p y r_a son constantes para estas funciones de utilidad, nos queda que s_x es lineal en x : $s_x = mx + n$. Utilizando esto, y la ecuación para λ de (1.17) obtenemos

$$\frac{v'\left(x - s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} = \frac{e^{s_x - x}}{2e^{-2s_x}} = \frac{e^{(m-1)x+n}}{2e^{-2mx-2n}} = \lambda \Rightarrow \frac{d\left(\frac{e^{(m-1)x+n}}{2e^{-2mx-2n}}\right)}{dx} = \frac{e^{3n+3mx-x}}{2}\left(3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Por supuesto, ya sabíamos esto de la ecuación de ds/dx de la parte anterior, ya que $r_p = 1$ y $r_a = 2$. La ordenada en el origen de los sueldos, n, se obtiene utilizando la restricción de participación (que no ha sido usada hasta ahora):

$$\overline{u} = \int_X \pi_b\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_b = -\int_0^1 2xe^{-2\left(\frac{x}{3}+n\right)} dx - 1 \Leftrightarrow \frac{15}{2}e^{-\frac{2}{3}}e^{-2n} - \frac{9}{2}e^{-2n} - 1 = \overline{u} \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u} + 2}{15e^{-\frac{2}{3}} - 9}$$

Por supuesto, hasta este último paso no habíamos usado el hecho que fuera la acción a o b, por lo que todo es aplicable para encontrar el contrato óptimo para a :

$$\overline{u} = \int_X \pi_a\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_a = -\int_0^1 e^{-2\left(\frac{x}{3}+n\right)} dx \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{-2n}\left(e^{-\frac{2}{3}} - 1\right) = \overline{u} \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}}{3e^{-\frac{2}{3}} - 3}.$$

Utilizando el contrato óptimo para implementar a y para implementar b, encontramos ahora la utilidad esperada del principal

$$\begin{aligned} V(b) &= -\int_0^1 2xe^{-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}+2}{15e^{-\frac{2}{3}}-9}}dx = 6\sqrt{2}\left(4e^{-\frac{1}{3}}-3\right)\sqrt{\frac{1}{9-15e^{-\frac{2}{3}}}}\sqrt{-\overline{u}-1} = -0.99679\sqrt{-\overline{u}-1} \\ V(a) &= -\int_0^1 e^{-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}}{3e^{-\frac{2}{3}}-3}}dx = 3\sqrt{2}\sqrt{-\overline{u}}\sqrt{\frac{1}{3-3e^{-\frac{2}{3}}}}\left(e^{-\frac{1}{3}}-1\right) = -0.99541\sqrt{-\overline{u}} \end{aligned}$$

La diferencia $V(b)-V(a)$ es positiva en $\overline{u}=-1$, por lo que $V(b)\geq V(a)$, y a medida que $\overline{u}$ cae, la diferencia crece, pues $d(V(b)-V(a))/d\overline{u}\leq 0$.

54.D. Implementar a. Antes de empezar, notamos que si el principal le pagara 0 al agente tanto si sale el producto alto, como si sale el bajo, el agente obtendría una utilidad de -1 (que es más alta que la utilidad de reserva; por tanto, en el óptimo tendremos sueldos negativos; no es nada raro, podríamos cambiar un poco los parámetros para que los sueldos fueran positivos y no cambiaría el problema).

Para resolver, hacemos el cambio de variable $u=e^{-2s_1}$ y $v=e^{-2s_2}$. Probamos sólo con la de participación y verificamos que se cumple la de incentivos. La de participación la ponemos con igualdad y obtenemos $-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow u=5-v$. Eso en la función objetivo nos da

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2} = -\frac{1}{2}(5-v)^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}$$

y la condición de primer orden es

$$\frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-2}(5-v)^{\frac{3}{2}}-v^{\frac{3}{2}}e^{-1}}{(5-v)^{\frac{3}{2}}}=0\Leftrightarrow e^{-2}(5-v)^{\frac{3}{2}}=v^{\frac{3}{2}}e^{-1}$$

y elevando a la 2/3 obtenemos

$$e^{-\frac{4}{3}}(5-v)=ve^{-\frac{2}{3}}\Leftrightarrow v=5\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{2}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}}=1.6962.$$

Por lo tanto, $u=5-5\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{2}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}}=3.3038$. La utilidad del principal es entonces

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}=-0.15315.$$

La restricción de incentivos es

$$-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\geq-\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1=-3.0981$$

Implementar b. El problema del principal es entonces elegir u y v para maximizar

$$\text{sujeto a}\quad\begin{array}{c} -\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2} \\ -\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1\geq-\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1\geq-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v \end{array}$$

El Lagrangiano (para hacer Kuhn-Tucker) es

$$L=-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}-\lambda(u+3v-6)-\mu(v-u+4)\Rightarrow\begin{array}{c}\frac{dL}{du}=\frac{e^{-1}-8u^{\frac{3}{2}}\lambda+8u^{\frac{3}{2}}\mu}{8u^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dL}{dv}=-\frac{24v^{\frac{3}{2}}\lambda-3e^{-2}+8v^{\frac{3}{2}}\mu}{8v^{\frac{3}{2}}}\end{array}.$$

La solución debe tener estas dos derivadas 0 y $\lambda(u+3v-6)=\mu(v-u+4)=0$, con $\mu,\lambda\geq 0$. Es fácil ver que la de participación debe estar activa. Imaginemos que no lo estuviera, ahora describiremos cómo hacer para aumentar la utilidad del principal. Como u y v no están acotados por arriba (y al principal le conviene subirlos), si la restricción no estuviera activa, siempre podríamos subir u y v en la misma cantidad y la restricción de incentivos ($v-u+4\leq 0$) se seguiría cumpliendo (se cancelarían los incrementos de u y v).

Nos quedan entonces dos casos; las dos restricciones activas, sólo la de participación activa. Comenzamos por la primera. Con las dos activas tenemos $u=\frac{9}{2}, v=\frac{1}{2}$ y eso en las condiciones de primer orden iguales a 0 arroja $\lambda=0.037\,09$ y $\mu=0.032273$. Los sueldos son entonces $e^{-2s_1}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow s_1=\frac{1}{2}\ln 2-\ln 3\simeq -0.75$ y $e^{-2s_2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow s_2=\frac{1}{2}\ln 2\simeq 0.35$. Cuando sale el producto bueno, el trabajador recibe un sueldo; cuando sale malo, debe pagarle al principal. La utilidad del principal es

$$-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}=-0.18690.$$

Sólo con la de participación activa, nos queda el siguiente sistema

$$e^{-1}-8u^{\frac{3}{2}}\lambda=24v^{\frac{3}{2}}\lambda-3e^{-2}=u+3v-6=0\Leftrightarrow u=2.362, v=1.2127, \lambda=1.266\,8\times 10^{-2}$$

pero en ese caso no se cumple la de incentivos, $v-u+4\leq 0$.

Entonces, b se implementa con las dos activas, y el contrato óptimo es implementar a.

Ejercicio 55.A. Con información completa ponemos sueldos constantes y la de participación activa:

$$\begin{aligned} a &: u-5=0\Leftrightarrow u=5\Leftrightarrow s=25\Rightarrow V_a=\frac{2*48+2*12+1}{5}-25=-\frac{4}{5}\\ b &: u-4=0\Leftrightarrow u=4\Leftrightarrow s=16\Rightarrow V_b=\frac{48+2*12+2}{5}-16=-\frac{6}{5}. \end{aligned}$$

por lo que convendría hacer la acción a.

55.B. Si quiere implementar a con sueldos constantes, el agente hará la acción b. Por lo tanto, para implementar la acción a, el principal debe maximizar sus beneficios sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{1}{5}u_3-5 &\geq \frac{1}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{2}{5}u_3-4\\ \frac{2}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{1}{5}u_3-5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Poniendo la segunda restricción con igualdad, obtenemos $u_3=25-2u_1-2u_2$, y sustituyendo en la primera ecuación, con igualdad, queda $u_1=10-\frac{2}{3}u_2\Rightarrow u_3=5-\frac{2}{3}u_2$. Utilizando estas dos igualdades el problema del principal se reduce al de elegir u_2 para maximizar

$$\frac{2}{5}\left(16-\left(10-\frac{2}{3}u_2\right)^2\right)+\frac{2}{5}\left(12-u_2^2\right)+\frac{1}{5}\left(1-\left(5-\frac{2}{3}u_2\right)^2\right)=-\frac{10}{9}u_2^2+\frac{100}{9}u_2-56$$

El resultado es $u_2=5$, $u_1=\frac{20}{3}$ y $u_3=\frac{5}{3}$.

Ejercicio 56.A. El R^* que deja al cliente indiferente es el que resuelve

$$p_A(x_A-R^*)=p_B(x_B-R^*)\Leftrightarrow R^*=\frac{p_Ax_A-p_Bx_B}{p_A-p_B}$$

56.B. Retornos para el banco (asumimos que el banco puede elegir el proyecto, si el empresario es indiferente):

$$Beneficio=\begin{cases} p_BR-I & R\geq R^*\\ p_AR-I & R\leq R^* \end{cases}.$$

El banco no elegirá ninguna tasa R estrictamente más chica que R^*, pues R^* es mejor que cualquiera de ellas (pues implementa A, y da mayores beneficios). Por otro lado, entre las tasas mayores que R^*, la mejor es $R = x_B$, pues con todas el cliente hace B, y con esta lo deja indiferente entre participar y no participar. La decisión es entonces entre R^* (y que el cliente haga A) o $R = x_B$ y que haga B. Por lo tanto, el banco elegirá $R = R^*$ si y sólo si

$$\begin{aligned} p_A R^* &\geq p_B x_B \Leftrightarrow p_A \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B} \geq p_B x_B \Leftarrow p_A \frac{p_A x_B - p_B x_B}{p_A - p_B} \geq p_B x_B \Leftrightarrow \\ p_A \frac{p_A - p_B}{p_A - p_B} &\geq p_B \Leftrightarrow p_A \geq p_B \end{aligned}$$

que se cumple. Al banco le conviene elegir R^*.

56.C. En este caso, subir la tasa de interés sólo hace que la gente cambie de proyecto (no reduce la demanda). De todas maneras, si subiera la tasa de interés hasta que $R = x_B$, los beneficios del banco serían $p_B x_B - I$ y esto es mejor que fijar los intereses de tal manera que $R = R^*$ si y sólo si

$$p_B x_B - I > p_A R^* - I \Leftrightarrow p_B x_B > p_A \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B} \Leftrightarrow \frac{1}{p_A - p_B} \left((x_A - x_B) p_A^2 + x_B (p_A - p_B)^2 \right) < 0$$

que es falso. Por lo tanto, al banco no le conviene subir la tasa de interés (y eso a pesar de que nadie deja de pedir el dinero).

Ejercicio 57.A. En este caso, la riqueza del asegurado es constante: $v + s_n = s_a$. Para que se cumpla la restricción de participación con igualdad ponemos $\sqrt{s_a} = \overline{u} \Leftrightarrow s_a = \overline{u}^2$ y queda $v + s_n = \overline{u}^2 \Leftrightarrow s_n = \overline{u}^2 - v$. Otra forma de hacerlo es tipo "burning oil": con $s_a = \overline{u}^2$ y s_n tal que $\frac{1}{2}\sqrt{s_a} + \frac{1}{2}\sqrt{v + s_n} - \frac{1}{4} \leq \overline{u} \Leftrightarrow s_n \leq \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v$.

57.B. Ponemos ambas restricciones activas:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\sqrt{s_a} + \frac{1}{2}\sqrt{s_n + v} - \frac{1}{4} = \overline{u} \\ \sqrt{s_a} = \overline{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} s_n = \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v \\ s_a = \overline{u}^2 \end{array}$$

57.C. Si la compañía quisiera que el individuo fuera atento, de la solución de la Parte B, $s_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - v$ (se puede verificar que $s_n + v \geq 0$) y $s_a = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2$. Los beneficios serían:

$$\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{32}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}v - \frac{1}{16} \geq 0.$$

Si la compañía quisiera que el individuo manejara desatento, pondría $s_a = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2$ y $s_n \leq \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - v$. Como $s_a > 0$, los beneficios serían negativos, y la empresa prefiere implementar atento.

Ejercicio 58.A. Aunque esto no entra en lo que hicimos en clase, las mismas ideas se aplican. En particular, si le pagamos un sueldo constante, aceptarán la coima; en tal caso no es necesario incluir la restricción de incentivos. En participación con igualdad:

$$-e^{-s - \ln\frac{2e+1}{e+2}} = -\frac{e+2}{3e} \Leftrightarrow -e^{-s} = -\frac{2e+1}{3e} \Leftrightarrow s = \ln 3 - \ln(2e+1) + 1$$

58.B. Ponemos participación e incentivos con igualdad y obtenemos

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3}e^{-s_1} - \frac{2}{3}e^{-s_2} = -\frac{e+2}{3e} \\ -\frac{2}{3}e^{-\left(\ln\frac{2e+1}{e+2} + s_1\right)} - \frac{1}{3}e^{-\left(\ln\frac{2e+1}{e+2} + s_2\right)} = -\frac{e+2}{3e} \end{array}$$

De la primera, sacamos $e^{-s_1} = \frac{e+2}{e} - 2e^{-s_2}$ y en la segunda nos da $\frac{1}{e} = e^{-s_2}$ o $s_2 = 1$. Sustituyendo en la primera, queda $s_1 = 0$.

58.C. Si la AUF quiere implementar n, fijará $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$. Con esos sueldos, los árbitros se comportarán bien; si tienen la mala suerte de que el partido parece un asalto, igual se los debe castigar. El castigo está justamente para que (a priori) se porten bien los jueces.

Ejercicio 59.A. Repetimos lo que hemos hecho varias veces: participación con igualdad, y la condición de primer orden (del lado derecho de la de incentivos) con igualdad:

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{p})\,u_1 + \sqrt{p}u_2 + 1 - p &= 2\\ (1-\sqrt{p})\,u_1 + \sqrt{p}u_2 + 1 - p &\geq \left(1-\sqrt{\widetilde{p}}\right)u_1 + \sqrt{\widetilde{p}}u_2 + 1 - \widetilde{p}, \quad \forall \widetilde{p}\end{aligned}$$

y la condición de primer orden es: $-\frac{1}{2\sqrt{p}}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{p}}u_2 = 1 \Leftrightarrow u_2 - u_1 = 2\sqrt{p}$. Esto en la restricción de participación da

$$\sqrt{p}\,(u_2 - u_1) + u_1 - p = 1 \Leftrightarrow u_1 = 1 - p \Leftrightarrow s_1 = (1-p)^2.$$

Esto, obviamente, coincide con la solución a este problema dada en la ecuación (1.7), cuando a toda la utilidad del individuo (y a la utilidad de reserva) le restamos 1 (que es una normalización válida). Pero hay que tener cuidado; cuando este problema ha sido usado en parciales, la gente que usó directamente esos resultados puso $u_1 = \sqrt{s_1}$ y $u_2 = \sqrt{s_2}$ en la ecuación (1.7), y eso da mal. Si vamos a usar lo de las notas de clase, debemos tener cuidado que el planteo sea igual al de las notas de clase, y debemos poner $u_1 = \sqrt{s_1} + 1$ y $u_2 = \sqrt{s_2} + 1$.

Finalmente, obtenemos $u_2 = u_1 + 2\sqrt{p} = 1 - p + 2\sqrt{p} \Leftrightarrow s_2 = \left(1 - p + 2\sqrt{p}\right)^2$.

59.B. Para $p = 0$, premios constantes y obtenemos $s = 1$. Para $p = 1$, también vale la solución de la Parte A, $s_2 = 4$, $s_1 = 0$. Para ambos extremos, también se puede usar burning oil: como en ambos casos cada acción le asigna probabilidad 0 a un desenlace (a algún nivel de producto), se puede fijar un sueldo para satisfacer la de participación, y poner el otro sueldo para que se cumpla la de incentivos.

59.C. El valor para el principal de un cierto p, dado x_2 es

$$\begin{aligned}V(p, x_2) &= (1-\sqrt{p})\,(0 - s_1) + \sqrt{p}\,(x_2 - s_2) = -(1-\sqrt{p})\,(1-p)^2 + \sqrt{p}\left(x_2 - (1 - p + 2\sqrt{p})^2\right)\\ &= \sqrt{p}x_2 - 2p + 3p^2 - 4p^{\frac{3}{2}} - 1\end{aligned}$$

Derivando, obtenemos

$$\frac{\partial V(p, x_2)}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left(x_2 - 12p - 4\sqrt{p} + 12p^{\frac{3}{2}}\right)$$

que cuando $x_2 = \frac{7}{2}$ se iguala a 0 en $p = \frac{1}{4}$ (pueden graficar $V(p, x_2)$, ver que se maximiza cerca de $\frac{1}{4}$ y probar que la derivada en $\frac{1}{4}$ es 0).

59.D. Debemos hacer que $x_2 - 12p - 4\sqrt{p} + 12p^{\frac{3}{2}}$ sea 0 para $p = 1$, y eso sucede cuando $x_2 = 4$

Ejercidio 60 A,B. Resolvemos con $c(e)$, y cuando sea necesario, sustituimos por $c(e) = e^2/2$. Para implementar e^* debo elegir w_e y w_f para maximizar

$$\begin{aligned}& & e^*(x_e - w_e) + (1-e^*)(x_f - w_f)\\ s.a.\ e^* w_e + (1-e^*)\,w_f - c(e^*) &\geq 0\\ w_e, w_f &\geq 0\\ e^* w_e + (1-e^*)\,w_f - c(e^*) &\geq e w_e + (1-e)\,w_f - c(e),\ \text{para todo } e \in [0,1]\end{aligned}$$

Para implementar $e^* = 0$ el esquema óptimo tiene $w_f = 0$ pues minimiza la función objetivo sujeto sólo a la restricción a $w_f \geq 0$. Luego, debemos tener $w_e = 0$ para que se cumpla la restricción de incentivos.

Para implementar cualquier $e^* > 0$, primero notamos que sobra la restricción de participación, ya que la restricción de incentivos de e^* contra $e = 0$ es $e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) \geq w_f - c(0) = w_f \geq 0$, por lo que la restricción de participación se cumple siempre. Por lo tanto, el problema de implementar $e^* > 0$ es el de elegir w_e y w_f para maximizar

$$\begin{aligned} & e^*(x_e - w_e) + (1 - e^*)(x_f - w_f) \qquad (1.18) \\ s.a.\ w_e, w_f & \geq 0 \\ e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) & \geq e w_e + (1 - e) w_f - c(e), \text{ para todo } e \in [0,1] \end{aligned}$$

Luego, vemos que si $w_e \leq w_f$, el individuo elegiría un esfuerzo de 0 ya que achicando el esfuerzo reduce estrictamente su costo, y aumenta débilmente su salario esperado. Formalmente, si quiero implementar $e^* > 0$, y $w_e \leq w_f$, no se cumplirá la restricción de incentivos pues

$$U(e = 0) = w_f \geq e^* w_e + (1 - e^*) w_f > e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) = U(e^*).$$

Por lo tanto, siempre debemos tener $w_e > w_f$. Sabiendo eso, notamos que $w_f = 0$ en el óptimo. Si no lo fuera, y tuviéramos $w_f > 0$ en el óptimo, podríamos poner $\widetilde{w}_e = w_e - w_f$ y $\widetilde{w}_f = 0$; con este nuevo esquema subirían los beneficios, y se cumplirían las restricciones. Para ver eso, alcanza con ver que ambos salarios son positivos, y como w_e y w_f eran óptimos cumplían las restricciones de incentivos, que asegura que $\widetilde{w}_e$ y $\widetilde{w}_f$ también las cumplen:

$$\begin{aligned} e^* \widetilde{w}_e + (1 - e^*) \widetilde{w}_f - c(e^*) & \geq e \widetilde{w}_e + (1 - e) \widetilde{w}_f - c(e) \Leftrightarrow \\ e^*(w_e - w_f) + (1 - e^*)(w_f - w_f) - c(e^*) & \geq e(w_e - w_f) + (1 - e)(w_f - w_f) - c(e) \Leftrightarrow \\ e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) - w_f & \geq e w_e + (1 - e) w_f - c(e) - w_f \Leftrightarrow \\ e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) & \geq e w_e + (1 - e) w_f - c(e) \end{aligned}$$

(recordamos que no teníamos en el problema (1.18) la restricción de participación, por lo que bajar los sueldos no la violaría).

Por lo tanto, el problema de implementar $e^* > 0$ es el de elegir w_e para maximizar

$$\begin{aligned} & e^*(x_e - w_e) + (1 - e^*) x_f \\ e^* w_e - c(e^*) & \geq e w_e - c(e), \text{ para todo } e \in [0,1]. \end{aligned}$$

De la restricción de incentivos obtenemos que el individuo elige e para maximizar su utilidad (dado w_e), que arroja $w_e = c'(e)$ (y se cumple la condición de segundo orden, ya que $c'' \geq 0$). Si queremos que se cumpla la restricción de incentivos debemos tener $w_e = c'(e^*)$.

Eso termina con el esquema óptimo para implementar e^* cuando no sabemos x_e, x_f o la forma de c : $w_f = 0$ y $w_e = c'(e^*)$. Sustituyendo estas condiciones en el problema del principal cuando $c(e) = \frac{e^2}{2}$, $x_e = \frac{1}{k}$ y $x_f = 0$, vemos que $w_e = e^*$ y los beneficios de implementar e son por tanto

$$e\left(\frac{1}{k} - e\right) + (1 - e)(0 - 0) = \frac{e}{k} - e^2$$

y el e óptimo resuelve la condición de primer orden $e^* = \frac{1}{2k}$.

Un pequeño apartado para ver de otra forma que sobra la restricción de participación es la siguiente. Si la pusiéramos activa, tendríamos $e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) = 0$, y de la restricción de incentivos $w_e - w_f = c'(e^*)$, por lo que

$$e^* w_e + (1 - e^*) w_f - c(e^*) = 0 \Leftrightarrow e^*(w_f + c'(e^*)) + (1 - e^*) w_f - c(e^*) = 0 \Leftrightarrow w_f = c(e^*) - e^* c'(e^*).$$

Para ver que esto es negativo (y por tanto no puede estar activa la de participación), notamos que la función $c(e) - ec'(e^*)$, como función de e, es negativa en $e = e^*$ para c convexa. La razón es que para todo $e < e^*$ tenemos $c'(e) < c'(e^*)$ y por lo tanto,

$$c(e^*) = \int_0^{e^*} c'(e)\,de < \int_0^{e^*} c'(e^*)\,de = c'(e^*)\int_0^{e^*} 1de = c'(e^*)\,e^*.$$

En un gráfico de $c(e) - ec'(e^*)$ se ve que empezando en 0, $ec'(e^*)$ crece linealmente (más rápido) que $c(e)$ (para $e \leq e^*$).

Para este ejercicio no se puede tomar directo de las notas de clase las fórmulas para $u_2 - u_1$, por ejemplo. La razón es que ahí el costo del esfuerzo es e, y aquí es $c(e)$. Sin embargo, se puede transformar este problema para que sea "exactamente igual" a lo que vimos en clase. Para ello, decimos que la variable de elección del individuo, en vez de ser e, es c (el costo) y vemos que la probabilidad de éxito es $\pi(c) = c^{-1}(c)$. En ese caso habría que chequear que se cumple $\pi'' \leq 0$ (se cumple por el teorema de la función inversa).

Ejercicio 61. Fijamos un e cualquiera que queremos implementar. Hay que elegir, para cada y, un $r(y)$ para maximizar el Lagrangeano, que en este caso es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\overline{y}} (y - r(y))\,\pi(y,e)\,dy - g(e) + \mu\left[\int_0^{\overline{y}} (y - r(y))\,\pi_e(y,e)\,dy - g'(e)\right] + \lambda\left[\int_0^{\overline{y}} r(y)\,\pi(y,e)\,dy - I\right] \\ &= \int_0^{\overline{y}} r(y)\left(\lambda - 1 - \mu\frac{\pi_e(y,e)}{\pi(y,e)}\right)\pi(y,e)\,dy + \int_0^{\overline{y}} y\left(1 + \mu\frac{\pi_e(y,e)}{\pi(y,e)}\right)\pi(y,e)\,dy - g(e) - \mu g'(e) - \lambda I \end{aligned}$$

Vemos entonces que el Lagrangeano es lineal en r. Eso implica que cuando $\lambda \geq 1 + \mu\frac{\pi_e(y,e)}{\pi(y,e)}$ (cuando y es más chico que un cierto valor y^*) elegimos el r lo más grande posible, $r(y) = y$; cuando $\lambda < 1 + \mu\frac{\pi_e(y,e)}{\pi(y,e)}$ (y es más grande que y^*) elegimos r lo más chico posible, $r(y) = 0$.

El problema es que eso viola que r sea creciente. La restricción es entonces que para todo $y \geq y^*$, debemos poner r lo más chico posible, y eso es $r(y^*)$. El valor y^* es el monto de la deuda, y se determina usando $\int_0^{\overline{y}} r(y)\,\pi(y,e)\,dy = I$.

Luego hay que elegir el e óptimo.

Ejercicio 62. Con esfuerzo observable aseguran completamente al agente, que se esfuerza por cuidarse. Concretamente, con esfuerzo de 0, la condición de beneficio 0 es $\frac{3}{4} * 0 + \frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$, por lo que le dan al individuo una riqueza constante de $\frac{1}{4}$, que tiene una utilidad de $\frac{1}{2}$. Con esfuerzo de 1, la riqueza esperada es $\frac{1}{4} * 0 + \frac{2}{4} * 1 = \frac{3}{4}$, y al agente le ofrecen contratos con riqueza constante de $\frac{3}{4}$, que da una utilidad de $\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{10} = 0.77$ que es mayor que $\frac{1}{2}$. Ese contrato sería el que surgiría con esfuerzo observable, pero esfuerzo no observable, el agente lo tomaría, no haría el esfuerzo y las compañías perderían plata. No es un contrato de equilibrio.

Con esfuerzo no observable, aseguran completamente al agente asumiendo que no se esfuerza, pero el agente no lo toma, ya que le sirve más cuidarse.

Ejercicio ??.A. Con esfuerzo observable tenemos salarios constantes, y activa la de participación, por lo que

$$\begin{aligned} u_a - 0 &= 1 \Leftrightarrow s_a = 1 \Leftrightarrow V_a = \frac{1000 + 10000}{4} - 1 = 2.749 \\ u_b - 2 &= 1 \Leftrightarrow s_b = 81 \Leftrightarrow V_b = \frac{1000 + 10000}{3} - 81 \approx 3.586 \end{aligned}$$

??.B. Para la acción a es el mismo contrato que antes. Para la acción b, ponemos $s_1 = s_2$ por tener iguales ratios de verosimilitud. Probamos primero con la de participación e incentivos activas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_1 - 2 &= 1 \\ \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_1 - 2 &= \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_1 \end{aligned}$$

pero esto implica $u_0 = -5$ y $u_1 = 7$, que no puede ser. Ponemos entonces $u_0 = 0$ e incentivos activa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}0+\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}u_1-2 &= \frac{1}{2}0+\frac{1}{4}u_1+\frac{1}{4}u_1 \Leftrightarrow u_1 = 12 \Leftrightarrow s_1 = 20736 \Rightarrow \\ V_b &= \frac{0-0+1000-20736+10000-20736}{3} = -\frac{30\,472}{3} \approx -10.157.\end{aligned}$$

??.C. Con monitoreo gana 3.586, y sin monitoreo gana 2749. Por lo tanto, está dispuesto a pagar $837 por poder monitorear.

Ejercicio 64. La restricción es $\frac{3}{4}\ln(w_G)+\frac{1}{4}\ln(w_B)-k \geq \frac{1}{2}\ln(w_G)+\frac{1}{2}\ln(w_B)$. Las condiciones de beneficio 0 para la firma son

$$\begin{aligned}\text{alto} &\rightarrow \frac{3}{4}(w_0-w_G)+\frac{1}{4}(w_0-L-w_B)=0 \\ \text{bajo} &\rightarrow \frac{1}{2}(w_0-w_G)+\frac{1}{2}(w_0-L-w_B)=0\end{aligned}$$

Si el contrato ofrecido no maximiza la utilidad del agente sujeto a la condición de beneficio 0, alguna firma podría ofrecer un contrato por debajo de la restricción y por encima de la utilidad del agente, y ganaría (más) dinero. Eso indicaría que la situación inicial no era un equilibrio (ya que alguien tendría incentivos a desviarse). Por lo tanto, la letra pide el contrato que maximiza la utilidad sujeto a beneficio 0. Es decir, elegir w_G, w_B para maximizar $\frac{1}{2}\ln(w_G)+\frac{1}{2}\ln(w_B)$ sujeto a $\frac{1}{2}(4-w_G)+\frac{1}{2}(1-w_B)=0 \Leftrightarrow w_G = 5-w_B$. Sustituyendo w_G en la función objetivo, y derivando,

$$\frac{1}{2}\ln(5-w_B)+\frac{1}{2}\ln(w_B) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{5-w_B}(-1)+\frac{1}{2}\frac{1}{w_B}=0 \Leftrightarrow w_B = \frac{5}{2} \Rightarrow w_G = \frac{5}{2}.$$

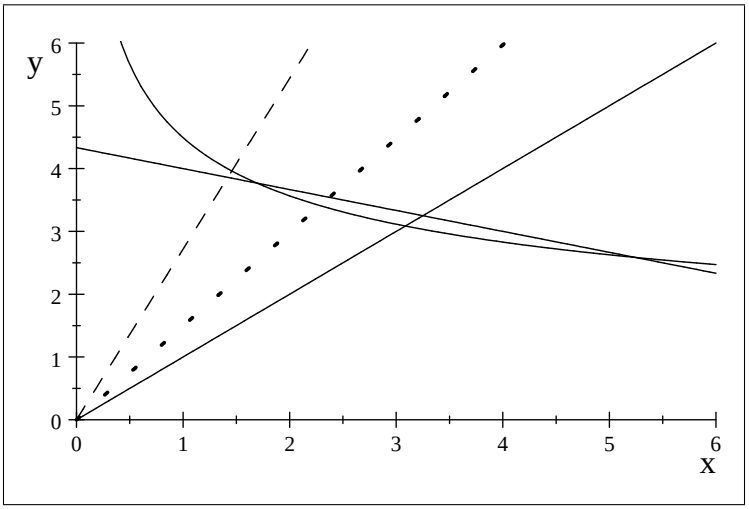
Tenemos nuevamente la solución de "sueldos constantes" o "nada de riesgo".

Para resolver el problema cuando queremos esfuerzo alto, ponemos activas ambas restricciones para obtener $w_G = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}w_B$ y de la de incentivos

$$\ln w_G - \ln w_B = 4k \Leftrightarrow w_G = e^{\ln w_B + 4k} = e^{4k} w_B.$$

Otra vez, lo que hacen las firmas es ofrecer contratos que maximicen la utilidad del individuo sujeto a ambas restricciones. Si dibujamos la de beneficio 0, con w_B en las abscisas es como una restricción presupuestal típica, y la de incentivos lo que hace es alejarnos de la solución $w_G = w_B$ que obtendríamos si no hubiera problemas de incentivos: cuanto más alto k, más lejos estamos de cero riesgo, ya que hay que hacer que la diferencia entre w_G y w_B sea grande, para que quiera hacer el esfuerzo. El gráfico muestra la restricción de beneficio 0, y dos restricciones de incentivos (las que pasan por el origen) para dos niveles de k; con guiones $k = \frac{1}{4}$ y con puntos $k = \frac{1}{10}$; la línea sólida es $w_G = w_B$. Para cada k, la zona permitida por la restricción de incentivos es la que está por encima de la línea.

Dibujamos también una curva de indiferencia para un contrato con beneficio 0, pero que no maximiza la utilidad (para el caso de $k = \frac{1}{10}$). Vemos que en ese caso se podría ofrecer un contrato entre la de incentivos, la curva de indiferencia y la de beneficio 0, que haría más feliz al agente, y le daría beneficios a la empresa que lo ofreciera.



Todo lo anterior nos dice que no precisamos maximizar la utilidad sino sólo resolver el sistema con las dos restricciones

$$\left.\begin{array}{c} w_G = \frac{13}{3} - \frac{1}{3} w_B \\ w_G = e^{4k} w_B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} w_G = 13 \frac{e^{4k}}{3e^{4k}+1} \\ w_B = \frac{13}{3e^{4k}+1} \end{array}\right.$$

La utilidad esperada del agente es

$$\frac{3}{4}\ln(w_G) + \frac{1}{4}\ln(w_B) - k = \frac{3}{4}\ln\left(13\frac{e^{4k}}{3e^{4k}+1}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{3e^{4k}+1}\right) - k$$

Esta utilidad es mayor que la de esfuerzo bajo si y sólo si

$$\frac{3}{4}\ln\left(13\frac{e^{4k}}{3e^{4k}+1}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{3e^{4k}+1}\right) - k \geq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow k \leq 0.20706$$

Cuando $k = \frac{1}{10}$, la utilidad esperada cuando No tiene seguro es

$$U_N = \max\left\{\frac{3}{4}\ln 4 + \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{1}{10}, \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 1\right\} = \frac{3}{4}\ln 4 + \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{1}{10} = 0.939.$$

La utilidad con el mejor seguro es cuando le ofrecen el contrato que lo incentiva a hacer esfuerzo (pues el k es chico),

$$U_S = \frac{3}{4}\ln\left(13\frac{e^{4k}}{3e^{4k}+1}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{3e^{4k}+1}\right) - k = 1.0647.$$

La utilidad cuando le dan seguro Total, y él hace el esfuerzo alto, se encuentra cuando recibe el valor esperado de su riqueza en ambos estados: $w_G = w_B = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$:

$$\frac{3}{4}\ln\left(\frac{15}{4}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{15}{4}\right) - \frac{1}{10} = 1.0787.$$

Las riquezas que resuelven $\ln w = U$ son $w_N = e^{\frac{3}{4}\ln 4 - \frac{1}{10}} = 2.5593$ (relativo a $4 - \frac{1}{4}$ que es su riqueza esperada, pierde alrededor de 1.1 porque se tiene que esforzar, eso es $\ln 1.1 = \frac{1}{10}$; y pierde otro poco porque tiene bastante riesgo); $w_S = e^{1.0647} = 2.9000$ y $w_T = e^{1.0787} = 2.9409$.

2 Selección Adversa (Limones)

Supongamos que en una economía hay dos tipos de autos: los buenos y los malos (limones). Uno bueno, si se sabe que es bueno, vale \$3.000 para un comprador y \$2.500 para un vendedor. Asumiremos (a menos que se asuma lo contrario explícitamete) que para cada calidad de auto, hay más compradores que vendedores, por lo que el precio siempre dejará al comprador indiferente. Un limón, por su parte, vale \$2.000 para el comprador y \$1.000 para el vendedor. Se sabe que hay el doble de limones que de autos buenos.

Si tanto compradores como vendedores pudieran observar la calidad de cada auto, se venderían a \$3.000 y \$2.000 los buenos y malos respectivamente. Si ni compradores ni vendedores pudieran observar la calidad de los autos, tampoco habría problemas: se intercambiarían todos los autos a \$2.333.

Sin embargo, el supuesto más realista es que los vendedores conocen la calidad del auto, y los compradores no. En este caso, si el precio es menor que \$2.500 sólo los limones se intercambiarán. Sólo si el precio es mayor que \$2.500 querrán los poseedores de autos buenos venderlos. Pero en ese caso, la disposición a pagar de los compradores es de \$2.333 que es menor que \$2.500, por lo que no se intercambiarán los autos buenos.

Ejercicio 1 Supongamos que en una economía hay dos tipos de autos: los buenos y los malos (limones). Uno bueno, si se sabe que es bueno, vale \$3:000 para un comprador y \$2:500 para un vendedor. Asumiremos que para cada calidad de auto, hay más compradores que vendedores, por lo que el precio siempre dejará al comprador indiferente. Un limón, por su parte, vale \$2:000 para el comprador y \$1:000 para el vendedor. Se sabe que la probabilidad que un auto sea un limón es p. Suponga que los vendedores conocen su auto pero los compradores no.

Parte A. Encuentre el valor p^* tal que si $p > p^*$ entonces, en equilibrio sólo se intercambian limones.

Parte B. Encuentre el precio de equilibrio y los autos que se intercambian cuando $p > p^*$, y encuentre el precio de equilibrio y los autos que se intercambian cuando $p \leq p^*$. Investigue a ver si hay un equilibrio, o más.

El ejemplo original de Akerlof es el siguiente. Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $\frac{2}{3}z$ por el vendedor. La densidad de las calidades es uniforme en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. Típicamente esto se justifica diciendo que hay más compradores que vendedores en el mercado. El equilibrio es una "lista" $Z(p)$ de los autos que se intercambian en el equilibrio con el precio p, y un precio p tal que

$$p = E(z \mid z \in Z(p)) \tag{2.1}$$

(esto es asumiendo que los compradores no saben la calidad del auto). Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - \frac{2}{3}z$. Las preguntas típicas serán del tipo:

Determine el equilibrio cuando

I. Tanto compradores como vendedores conocen la calidad de cada auto (en este caso el equilibrio es un precio para cada calidad de auto, y una especificación de qué calidades se intercambian).

II. Ni compradores ni vendedores conocen la calidad de cada auto.

Determine, cuando los vendedores conocen la calidad del auto, pero los compradores no,

I. El precio de equilibrio, y el conjunto S de autos que no se intercambian.

II. La pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información, definida por

$$P = \int_S l(z) f(z) dz$$

donde S es como en la parte I y $l(z) = z - \frac{2}{3}z$.

El "punto" principal del tema limones, es que cuando varía el precio de mercado, varía el valor de los objetos que están a la venta. En el ejemplo de Akerlof, a medida que sube el precio (que se les paga a los vendedores en el mercado), sube el valor de los autos. Por eso, en la ecuación (2.1) se interpreta de la siguiente manera: del lado izquierdo, está p, que es lo que pagan los compradores; del lado derecho, está $E(z \mid z \in Z(p))$, que es el valor de los autos (para los compradores) cuando se paga un precio p. Como en general asumimos que hay muchos compradores, el equilibrio se da cuando lo que pagan los compradores es igual a lo que reciben (si pagaran menos que el valor de los autos, algún comprador que no lograra comprar un auto, ofrecería un centésimo más que el precio de mercado y obtendría algo de ganancia, mientras que quedándose "afuera" del mercado no gana nada). La forma como se resuelven estos problemas es:

1. para cada $p \geq 0$, nos preguntamos qué autos entran al mercado, y calculamos el valor para los vendedores de los autos que están en el mercado;

2. una vez que tenemos escrita esa función de p (que se llame algo complicado como $E(z \mid z \in Z(p))$ no cambia el hecho que es una función común y corriente de p), encontramos los "puntos fijos" de p : aquellos valores de p, para los cuales $p = E(z \mid z \in Z(p))$. Recordamos que un punto fijo de una función $f(\cdot)$ cualquiera, es un p tal que $p = f(p)$, y en este caso $f(p) = E(z \mid z \in Z(p))$.

En todos los casos que siguen, la pérdida de bienestar en el equilibrio se calcula respecto a lo que sería la asignación Pareto Óptima. La asignación PO corresponde a una situación de la que no se puede salir sin perjudicar a alguien. Una asignación PO require que cada auto se asignado a la persona que lo valora más, o que cada trabajador se asigne a la tarea en la que es más eficiente. Para encontrarla, en ningún caso hay que preocuparse si la asignación se puede conseguir (por ejemplo) con un mecanismo de mercado.

En los ejercicios veremos algunas formas distintas (generalmente más fáciles) de resolver estos problemas, pero la idea básica es la que acabamos de describir. Esta forma tiene además la ventaja de funcionar siempre.

En general, hay que seguir una serie de pasos sencillos para encontrar los equilibrios. Primero, encontrar la función de distribución F correspondiente a la densidad f de los tipos de autos o trabajadores o lo que sea. Luego, hay que calcular la inversa de la valuación de los vendedores para ver qué tipos de vendedores atrae cada precio. En tercer lugar, si los tipos de vendedores están acotados por arriba, hay que calcular cuál es el precio p_a más bajo que atrae a todos los vendedores (en el ejemplo de Akerlof sería $p_a = 1$, que atrae al tipo $z = \frac{3}{2}$; a partir de ese precio, si sube, no cambia la calidad promedio de los autos que entran al mercado); también hay que encontrar el precio p_b que atrae únicamente al tipo más bajo (en general, cuando los autos tienen una densidad, y no una distribución discreta, para ese precio no vale la regla de Bayes, pues la "masa" de autos que hay en el mercado es 0, y no se puede calcular la condicional). Luego, hay que calcular la densidad condicional para cada precio: en general, para precios $p \leq p_a$, será $\frac{f(z)}{F(v^{-1}(p))}$. En quinto lugar, hay que calcular la esperanza condicional (para $p_b < p \leq p_a$ será la esperanza con $z \leq v^{-1}(p)$ usando

la densidad condicional; para $p \geq p_a$ será $E(z)$; para $p = p_b$ será la calidad más baja de auto). Finalmente, hay que verificar si la recta de 45° se intersecta con esta esperanza condicional.

Ahora, algunos ejercicios.

Ejercicio 2 Deberes. Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in [0,1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua y estrictamente creciente con $v(z) \leq z$ para todo z. La densidad de las calidades es $f(z)$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores (es decir, el equilibrio se da cuando $p = E[z \mid v(z) \leq p]$). Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$.

Parte A. Determine el equilibrio cuando

I. Tanto compradores como vendedores conocen la calidad de cada auto (en este caso el equilibrio es un precio para cada calidad de auto, y una especificación de qué calidades se intercambian).

II. Ni compradores ni vendedores conocen la calidad de cada auto.

Parte B. Suponga que solamente el vendedor conoce la calidad del auto. Suponga que f es la uniforme en $[0,1]$ y que $v(z) = z^2$. Determine,

I. Cuáles son los equilibrios (si hay más de uno) y en cada caso, encuentre el conjunto S de autos que no se intercambian.

II. La pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información, definida por

$$P = \int_S l(z) f(z) dz$$

donde S es como en la parte I y $l(z) = z - v(z)$.

Ejercicio 3 En el mercado hay trabajadores cuyas productividades (si trabajan en una fábrica) varían entre 1 y 2. Es decir, los tipos θ pertenecen a $\Theta = [1,2]$. Suponga que los tipos se distribuyen de acuerdo a la densidad $f(\theta) = 1$ para $\theta \in \Theta$. Suponga que $r(\theta)$ es la "retribución" que reciben los trabajadores por trabajar, en vez de en una empresa, en su casa y que, $r(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$.

Parte A. Un equilibrio competitivo para esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \text{ y } w^* = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$$

Encuentre el o los equilibrios competitivos de esta economía.
Parte B. Encuentre la asignación Pareto Óptima de esta economía. ¿Es el equilibrio eficiente?

Ejercicio 4 En una economía hay autos cuyas valuaciones para los vendedores se distribuyen uniformemente entre $k \geq 0$ y $k + 4.000$. Los compradores valoran los autos a un 20% más que los vendedores. Encuentre el equilibrio (el precio, y los autos que se intercambian; ambos como función de k) cuando hay más compradores que vendedores. Hay dos casos posibles según el valor de k (encuentre el valor de k que separa los dos casos). Para el caso de k "pequeño" encuentre la pérdida de bienestar en el equilibrio.

Ejercicio 5 (de Amrish Patel). Considere un mercado de autos usados donde el vendedor tiene todo el poder de negociación, de tal manera que fija los precios (por supuesto, el vendedor decide si aceptarlo o no). Los valores y probabilidades de cada tipo de auto son

	Probabilidad	Valor Vendedor	Valor Comprador
Auto Bueno	$\frac{1}{3}$	3.000	4.000
Limón	$\frac{2}{3}$	500	1.000

Parte A. Encuentre los precios si hay información perfecta. Calcule el excedente total generado cuando hay 12.000 autos en el mercado.
Parte B. Encuentre el precio cuando hay información asimétrica, y sólo los vendedores conocen la calidad de los autos. ¿Cuáles son los costos de la información asimétrica?
Parte C. ¿Qué proporción de autos buenos debe haber para que haya un equilibrio eficiente? ¿Cómo será el equilibrio si hay suficientes autos buenos en el mercado?

Ejercicio 6 Las calidades de los autos son números $z \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z) = z^2$ por el vendedor. La densidad de las calidades es uniforme en $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores (es decir, el equilibrio se da cuando $p = E[z \mid v(z) \leq p]$). Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$. Suponga que solamente el vendedor conoce la calidad del auto y determinecuáles son los equilibrios (si hay más de uno).

Ejercicio 7 Cada vendedor tiene un auto de calidad $\theta \in [0, 1]$, y las calidades se distribuyen uniformememente. Las valuaciones de los compradores son θ, y hay más compradores que vendedores.

Parte A. Muestre que si las valuación de los vendedores es $\frac{\theta}{2}$, cualquier precio $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ es un equilibrio.
Parte B. Encuentre el o los equilibrios si la valuación del vendedor es θ^3.
Parte C. ¿Cuál o cuáles de los equilibrios de las Partes A y B son eficientes?

En el próximo ejercicio, hay un conjunto discreto de tipos de autos.

Ejercicio 8 Hay autos con un valor v que puede ser 10, 20 o 30, y hay una proporción de $\frac{1}{3}$ de cada tipo de auto. Los valores de esos autos para los compradores son $z(10) = 15$, $z(20) = 37$ y $z(30) = 47$. Los compradores no conocen el valor del auto, pero los vendedores sí. Hay más compradores que vendedores por lo que un equilibrio para esta economía es un precio p y un conjunto de autos $X(p)$ que se intercambia, tal que

$$p = E(z(v) \mid v \in X(p)) = E(z(v) \mid v \leq p). \tag{2.2}$$

Encuentre el o los equilibrios de esta economía.

Ejercicio 9 Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in [0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua y estrictamente creciente con $v(z) \leq z$ para todo z. La densidad de las calidades es $f(z)$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$.

Parte A. Determine el equilibrio cuando

I. Tanto compradores como vendedores conocen la calidad de cada auto (en este caso el equilibrio es un precio para cada calidad de auto, y una especificación de qué calidades se intercambian).

II. Ni compradores ni vendedores conocen la calidad de cada auto.

Parte B. Suponga que solamente el vendedor conoce la calidad del auto. Suponga que $f(z) = 2z$ y que $v(z) = z^2$. Determine,

I. El precio de equilibrio, y el conjunto S de autos que no se intercambian.

II. La pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información, definida por

$$P = \int_S l(z) f(z) dz$$

donde S es como en la parte I y $l(z) = z - v(z)$.

Ejercicio 10 Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in [0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua y estrictamente creciente con $v(z) \leq z$ para todo z. La densidad de las calidades es $f(z)$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$. El equilibrio se da cuando $p = E(z \mid v(z) \leq p)$.

Parte A. Suponga que solamente el vendedor conoce la calidad del auto. Suponga que $f(z) = 2 - 2z$ y que $v(z) = z - \frac{1}{3}$. Determine el precio de equilibrio, y el conjunto S de autos que no se intercambian.

Parte B. ¿Es la asignación de equilibrio Pareto Óptima? Eplique. Si no lo es, encuentre la pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información, definida por

$$P = \int_S l(z) f(z) dz$$

donde S es como en la parte A y $l(z) = z - v(z)$.

Ejercicio 11 Deberes. Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in [0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z) = 3z/4$ por el vendedor. La densidad de las calidades es $f(z) = 2z$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$. Suponga que solamente el vendedor conoce la calidad del auto. Determine, el precio de equilibrio.

Ejercicio 12 Deberes. En el mercado hay trabajadores cuyas productividades (si trabajan en una fábrica) varían entre 1 y $+\infty$. Es decir, los tipos θ pertenecen a $\Theta = [1, \infty)$. Suponga que los tipos se distribuyen de acuerdo a la densidad $f(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Suponga que $r(\theta)$ es la "retribución" que reciben los trabajadores por trabajar, en vez de en una empresa, en su casa y que $r(\theta) = \sqrt{\theta}$.

Parte A. Un equilibrio competitivo para esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \text{ y } w^* = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$$

Encuentre el o los equilibrios competitivos de esta economía.

Parte B. Encuentre la asignación Pareto Óptima de esta economía, y la pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información, definida por

$$P = \int_S l(\theta) f(\theta) d\theta$$

donde S es el conjunto trabajadores que no trabajan en la firma y $l(\theta) = \theta - r(\theta)$.

Ejercicio 13 Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in [0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en $u(z) = \frac{1+z}{2}$ por el comprador, y z por el vendedor. La densidad de las calidades es uniforme. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores (es decir, el equilibrio se da cuando $p = E(u(z) \mid z \leq p)$). Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $\frac{1+z}{2} - p$, y la del vendedor $p - z$.

Parte A. Determine el equilibrio cuando los vendedores conocen la calidad del auto, y los compradores no.
Parte B. Determine la asignacion eficiente (Pareto Óptima).
Parte C. Determine la pérdida de bienestar en el equilibrio.

Ejercicio 14 Considere el siguiente mercado para autos usados. La mitad de los autos de una economía son de calidad $z = 1$, y la otra mitad se distribuyen uniformemente entre 0 y 1. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $\frac{2}{3}z$ por el vendedor. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. El equilibrio es una "lista" $Z(p)$ de los autos que se intercambian en el equilibrio con el precio p, y un precio p tal que

$$p = E(z \mid z \in Z(p)).$$

Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - \frac{2}{3}z$. Encuentre el, o los, equilibrios de esta economía.

Ejercicio 15 Hay autos de calidades $\theta \in [0, 1]$, que se distribuyen de acuerdo a $f(\theta) = 2\theta$. Hay más compradores que vendedores.

Parte A. Encuentre el, o los equilibrios cuando la utilidad de los vendedores es $p - \frac{\theta}{2}$ cuando venden.
Parte B. Encuentre el o los equilibrios cuando la utilidad de los vendedores cuando venden es $p - \theta^3$.
Parte C. ¿Son los equilibrios de las Partes A y B eficientes?

El siguiente ejercicio es una versión fácil del paper "Corporate Financing and Investment Decisions When firms Have Information that Investors Do Not Have" de Stewart Myers y Nicholas Majluf, del *Journal of Financial Economics*, 1984. Ese trabajo muestra por qué en muchas ocasiones las firmas eligen financiarse internamente, o dejar pasar oportunidades rentables de inversión (si la alternativa es levantar capital a través de emisión de acciones). Como la deuda no sufre problemas de información asimétrica (en este modelo), tomar deuda también es mejor que emitir acciones. El mecanismo central es que cuando el valor de la firma es desconocido para los inversores, las firmas buenas terminan siendo sub-valuadas, por lo que no les conviene emitir acciones.

Ejercicio 16 Hay una firma cuyos activos pueden valer x_a o x_b con $x_b < x_a$; la proporción a priori de firmas x_a es p. El dueño de la firma tiene acceso a un proyecto que cuesta I, y que da retorno seguro $r > I$, pero debe conseguir financiamiento externo (de $\$I$) para financiar el proyecto, y no tiene acceso a deuda; debe financiarlo entregando a cambio parte de la compañía. El mercado financiero es competitivo (las ganancias van a parar a los empresarios), por lo que un equilibrio es una porción α de la firma (de su valor de liquidación $x + r$) y un conjunto de firmas $X(\alpha)$ que participan en el intercambio (digamos, las tipo x_b, o las x_b y la mitad de las x_a, etc) tal que

$$I = \alpha \left(E \left(x \mid x \in X(\alpha) \right) + r \right).$$

Resuelva el equilibrio cuando $x_b = 0$, $x_a = 200$, $I = 30$, $r = 50$. Encuentre el p^* tal que si $p < p^*$ entonces sólo las firmas malas x_b invierten.

El próximo ejercicio es una versión del anterior, pero con un continuo de tipos de firmas.

Ejercicio 17 Hay una firma cuyos activos pueden valer x, con x que se distribuye uniforme entre 100 y 800. El dueño de la firma tiene acceso a un proyecto que cuesta I, y que da retorno seguro $r > I$, pero debe conseguir financiamiento externo (de $\$I$) para financiar el proyecto, y no tiene acceso a deuda; debe financiarlo entregando a cambio parte de la compañía. El mercado financiero es competitivo (las ganancias van a parar a los empresarios), por lo que un equilibrio es una porción α de la firma (de su valor de liquidación $x + r$) y un conjunto de firmas $X(\alpha)$ que participan en el intercambio (digamos, todas las firmas menores que un cierto x_m, la firma máxima que quiere participar; o algún otro conjunto de firmas) tal que

$$I = \alpha \left(E \left(x \mid x \in X(\alpha) \right) + r \right).$$

Resuelva el equilibrio cuando $I = 30$, $r = 50$.

Ejercicio 18 Hay una firma cuyos activos pueden valer x, con x que se distribuye con una densidad $f(x) = p\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$ entre 0 y 1, para algún $p \in [-2, 2]$. El dueño de la firma tiene acceso a un proyecto que cuesta I, y que da retorno seguro $r > I$, pero debe conseguir financiamiento externo (de $\$I$) para financiar el proyecto, y no tiene acceso a deuda; debe financiarlo entregando a cambio parte de la compañía. El mercado financiero es competitivo (las ganancias van a parar a los empresarios), por lo que un equilibrio es una porción α de la firma (de su valor de liquidación $x + r$) y un conjunto de firmas $X(\alpha)$ que participan en el intercambio (digamos, todas las firmas menores que un cierto x_m, la firma máxima que quiere participar; o algún otro conjunto de firmas) tal que

$$I = \alpha \left(E \left(x \mid x \in X(\alpha) \right) + r \right).$$

Resuelva el equilibrio cuando $I = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$.

Parte A. Encuentre la función de distribución acumulada F. Encuentre, para cada $y \in (0, 1)$, la densidad condicional $f(x \mid x \leq y)$. Encuentre para cada $y \leq 1$, $E(x \mid x \leq y)$. Verifique que si $p = 0$, $E(x \mid x \leq y) = \frac{y}{2}$ y que si $p = 2$, $E(x \mid x \leq y) = \frac{2}{3}y$.
Parte B. Para cada α que la firma tendría que entregar para conseguir I, encuentre el conjunto de firmas que quiere participar. Determine también el $\overline{\alpha}$ tal que si $\alpha \leq \overline{\alpha}$ entonces todas las firmas participan. Calcule, $E(x \mid x \in X(\alpha))$.
Parte C. Encuentre el α de equilibrio. Verifique que para $p \leq -1$, la solución es con $\alpha \geq \overline{\alpha}$, y que con $p \geq -1$, todos participan.

Ejercicio 19 En el mercado hay trabajadores cuyas productividades (si trabajan en una fábrica) varían entre 1 y 2. Es decir, los tipos θ pertenecen a $\Theta = [1, 2]$. Suponga que los tipos se distribuyen uniformemente

en Θ. Suponga que $r(\theta)$ es la "retribución" que reciben los trabajadores por trabajar, en vez de en una empresa, en su casa y que

$$r(\theta) = \begin{cases} 3(\theta - 1) & \text{si } \theta \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \text{si } \theta \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Parte A. Un equilibrio competitivo para esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\}$$

y

$$w^* = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$$

Encuentre el o los equilibrios competitivos de esta economía. Una manera "fácil" de hacerlo es graficar $r(x)$ y $E[\theta \mid \theta \leq x]$, y pensar, en esa gráfica, cuál es, o son, los equilibrios.

Parte B. Si se interpreta $r(\theta)$ como la productividad del trabajador en su casa, y θ como la productividad en la empresa, encuentre la única asignación Pareto Óptima de esta economía. Encuentre la única asignación Pareto Óptima si $r(\theta) = 3(\theta - 1)$ para todo θ.

Parte C. Asuma que r es estrictamente creciente, y continua y que $\Theta = \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$. Asuma que existe un $\theta^* \in \left(\underline{\theta}, \overline{\theta}\right)$ tal que $r(\theta) \geq \theta$ si y sólo si $\theta \geq \theta^*$. Sea $f(\theta)$ la densidad de trabajadores de tipo θ, y asuma que $f(\theta) > 0$ para todo θ.

I. Demuestre que $w^* = \theta^*$ no puede ser parte de un equilibrio competitivo, pues las firmas perderían dinero.

II. Demuestre que por ese mismo motivo, $w^* > \theta^*$ tampoco puede ser parte de un equilibrio.

III. Usando I y II, demuestre que ningún equilibrio competitivo es Pareto Óptimo.

Ejercicio 20 Deberes. Este ejercicio pretende mostrar que el hecho que los equilibrios competitivos no sean Pareto Óptimos aparece, no por el hecho que hay selección adversa, sino que alcanza con que haya información asimétrica. En particular, sea $r(\cdot)$ continua y estrictamente decreciente. Lo que nos dice esto es que no hay selección adversa, sino lo opuesto, selección positiva: para cada sueldo, son los trabajadores buenos, y no los malos, aquellos que aceptan empleo. Sea $f(\theta)$ la densidad de trabajadores de tipo θ, con $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$. Recuerde que un equilibrio competitivo en esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\}$$

y

$$w^* = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$$

Parte A Muestre que para cada sueldo son los trabajadores más calificados aquellos que aceptan empleo. Por esto, cuidado al hacer el resto del ejercicio: ahora lo de graficar en un eje $E[\theta \mid \theta \leq x]$ y $r(x)$ ya no camina para encontrar los equilibrios. En todo caso sería algo tipo $E[\theta \mid \theta \geq x]$.

Parte B. Suponga que existe un $\widehat{\theta}$ tal que $r(\theta) \leq \theta$ si y sólo si $\theta \geq \widehat{\theta}$. Demuestre que cualquier equilibrio competitivo con una cantidad estrictamente positiva de empleo (es decir $\Theta^* \neq \left\{\overline{\theta}\right\}$) es tal que hay demasiado empleo, relativo a lo que sería Pareto Óptimo. Para demostrar eso, siga los siguientes pasos.

I Demuestre que $w = \widehat{\theta}$ no puede ser parte de un equilibrio, pues habría beneficios positivos.

II Demuestre que $w < \widehat{\theta}$ no puede ser parte de un equilibrio, pues habría beneficios positivos.

III Usando I y II demuestre que en cualquier equilibrio competitivo hay más empleo que en la única asignación Pareto Óptima.

Ejercicio 21 Ley de Gresham. En una economía hay un único bien y dos tipos de monedas, las buenas θ_b y las malas θ_m, para $\theta_b > \theta_m$. La proporción de monedas buenas es $q \in (0,1)$. El valor, como monedas, es de $\frac{1}{p}$ bienes para ambos tipos (es decir, dado el nivel de precios p, se precisan p monedas para comprar un bien). El valor de la moneda θ_i es θ_i si no se usan como monedas (por ejemplo, si se funden, y se vende el contenido metálico). Una vez que un vendedor pone el precio del bien que quiere vender, está obligado a aceptar cualquier moneda que le traigan; por ejemplo, si quiero vender un caramelo en \$1, debo aceptar como pago una moneda de \$1, o un "combo" de dos monedas de \$0.5. Un supuesto alternativo, más en linea con el tema que estamos viendo y que llevaría a los mismos resultados, sería que sólo el poseedor de una moneda sabe si la misma es buena o mala.

Un equilibrio para esta economía es un nivel de precios p, y un conjunto Θ^* de monedas que se intercambian a ese precio, tales que

$$\frac{1}{p} = E\left(\theta \mid \theta \in \Theta^*\right).$$

Es decir, el que vende un bien no tiene excedente. Encuentre el equilibrio de esta economía. Interprételo.

Ejercicio 22 En el mercado hay trabajadores cuyas productividades varían entre a y $a+1$. Es decir, los tipos θ pertenecen a $\Theta = [a, a+1]$. Suponga que los tipos se distribuyen uniformemente en Θ. Un trabajador con productividad θ en la fábrica, puede ganar $r(\theta) = (1-d)\,\theta$ trabajando en su casa. Asuma que $d < \frac{1}{2(a+1)}$. Las firmas pagan un salario igual a la productividad media de los trabajadores empleados, pues no puede observar las calidades individuales.

Parte A. Un equilibrio competitivo para esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \text{ y } \; w^* = E\left[\theta \mid \theta \in \Theta^*\right].$$

Demuestre que para cualquier sueldo w que sea parte de un equilibrio, si un tipo θ no pertenece a Θ^*, entonces ningún tipo $\theta' > \theta$ pertenece a Θ^*.

Parte B. Grafique, con w en el eje de las abcisas $E\left[\theta \mid (1-d)\,\theta \leq w\right]$ y w. Encuentre el o los equilibrios competitivos de esta economía.

Parte C. Obtenga una expresión para la proporción de los empleados como función de a y d. Demuestre que en el límite cuando d tiende a 0, sólo los peores tipos están empleados. Cuando d se acerca a 0, el problema de la selección adversa ¿es grave económicamente?

Ejercicio 23 El Plan de Reforma de la Salud de Bush. Hay dos tipos de gente en el mundo: los que tienen enfermedades "graves" ($\theta_G = 3.000$) y los que se agarran sólo enfermedades leves ($\theta_L = 1.000$). La proporción en la población de cada tipo es $\frac{1}{2}$. Los tipos θ representan el costo médico anual de tratar las enfermedades, si se tratan en forma eficiente. El sistema médico actual sólo cubre gastos anuales hasta \$1.500, pero para todo el mundo. Como el sistema es medianamente ineficiente, eso sólo cubre lo que el sistema privado podría cubrir con \$1.000 (según analistas de la Casa Blanca).

Bush dijo "Propongo: dar $2.000 por afiliado en vouchers para que la gente se pase al sistema privado; cerrar Medicaid (el sistema actual); y que si una compañía acepta a un asegurado, debe proveer seguro total. Así, todo el mundo tendrá seguro total." ¿Es posible implementar ese plan?

Parte A. Si los tipos son observables, ¿ Es posible implementar ese plan? Explique en no más de 4 renglones (no leo el resto)

Parte B. Si los tipos no son observables, ¿Es posible implementar ese plan? Explique en no más de 4 renglones (no leo el resto)

Ejercicio 24 Deberes. Racionamiento de Crédito. Suponga un inversor que puede elegir entre dos proyectos: A y B. Ambos proyectos requieren una inversión de I. El pago (retorno) x_j $j = A, B$ ocurre con probabilidad p_j y de lo contrario, el proyecto rinde 0.

Suponga que el retorno esperado de A es mayor que el de B, mayor que I ($p_A x_A > p_B x_B > I$) y que la probabilidad de que A sea exitoso es mayor que la de B (ambas estrictamente entre 0 y 1). Asuma asimismo que x_B es mayor estricto que x_A. El inversor debe pedir prestado un monto I a un banco. Suponga también que el interés bruto R se paga sólo si el proyecto es exitoso. El pago esperado del inversor con proyecto j es: $U_j(R) = p_j(x_j - R)$ y el beneficio esperado del banco es: $\pi_j = p_j R - I$.
Parte A. Suponga que R no puede ser contingente en el tipo de proyecto. Defina R^* tal que el inversor elige el proyecto A si $R < R^*$. Encuentre R^*.
Parte B. Suponga que el banco es un monopolista y que hay un solo inversor, ¿cuál es la política de tasa de interés óptima para el banco?
Parte C. Suponga ahora que hay N inversores idénticos y que el banco tiene un monto máximo para prestar de L, con $I < L < NI$. Discuta porqué y cuando puede aparecer el racionamiento de crédito (la demanda de créditos excede a la oferta).

Ejercicio 25 Un empresario no tiene dinero para financiar un proyecto con costo I. El proyecto tiene dos retornos posibles: R si es exitoso y 0 si fracasa. Tanto deudor como acreedor son neutrales al riesgo, el deudor tiene responsabilidad limitada (si el proyecto rinde 0, el banco no puede cobrarle al deudor nada) y la tasa de interés es cero. El deudor puede ser bueno (θ_b), donde la probabilidad de éxito de su proyecto es p_b, o malo (θ_m) con probabilidad de éxito p_m; $p_b > p_m$. Además, se cumple que $p_b R > I$.

El tipo del deudor es información privada, el mercado de capitales es competitivo y demanda una tasa de retorno esperada de 0 y asigna probabilidades a cada tipo de $P(\theta = \theta_b) = \alpha$.
Parte A. Calcule π la probabilidad a priori de éxito del inversor (antes de saber si es bueno o malo).
Parte B. Calcule los valores de retorno (en dinero, no en tasa) $\left\{R_d^b, R_d^m\right\}$ que debe obtener cada deudor en caso de éxito, si el beneficio esperado del banco es 0, y el banco conociera el tipo de cada deudor (Pista: en el caso del deudor malo debe considerar dos casos distintos). ¿Cómo es R_d^b respecto de R_d^m?
Parte C. Supongamos ahora que hay información asimétrica, y que el banco dijera: "los empresarios con proyectos malos, por favor firmen este papel que dice que si el proyecto es exitoso, se pueden quedar con R_d^m"; "los empresarios con proyectos buenos, por favor firmen este papel que dice que si el proyecto es exitoso, se pueden quedar con R_d^b". Si el banco hace eso, pero no conoce el tipo de deudor, y utiliza los valores de R_d^b y R_d^m obtenidos en la Parte B, ¿Ganará plata, empatará, o perderá plata?
Parte D. Calcule el beneficio del banco cuando existe información asimétrica y debe cobrar la misma tasa de interés a los deudores (asumiendo que ambos tipos de empresarios tomarían la deuda). Llame R_d al único retorno para el deudor que se puede especificar en un contrato.

Parte E. Asuma que $p^m R < I$ y encuentre un valor de α, llamado α^*, tal que si $\alpha < \alpha^*$ entonces no existe crédito para ningún valor de R_d. Por supuesto, α^* debe estar sólo en función de los parámetros del modelo (es decir, no podría estar en función de R_d, porque si R_d no está especificada, no podríamos saber el valor de α^*, a menos que supiéramos el de R_d).
Parte F. Decimos que hay sobre inversión si se ejecutan (algunos) proyectos que no son rentables en términos esperados ¿Para qué valores de α, p^b, p^m, R e I hay sobre inversión? (encuentre dos ecuaciones que relacionen esos parámetros, y que si se cumplen, hay sobre inversión).
Parte G. ¿Bajo que condiciones existe subsidio cruzado entre proyectos? ¿En otras palabras, bajo qué condiciones el banco gana plata con los proyectos buenos y pierde con los malos?

Ejercicio 26 Kevin Rock "Why new issues are underpriced," Journal of Financial Economics 1986. Este modelo se usó para explicar por qué los IPO (Initial Public Offerings) de empresas que estaban más "over-booked" subían de precio luego de la venta.

Está a la venta un proyecto que rendirá X, para $X \in [0,1]$, con una densidad $f(X)$, con esperanza $E(X)$. Hay $n+1$ potenciales inversores. El inversor 1, sabe exactamente cuánto será el retorno, y los otros n no saben nada. El precio de venta es un número p, tal dejará a los inversores no informados con un retorno de 0. El proceso de venta es que cada inversor decide si participar o no, por el total de su capital: si participan, dicen "quiero participar" y cuando todos han presentado sus ofertas (simultáneamente), el vendedor cuenta la cantidad de ofertas, digamos que hubo m, y le entrega a cada uno una porción $\frac{1}{m}$ de la firma, al precio $\frac{p}{m}$. Cada inversor obtendrá luego una porción $\frac{1}{m}$ del retorno X del proyecto.

Parte A. Escriba la estrategia de participación del inversor informado:

$$d(p,X) = \begin{cases} \text{participar} & \text{si } ? \geq ? \\ \text{No participar} & \text{si } ? < ? \end{cases}.$$

Parte B. Dada la estrategia de participación del inveror informado, escriba los retornos de los inversores no informados, si participaron $m < n$ de ellos en la venta (es la suma de dos integrales).

Parte C. Igualando los retornos a 0, encuentre el precio de venta de equilibrio cuando f es uniforme.

Parte D. Muestre que el precio es siempre menor que $E(X)$ (hágalo en general; si no puede, hágalo para la uniforme). La razón es que cuando el precio es "demasiado alto" (porque $X < p$) los inversores no informados se quedan con toda la pérdida, mientras que cuando el proyecto da ganancia, la deben compartir con el informado. La forma de hacer que los no informados participen, es que la firma se venda con un descuento. Se puede mostrar también que la diferencia entre ambos es decreciente en m.

Parte E. Muestre que el valor esperado de la firma, cuando se sabe que no participó el informado cae luego de la venta. Muestre que el valor esperado de la firma sube cuando se sabe que participó el informado.

Ejercicio 27 Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos son números $z \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Un auto de calidad z es valuado en $k+z$ por el comprador (para algún $k \geq 0$), y $\frac{2}{3}z$ por el vendedor. La densidad de las calidades es uniforme en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores. El equilibrio es una "lista" $Z(p)$ de los autos que se intercambian en el equilibrio con el precio p, y un precio p tal que

$$p = E(k+z \mid z \in Z(p))$$

Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $k+z-p$, y la del vendedor $p - \frac{2}{3}z$. Determine el o los equilibrios como función de k.

Ejercicio 28 En clase se asumió que había más compradores que vendedores, de tal forma que las ganancias del intercambio iban a parar a los vendedores. Tomemos ahora una situación en la cual la "cantidad" de compradores es 1, mientras que hay una cantidad $1+\lambda$ de vendedores, para $\lambda > 0$. Las calidades de los autos se distribuyen uniformemente en $[0,1]$. Así por ejemplo, la masa total de autos entre 0 y $1/2$ será $(1+\lambda)/2$. Un auto de calidad q vale q para un vendedor, y $3q/2$ para un comprador. Si un auto de calidad q se intercambia a un precio p, el vendedor obtiene una utilidad de p (y pierde q) y el comprador de $\frac{3}{2}q - p$.

Parte A. Encuentre el equilibrio si la calidad q es observable. Debe especificar un conjunto de autos que se intercambian y un precio $p(q)$ para cada auto de calidad q que cumpla que: cada comprador maximiza su utilidad comprando el auto que compra (y no otro, o ninguno); cada vendedor está más contento vendiendo su auto que quedándoselo; la cantidad total de autos vendidos es igual a la cantidad de autos comprados. Como primer punto, establezca que si se vende un auto, se venderán todos los que son mejores; en segundo lugar, establezca que todos los compradores comprarán un auto. Con estos dos hechos, encuentre el conjunto de autos que se intercambiarán. En tercer lugar, argumente que el excedente de todos los compradores debe ser el mismo, y encuentre el precio (uno para cada calidad) que hace que eso sea así; para algún k, todos los compradores obtendrán k. Finalmente, encuentre dos cotas para k : una cota superior, dada porque los vendedores quieren vender; una inferior que diga que a los compradores les sirva comprar los autos que postulamos en equilibrio, y no alguno de los que no se transan.
Parte B. ¿Es eficiente el equilibrio de la Parte A?

Parte C. Encuentre el equilibrio si los compradores no conocen la calidad, pero saben que se distribuye uniformemente en $[0,1]$.

Ejercicio 29 En el mercado hay trabajadores cuyas productividades (si trabajan en una fábrica) varían entre 0 y 1. Es decir, los tipos θ pertenecen a $\Theta = [0,1]$. Suponga que los tipos se distribuyen de acuerdo a la densidad $f(\theta) = 2\theta$. Suponga que $r(\theta)$ es la "retribución" que reciben los trabajadores por trabajar, en vez de en una empresa, en su casa y que, para algún $k \in \mathbf{R}$,

$$r(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \leq \frac{1}{2} \\ k & \theta > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Parte A. Un equilibrio competitivo para esta economía es un par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \text{ y } w^* = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$$

Encuentre los equilibrios competitivos de esta economía cuando $k = 1$ (hay 2).

Parte B. Encuentre la asignación Pareto Óptima de esta economía. Si el equilibrio no es eficiente, encuentre la pérdida de bienestar P debida a la asimetría de información.

Parte C. Repita las Partes A y B con $k = 3/5$ (son 4 equilibrios). Cuando calcule la pérdida de bienestar, tenga cuidado: la pérdida es

$$P = \int_0^1 l(\theta) f(\theta) d\theta$$

donde $l(\theta)$ es 0 si el trabajador está asignado "donde debería", y es la diferencia entre lo que genera en el equilibrio y lo que generaría en la asignación Pareto óptima, en caso contrario.

Ejercicio 30 Deberes. Hay el doble de compradores que de vendedores de autos usados. Cada vendedor posee un auto y si se queda con él, recibe un beneficio de q, donde q es la calidad del auto. Los compradores no poseen un auto, y si compran uno, reciben un beneficio de $q+\alpha$, para $\alpha > 0$. Los vendedores conocen q, y los compradores saben que la calidad está uniformemente distribuida entre 0 y 1 (para cada $q \in [0,1]$ hay un vendedor con un auto de calidad q).

Parte A. Caracterice (describa completamente) el equilibrio para cada α, y muestre que para cada α en equilibrio siempre hay algo de comercio. Encuentre el mínimo valor de α, α^*, tal que si $\alpha > \alpha^*$, en el único equilibrio competitivo todos los vendedores venden su auto.

Suponga ahora que hay dos tipos de vendedores: para cada auto de calidad q, con probabilidad 1/2, la utilidad del vendedor es (alta) como antes, q; con probabilidad 1/2, si el vendedor se queda con un auto de q, entonces obtiene una utilidad (baja) de $q/2$. Ambos tipos de vendedores reciben un beneficio de p si venden su auto a un precio p.

Parte B. Asuma que los compradores no pueden distinguir estos tipos de vendedores y caracterice el equilibrio. Para ello,
i. Suponga que $p \leq \frac{1}{2}$ y calcule la proporción de autos que se comercializan (como función de p). Haga lo mismo para $p \geq \frac{1}{2}$.
ii. Suponga que $p \leq \frac{1}{2}$, y calcule (usando Bayes) la probabilidad que un cierto vendedor sea de tipo alto. Haga lo mismo para $p \geq \frac{1}{2}$.
iii. Suponga que $p \leq \frac{1}{2}$, y calcule el valor esperado de la calidad: condicional a p, y a que el individuo es de tipo alto; condicional a p, y a que el individuo es de tipo bajo. Haga lo mismo para $p \geq \frac{1}{2}$.

Parte C. Asuma que los compradores pueden distinguir estos tipos de vendedores y construya un equilibrio con precios distintos para ambos tipos de vendedores.

Ejercicio 31 De Karel Mertens. Deberes. Un grupo de 200 personas dueños de autos buscan venderlo. Cada auto tiene una calidad diferente θ, que sólo es observada por el dueño del auto. La calidad θ se distribuye uniformemente en el intervalo [0, 1]. Los dueños de autos están dispuestos a vender si p, el precio de mercado de los autos, es tal que $p > \theta$. Existen 100 compradores de tipo A, que valoran un auto de calidad esperada $\hat{\theta}$ a $2\hat{\theta}$, y 100 compradores de tipo B que valoran cada auto en $\frac{3}{2}\hat{\theta}$.

Parte A. Halle la calidad promedio de los autos ofertados como función del precio.
Parte B. Especifique la demanda por autos.
Parte C. ¿Existe algún precio al que exista comercio? ¿Cuántos son los autos transados y cuál es la calidad promedio?

Ejercicio 32 Hay más compradores que vendedores de autos. Los autos tienen calidades que se distribuyen uniformemente en $[0,1]$. Cada auto pertenece, con igual probabilidad, a uno de dos tipos de vendedores; los vendedores altos, valoran un auto de calidad z en z, mientras que los bajos valoran un auto de calidad z en cz para $1 > c$. Un comprador valora un auto de calidad z en $\frac{3}{2}z$. Un equilibrio para esta economía es un triplete $\left[p, Z^a(p), Z^b(p)\right]$ donde p es el precio de los autos, $Z^a(p)$ es el conjunto de autos que intercambian los tipos altos, y $Z^b(p)$ es el conjunto de autos que intercambian los tipos bajos, y

$$p = E\left(\frac{3}{2}z \mid z \text{ se vende a un precio } p\right).$$

La probabilidad condicional en "dado que z se vende a un precio p" sale de la regla de Bayes: hay que condicionar en que $z \in Z^a(p)$ o $z \in Z^b(p)$ con probabilidades deducidas de Bayes.

Parte A. Encuentre, para cada $p \leq c$, cuáles autos vende cada tipo de vendedor.
Parte B. Para cada $p \leq c$ encuentre la probabilidad de que un auto que se ofrece para ser vendido sea de un vendedor de tipo a (y la probabilidad de que sea de un tipo b).
Parte C. Encuentre, para cada $p \leq c$: el valor esperado de la calidad de un auto, condicional a que el que lo vende sea de un tipo a; el valor esperado de la calidad de un auto, condicional a que el que lo vende sea de un tipo b.
Parte D. Encuentre, para cada precio $p \leq c$, el valor esperado de la calidad del auto (debe usar las partes anteriores!).
Parte E. Repita las Partes A-E con $p > c$. Luego, encuentre el precio de equilibrio, asumiendo que $c = 2/3$.
Parte F. Encuentre el, o los equilibrios, cuando $c = 1/4$.

Ejercicio 33 Considere el siguiente mercado para autos usados. Las calidades de los autos se distribuyen uniformemente en $[0, 1]$. Un auto de calidad z es valuado en z por el comprador, y $v(z) = -z(z-1)$ por el vendedor. Suponga que todas las ganancias de un intercambio van a parar siempre a los vendedores (es decir, el equilibrio se da cuando $p = E[z \mid v(z) \leq p]$). Si un auto de calidad z se intercambia a un precio p, la ganancia de utilidad del comprador es $z - p$, y la del vendedor $p - v(z)$.

Parte A. Encuentre el o los equilibrios.

Parte B. Repita la Parte A con $v(z) = -z(z-a)$ para $a \geq 1$.

Ejercicio 34 La firma 1 es la única productora de un bien intermedio que precisa la firma 2 para producir. La calidad del producto es s, y esa calidad es conocida por la firma 1; a priori, la firma 2 cree que se distribuye uniformemente en $[0, S]$ (y la firma 1 conoce esa creencia). La firma 1, si se queda con el bien, obtiene una utilidad de $\theta_1 s$, y si lo vende a un precio p, obtiene una utilidad de p. La firma 2 valora un bien de calidad s, si lo compra a un precio p en $\theta_2 s - p$. ¿Hay algún precio $p^* > 0$ al cual hay intercambio si $\theta_2 < 2\theta_1$?

Ejercicio 35 Deberes. El Sr. 1 tiene un activo que pagará una cantidad incierta $c \in [0, 1]$ dentro de un año. El Sr. 2 está pensando en comprarlo, y tanto al Sr. 1 como al Sr. 2 sólo les interesa cuánto pagará el activo dentro de un año. Cada uno tiene información privada sobre cuánto será el pago. Asuma que las distribuciones de las señales son tales que señales mayores indican un mayor c y asuma también que si el Sr.1 tiene una señal s_1 y sabe que la del Sr.2 es mayor que un cierto s_* entonces $E(c \mid s_1; \widetilde{s}_2 \geq s_*) > E(c \mid s_1; s_*)$ (y asuma lo simétrico con $s_1 \leq s^*$). Imagine que la forma de intercambiar el activo es que un tercero dice un precio p, y ambos deben decir "si" o "no", y que el activo se intercambia si y sólo si ambos dicen "si". Muestre que la probabilidad de que haya intercambio en un equilibrio es 0. Pista: recuerde que para cada p que se anuncia, un equilibrio es un par de números, s^* para el Sr. 1 y s_* para el Sr. 2, tales que las estrategias "vendo si y sólo si $s_1 \leq s^*$" para el Sr. 1 y "compro si y sólo si $s_2 \geq s_*$" para el Sr. 2 son óptimas sabiendo la estrategia que sigue el otro.

El siguiente ejercicio desarrolla el modelo de Kyle, Econometrica 1985. El ejercicio anterior muestra que bajo ciertas condiciones (en particular, si las partes a un intercambio son racionales, y saben como funciona el modelo) no habrá intercambio. Kyle desarrolló un modelo sencillo, en el cual la presencia de gente que hace trades "porque sí" (porque lo necesitan, digamos) ayuda a que dos partes racionales participen de un intercambio.

Ejercicio 36 Hay "noise traders" que ponen órdenes de compra de u (de compra si $u > 0$, o de venta si $u < 0$). El valor de u se distribuye $N(0, \sigma^2)$. Hay un inversor informado, que conoce el valor real de

liquidación de una acción. El valor real conocido por el inversor informado es v (digamos: mañana la acción valdrá v) pero a priori sólo se sabe que $\widetilde{v} \sim N\left(m, s^2\right)$ (y que v es independiente de u). El inversor debe poner una orden de compra (o venta) x, sin saber el precio, ni la orden u de los noise traders. Lo único que sabe, es la regla seguida por el market maker: el market maker observa la demanda total $(y = x + u)$ y fija un precio que le da beneficio 0. La regla seguida por el inversor informado, su $x(v)$, debe maximizar sus beneficios condicional a la regla del market maker.

En lo que sigue, mostraremos que hay estrategias que constituyen un equilibrio: el insider maximiza beneficios sabiendo $p(y)$ y $p(y)$ da beneficio esperado 0 al market maker, sabiendo $x(v)$. Debemos encontrar números b y c tales que las siguientes estrategias consituyen un equilibrio:

$$x(v) = b(v - m) \quad \text{y} \quad p(y) = m + cy.$$

Parte A. Supongamos que para una variable $\widetilde{w} \sim N(n, h)$, sabemos que una vez que se realice un valor w, podremos observar una señal ruidosa de w, digamos $\widetilde{z} = w + \widetilde{\varepsilon}$, con $\widetilde{\varepsilon} \sim N(0, t)$. Muestre que la distribución de $\widetilde{w} \mid z$ es Normal $N\left(\frac{t}{h+t}n + \frac{h}{h+t}z, \frac{th}{h+t}\right)$. En particular, la esperanza de $\widetilde{w}$ dado que la señal ruidosa $\widetilde{z}$ tomó el valor $w + \varepsilon = z$, es

$$E(\widetilde{w} \mid w + \varepsilon = z) = \frac{t}{h+t}n + \frac{h}{h+t}z. \tag{2.3}$$

Es decir, la esperanza de $\widetilde{w}$ será un promedio ponderado de la media de $\widetilde{w}$ y de la realización de la señal. Los coeficientes también tienen sentido: si la varianza del ruido $\widetilde{\varepsilon}$, que es t, fuera 0, querría decir que la señal z es completamente informativa sobre w, y sólo deberíamos prestarle atención a z, y no a la creencia a priori sobre $\widetilde{w}$ (que se refleja en n). Si por el contrario, la varianza de $\widetilde{w}$ fuera 0, sabríamos que la realización de $\widetilde{w}$ sería siempre m, y si nos preguntan cuánto es el valor esperado de $\widetilde{w}$ sabiendo que la señal ruidosa fue z, diremos: me importa poco el valor de z, yo se que $\widetilde{w} = m$.

La forma de acordarse de la expresión de la varianza, es la siguiente: llamemos precisión al inverso de la varianza; la distribución de $\widetilde{w} \mid z$ será más precisa que la distribución de w y que la de z; en particular, la precisión de $\widetilde{w} \mid z$ será la suma de las precisiones. Llamando v a la varianza de $\widetilde{w} \mid z$, tenemos

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{h} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow v = \frac{th}{h+t}.$$

Parte B. Suponga que $p(y) = d + cy$. Escriba los beneficios esperados del insider de poner una orden x, cuando conoce la regla $p(y) = d + cy$. ¿Cuál es el x que maximiza sus beneficios? La ecuación para el x óptimo es de la forma $x(v) = a + bv$ con un valor para a como función de d y c, y un valor para b como función de c.

Parte C. En el equilibrio, debemos tener que el market maker tiene beneficio 0, o lo que es lo mismo,

$$p(y) = E(\widetilde{v} \mid x(v) + u = y) \Leftrightarrow d + cy = E(\widetilde{v} \mid a + bv + u = y) = E\left(\widetilde{v} \mid v + \frac{u}{b} = \frac{y - a}{b}\right). \tag{2.4}$$

De esta expresión, obtenga el coeficiente c como función de b, s^2 y σ^2, y el coeficiente d como función de m, b, c y a (o en su defecto, sustituyendo c, como función de m, b, a, s^2 y σ^2).

Parte D. De las 4 expresiones de las Partes B y C (una para a y otra para b, de la Parte B; una para c y otra para d de la Parte C), obtenga a, b, c y d como función de los parámetros del modelo. Verifique que , $a = -\frac{\sigma m}{s}$, $b = \frac{\sigma}{s}$, $c = \frac{s}{2\sigma}$ y $d = m$, o

$$\begin{aligned} x(v) &= a + bv = -\frac{\sigma m}{s} + \frac{\sigma}{s}v = \frac{\sigma}{s}(v - m) \\ p(y) &= d + cy = m + \frac{s}{2\sigma}y \end{aligned}$$

Ejercicio 37 Deberes. Hay dos tipos de individuos en una economía: los que chocan con probabilidad p y los que chocan con probabilidad $q > p$. La proporción de tipos q es a, y ambos tipos tienen la misma función de utilidad cóncava u. Todos los autos valen v, y si chocan pierden el daño que es d (el valor pasa a ser $v - d$). En el mercado de seguros automotrices, hay competencia, por lo que las firmas obtienen beneficio 0, cuando venden una póliza con costo c que cubre el 100% de los daños:

$$c = dE\left(\text{probabilidad de choque } \middle|\ \text{compró la póliza}\right).$$

Es decir, las firmas cobran c, que es el valor esperado de lo que deben pagar, condicional a que el individuo compra la póliza.

Parte A. Suponga que $u(v) = 1$ y $u(v - d) = 0$. Muestre que hay un equilibrio en el cual los dos tipos de conductores se aseguran si y sólo si

$$u\left(v - d\left(aq + (1 - a)\, p\right)\right) \geq 1 - p. \tag{2.5}$$

Parte B. Suponga ahora que $p = a = \frac{1}{2}$, $q = 1$ y $d = v = 1$. Si $u(x) = x^{\alpha}$ para $\alpha \leq 1$ ¿para qué valores de α hay un equilibrio en el que los dos tipos de conductores participan del mercado? Recordando que el coeficiente de aversión al riesgo relativa es $-xu''/u'$, interprete el resultado.

Parte C. Suponga ahora que $u(x) = \sqrt{x}$. Con $d = v = 1$, $p = \frac{1}{4} = 1 - q$ ¿para qué valores de a hay un equilibrio en el que los dos tipos de conductores participan del mercado? Interprete. Repita con $v = 1$, $p = \frac{1}{4} = 1 - q = 1 - d$.

Ejercicio 38 Deberes. Cada conductor tiene un auto, que vale (para él) \$1. Las calidades de los conductores se distribuyen uniformemente entre 0 y 1, y no son observables para la compañía de seguros. Todos los conductores chocan; si un conductor de calidad z choca, su auto pasa a valer $1 - z$ para él. Si el individuo está asegurado, el auto pasa a la compañía de seguros, la compañía le da uno nuevo (con costo \$1 para la empresa y valor \$1 para el individuo) y el auto (chocado) vale $1 - \frac{z}{2}$ (para la empresa). Hay competencia en el mercado de seguros automotrices. Encuentre el equilibrio: encuentre un precio p para la póliza y un conjunto C de conductores que compran seguro tal que los beneficios de la empresa son 0 si los que compran son C y un conductor está en C si y sólo si está más contento comprando seguro que quedándose sin seguro.

Ejercicio 39 Hay dos tipos de autos: la mitad son buenos y la otra mitad malos. Los dueños de autos buenos, los valoran en $\$\frac{3}{2}$; los dueños de malos, en \$1; la compañía de seguros no sabe si un conductor posee un auto bueno o malo. Además, las calidades de los conductores se distribuyen uniformemente entre 0 y 1 y no son observables para la compañía de seguros (y las calidades de los conductores son independientes del tipo de auto). Todos los conductores chocan; si un conductor de calidad z choca, su auto pasa a valer $\frac{3}{2} - z$ o $1 - z$, dependiendo de qué tipo de auto posee. Si el individuo está asegurado, el auto pasa a la compañía de seguros, la compañía le da uno nuevo (con costo $\$\frac{3}{2}$ para la empresa y valor $\$\frac{3}{2}$ para el individuo) y el auto (chocado) vale $\frac{3}{2} - \frac{z}{2}$ o $1 - \frac{z}{2}$ para la empresa (dependiendo del tipo de auto). Hay competencia en el mercado de seguros automotrices. Encuentre el equilibrio: encuentre un precio p para la póliza y un conjunto C de conductores que compran seguro tal que los beneficios de la empresa son 0 si los que compran son C y un conductor está en C si y sólo si está más contento comprando seguro que quedándose sin seguro.

Parte A. Para cada p, encuentre la cantidad de seguros que se venderán. Quedará una función de p, partida en 3 partes.

Parte B. Para cada p, encuentre la probabilidad que un auto sea bueno, dado que vino a comprar seguro (también queda algo partido en 3 partes, correspondiente a las tres partes de la Parte A).

Parte C. Para cada $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, encuentre la esperanza del valor de los autos que vienen a asegurarse, y encuentre el o los equilibrios.

Ejercicio 40 En una economía los agentes tienen \$1 de riqueza, y están sujetos a riesgos. Si las personas no tienen cuidado pueden perder su riqueza con probabilidad $p_n = \frac{3}{4}$, mientras que si tienen cuidado la pierden con probabilidad $p_c = \frac{1}{4}$. La utilidad de los individuos es $\sqrt{w} - e$ donde w es la riqueza y e es el esfuerzo que vale $e_c = \frac{1}{10}$ en caso de cuidado y $e_n = 0$ de lo contrario. Hay un mercado competitivo de seguros, donde las compañías son neutrales al riesgo.

Parte A. Asuma que las compañías no pueden distinguir si los agentes están teniendo cuidado o no, y sólo ofrecen contratos de seguro total. Los contratos son tales que la compañía se queda con toda la riqueza del individuo en cualquier estado, y a cambio de promete niveles de riqueza w_a y w_n en caso de accidente y no accidente (en caso de seguro total, tendremos $w_a = w_n$). Si el agente lo compra, ¿tendrá cuidado? (no charle, haga una cuenta). Dado esto, si las compañías ofrecen contratos de seguro total, ¿lo comprarán los consumidores? (aquí debe argumentar lo mejor que pueda que si hay competencia los contratos de seguro total deben arrojar beneficio 0)

Parte B. Imagine que la utilidad de reserva del individuo es la que obtiene por no cuidarse. Si hubiera una sola firma aseguradora, ¿qué contratos le convendría ofrecer?

Parte C. Suponga ahora que en realidad hay tres tipos de agentes, que las firmas no pueden distinguir, y que sus probabilidades de pérdidas son $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (están dadas, no las eligen, y no hay costo de esfuerzo). Si hay $\frac{1}{3}$ de cada tipo de agente, y las firmas ofrecen contratos de seguro total que dan beneficio 0, ¿cuál o cuáles son los equilibrios de esta economía?

Parte D. El planteo es como en la parte C, pero la proporción de gente con probabilidad $\frac{1}{4}$ de pérdida es q; los otros dos tipos tienen probabilidades $\frac{1-q}{2}$. Encuentre un q^* tal que si $q \geq q^*$ hay un equilibrio en que participan los tres tipos.

Selección Adversa (Limones): Soluciones

Ejercicio 1.A. Para que los compradores estén dispuestos a pagar 2.500 (el precio que hace que vendedores vendan buenos), la proporción de limones debe ser menor que el p que hace que la calidad promedio sea 2.500. Es decir,

$$(1-p)\,3000 + p2000 \geq 2500 \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2} \equiv p^*.$$

1.B. Si $p > p^*$, el único equilibrio es con $p = 2000$, y sólo autos malos intercambiados. Si $p^* \geq p$, hay dos equilibrios: uno igual que antes, y en el otro se intercambian todos, y el precio es $3000 - 1000p$.

Ejercicio 2.A.I. Cuando ambos conocen la calidad del auto, un auto de calidad z se comercializa a un precio z, y se intercambian todos los autos.

Ejercicio 2.A.II. Cuando nadie puede verificar la calidad de los autos, el único precio de mercado es

$$p = E[z] = \int_0^1 zf(z)\,dz \geq \int_0^1 v(z)\,f(z)\,dz = E[v(z)]$$

y se intercambian todos los autos, pues como $z \geq v(z)$, $p = E(z) \geq E(v(z))$ implica que todos los vendedores quieren vender.

Ejercicio 2.B.I. La condición de equilibrio es que

$$p = E[z \mid v(z) \leq p] = \int_0^{\sqrt{p}} \frac{z}{\sqrt{p}} dz = \frac{\sqrt{p}}{2}$$

y por lo tanto, $p = \frac{1}{4}$ ó $p = 0$. Los autos que no se comercializan son aquellos para los cuales $z^2 > p$, es decir $S_{\frac{1}{4}} = \left\{z : z > \frac{1}{2}\right\}$ y $S_0 = \{z : z > 0\}$

Ejercicio 2.B.II. Tenemos que $P_0 =$

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}} &= \textstyle\int_S l(z)\,f(z)\,dz = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(z - z^2\right) dz = \frac{1}{12} \\ P_0 &= \textstyle\int_0^1 \left(z - z^2\right) dz = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.A. Trabajan aquellos con $\frac{\theta^2}{2} \leq w \Leftrightarrow \theta \leq \sqrt{2w}$. Para $w > \frac{1}{2}$ (los sueldos que atraen a algún trabajador), el valor esperado de θ, dado que $\theta \leq \sqrt{2w}$ es

$$E(\theta \mid r(\theta) \leq w) = E\left(\theta \mid \theta \leq \sqrt{2w}\right) = \frac{1+\sqrt{2w}}{2}.$$

Luego debemos resolver $w = \frac{1+\sqrt{2w}}{2} \Leftrightarrow w = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} = 1,309$. Los θ que participan son aquellos

$$\theta \in \Theta^* = \left\{\theta : \frac{\theta^2}{2} \leq \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\right\} = \left[1, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right] = [1, 1.62].$$

3.B. Para todo $\theta \in [1,2]$ tenemos $\theta \geq \frac{\theta^2}{2}$, por lo que lo eficiente sería que todo el mundo trabajara. Sin embargo, eso no sucede en el equilibrio.

Ejercicio 4. Tenemos

$$E\left(\frac{6}{5}z \mid z \leq p\right) = \begin{cases} \frac{6}{5}\frac{p+k}{2} & p \leq k+4000 \\ \frac{6}{5}\frac{2k+4000}{2} & p \geq k+4000 \end{cases}.$$

En el primer tramo hay un equilibrio en que $p = \frac{6}{5}\frac{k+p}{2} \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}k$, y como $p = \frac{3}{2}k \leq k+4000 \Leftrightarrow k \leq 80000$ este $\frac{3}{2}k \leq k+4000$ equilibrio tiene sentido mientras k sea menor o igual que 8.000. En el segundo tramo hay un equilibrio con $p = \frac{6}{5}\frac{2k+4000}{2} = \frac{6}{5}(k+2000)$ sólo si

$$p \geq k+4.000 \Leftrightarrow \frac{6}{5}(k+2000) \geq k+4.000 \Leftrightarrow k \geq 8.000.$$

Si $k \leq 8.000$, la pérdida de bienestar es

$$P = \int_{\frac{3}{2}k}^{k+4000} \left(\frac{6}{5}z - z\right)\frac{1}{4000}dz = -\frac{1}{32\,000}k^2 + \frac{1}{5}k + 400.$$

Ejercicio 5.A. Si hay información perfecta, se sabe el tipo de cada auto, y como el comprador tiene el poder de negociación, paga por cada auto lo que vale para el vendedor: $p_B = 3000$ y $p_L = 500$. El excedente total generado es

$$12000\left(\frac{1}{3}(4000-3000) + \frac{2}{3}(1000-500)\right) = 8.000.000$$

5.B. En este caso, si entraran todos los autos, el valor esperado para el comprador sería $\frac{2}{3}*1000+\frac{1}{3}*4000 = 2000$ que no lograría atraer a los vendedores de autos buenos. Por lo tanto sólo puede haber autos malos en equilibrio, y el precio es $p = 500$. El excedente total generado es $\frac{2}{3}(1000-500)*12000 = 4.000.000$ y se pierden 4 millones de bienestar.

5.C. Para que participaran los buenos, debería haber al menos suficientes autos para atraer a los dueños de los buenos, por lo que el valor esperado de la calidad debe ser al menos 3000: $(1-q^*)1000 + q^*4000 = 3000 \Leftrightarrow q^* = \frac{2}{3}$. Para $q \geq q^*$, el único precio de mercado será 3.000.

Ejercicio 6. Como

$$E\left(z \mid z^2 \leq p\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{p}}{2} & p \leq \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & p \geq \frac{1}{9} \end{cases}$$

obtenemos que $p = E\left(z \mid z^2 \leq p\right)$ para $p = 0$ y $p = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 7.A. Para que un precio p sea un equilibrio, debe cumplir

$$p = E\left(\theta \mid \frac{\theta}{2} \leq p\right) = E\left(\theta \mid \theta \leq 2p\right) = \begin{cases} p & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & p \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Por lo tanto, cualquier $p \leq \frac{1}{2}$ es un equilibrio: para cada $p \leq \frac{1}{2}$ el equilibrio es $\left(p, \Theta^*(p) = \{\theta : \theta \leq 2p\}\right)$.

7.B. Cuando la valuación de los vendedores es θ^3, tenemos

$$p = E\left(\theta \mid \theta^3 \leq p\right) = E\left(\theta \mid \theta \leq p^{\frac{1}{3}}\right) = \begin{cases} \frac{p^{\frac{1}{3}}}{2} & p \leq 1 \\ \frac{1}{2} & p \geq 1 \end{cases}.$$

Obtenemos entonces $p = \frac{p^{\frac{1}{3}}}{2}$ que tiene soluciones 0 y $p^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

7.C. La asignación eficiente en cualquier caso es que se intercambien todos los autos, ya que la valuación del vendedor es siempre menor que la del comprador. El único equilibrio en el cual pasa eso es en el de $p = \frac{1}{2}$ de la Parte A.

Ejercicio 8. Para $p > 30$, el valor esperado de z es

$$\frac{15+37+47}{3} = 33$$

mientras que para $p = 30$, el valor esperado es cualquier cosa entre 26 y 33 (dependiendo de cuantos de los dueños de 30 entran al mercado). Para $20 < p < 30$, el valor esperado de z es

$$\frac{15+37}{2} = 26.$$

Para $p = 20$, el valor esperado es cualquier cosa entre 15 y 26 (otra vez, eligiendo correctamente cuántos de los dueños de autos que valen 20 entran al mercado). Finalmente, para $p < 20$, el valor esperado de z es 15. Por lo tanto, hay cinco soluciones para la ecuación (2.2). Las fáciles son: con $p = 15$ y sólo se intercambian los $v = 10$; con $p = 26$ y se intercambian los $v = 10$ y $v = 20$; y con $p = 33$ y se intercambian todos. Queda encontrar qué proporción x de los dueños de 30 hace que si entra esa proporción, el valor esperado de los autos para los compradores es 30, y similarmente para la proporción y que hace que si el precio es 20, y entra una proporción y de los dueños de autos de 20, entonces el valor esperado de los autos para los compradores sea 20. En el caso de un precio de 30, debemos tener

$$30 = z47 + \frac{1-z}{2}37 + \frac{1-z}{2}15 \Leftrightarrow z = \frac{4}{21}$$

por lo que $\frac{4}{21}$ de los autos debe ser de los que valen 47 para los compradores. Como $\frac{1}{3}$ de los vendedores tiene ese tipo de autos, una proporción $\frac{4}{21}$ del total es $\frac{4}{7}$ de los dueños de autos que valen 47. El cálculo para el precio de 20 es similar y se omite.

Ejercicio 9.A.I. y 9.A.II. Idem.

Ejercicio 9.B.I. La función de densidad condicional es

$$f\left(z \mid z \leq b\right) = \frac{2z}{b^2}$$

pues la probabilidad de que $z \leq b$ es b^2. Por lo tanto, la condición de equilibrio es que

$$p = E\left[z \mid v\left(z\right) \leq p\right] = \int_0^{\sqrt{p}} \frac{2z^2}{p} dz = \frac{2}{3}\sqrt{p}$$

y por lo tanto, $p = \frac{4}{9}$ ó $p = 0$ (ignoraremos este equilibrio en lo que resta de la solución). Los autos que no se comercializan son aquellos para los cuales $z^2 > p$, es decir $S = \left\{z : z > \frac{2}{3}\right\}$.

Ejercicio 9.B.II. Tenemos que

$$P = \int_S l\left(z\right) f\left(z\right) dz = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(z - z^2\right) 2z dz = \frac{11}{162}$$

Ejercicio 10. Los que no se intercambian son los $z - \frac{1}{3} \leq p \Leftrightarrow z \leq p + \frac{1}{3}$. Por lo tanto, para $p \leq \frac{2}{3}$, como $F\left(x\right) = \int_0^x \left(2 - 2z\right) dz = x\left(2 - x\right)$

$$E\left(z \mid z \leq p + \frac{1}{3}\right) = \int_0^{p+\frac{1}{3}} z \frac{2-2z}{\left(p+\frac{1}{3}\right)\left(2-\left(p+\frac{1}{3}\right)\right)} dz = \frac{18p^2 - 15p - 7}{27p - 45}.$$

Para $p \geq \frac{2}{3}$, $E\left(z \mid z \leq p + \frac{1}{3}\right) = E\left(z\right) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, el equilibrio se da cuando $p = \frac{18p^2-15p-7}{27p-45}$, si la solución es $p \leq \frac{2}{3}$. De esa ecuación obtenemos $p = \frac{5}{3} - \sqrt{2} = 0.252$, y ese es el precio de equilibrio.

Como todos los autos deberían intercambiarse, la asignación no es Pareto Óptima, y la pérdida de bienestar es la que surge porque no se intercambian los autos con $z \geq p + \frac{1}{3} = 2 - \sqrt{2}$. La pérdida es entonces

$$P = \int_S l(z) f(z) dz = \int_{2-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{3} 2(1-z) dz = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ejercicio 11. La función de densidad condicional es

$$f(z \mid z \leq b) = \frac{2z}{b^2}$$

pues la probabilidad de que $z \leq b$ es b^2. Como

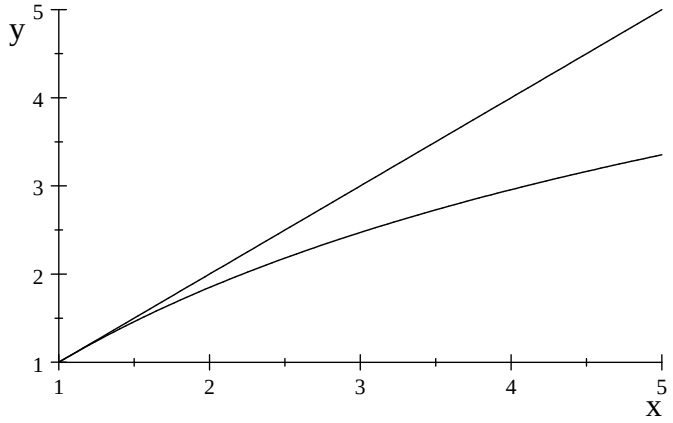
$$E[z \mid v(z) \leq p] = E\left[z \mid z \leq \frac{4}{3}p\right] = \int_0^{\frac{4}{3}p} z f\left(z \mid z \leq \frac{4}{3}p\right) dz = \begin{cases} \int_0^{\frac{4}{3}p} z \frac{9z}{8p^2} dz = \frac{8}{9}p & p < \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & p > \frac{3}{4} \end{cases}$$

tenemos que $p = E[z \mid v(z) \leq p]$ no se puede dar para $p > 3/4$. Entonces, para $p < 3/4$, obtenemos $p = \frac{8}{9}p$, o lo que es lo mismo, $p = 0$.

Ejercicio 12.A. Tenemos que para $w > 1$,

$$\begin{aligned} E(\theta \mid r(\theta) \leq w) &= E\left(\theta \mid \theta \leq w^2\right) = \int_1^{w^2} \theta f\left(\theta \mid \theta \leq w^2\right) d\theta = \int_1^{w^2} \theta \frac{f(\theta)}{F(w^2)} d\theta \\ &= \int_1^{w^2} \theta \frac{\frac{1}{\theta^2}}{\frac{w^2-1}{w^2}} d\theta = \frac{1}{(w^2-1)} w^2 \ln w^2 \end{aligned}$$

que es estrictamente menor que w para todo $w > 1$:



Para ver (formalmente) que no puede haber ningún equilibrio con $w > 1$, haremos dos cosas: mostrar que el límite cuando $w \to 1$ de $g(w) \equiv \frac{w^2 \ln w^2}{w^2-1}$ es 1, y que para cualquier $w > 1$, $g(w) < w$, pues la derivada de g es menor que 1.

Comenzamos por mostrar que el límite cuando $w \to 1$ de $g(w)$ es 1 :

$$\lim_{w \to 1} \frac{2w^2 \ln w}{w^2 - 1} = \lim_{w \to 1} \frac{4w \ln w + 2w}{2w} = 1.$$

La primera igualdad utiliza la regla de l'Hôpital, cuyo enunciado y "demostración" son (para f y g continuas y derivables, con $\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} h(x) = 0$)

$$\lim_{x\to y} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to y} \frac{f(x) - f(y)}{h(x) - h(y)} = \lim_{x\to y} \frac{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}}{\frac{h(x)-h(y)}{x-y}} = \frac{\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}}{\lim_{x\to y} \frac{h(x)-h(y)}{x-y}} = \frac{f'(y)}{h'(y)}.$$

Para mostrar que $g'(w) \leq 1$, tomamos la derivada primera de la expresión $g(w)$:

$$g'(w) = \frac{2w\left(w^2 - 2\ln w - 1\right)}{\left(w^2-1\right)^2} \leq 1 \Leftrightarrow f(w) = 2w^2 - 4w\ln w - 2w + 2w^3 - w^4 - 1 \leq 0.$$

Entonces, para demostrar que $g(w) \leq w$ debemos mostrar que $g'(w) \leq 1$ (para $w \geq 1$), que es equivalente a mostrar que $f(w) \leq 0$. Para mostrar que $f(w) \leq 0$, mostraremos que $f(1) = 0$ y que $f'(w) \leq 0$. Tenemos que

$$f'(w) = \frac{d\left(2w^2 - 4w\ln w - 2w + 2w^3 - w^4 - 1\right)}{dw} = 4w - 4\ln w + 6w^2 - 4w^3 - 6 \leq 0$$

que es cierto, pues $f'(1) = 0$ y $f''(w) = \frac{4}{w}\left(-3w^3 + 3w^2 + w - 1\right) \leq 0$ para todo $w \geq 1$.

Hemos mostrado entonces que no hay ningún equilibrio para $w > 1$. Por lo tanto, el único equilibrio se puede dar con $w = 1$, y para ese caso tenemos

$$E(\theta \mid r(\theta) \leq w) = E(\theta \mid r(\theta) \leq 1) = E(\theta \mid \theta \leq 1) = 1 = w$$

por lo que el único equilibrio se da con $w = 1$ (es decir, el salario que atrae al tipo más bajo es $w_b = 1$, que atrae únicamente al tipo $\theta = 1$, y en ese caso tenemos un equilibrio, pues se paga lo mismo que se recibe).

La pérdida de bienestar en este caso es

$$L = \int_1^\infty \left(\theta - \sqrt{\theta}\right)\frac{1}{\theta^2} d\theta = \infty$$

Ejercicio 13. Como

$$E(u(z) \mid z \leq p) = E\left(\frac{1+z}{2} \mid z \leq p\right) = \frac{1 + E(z \mid z \leq p)}{2} = \frac{1 + \frac{p}{2}}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2},$$

obtenemos $p = E(u(z) \mid z \leq p) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$.

La asignación eficiente es que se intercambien todos los autos, pues $\frac{1+z}{2} > z$ para todo $z < 1$. La pérdida de bienestar es

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{1+z}{2} - z\right) dz = \frac{1}{36}.$$

Ejercicio 14. Para cualquier precio p, los z que se intercambian son aquellos con $p - \frac{2}{3}z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq \frac{3}{2}p$. Por lo tanto, mientras los autos de calidad 1 queden afuera del mercado (y eso sucederá para $p < \frac{2}{3}$), los autos en el mercado se distribuyen de forma uniforme entre 0 y $\frac{3}{2}p$. Eso implica que para $p < \frac{2}{3}$

$$E\left(z \mid z \leq \frac{3}{2}p\right) = \int_0^{\frac{3}{2}p} z\frac{1}{F\left(\frac{3}{2}p\right)} dz = \int_0^{\frac{3}{2}p} z\frac{1}{\frac{3}{4}p} dz = \frac{3}{4}p$$

Esto es igual que siempre: si las calidades son uniformes entre 0 y $\frac{3}{2}p$, la esperanza condicional es $\frac{3p}{4}$. Para ver que $F(x) = \frac{x}{2}$, para $x < 1$, alcanza con escribir

$$F(x) = P(z \leq x) = P(z \leq x \mid z < 1)\,P(z < 1) + P(z \leq x \mid z = 1)\,P(z = 1) = x\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2}.$$

Por otro lado, si $p \geq \frac{2}{3}$, entran todos los autos al mercado, y queda

$$E\left(z \mid z \leq \frac{3}{2}p\right) = E(z) = E(z \mid z < 1) P(z < 1) + E(z \mid z = 1) P(z = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Hay entonces dos equilibrios: uno con $p = 0$ en que no se intercambia ningún auto, y otro con $p = \frac{3}{4}$ en el cual entran todos los autos.

Ejercicio 15.A. Como $F(x) = x^2$, tenemos que para $p \leq \frac{1}{2}$

$$E\left(\theta \mid \frac{\theta}{2} \leq p\right) = \int_0^{2p} \theta \frac{f(\theta)}{F(2p)} d\theta = \frac{1}{4p^2} \int_0^{2p} 2\theta^2 d\theta = \frac{\frac{16}{3}p^3}{4p^2} = \frac{4}{3}p$$

y para $p \geq \frac{1}{2}$, tenemos $E\left(\theta \mid \frac{\theta}{2} \leq p\right) = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, la ecuación $p = E\left(\theta \mid \frac{\theta}{2} \leq p\right)$ tiene la solución $p = 0$, y la solución $p = \frac{2}{3}$, y ahí se encuentran los dos equilibrios: uno sin intercambio, el otro en el que se intercambia todo.

15.B. En este caso, para $p \leq 1$,

$$E\left(\theta \mid \theta^3 \leq p\right) = \int_0^{\sqrt[3]{p}} \theta \frac{f(\theta)}{F\left(\sqrt[3]{p}\right)} d\theta = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}} \int_0^{\sqrt[3]{p}} 2\theta^2 d\theta = \frac{\frac{2}{3}p}{p^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{p}.$$

y $p = \frac{2}{3}\sqrt[3]{p}$ tiene soluciones $p = 0$ y $p = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.544$.

15.C. En A deberían intercambiarse todos los autos para obtener eficiencia. Por lo tanto el equilibrio de $p = 0$ es ineficiente y el de $p = \frac{2}{3}$ es eficiente. En B, los autos deben intercambiarse también, pero en equilibrio no todos se intercambian y por eso también son ineficientes.

Ejercicio 16. Vamos a resolverlo de tres maneras distintas. La primera es la ultra-breve.

El ejercicio nos pide que encontremos p^* tal que si $p < p^*$ sólo las malas participan. Por lo tanto, tenemos que ver la condición de equilibrio cuando las buenas participan: $I = \alpha(px_a + (1-p)x_b + r) \Leftrightarrow 30 = \alpha(200p + 50) \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{20p+5}$. Para que los buenos participen, se debe cumplir que $(1-\alpha)250 \geq 200 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{20p+5}\right)250 \geq 200 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2} = p^*$.

La segunda versión, es un poco más larga, pero más general, y con más detalle sobre el tipo de equilibrios. Hay dos tipos de equilibrio, aquellos en los cuales participan todas las firmas, y aquellos en los cuales sólo participan las firmas malas, x_b. Veremos bajo qué condiciones participan ambas. Si están las dos, tendremos que para $\overline{x} = px_a + (1-p)x_b$

$$I = \alpha(px_a + (1-p)x_b + r) \Leftrightarrow \alpha(p) = \frac{I}{x_b + r + p(x_a - x_b)} = \frac{I}{\overline{x} + r}$$

que es decreciente en p : cuanto más firmas buenas haya, menor será el α de equilibrio; menor será la porción de la firma que exijan los inversores para participar. Por lo tanto, cuanto mayor es la proporción de buenas, menor es la subvaluación de la firma (buena) y mayor la sobrevaluación de la mala.

Para que esto sea un equilibrio, debe suceder que ambos tipos de empresas quieran participar; para ellas, financiarse y hacer el proyecto debe ser mejor que no hacerlo:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)(x_i + r) &= \left(1 - \frac{I}{x_b + r + p(x_a - x_b)}\right)(x_i + r) = \frac{\overline{x} + r - I}{\overline{x} + r}(x_i + r) \geq x_i \Leftrightarrow \\ r - I\frac{x_i + r}{\overline{x} + r} &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esto no es importante para la resolución, pero vemos que si la firma es x_b, el coeficiente de I es menor que 1, por lo que gana *más* financiándose con acciones que con deuda o fondos propios (la ganancia es mayor que $r - I$, que es lo que obtendría de otra forma). Eso es porque se *sobrevalora* a la firma mala.

Probamos ahora con los números proporcionados, para ver si las dos firmas participando puede ser un equilibrio:

$$r - I\frac{x_i + r}{\overline{x} + r} \geq 0 \Leftrightarrow 50 - 30\frac{200 + 50}{200p + 50} \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2} \equiv p^*.$$

No hacemos la cuenta para la firma baja, porque ella siempre quiere participar en equilibrio: sabemos que $r - I > 0$, y que el coeficiente de I en la ecuación (2.6) es menor que 1. Si las dos firmas participan, el valor de las malas está sobrevaluado, y el de las buenas sub-valuado. El α_a de información completa (la porción que tendrían que entregar las firmas buenas) es sólo $\alpha_a = \frac{30}{50+200} = 12\%$, mientras que $\alpha_b = \frac{30}{50} = 60\%$.

Para finalizar, notamos que como el cash flow de la firma en el segundo período (después de haber invertido) es $r > I$, tomar deuda en un mercado competitivo sería óptimo para el dueño de la empresa, ya que podría obtener $x_i + r - I$ seguro. Esto es porque a los que prestan el dinero no les interesa el valor intrínseco de la firma, x_i. También, la deuda será conveniente aún si el mercado no es completamente competitivo, y conseguir $\$I$ le cuesta al dueño un poco más. Esto es sólo para decir que algunas veces observamos que a las firmas emiten deuda en vez de acciones, cuando hubiera sido más natural que emitieran acciones. En el ejercicio asumimos que los dueños debían levantar capital, sólo porque algunas veces las empresas están ya topeadas en cuanto a la cantidad de deuda que pueden tomar.

Puede haber un equilibrio en el cual p es grande, pero aún así el mercado financiero asume que sólo las malas participan. En ese caso, seguimos teniendo $\alpha = \frac{3}{5}$, y que sólo las malas participan, pues para las buenas se cumple que

$$r - I\frac{x_i + r}{\overline{x} + r} < 0 \Leftrightarrow 50 - 30\frac{200 + 50}{0 + 50}0 - 100 < 0.$$

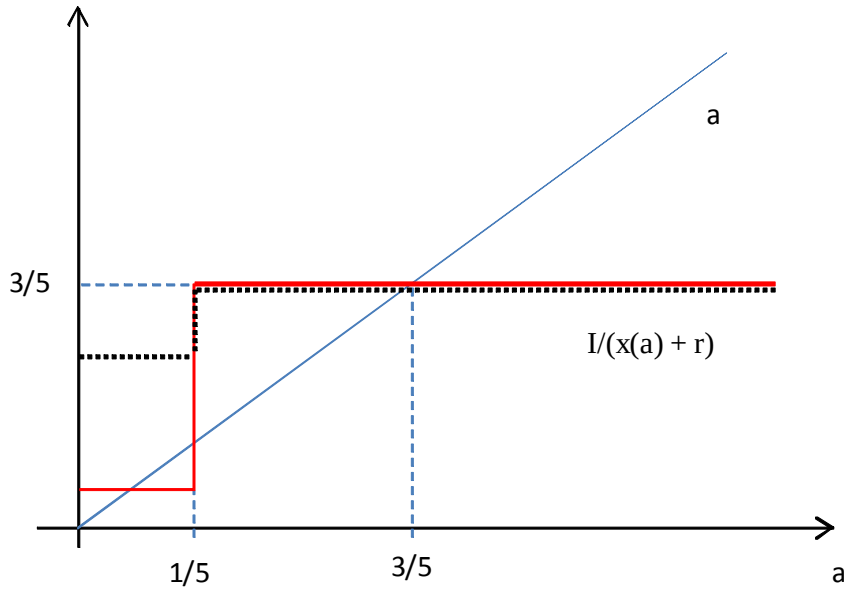
Finalmente puede haber otro equilibrio en el cual $p > \frac{1}{2}$, pero en el que los inversores creen que viene una proporción de las firmas buenas, y el α se determina como función de esa creencia (tiene que ser tal que los buenos sean exactamente indiferentes entre participar).

La tercera forma de resolverlo es un poco más parecida a la que hacemos en clase: recordando que α es el precio del préstamo; vemos cómo varía la calidad promedio de lo que compramos, cuando varía el precio. Se debe cumplir $\alpha = \frac{I}{\overline{x}+r}$; primero investigamos cómo varía $\overline{x}$ con α, y luego igualamos $\frac{I}{\overline{x}(\alpha)+r}$ a α. Tenemos que como las x_a participan si y sólo si $(1-\alpha)(x_a + r) \geq x_a \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{5}$, la función (en realidad no es una función, sino una correspondencia) $\overline{x}(\alpha)$ viene dada por

$$\overline{x}(\alpha) = \begin{cases} 200p & \text{si } \alpha < \frac{1}{5} \\ [0, 200p] & \text{si } \alpha = \frac{1}{5} \\ 0 & \text{si } \alpha > \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{I}{\overline{x}(\alpha) + r} = \begin{cases} \frac{3}{20p+5} & \text{si } \alpha < \frac{1}{5} \\ \left[\frac{3}{20p+5}, \frac{3}{5}\right] & \text{si } \alpha = \frac{1}{5} \\ \frac{I}{r} = \frac{3}{5} & \text{si } \alpha > \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Por lo tanto, α se iguala a $\frac{I}{\overline{x}+r}$ sólo en $\alpha = \frac{3}{5}$ si p es chico (la condición es $\frac{3}{20p+5} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$), o hay otros dos equilibrios (en adición a ese) cuando $p \geq \frac{1}{2}$: uno es cuando $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\overline{x}\left(\frac{1}{5}\right) = 100$ que se consigue cuando una proporción $q = \frac{1}{2p}$ de las firmas buenas entran al mercado; el otro es que entran todas las buenas, y $\alpha = \frac{3}{20p+5}$.

El siguiente gráfico ilustra los equilibrios, con α en el eje horizontal, y dos versiones de $\frac{I}{\overline{x}(\alpha)+r}$, una con p chico (la negra punteada), y otra con p grande (la colorada). Con p chico, $\frac{I}{\overline{x}(\alpha)+r}$ no llega a cruzar la línea de 45° por debajo de $\alpha = \frac{1}{5}$, mientras que con un p grande, la ecuación de $\frac{I}{\overline{x}(\alpha)+r}$ cruza la línea de 45° tres veces.



Ejercicio 17. Definimos $\overline{x} = E(x \mid x \in X(\alpha))$ y vemos, usando la condición de equilibrio $I = \alpha(E(x \mid x \in X(\alpha)) + r)$, que si una firma de calidad x participa, recibe

$$(1-\alpha)(x+r) = \left(1 - \frac{I}{\overline{x}+r}\right)(x+r)$$

mientras que si no participa, recibe x. Una firma participa si y sólo si

$$\left(1 - \frac{I}{\overline{x}+r}\right)(x+r) \geq x \Leftrightarrow r - I\frac{x+r}{\overline{x}+r} \geq 0,$$

y como la expresión de la derecha es decreciente en x, vemos que en cualquier equilibrio, el conjunto de firmas que participen será del estilo $[100, x_m]$ para algún x_m. La firma x_m es indiferente entre participar y no participar, por lo que x_m satisface

$$r = I\frac{x_m+r}{\overline{x}+r} = I\frac{x_m+r}{E(x \mid x \leq x_m)+r} = I\frac{x_m+r}{\frac{100+x_m}{2}+r} \Leftrightarrow x_m = 700.$$

El α de equilibrio es $\alpha = \frac{I}{\overline{x}+r} = \frac{30}{400+50} = \frac{1}{15}$.

Otra forma de hacerlo, muy parecida, es preguntarnos cómo varía $E(x \mid x \in X(\alpha))$ con α, y luego resolver $I = \alpha(E(x \mid x \in X(\alpha)) + r)$. Tenemos que el conjunto de firmas que participa es aquél para el cual $(1-\alpha)(x+r) \geq x \Leftrightarrow \frac{(1-\alpha)r}{\alpha} \geq x$. Por lo tanto, resolviendo $\frac{(1-\alpha)50}{\alpha} \leq 800 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{17}$, obtenemos

$$E(x \mid x \in X(\alpha)) = E\left(x \mid \frac{(1-\alpha)r}{\alpha} \geq x\right) = \begin{cases} \frac{\frac{(1-\alpha)50}{\alpha}+100}{2} = \frac{25(\alpha+1)}{\alpha} & \alpha \geq \frac{1}{17} \\ 450 & \alpha \leq \frac{1}{17} \end{cases}.$$

Resolviendo $I = \alpha(E(x \mid x \in X(\alpha)) + r)$ queda $30 = \alpha\left(\frac{25(\alpha+1)}{\alpha} + 50\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{15}$. Como usando la parte de abajo de $E(x \mid x \in X(\alpha))$ queda $30 = \alpha(450+50) \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{50} = 0.06 > \frac{1}{17}$, el único equilibrio es el de la parte de arriba de $E(x \mid x \in X(\alpha))$, con $\alpha = \frac{1}{15}$.

Ejercicio 18.A. Tenemos que para $z \geq 1$, $F(z) = 1$, y para $z \leq 1$,

$$F(z) = \int_0^z \left(p\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\right) dx = \frac{1}{2}z(pz - p + 2).$$

Entonces, como hicimos en clase, para $z \leq y$,

$$\Pr(x \leq z \mid x \leq y) = F(x \leq z \mid x \leq y) = \frac{\Pr(x \leq y \mid x \leq z)\Pr(x \leq z)}{\Pr(x \leq y)} = \frac{1\Pr(x \leq z)}{\Pr(x \leq y)} = \frac{F(z)}{F(y)}$$

por lo que

$$f(x \mid x \leq y) = \left.\frac{dF(x \leq z \mid x \leq y)}{dz}\right|_{z=x} = \frac{f(x)}{F(y)} = \frac{p\left(x-\frac{1}{2}\right)+1}{\frac{1}{2}y(py-p+2)}.$$

La esperanza de x, dado que $x \leq y$ es entonces

$$E(x \mid x \leq y) = \int_0^y \frac{p\left(x-\frac{1}{2}\right)+1}{\frac{1}{2}y(py-p+2)} x dx = \frac{1}{6}\frac{y(4py-3p+6)}{py-p+2}.$$

18.B. Una firma participa si y sólo si $(1-\alpha)(x+r) \geq x \Leftrightarrow x \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}r$. El $\overline{\alpha}$ tal que si $\alpha \leq \overline{\alpha}$ todas participan es aquél que hace que $\frac{1-\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}r = 1 \Leftrightarrow \overline{\alpha} = \frac{r}{1+r}$. Por lo tanto,

$$E(x \mid x \in X(\alpha)) = \begin{cases} E\left(x \mid x \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}r\right) & \alpha \geq \overline{\alpha} \\ E(x) & \alpha \leq \overline{\alpha} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6}\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}r\left(4p\frac{1-\alpha}{\alpha}r-3p+6\right)}{p\frac{1-\alpha}{\alpha}r-p+2} & \alpha \geq \overline{\alpha} \\ \frac{1}{6}\frac{p+6}{2} & \alpha \leq \overline{\alpha} \end{cases}.$$

18.C. El equilibrio se da cuando $\frac{1}{2} = \alpha\left(E(x \mid x \in X(\alpha)) + \frac{3}{4}\right)$. Si nos da en el tramo $\alpha \geq \overline{\alpha}$, el equilibrio es con

$$\frac{1}{2} = \alpha\left(\frac{1}{6}\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{3}{4}\left(4p\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{3}{4}-3p+6\right)}{p\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{3}{4}-p+2}+\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(2p+4\alpha-3p\alpha+4\alpha^2-3p\alpha^2\right)}{4(3p+8\alpha-7p\alpha)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5p-4}{9p-12}$$

y para ello debemos tener $\frac{5p-4}{9p-12} \geq \overline{\alpha} = \frac{r}{1+r} = \frac{3}{7}$. Por lo tanto, dentro de los $p \in [-2,2]$, aquellos para los cuales $1 \geq \alpha \geq \overline{\alpha} = \frac{3}{7}$, son los $p \leq -1$. La idea es que si p es chico (menor que -1), hay relativamente pocas firmas buenas para cada α, que determina un cierto $X(\alpha)$, y ello hace que hace que $E(x \mid x \in X(\alpha))$ sea chico; para que haya equilibrio con un p chico, el α requerido por los prestamistas es grande. Por eso, es fácil verificar que el α de equilibrio decrece con p : cuanto más grande p, para un $X(\alpha)$ dado, más grande es la esperanza de x, por lo tanto más chico tendrá que ser el α que exijan los prestamistas.

Si $p \geq -1$, el equilibrio se da con

$$\frac{1}{2} = \alpha\left(E(x)+\frac{3}{4}\right) = \alpha\left(\frac{1}{6}\frac{(4p-3p+6)}{p-p+2}+\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{p+15}.$$

Tenemos que verificar que este α de equilibrio sea menor que $\overline{\alpha} = \frac{3}{7} : \frac{6}{p+15} \leq \frac{3}{7}$ se cumple para todo $p \geq -1$, como había que demostrar.

Ejercicio 19. Antes de empezar con la parte A, encontraremos los equilibrios por otro método. Para cada w, los trabajadores que aceptan trabajo (a ese conjunto lo llamaremos $\Theta(w) = \{\theta : w \geq r(\theta)\}$) son

$$\Theta(w) = \begin{cases} \{\theta : w \geq 3(\theta-1)\} = \left\{\theta : \frac{w}{3}+1 \geq \theta\right\} & w \leq \frac{3}{2} \\ [1,2] & w > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

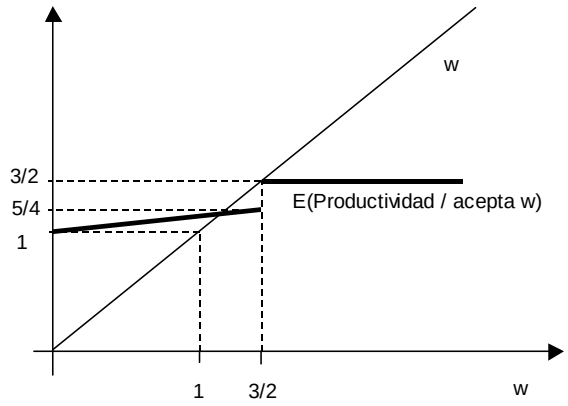
Por lo tanto, el valor esperado de las productividades para cada sueldo es

$$E[\theta \mid \theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} \frac{\frac{w}{3}+2}{2} = 1+\frac{w}{6} & w \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & w > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vemos que para el sueldo $w = \frac{3}{2}$ hay una discontinuidad. Eso es así pues para sueldos menores, cuando w cambia poquito, el conjunto de los tipos θ que están dispuestos a trabajar, va variando de a poquito.

Cuando el salario pasa de un poquito menos de $\frac{3}{2}$ a un poquito más, entran de repente, todos los tipos entre $\frac{3}{2}$ y 2 (pues su $r(\theta)$ es justo $\frac{3}{2}$). Esto provoca que la calidad media o productividad esperada salte justo en $\frac{3}{2}$.

Graficando queda



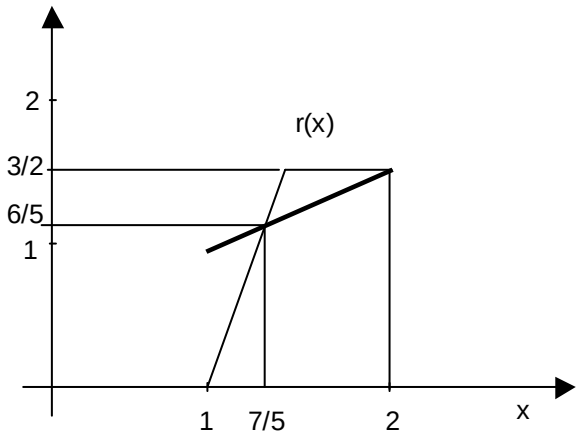
Para encontrar los equilibrios, tenemos que uno es $(w^*, \Theta^*) = \left(\frac{3}{2}, [1,2]\right)$. El otro se encuentra igualando

$$\frac{w^*}{6} + 1 = w^* \Leftrightarrow w^* = \frac{6}{5}$$

y luego,

$$\begin{aligned} \Theta(w^*) &= \Theta^* = \left\{\theta : \frac{w^*}{3} + 1 \geq \theta\right\} \\ &= \left\{\theta : \frac{\frac{6}{5}}{3} + 1 \geq \theta\right\} = \left[1, \frac{7}{5}\right] \end{aligned}$$

Ejercicio 19.A. En la gráfica de abajo están graficados $r(x)$ (con la línea clara) y $E[\theta \mid \theta \leq x]$ (con la línea oscura). Los puntos de intersección de las dos curvas, son equilibrios. Es decir, los equilibrios son $\left(w^1, \Theta^1\right) = \left(\frac{6}{5}, \left[1, \frac{7}{5}\right]\right)$ y $\left(w^2, \Theta^2\right) = \left(\frac{3}{2}, [1,2]\right)$. Verifico primero el par $\left(w^1, \Theta^1\right)$. Para un salario de $\frac{6}{5}$, el conjunto de los trabajadores que quieren trabajar son aquellos que tienen $r(\theta) \leq \frac{6}{5}$, es decir, aquellos con $3(\theta - 1) \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{7}{5}$, osea que se satisface la primera condición del equilibrio competitivo. También, $E\left[\theta \mid \theta \leq \frac{7}{5}\right] = \frac{6}{5}$, con lo cual se cumple la segunda condición del equilibrio. Para el par $\left(w^2, \Theta^2\right)$ las cosas son aún más fáciles, pues a un salario de $\frac{3}{2}$ todos los trabajadores quieren trabajar, y el valor esperado de θ dado que todos trabajan es $\frac{3}{2}$.



Ejercicio 19.B. La única asignación Pareto Óptima de esta economía es cuando todos los trabajadores trabajan, pues para todo θ, $r(\theta) < \theta$ (en realidad eso no es cierto para $\theta = \frac{3}{2}$, pero eso no importa porque $\theta = \frac{3}{2}$ tiene probabilidad 0). Por lo tanto, sólo el equilibrio $\left(w^2, \Theta^2\right)$ es eficiente. Si en cambio $r(\theta) = 3(\theta - 1)$, la única asingación eficiente es cuando θ trabaja si y sólo si $\theta \leq \frac{3}{2}$ (pues sólo para esos tipos $r(\theta) \leq \theta$). En este caso, el único equilibrio de la economía es $\left(w^1, \Theta^1\right)$, que no es Pareto Óptimo.

Ejercicio 19.C.I. Si $w^* = \theta^*$, sólo aquellos $\theta \leq \theta^*$ tienen $r(\theta) \leq w^*$, por lo que

$$E(\theta \mid r(\theta) \leq w^*) < \theta^* = w^* \tag{2.7}$$

, por lo que la empresa perdería plata, y w^* no puede ser parte de un equilibrio. El supuesto que $f(\theta) > 0$ para todo θ fue usado para poder poner una desigualdad estricta en la ecuación (2.7).

Ejercicio 19.C.II. Supongamos que $w^* > \theta^*$ y sea $\widehat{\theta}$ el tipo tal $r\left(\widehat{\theta}\right) = w^*$. Por supuesto, tenemos que $\widehat{\theta} > \theta^*$. También, sólo los tipos $\theta \leq \widehat{\theta}$ aceptan trabajo, por lo cual

$$E(\theta \mid r(\theta) \leq w^*) = E\left(\theta \mid \theta \leq \widehat{\theta}\right) < \widehat{\theta} < r\left(\widehat{\theta}\right) = w^*$$

(la primera desigualdad usa $f > 0$, y la segunda usa que $r\left(\widehat{\theta}\right) > \widehat{\theta}$ dado que $\widehat{\theta} > \theta^*$). Por lo tanto, no puede haber un equilibrio con $w^* > \theta^*$.

Ejercicio 19.C.III. Si hay algún equilibrio, debe ser con $w^* < \theta^*$, por lo cual habrá trabajadores con $\theta \leq \theta^*$ que no estarán empleados en equilibrio, y eso viola la Pareto Optimalidad.

Ejercicio 20.A Hay que demostrar que si θ acepta empleo y $\theta' > \theta$ entonces θ' acepta empleo. Tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \theta \text{ acepta } \Leftrightarrow r(\theta) \leq w \\ \theta' > \theta \Leftrightarrow r\left(\theta'\right) < r(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow w \geq r(\theta) > r\left(\theta'\right)$$

con lo cual θ' acepta empleo.

Ejercicio 20.B.I Tenemos que

$$\begin{aligned} w &= \widehat{\theta} < E\left[\theta \mid \theta \geq \widehat{\theta}\right] = E\left[\theta \mid r(\theta) \leq r\left(\widehat{\theta}\right)\right] \\ &= E\left[\theta \mid r(\theta) \leq \widehat{\theta}\right] = E\left[\theta \mid r(\theta) \leq w\right] \\ &= E\left[\theta \mid \theta \in \Theta^*\right] \end{aligned}$$

lo que constituye una contradicción.

Ejercicio 20.B.II Tenemos que $w < \widehat{\theta} \Leftrightarrow r^{-1}(w) > r^{-1}\left(\widehat{\theta}\right) = \widehat{\theta}$. Por lo tanto, con $\theta^* \equiv r^{-1}(w)$ tenemos $r(\theta^*) = w$ y $w < \widehat{\theta} < \theta^*$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} w &< \theta^* < E[\theta \mid \theta \geq \theta^*] = E[\theta \mid r(\theta) \leq r(\theta^*)] \\ &= E[\theta \mid r(\theta) \leq w] = E[\theta \mid \theta \in \Theta^*] \end{aligned}$$

lo que constituye una contradicción.

Ejercicio 21. Veremos primero que no hay ningún equilibrio en el cual se intercambian los dos tipos de monedas. Supongamos que si, para llegar a una contradicción. Tendríamos que

$$\frac{1}{p} = q\theta_b + (1-q)\theta_m \Leftrightarrow p = \frac{1}{q\theta_b + (1-q)\theta_m}.$$

Si este fuera el caso, tendríamos que los poseedores de ambos tipos de monedas deberían querer intercambiarlas, por lo cual se debería satisfacer que el valor como no-monedas tiene que ser menor o igual que el valor como monedas. Formalmente,

$$\theta_b \leq \frac{1}{p} = q\theta_b + (1-q)\theta_m < \theta_b$$

lo que constituye una contradicción.

Veremos ahora que una situación en la cual sólo se intercambian las monedas malas es en efecto de equilibrio. En ese caso tendríamos que

$$\frac{1}{p} = \theta_m \Leftrightarrow p = \frac{1}{\theta_m}$$

y de hecho,

$$\theta_m = \frac{1}{p} = \theta_m.$$

No nos hemos ocupado aquí de equilibrios en los cuales se comercializa sólo una parte de las monedas buenas, o sólo una parte de las malas, pero es fácil demostrar que no existen tales equilibrios, pues q en este caso fué arbitrario, y podría representar las creencias en cualquiera de esos equilibrios.

Por supuesto, la interpretación de este equilibrio es la ley de Gresham: las monedas malas desplazan a las buenas.

Ejercicio 22.A. Si $\theta \notin \Theta^*$ es porque $w \leq (1-d)\theta < (1-d)\theta'$ para todo $\theta' > \theta$, y por tanto $\theta' \notin \Theta^*$.

22.B. Para hacerlo un poquito más general, no asuma que $d < \frac{1}{2(a+1)}$. Para $w \leq (1-d)a$ nadie acepta empleo, y por tanto el valor esperado de los tipos no está bien definido. Para los demás w, tenemos que un trabajador acepta empleo si y sólo si $\theta \leq \frac{w}{1-d}$, por lo que la productividad esperada es

$$\begin{array}{cc} \frac{\frac{w}{1-d}+a}{2} & \text{si } (1-d)a \leq w \leq (1-d)(1+a) \\ a + \frac{1}{2} & \text{en caso contrario} \end{array}$$

o, en forma más compacta,

$$E\left[\theta \mid \theta \leq \frac{w}{1-d}\right] = \min\left\{\frac{\frac{w}{1-d}+a}{2}, a+\frac{1}{2}\right\}.$$

El equilibrio se da cuando

$$\frac{\frac{w}{1-d}+a}{2}=w \Leftrightarrow w=\frac{a\,(1-d)}{1-2d}$$

si $d<\frac{1}{2(a+1)}$, o cuando $w=a+\frac{1}{2}$ si $d\geq\frac{1}{2(a+1)}$. El equilibrio es entonces

$$(w,\Theta^*)=\begin{cases}\left(\frac{a(1-d)}{1-2d},\left\{\theta:\theta\leq\frac{a}{1-2d}\right\}\right) & d<\frac{1}{2(a+1)}\\ \left(a+\frac{1}{2},[a,a+1]\right) & d\geq\frac{1}{2(a+1)}\end{cases}$$

22.C. Para d pequeño que es el caso que nos interesa, es decir, para $d<\frac{1}{2(a+1)}$, el conjunto de los que trabajan en su casa es $\theta>\frac{a}{1-2d}$. Cuando d se acerca a 0, el conjunto de los que trabajan en su casa es $\theta>a$, es decir, todos. Sin embargo, cuando d es cercano a 0, las productividades en el trabajo y en la casa son prácticamente iguales, por lo que el problema de la selección adversa no es grave.

Ejercicio 23.A. La respuesta breve es no: si los tipos son observables, las empresas elegirán sólo a los sanos y dejarán a los enfermos en la calle (no porque sean malas. Si hay empresas haciendo eso, las empresas que sólo aspiren a obtener beneficio 0, no podrán porque habrá más de $\frac{1}{2}$ de graves). Esta columna es ilustrativa (la respuesta de la Parte B es que si se puede).

Politicians on Drugs

June 18, 2002

By PAUL KRUGMAN

Yesterday House Republicans announced their prescription drug plan for retirees. It was, of course, an election-year gesture. So, to be sure, was last week's rival announcement by Senate Democrats. Soon each side will be accusing the other of obstructionism. What's a voter to think?

The short answer is that the Senate Democrats have a plan that can be criticized but is definitely workable. The House Republicans, by contrast, have a plan that would quickly turn into a fiasco - but not, of course, until after the next election.

Why should we have prescription drug insurance in the first place? One answer is that the voters want it. A better answer is that it is needed to preserve Medicare's original mission: to ensure that all retired Americans have access to necessary health care.

The omission of prescription drug coverage from Medicare was less a policy decision than an oversight; when the program was created, prescription drugs were not a major expense. But since then there has been a pharmacological revolution in medicine, especially for the elderly. And with sustained use of expensive drugs so essential to millions of people, what was a small omission has become a gaping hole.

Patching that hole would be expensive, but not prohibitively so. The Senate Democratic plan would cost about $500 billion over the next decade; if we could afford that $1.35 trillion tax cut, we can afford prescription drug coverage - and if we can't afford both, why not reconsider some of the tax cut? Just by cancelling future cuts for the top income tax bracket, and retaining current taxes on estates over $3 million, Congress could save enough revenue to pay for the Senate Democrats' plan – and adversely affect only a handful of very affluent families.

Of course, the House Republican plan, with a price tag of $350 billion, looks even more affordable. What's wrong with it?

One answer is that in order to have that $150 billion, the Republican plan leaves many truly needy retirees behind. The Senate Democratic plan imposes fairly hefty co-payments, but then covers all subsequent expenses. The House Republican plan provides pretty good coverage for the first $1,000 in expenses, much less coverage for the next $1,000, and nothing at all after that until you reach a $4,500 annual limit. So a

retiree with, say, $6,000 in drug expenses would find himself paying the full $4,500 – a crippling expense for many families.

Anyway, all that is hypothetical, because according to early reports the House Republican plan has an even bigger flaw: instead of providing insurance directly, it will subsidize insurance companies to provide the coverage.

The theory, apparently, is that competition among private insurance providers would somehow lead to lower costs. In fact, the almost certain result would be an embarrassing fiasco, because the subsidy would have few if any takers. The trouble with drug insurance, from a private insurer's point of view, is that some people have much higher drug expenses than the average, while others have expenses that are much lower - and both sets of people know who they are. This means that any company that tries to offer drug insurance will find that if it tries to offer a plan whose premiums reflect average drug costs, the only takers will be those who have above-average drug costs.

A similar problem of "adverse selection" affects all insurance, but in the case of ordinary health insurance the differences in predictable expenses among individuals are narrow enough that companies can still design policies that both protect individuals and pay their way. In the case of prescription drug coverage for the elderly, insurance companies have decided that there is no viable business model - and there is no reason to believe that the House Republicans have found a way to change their minds.

So that's the situation. Senate Democrats have a plan that is sensible and workable, but House Republicans surely won't agree to anything resembling that plan. Senate Democrats might be bullied into something resembling the House Republican plan, but since that plan is completely unworkable, that's the same as getting no drug plan at all - which, I suspect, is what the Republican leaders really want in any case.

Some retired Americans may still think that they'll soon be getting prescription drug coverage under Medicare. They should live so long.

Medical Class Warfare
By PAUL KRUGMAN
Published: July 16, 2004

If past patterns are any guide, about one in three Americans will go without health insurance for some part of the next two years. They won't, for the most part, be the persistently poor, who are usually covered by Medicaid. They will be members of working families with breadwinners who have jobs without medical benefits or who have been laid off.

Many Americans fear the loss of health insurance. Last week I described John Kerry's health plan. What's the Bush administration's plan?

First, it offers a tax credit for low- and middle-income families who don't have health coverage through employers. That credit helps them purchase health insurance. The credit would be $3,000 for a family of four with an income of $25,000; for an income of $40,000, it would fall to $1,714. Last year the average premium for families of four covered by employers was more than $9,000.

A study by the Kaiser Family Foundation estimates that the tax credit would reduce the number of uninsured, 44 million people in 2002, by 1.8 million. So it wouldn't help a great majority of families unable to afford insurance. For comparison, an independent assessment of the Kerry plan by Kenneth Thorpe of Emory University says that it would reduce the number of uninsured by 26.7 million.

The other main component of the Bush plan involves "health savings accounts." The prescription drug bill the Bush administration pushed through Congress last year had a number of provisions unrelated to Medicare. One of them allowed people who purchase insurance policies with high deductibles, generally at

least $2,000 per family, to shelter income from taxes by setting up special accounts for medical expenses. This year, the administration proposed making the premiums linked to these accounts fully tax-deductible.

Although the 2005 budget presents that new deduction under the heading "Helping the uninsured," health savings accounts don't seem to have much to do with the needs of the families likely to find themselves without health insurance. For one thing, such families need more protection than a plan with a $2,000 deductible provides. Furthermore, the tax advantages of health savings accounts would be small for those families most at risk of losing health insurance, who are overwhelmingly in low tax brackets.

But for people whose income puts them in high tax brackets, these accounts are a very good deal; making the premiums deductible turns them into a great deal. In other words, health savings accounts will offer the already affluent, who don't have problems getting health insurance, yet another tax shelter. Meanwhile, health savings accounts, in the view of many experts, will actually increase the number of uninsured.

This perverse effect shouldn't be too surprising: unless they are carefully designed, medical policies often have side consequences that worsen the problems they supposedly address. For example, the Congressional Budget Office estimates that one-third of the retirees who now have drug coverage through their former employers will lose that coverage as a result of the Bush prescription drug bill and will be forced to accept inferior coverage from Medicare.

In the case of health savings accounts, the key side consequence is a reduced incentive for companies to insure their workers. When companies provide group health insurance, healthier employees implicitly subsidize their sicker colleagues. They're willing to do this largely because the employer's contributions to health insurance are a tax-free form of compensation, but only if the same plan is offered to all employees.

Tax-free health savings accounts and premiums would provide healthier and wealthier employees an incentive to opt out, accepting higher paychecks instead, and would lead to higher insurance premiums for those who remain in traditional plans. This would cause some companies to stop providing health insurance, or raise employee contributions to a level some workers can't afford.

The difference couldn't be starker. Mr. Kerry offers a health care plan that would extend coverage to most of those now uninsured, paid for by rolling back tax cuts for those with incomes over $200,000. President Bush offers a tax credit that would extend coverage to fewer than 5 percent of the uninsured, plus a new tax break for the affluent that would actually increase the number of uninsured. As I said last week, I don't see how Mr. Bush can win this debate

Ejercicio 24. Tenemos

$$p_A\left(x_A - R^*\right) = p_B\left(x_B - R^*\right) \Leftrightarrow R^* = \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B}$$

y los retornos para el banco son

$$\begin{array}{ll} p_B R - I & R > R^* \\ p_A R - I & R \leq R^* \end{array}.$$

Si hay N inversores, y el banco tiene L con $I < L < NI$, aumentar la tasa no afecta la demanda de préstamos, por lo que sería "el mundo ideal" para subir las tasas, pero una suba haría que la gente cambiara de proyectos. Si $R > R^*$ lo óptimo es $R = x_B$ y los beneficios son $p_B x_B - I$, que es mejor que $R = R^*$ si y sólo si

$$\begin{array}{rcl} p_B x_B - I & > & p_A R^* - I \Leftrightarrow p_B x_B > p_A \dfrac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B} \Leftrightarrow \\ 0 & > & \dfrac{\left(x_A - x_B\right) p_A^2 + x_B\left(p_A - p_B\right)^2}{p_A - p_B} \\ & \Leftrightarrow & \left(x_B - x_A\right) p_A^2 > x_B\left(p_A - p_B\right)^2 \end{array}$$

que puede suceder, o no. Si no se cumple, el banco mantiene $R = R^*$, y hay racionamiento.

Ejercicio 25. A. La probabilidad a priori de éxito es $m = \alpha p + (1-\alpha)q$.

25.B. El retorno R_d^b viene dado por la condición de beneficio 0 del banco (inversión igual a pago esperado), por lo que $p(R - R_d^b) = I$. Respecto al tipo malo, tenemos dos casos:

- Si $p^m R < I$ entonces el tipo malo no recibe financiamiento.
- si $p^m R \geq I$ entonces el tipo malo recibe financiamiento y asegura una compensación R_d^m tal que: $q(R - R_d^m) = I$.

Se cumple que $R_d^m < R_d^b$.

25.C. Al malo le convendrá hacerse pasar por bueno y obtener un retorno mejor: $p^m R_d^b > p^m R_d^m$.

25.D. $\left[\alpha p^b + (1-\alpha)p^m\right](R - R_d) - I \equiv \pi\,(R - R_d) - I$.

25.E. Si se cumple que $\pi R < I$, quiere decir que ni siquiera con $R_d = 0$ podrá el banco recuperar la inversión. Ello se cumple si α es muy chico. Sea α^* tal que

$$\left[\alpha^* p^b + (1-\alpha^*)p^m\right] R - I = 0 \Leftrightarrow \alpha^* = \frac{I - Rp^m}{R\,(p^b - p^m)}$$

Como $p^b R > I$ entonces para que $\pi R < I$ se tiene que cumplir que $p^m R < I$ (como hemos asumido). Entonces, si $\alpha < \alpha^*$ no hay mercado y el empresario bueno no consigue financiamiento aún cuando su proyecto es rentable.

25.F. Si se cumple que es rentable dar financiamiento a todos los proyectos, tomados en promedio, pero los proyectos malos no son rentables, habrá sobre inversión. La primera condición (para que sea rentable financiar) es que $\pi R = \left[\alpha p^b + (1-\alpha)p^m\right] R \geq I$, o lo que es lo mismo, $\alpha \geq \alpha^*$. La segunda (para que los malos no sean rentables) es $p^m R < I$. Por lo tanto, las dos ecuaciones que, si se cumplen, arrojan sobre inversión son

$$\alpha \geq \alpha^* = \frac{I - Rp^m}{R\,(p^b - p^m)} \quad \text{pero} \quad p^m R < I.$$

25.G. Siempre que haya crédito, habrá subsidios cruzados: es decir, siempre que $mR > I$. En ese caso, el retorno para el deudor es R_d tal que $m(R - R_d) = I$. Esta condición es equivalente a

$$\alpha\left[p^b(R - R_d) - I\right] + (1-\alpha)\left[p^m(R - R_d) - I\right] = 0$$

que es un promedio ponderado (con α como ponderador) entre dos números. Como el primero $\left[p^b(R - R_d) - I\right]$, es necesariamente estrictamente mayor que el segundo $\left[p^m(R - R_d) - I\right]$, y el promedio es 0, el primero es positivo, y el segundo negativo.

Ejercicio 26. Si el precio es p, el inversor informado participará si y sólo si, $x \geq p$. Por lo tanto, cuando el precio es p, el retorno esperado para los inversores es

$$0 = \frac{1}{m}\int_0^p (X - p)\, f(X)\, dX + \frac{1}{m+1}\int_p^1 (X - p)\, f(X)\, dX \tag{2.8}$$

que para la uniforme se transforma en

$$0 = \frac{p^2 + 2mp - m}{2m\,(m+1)} \Leftrightarrow p = \sqrt{m\,(m+1)} - m.$$

En general, sumando y restando $\int_p^1 \frac{X-p}{m} f(X)\,dX$ en (2.8), obtenemos

$$0 = \frac{E(X)-p}{m} - \int_p^1 \frac{X-p}{m(m+1)} f(X)\,dX \Leftrightarrow p = E(X) - \int_p^1 \frac{X-p}{m+1} f(X)\,dX < E(X)$$

(la desigualdad es porque en la integral $X > p$).

Para ver que la prima $E(X) - p$ cae con m, vemos en la siguiente ecuación que una suba de m hace caer el lado derecho, por lo que la igualdad se reestablece con una suba de p que hace caer el lado izquierdo y mitiga un poco la caída inicial provocada por m :

$$E(X) - p = \int_p^1 \frac{X-p}{m+1} f(X)\,dX.$$

El valor esperado de la firma, es el valor esperado de los retornos. Si no participó el informado, el valor será

$$V_n = \int_0^p X \frac{f(X)}{F(p)} dX \Rightarrow V_n - p = \int_0^p (X-p) \frac{f(X)}{F(p)} dX < 0$$

mientras que si sí participó,

$$V_s = \int_p^1 X \frac{f(X)}{1-F(p)} dX \Rightarrow V_s - p = \int_p^1 (X-p) \frac{f(X)}{1-F(p)} dX > 0$$

Ejercicio 27. La condición de equilibrio es que

$$p = E\left[k + z \mid \frac{2}{3}z \le p\right] = \int_0^{\frac{3}{2}p} (k+z) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\frac{3}{2}p} dz = \int_0^{\frac{3}{2}p} (k+z) \frac{2}{3p} dz = k + \frac{3}{4}p \Leftrightarrow p = 4k.$$

Esa condición vale si $k \le \frac{1}{4}$. Para $k \ge \frac{1}{4}$, queda $p = k + \frac{3}{4}$.

Ejercicio 28.A. Notamos primero que para que haya equilibrio, la ganancia total de los compradores debe ser independiente del auto que compran (o de lo contrario querrían comprar el auto que da más utilidad). Eso se traduce en que para los autos que se intercambian,

$$\frac{3}{2}q - p(q) = k \Leftrightarrow p(q) = \frac{3}{2}q - k.$$

Tenemos a su vez que para que los vendedores quieran vender sus autos, para los autos que se intercambian se debe cumplir

$$\frac{3}{2}q - k \ge q \Leftrightarrow \frac{q}{2} \ge k. \tag{2.9}$$

Vemos también que si un auto de calidad q se intercambia, también se intercambiarán todos los autos de calidad $q' > q$, pues si algún auto de calidad $q' > q$ no se intercambiara, el dueño podría ir al comprador del auto de calidad q y ofrecerle su auto a un precio de $3q/2 - k + q' - q$ (el precio del auto q, más la diferencia de calidades, para compensar al vendedor por el hecho que $q' > q$). En ese caso, el comprador obtendría una utilidad mayor que la de comprar el de calidad q, pues

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}q' - \left(\frac{3}{2}q - k + q' - q\right) &> \frac{3}{2}q - \left(\frac{3}{2}q - k\right) \Leftrightarrow \\ \frac{3}{2}q' - \left(\frac{3}{2}q + q' - q\right) + k &> k \Leftrightarrow \frac{1}{2}(q' - q) > 0 \end{aligned}$$

El vendedor obtendría una mayor utilidad vendiendo que no:[6]

$$\frac{3}{2}q - k + q' - q \ge q' \Leftrightarrow \frac{1}{2}q \ge k$$

[6] La demostración es mejor si el precio que ofrece el vendedor es $\frac{3}{2}q - k + \frac{5}{4}(q' - q)$, en el cual se reparten las ganancias del comercio, y el vendedor gana estrictamente más que no vendiendo.

que se cumple, por la ecuación (2.9).

Tenemos entonces que un auto se intercambiará si y sólo su calidad es mayor que una cierta calidad q^*. La calidad q^* está definida por la condición que la masa de autos por encima de q^* tiene que ser 1 (cantidad total demandada, igual a cantidad total ofrecida):

$$(1-q^*)(1+\lambda)=1 \Leftrightarrow q^*=\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

La ecuación (2.9) nos dice entonces que

$$\frac{q^*}{2}\geq k \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\geq k. \tag{2.10}$$

Por otro lado, debe suceder que para q arbitrariamente cercanos a q^*, al comprador le convenga comprar autos por encima de q^*, y no el q a penas por debajo de q^*. Como el comprador puede ofrecer $\lambda/(1+\lambda)$ a cualquier q por debajo de q^* y el vendedor aceptaría, debemos tener

$$(\text{utilidad de comprar } q>q^*)=k\geq \frac{3}{2}q^*-\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}. \tag{2.11}$$

Más estrictamente, debemos tener que k debe ser mayor que la utilidad de comprar $q^*-\varepsilon$ a un precio de $\lambda/(1+\lambda)$ para todo ε. Eso se reduce por supuesto a

$$k\geq \frac{3}{2}(q^*-\varepsilon)-\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}-\frac{3}{2}\varepsilon$$

para todo epsilon, que implica la desigualdad de (2.11). Las ecuaciones (2.10) y (2.11) implican $k=\lambda/2(1+\lambda)$. Este k termina la caracterización del equilibrio cuando q es observable.

28.B. El equilibrio es eficiente pues se maximiza el excedente generado (ningún comprador podría cambiar de vendedor y generar más excedente), y no se puede redistribuir de forma de mejorar a alguien sin perjudicar a alguien más.

28.C. Como hay más vendedores que compradores, los compradores se llevan las ganancias del intercambio, y eso resulta en que si $Z(p)$ es el conjunto de autos intercambiados en equilibrio,

$$p=E(q\mid q\in Z(p))=E(q\mid q\leq p)=\frac{p}{2}$$

con lo cual el único precio posible es 0.

Ejercicio 29.A. El primer equilibrio es cuando el salario es $w=0$ y no trabaja nadie. Para encontrar el segundo, notamos que dada la forma de $r(\theta)$, tenemos que $E(\theta\mid r(\theta)\leq w)$ es $E\left(\theta\mid\theta\leq\frac{1}{2}\right)$ (si $0<w<1$) o $E(\theta\mid\theta\leq 1)=E(\theta)$ (si $w\geq 1$). Como $F(x)=x^2$, tenemos

$$E\left(\theta\mid\theta\leq\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{F\left(\frac{1}{2}\right)}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^2}{\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{3}\quad\text{y}\quad E(\theta)=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el único equilibrio con $w>0$ es con $w=1/3$ y trabajan los $\theta\leq 1/2$.

29.B. La asignación Pareto Óptima es que trabajen los $\theta\leq\frac{1}{2}$ y que se queden en sus casas los $\theta>\frac{1}{2}$. Por lo tanto el equilibrio de $w=0$ es ineficiente, y el de $w=\frac{1}{3}$ es eficiente. En el de $w=0$ la pérdida de bienestar es es

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\theta 2\theta d\theta=\frac{1}{12}.$$

29.C. Hay cuatro equilibrios, el de $w = 0$ y el de $w = 1/3$ son igual que antes. Otro, sencillo, es con $w = 2/3$ y trabajan todos (sabemos de la Parte A que $E(\theta) = \frac{2}{3}$). El que es distinto, es con $w = \frac{3}{5}$. En ese caso, cada trabajador con $r = 3/5$ está indiferente entre trabajar y no trabajar, por lo tanto, podemos elegir que una parte trabaje, y la otra no, para que el valor esperado de los θ que trabajan sea justo 3/5. Probamos primero con la versión más fácil: trabajan todos los $\theta \leq k$, y encontramos k :

$$\int_0^k \frac{2x^2}{k^2} dx = \frac{3}{5} \Leftrightarrow k = \frac{9}{10}.$$

Hay otros ... ¡infinitos!. Por ejemplo, trabajan todos los $\theta \leq \frac{4}{5}$, y los $\theta \geq k$, y encontramos k :

$$\int_0^{\frac{4}{5}} \frac{2x^2}{\frac{16}{25} + 1 - k^2} dx + \int_k^1 \frac{2x^2}{\frac{16}{25} + 1 - k^2} dx \Leftrightarrow k = 0.94068$$

Ejercicio 30.A. Un equilibrio resuelve

$$p = E(q + \alpha \mid p \geq q),$$

por lo que encontramos primero $E(q + \alpha \mid p \geq q)$, para luego igualar a p y resolver. Tenemos que, como las calidades son uniformes, si $p \leq 1$,

$$E(q + \alpha \mid p \geq q) = E(q \mid p \geq q) + \alpha = \frac{p}{2} + \alpha$$

y entonces $p = \frac{p}{2} + \alpha \Leftrightarrow p = 2\alpha$ (por lo que α debe ser menor o igual que $\frac{1}{2}$). Dado el precio de equilibrio, se intercambiarán todas las calidades menores que $2\alpha > 0$ (siempre hay algo de intercambio). Si $p \geq 1$, el valor esperado de las calidades es $\frac{1}{2}$, por lo que $p = \frac{1}{2} + \alpha$, y este es el equilibrio si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Para que todos los vendedores vendan su auto, debemos tener que $p \geq 1$, y como $p = 2\alpha$, debemos tener $2\alpha \geq 1$, y el mínimo α para el que se cumple eso es $\alpha^* = \frac{1}{2}$.

30.B. Si el precio es p, venderán su auto los vendedores de tipo alto para los que $p \geq q$ (la probabilidad de ese evento es $p/2$) y los vendedores de tipo bajo para los que $p \geq q/2$ (probabilidad $2p/2 = p$). Tenemos entonces que para $p \leq \frac{1}{2}$, la "cantidad" de autos que se venderán (la probabilidad de una venta) es

$$\Pr(\text{venta a precio } p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}2p = \frac{3}{2}p$$

(Para ver que esta cuenta "está bien", note que si $p = 1/2$, la probabilidad de venta sería 3/4, pues venden todos los bajos, y la mitad de los altos). Para $1 \geq p \geq \frac{1}{2}$, la probabilidad de venta es 1/2 (pues todos los bajos venden) más la probabilidad que los altos vendan:

$$\Pr(\text{venta a precio } p) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} = \frac{p+1}{2}.$$

El valor esperado de la calidad, como función del precio es, la probabilidad que el tipo sea alto (condicional al precio), por el valor esperado dado que el tipo es alto, más la probabilidad de bajo, por la esperanza si es bajo. Más formalmente, para $p \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} E(q \mid p) &= \Pr(a \mid p) E(q \mid p\&a) + \Pr(b \mid p) E(q \mid p\&b) = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{3}{2}p} E(q \mid p\&a) + \frac{p}{\frac{3}{2}p} E(q \mid p\&b) \\ &= \frac{1}{3} E(q \mid p\&a) + \frac{2}{3} E(q \mid p\&b) = \frac{1}{3}\frac{p}{2} + \frac{2}{3}p = \frac{5}{6}p \end{aligned}$$

Para $1 \geq p \geq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} E(q \mid p) &= \Pr(a \mid p) E(q \mid p\&a) + \Pr(b \mid p) E(q \mid p\&b) = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{p+1}{2}} E(q \mid p\&a) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{p+1}{2}} E(q \mid p\&b) \\ &= \frac{p}{p+1} E(q \mid p\&a) + \frac{1}{p+1} E(q \mid p\&b) = \frac{p}{p+1}\frac{p}{2} + \frac{1}{p+1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{p^2+1}{p+1} \end{aligned}$$

En forma más compacta,

$$E(q \mid p) = \begin{cases} \frac{5}{6}p & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{p^2+1}{p+1} & 1 \geq p \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

De la condición de equilibrio $p = E(q+\alpha \mid \text{venden a precio } p) = E(q \mid \text{venden a precio } p) + \alpha$ obtenemos $p = 6\alpha$ (si $p \leq \frac{1}{2}$, o $\alpha \leq \frac{1}{12}$) o

$$p = \frac{1}{2}\frac{p^2+1}{p+1} + \alpha \Rightarrow p = \alpha + \sqrt{\alpha^2+2} - 1$$

si $\alpha \geq \frac{1}{12}$.

Para $1 > p$, queda $p = \frac{1}{2} + \alpha$, que sucede con $\alpha > \frac{1}{2}$.

30.C. En el mercado de tipos bajos, para un precio p_b el valor esperado de las calidades es, para $p_b \leq \frac{1}{2}$, $E\left(q \mid p_b \geq \frac{q}{2}\right) = p_b$. Para $p_b \geq \frac{1}{2}$, el valor esperado de las calidades es $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, en el mercado bajo, el equilibrio resuelve $p_b = E\left(q \mid p_b \geq \frac{q}{2}\right) + \alpha$: no hay equilibrio con $p_b \leq \frac{1}{2}$, ya que quedaría $p_b = p_b + \alpha$; con $p_b \geq \frac{1}{2}$, tenemos que el equilibrio es $p_b = \frac{1}{2} + \alpha$.

En el mercado de tipos altos, la solución es como en la Parte A del Ejercicio. Para un precio p_a el valor esperado de las calidades es: para $p_a \leq 1$, $E(q \mid p_a \geq q) = \frac{p_a}{2}$; para $p_a \geq 1$, $E(q \mid p_a \geq q) = \frac{1}{2}$. En el mercado alto, p_a de equilibrio resuelve $p_a = E(q \mid p_a \geq q) + \alpha$, por lo que si $p_a \leq 1$ tenemos $p_a = \frac{p_a}{2} + \alpha \Leftrightarrow p_a = 2\alpha$ (con $\alpha \leq \frac{1}{2}$) y si $p_a \geq 1$, tenemos $p_a = \frac{1}{2} + \alpha$, que corresponde al caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Ejercicio 31.A. Un dueño que posee un auto de calidad $\theta \in [0,1]$ lo vende si $p \geq \theta$. Entonces, como siempre, la calidad esperada a un precio p es

$$\widehat{\theta}(p) = E(\theta \mid \theta \leq p) = \begin{cases} \frac{p}{2} & p \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & p \geq 1 \end{cases}$$

31.B. Un tipo A compra si

$$p \leq 2\widehat{\theta} = 2E(\theta \mid \theta \leq p) = \begin{cases} p & p \in [0,1] \\ 1 & p \geq 1 \end{cases}.$$

Es decir, compra para cualquier $p \leq 1$, no compra si $p > 1$. Un tipo B compra si

$$p \leq \frac{3}{2}\widehat{\theta} = \begin{cases} \frac{3p}{4} & p \in [0,1] \\ \frac{3}{4} & p \geq 1 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, compra si y sólo si $p = 0$. La demanda es entonces

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 1 \\ [0,100] & \text{si } 1 \geq p > 0 \\ 200 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

31.C. Como la densidad de las calidades es uniforme entre 0 y 1, y hay 200 autos, para cada p, la probabilidad de $\theta \leq p$ es p, y eso multiplicado por 200 es $200p$. Por lo tanto, la oferta de autos es

$$S(p) = \begin{cases} 200p & p \in [0,1] \\ 200 & p \geq 1 \end{cases}$$

Igualando oferta y demanda vemos que para cualquier precio $p^* \leq \frac{1}{2}$ hay un equilibrio: al precio p^*, los vendedores ofrecen $200p^* \leq 100$, y una cantidad $200p^*$ los compran (podemos elegir la cantidad de compradores que querramos, mientras sea menor que 100, ya que son indiferentes entre comprar y no comprar).

Ejercicio 32.A. Los vendedores a venden autos $z \leq p$; los vendedores b venden autos $z \leq p/c$.

32.B. El total de autos ofrecidos a un precio p es $\frac{p}{2} + \frac{p}{2c}$, por lo que la probabilidad que un auto venga de un tipo a es $p/2$ sobre el total, $\frac{p}{2} + \frac{p}{2c}$. Más formalmente, la probabilidad de que un auto venga de un tipo a es

$$P(a \mid \text{se vende}) = \frac{P(\text{vende} \mid a) P(a)}{P(\text{vende} \mid a) P(a) + P(\text{vende} \mid b) P(b)} = \frac{p\frac{1}{2}}{p\frac{1}{2} + p\frac{1}{2c}} = \frac{c}{c+1}.$$

La probabilidad que venga de un tipo b es $1 - \frac{c}{c+1} = \frac{1}{c+1}$.

32.C. Como siempre, es el valor medio del intervalo en cuestión. Si viene de un a, máximo z es p, por lo que el valor esperado es $p/2$. Si viene de un b, el máximo z es p/c, por lo que el valor esperado es $p/2c$.

32.D. Tenemos que

$$\begin{aligned} E(z \mid \text{se vende a } p) &= E(z \mid \text{se vende a } p \text{ y } a) P(a \mid \text{vende a } p) + E(z \mid \text{se vende y } b) P(b \mid \text{vende}) \\ &= \frac{p}{2}\frac{c}{c+1} + \frac{p}{c2}\frac{1}{c+1} = p\frac{c^2+1}{2c(c+1)}. \end{aligned}$$

32.E. Para $p > c$, ya entraron todos los vendedores de tipo bajo. Entonces, el valor esperado de la calidad depende de

$$P(a \mid \text{se vende a } p) = \frac{P(\text{vende} \mid a) P(a)}{P(\text{vende} \mid a) P(a) + P(\text{vende} \mid b) P(b)} = \frac{p\frac{1}{2}}{p\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{p}{p+1}.$$

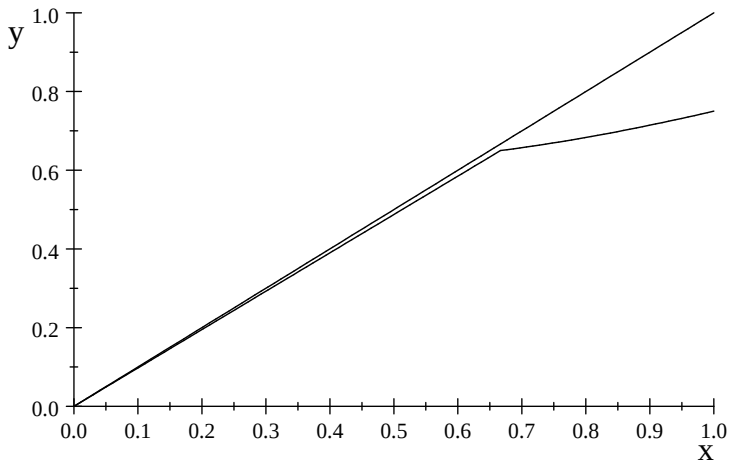
Por supuesto, $P(b \mid \text{se vende a } p) = 1/(1+p)$. Entonces,

$$\begin{aligned} E(z \mid \text{se vende a } p) &= E(z \mid \text{se vende a } p \text{ y } a) P(a \mid \text{vende a } p) + E(z \mid \text{se vende y } b) P(b \mid \text{vende}) \\ &= \frac{p}{2}\frac{p}{p+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2}\frac{p^2+1}{p+1}. \end{aligned}$$

Una cosa para notar es que cuando $p = c$, esto es igual a lo de la Parte D (como tiene que ser). Tenemos entonces

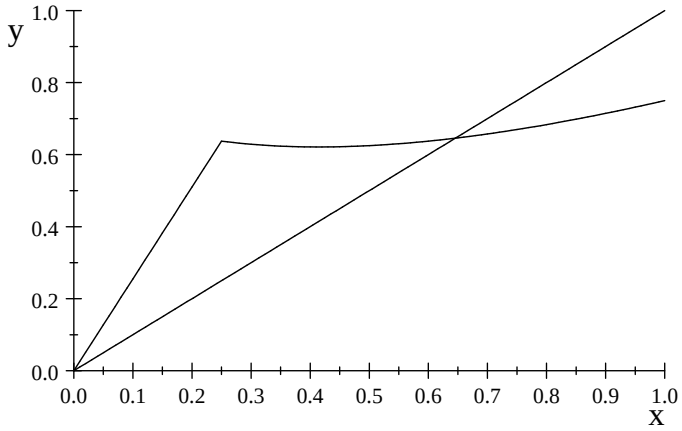
$$E(z \mid \text{se vende a } p) = \begin{cases} p\frac{c^2+1}{2c(c+1)} & p \leq c \\ \frac{1}{2}\frac{p^2+1}{p+1} & 1 \geq p \geq c \end{cases}. \tag{2.12}$$

Para $c = \frac{2}{3}$ tenemos que los gráficos de $\frac{3}{2}E(z \mid \text{se vende a } p)$ y p son



por lo que el equilibrio es con $p = 0$. Formalmente, igualamos $p = p\frac{39}{40}$ (del primer renglón) y da $p = 0$. O igualamos $p = \frac{3}{4}\frac{p^2+1}{p+1}$, y obtenemos $p = \sqrt{7} - 2 = 0.645\,75 < \frac{2}{3}$, que no puede ser porque precisamos $p \geq c$.

32.F. Del primer renglón de la ecuación (2.12) tenemos $p = \frac{3}{2}p\frac{\frac{1}{9}+1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}$, o $p = 0$. Del segundo renglón, ya hicimos la cuenta en la Parte E y obtuvimos $p = \sqrt{7} - 2 = 0.645\,75 > 1/3$. Gráficamente,



33.A. Para $p \geq \frac{1}{4}$ venden todos los dueños, y el valor promedio de los autos es $1/2$, por lo que debemos tener $p = 1/2$. Para cada $p \leq \frac{1}{4}$, venderán sólo aquellos dueños con $v(z) \leq p \Leftrightarrow z \leq \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2}$ o $z \geq \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2}$. Dado un precio $p \leq 1/4$, si un auto se vende, es igual de probable que sea $z \leq \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2}$ o $z \geq \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned} E(z \mid v(z) \leq p) &= \frac{1}{2}E\left(z \mid z \leq \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2}\right) + \frac{1}{2}E\left(z \mid z \geq \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-4p}}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{1-4p}}{4}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La idea es sencilla: cuando "recortamos" la parábola v y le sacamos la parte superior, nos quedan las dos "colas" (la de abajo, que va hasta 0 y la de arriba, que va hasta 1); en promedio, esos intervalos de zs valen $1/2$. Por lo tanto, debemos otra vez tener $p = 1/2$, lo que contradice $p \leq \frac{1}{4}$, y establece que el único equilibrio es con $p = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 34. La firma 2 cree a priori que $s \sim U[0, S]$ pero sabe que si la firma 1 lo esta vendiendo es porque el precio compensa la utilidad que pierde al vender: sabe que la calidad del bien es tal que $p \geq \theta_1 s$. Por lo tanto, para el comprador el bien vale $E[\theta_2 s \mid \theta_1 s \leq p^*] = \theta_2 \frac{p^*}{2\theta_1} \leq p^*$. Por lo tanto no hay intercambio a ningún precio mayor que 0.

Finalmente (no es parte del ejercicio), si $\theta_2 \geq 2\theta_1$ la firma 1 pide $p^* = \frac{\theta_2}{2}S \geq \theta_1 S$, y entonces todos los tipos de la firma 1 venden, y el comprador está dispuesto a comprar.

Ejercicio 35. Supongamos que para un precio p la estrategia del jugador 1 es, para algún s^*, "vendo si y sólo si, $s_1 \leq s^*$", y la del 2 es, para algún s_*, "compro si y sólo si $s_2 \geq s_*$". Entonces, cuando al 1 le toca $s_1 = s^*$ y al 2 le toca $s_2 = s_*$, tienen que querer intercambiar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Jugador 1: } p \geq E(c \mid s_1 = s^*; \widetilde{s}_2 \geq s_*) \\ \text{Jugador 2: } p \leq E(c \mid \widetilde{s}_1 \leq s^*; s_2 = s_*) \end{array}\right\} \Rightarrow E(c \mid \widetilde{s}_1 \leq s^*; s_2 = s_*) \geq p \geq E(c \mid s_1 = s^*; \widetilde{s}_2 \geq s_*).$$

Pero como $E(c \mid s_1 = s^*; s_2 = s_*) > E(c \mid \widetilde{s}_1 \leq s^*; s_2 = s_*)$ y $E(c \mid s_1 = s^*; \widetilde{s}_2 \geq s_*) > E(c \mid s_1 = s^*; s_2 = s_*)$ obtenemos

$$E(c \mid s_1 = s^*; s_2 = s_*) > E(c \mid \widetilde{s}_1 \leq s^*; s_2 = s_*) \geq p \geq E(c \mid s_1 = s^*; \widetilde{s}_2 \geq s_*) > E(c \mid s_1 = s^*; s_2 = s_*)$$

que es un absurdo.

Ejercicio 36.A. Como la suma de normales independientes es normal con media igual a la suma de las medias y varianza igual a la suma de las varianzas, tenemos

$$f_\varepsilon(x) = \frac{e^{\frac{(x-0)^2}{t}}}{\sqrt{2\pi t}}, \quad f_w(x) = \frac{e^{\frac{(x-n)^2}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} \quad \text{y} \quad f_{w+\varepsilon}(x) = \frac{e^{\frac{(x-n)^2}{t+h}}}{\sqrt{2\pi(t+h)}}.$$

Por la regla de Bayes, sabemos que

$$f(w \mid w + \varepsilon = z) = \frac{f_\varepsilon(\varepsilon = z - w \mid w) f_w(w)}{f_{w+\varepsilon}(z)}$$

y como en $f_\varepsilon(\varepsilon = z - w \mid w)$ tanto z como w son conocidos tenemos

$$\begin{aligned} f(w \mid w + \varepsilon = z) &= \frac{f_\varepsilon(z-w) f_w(w)}{f_{w+\varepsilon}(z)} = \frac{e^{\frac{(z-w)^2}{t}}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{e^{\frac{(w-n)^2}{h}}}{\sqrt{2\pi h}} \frac{\sqrt{2\pi(t+h)}}{e^{\frac{(z-n)^2}{t+h}}} \\ &= \frac{e^{\frac{(z-w)^2}{t} + \frac{(w-n)^2}{h} - \frac{(z-n)^2}{t+h}}}{\sqrt{2\pi \frac{th}{t+h}}} = \frac{e^{\frac{(hw - hz - nt + tw)^2}{ht(h+t)}}}{\sqrt{2\pi \frac{th}{t+h}}} = \frac{e^{\frac{\left(w - \frac{hz+nt}{h+t}\right)^2}{ht/(h+t)}}}{\sqrt{2\pi \frac{th}{t+h}}} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

36.B. El beneficio esperado del insider es

$$E[(v-p)x] = E[(v-d-cy)x] = E[(v-d-cx-cu)x] = (v-d-cx)x,$$

que se maximiza cuando la derivada es 0 :

$$(v-d-cx) - cx = 0 \Leftrightarrow x(v) = \frac{1}{2c}v - \frac{d}{2c}. \tag{2.13}$$

Obtenemos por lo tanto, $a = -d/2c$ y $b = 1/2c$.

36.C. Como la varianza de u/b es $V\left(\frac{u}{b}\right) = \frac{\sigma^2}{b^2}$, de las ecuaciones (2.4) y (2.3) obtenemos

$$d + cy = E\left(\widetilde{v} \mid v + \frac{u}{b} = \frac{y-a}{b}\right) = \frac{\frac{\sigma^2}{b^2}}{\frac{\sigma^2}{b^2} + s^2} m + \frac{s^2}{\frac{\sigma^2}{b^2} + s^2} \frac{y-a}{b}. \tag{2.14}$$

Como esta ecuación vale para todo y, el término que multiplica a y debe ser igual a c, y el término independiente debe ser d :

$$c = \frac{bs^2}{\sigma^2 + b^2 s^2} \quad \text{y} \quad d - m = -c(a + bm) \Leftrightarrow d = \frac{\sigma^2 m - bs^2 a}{\sigma^2 + b^2 s^2}.$$

36.D. Sustituyendo en la ecuación para c la expresión para b de la Parte B, $b = 1/2c$ llegamos a $c = \frac{s}{2\sigma}$. Sustituyendo $b, a = -d/2c$ y $c = \frac{s}{2\sigma}$ en la expresión para d llegamos a $d = m$. Luego quedan $b = \frac{\sigma}{s}$ y $a = -\frac{\sigma m}{s}$.

Ejercicio 37.A. Supongamos que en el equilibrio los dos tipos de conductores compran el seguro. En ese caso, de la condición de beneficio 0 de las empresas obtenemos

$$\frac{c}{d} = aq + (1-a)p.$$

La utilidad de un tipo p de comprar el seguro es

$$u(v-c) = u(v-d(aq+(1-a)p)) \geq pu(v-d) + (1-p)u(v).$$

Normalizamos $u(v) = 1$ y $u(v-d) = 0$, y obtenemos que al buen conductor le conviene comprar el seguro si y sólo si

$$u(v-d(aq+(1-a)p)) \geq 1-p. \tag{2.15}$$

Vemos que si hubiese solo buenos conductores, la ecuación anterior sería $u(v-dp) \geq 1-p$, que se cumple siempre si la u es cóncava (eso es $u(\lambda x + (1-\lambda)\lambda) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todo x, y). Para ver eso, tomamos $\lambda = 1-p$, $x = v$ e $y = v-d$:

$$\begin{aligned} u(v-pd) &= u((1-p)v + p(v-d)) = u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) \\ &= (1-p)u(v) + pu(v-d) = 1-p. \end{aligned}$$

El problema es que aún si u es cóncava, la existencia de los tipos malos puede evitar la existencia de un equilibrio como el propuesto. A los tipos buenos (con baja probabilidad de choque) no les gusta que les cobren el promedio de los riesgos de la población (están subsidiando a los malos) pero tampoco les gusta el riesgo. La ecuación (2.15) nos muestra que si hay muchos malos conductores, un caso de a grande, entonces es más difícil que quieran participar los buenos (cae el lado izquierdo de la desigualdad).

37.B. La ecuación (2.5) nos dice que habrá seguro para todos si

$$u(v-d(aq+(1-a)p)) \geq 1-p \Leftrightarrow u\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4^\alpha} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

El coeficiente de aversión al riesgo relativa es

$$r = -\frac{xu''}{u'} = -\frac{x\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = 1-\alpha$$

por lo que cuanto más chico α, más aversión al riesgo. Lo que nos dice el resultado es que para que los buenos conductores quieran participar, tienen que ser "muy" aversos al riesgo. La idea es que por la existencia de los "limones" (los malos conductores), a los buenos les cobran más de lo que "corresponde"; para que los buenos quieran participar, este costo debe ser menor que el de no estar asegurado (y el costo de no estar asegurado es mayor cuanto más averso al riesgo el individuo).

37.C. Con $d = v = 1$, $p = \frac{1}{4} = 1-q$ queda $a \leq \frac{3}{8}$. Con $v = 1$, $p = \frac{1}{4} = 1-q = 1-d$, la condición de participación es que

$$\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(a\frac{3}{4}+(1-a)\frac{1}{4}\right)} \geq 1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow a \leq \frac{2}{3}.$$

Pero eso está mal! porque en realidad no se puede aplicar la condición (2.15) ya que no es cierto que $\sqrt{v-d} = 0$. La condición correcta de participación es

$$\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(a\frac{3}{4}+(1-a)\frac{1}{4}\right)} \geq \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\sqrt{1} \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{8}.$$

La idea es que si el daño baja (de $d = 1$ a $d = \frac{3}{4}$) a los buenos conductores ya no les molesta tanto no tener seguro; para que participen la cantidad de malos conductores debe ser menor.

Ejercicio 38. Un equilibrio es un p tal que ingresos (que son p por la póliza más el valor de los autos que recibe) son iguales a los egresos ($1):

$$1 = p + E\left(1-\frac{z}{2} \mid 1-p \geq 1-z\right) = p + E\left(1-\frac{z}{2} \mid p \leq z\right) = p + 1 - \frac{\frac{p+1}{2}}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Entonces, compran seguro los $z \geq \frac{1}{3}$, sus autos valen (en promedio) para la compañía $1 - \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$ y la compañía recibe además 1/3 por la póliza, con lo cual cubre el costo de \$1 del auto que debe comprar.

Ejercicio 39.A. Para un p cualquiera, comprarán seguro los dueños de autos caros con $\frac{3}{2} - p \geq \frac{3}{2} - z \Leftrightarrow p \leq z$. Comprarán seguro los dueños de autos malos con $\frac{3}{2} - p \geq 1 - z \Leftrightarrow z \geq p - \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la cantidad de gente que compra seguro, como función de p es

$$Q(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-p) & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - p\right) + \frac{1}{2}(1-p) & 1 \geq p \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - p\right) & \frac{3}{2} \geq p \geq 1 \end{cases}$$

39.B. La probabilidad que un auto sea bueno, dado que vino a comprar seguro es

$$\begin{aligned} P(b \mid \text{ compra}) &= \frac{P(\text{compra} \mid b) P(b)}{P(\text{compra})} = \frac{P(\text{compra} \mid b) \frac{1}{2}}{Q(p)} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p)} & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-p\right)+\frac{1}{2}(1-p)} & 1 \geq p \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \geq p \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{p-1}{p-2} & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2p-2}{4p-5} & 1 \geq p \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \geq p \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

39.C. Resolvemos la versión más completa (sin restringir $1 \geq p \geq \frac{1}{2}$). La esperanza del valor es

$$E\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{2} \mid z \geq p\right) P(b \mid \text{compra}) + E\left(1 - \frac{z}{2} \mid z \geq p - \frac{1}{2}\right) P(m \mid \text{compra}).$$

Para $p \leq \frac{1}{2}$ y utilizando los resultados de las partes A y B obtenemos

$$E = \left(\frac{3}{2} - \frac{\frac{1+p}{2}}{2}\right) \frac{p-1}{p-2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p-1}{p-2}\right) = \frac{p^2 - 6p + 7}{4(2-p)}$$

por lo que $p + E(\text{valor} \mid \text{compra}) = \frac{3}{2}$ arroja como soluciones 1 y 5/3, que no son menores que 1/2.

Para $1 \geq p \geq \frac{1}{2}$,

$$E = \left(\frac{3}{2} - \frac{\frac{1+p}{2}}{2}\right) \frac{2p-2}{4p-5} + \left(1 - \frac{\frac{1}{2}+p}{4}\right)\left(1 - \frac{2p-2}{4p-5}\right)$$

y entonces $p + E(\text{valor} \mid \text{compra}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = \frac{11}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{7} \approx 0.69$.

Para $p \geq 1$, sólo quedan los autos malos, y tenemos

$$E = 1 - \frac{\frac{1}{2}+p}{4}$$

y la solución a $p + 1 - \frac{\frac{1}{2}+p}{4} = \frac{3}{2}$ es $p = \frac{5}{6}$ que es incompatible con $p \geq 1$.

Ejercicio 40 A. Si un agente compra un contrato de seguro total, su riqueza no varía en función del resultado (digamos es $w = w_a = w_n$ en caso de accidente y no accidente), por lo que debe comparar

$$\frac{3}{4}\sqrt{w_a} + \frac{1}{4}\sqrt{w_n} - 0 = \sqrt{w} > \sqrt{w} - \frac{1}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{w_a} + \frac{3}{4}\sqrt{w_n} - \frac{1}{10}$$

y elige no cuidarse.

La compañía debe entonces asumir que si ofrece seguro total la gente no se cuidará y por tanto las pérdidas ocurrirán con probabilidad $\frac{3}{4}$. Si las firmas ofrecen contratos de seguro total, deben darles beneficio 0. Si alguna firma i tuviera algún cliente con un contrato que le diera beneficio positivo, alguna firma competidora

j podría ofrecer un contrato con niveles levemente superiores de riqueza para el individuo; éste se cambiaría de compañía de i a j, y j ganaría más dinero. Eso muestra que la situación planteada inicialmente con beneficios positivos no podía ser un equilibrio, pues j tenía incentivos a desviarse.

Los contratos ofrecidos serán entonces tales que los ingresos esperados (la riqueza esperada de los individuos, que le entregan a las compañías) sean iguales al pago fijo:

$$w_a = w_n = w = \frac{3}{4}0 + \frac{1}{4}1 = \frac{1}{4}.$$

La utilidad esperada de los agentes de comprar el contrato es menor que la de no hacerlo y cuidarse:

$$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{4}} - 0 = \frac{1}{2} < \frac{1}{4}\sqrt{0} + \frac{3}{4}\sqrt{1} - \frac{1}{10} = 0.65$$

40 B. Para implementar esfuerzo bajo (no cuidado), pone sueldos constantes con

$$\sqrt{w} = \frac{3}{4}\sqrt{0} + \frac{1}{4}\sqrt{1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow w = \frac{1}{16}.$$

Los beneficios son $V_n = \frac{3}{4}\left(0 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{16} = 0.1875$.

Para implementar el cuidado, la compañía de seguros elige u_a y u_n de tal forma que

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}u_a + \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{10} & = & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}u_a + \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{10} & = & \frac{3}{4}u_a + \frac{1}{4}u_n \end{array}$$

que implica $u_a = \frac{1}{5}, u_n = \frac{2}{5}$. Las riquezas y beneficios son entonces $w_a = \frac{1}{25}$, $w_n = \frac{4}{25}$ y $V_c = \frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{25}\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{25}\right) = \frac{31}{50} = 0.62$. La firma elegirá un seguro parcial.

40 C. Si en un equilibrio participan personas con probabilidades de accidente p_i, y la proporción de gente i (condicional a que participan) es q_i, los beneficios de la firma son

$$\begin{array}{rcl} \pi & = & \sum_i q_i \left(p_i \left(0 - w_a\right) + \left(1 - p_i\right)\left(1 - w_n\right)\right) = -w_a \sum_i q_i p_i + \left(1 - w_n\right)\sum_i q_i \left(1 - p_i\right) \\ & = & \left(1 - w_n\right)\left(1 - \sum_i q_i p_i\right) - w_a \sum_i q_i p_i = \left(1 - w_n\right)\left(1 - \overline{p}\right) - w_a \overline{p}. \end{array}$$

Esta cuenta es bastante general, en el sentido que los beneficios son como si fuera con un p cualquiera, pero con el p promedio. Por lo tanto, si estamos en un equilibrio debemos tener $\left(1 - w_n\right)\left(1 - \overline{p}\right) - w_a \overline{p} = 0$.

Veamos primero si hay equilibrio donde participan todos. En ese caso $\overline{p} = \frac{1}{2}$, y el seguro total es tal que

$$\left(1 - w_n\right)\left(1 - \overline{p}\right) - w_a \overline{p} = \left(1 - w\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) - w\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}.$$

En ese caso, a los $\frac{3}{4}$ y a los $\frac{1}{2}$ les conviene participar (al $\frac{1}{2}$ le conviene porque es seguro total, actuarialmente justo; al $\frac{3}{4}$ le conviene aún más ya que le ofrecen seguro total a una prima más baja todavía que la justa). La pregunta es si le conviene al que tiene riesgo $\frac{1}{4}$:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{0} + \frac{3}{4}\sqrt{1} > \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.71.$$

Por lo tanto, no hay un equilibrio en el que participan todos.

Veamos ahora si hay algún equilibrio en el que participan sólo los dos tipos más bajos. En ese caso, en el mercado la mitad son de cada tipo, y por tanto $\overline{p} = \frac{5}{8}$. El seguro total en ese caso es con $\left(1 - w\right)\left(1 - \frac{5}{8}\right) - w\frac{5}{8} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{3}{8}$. La utilidad del que tiene probabilidad de accidente de $\frac{1}{2}$ (a quien lo están "robando" por ser el tipo bueno en el mercado) es

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{1} < \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.61.$$

Ya sabemos que a los tipos $\frac{1}{4}$ no les conviene entrar: no les convenía con una riqueza fija mayor; menos les conviene ahora. Por las dudas, debemos tener que $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{0} + \frac{3}{4}\sqrt{1} > \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.61$ que se cumple.

Finalmente, también hay un equilibrio en el que participan sólo los malos. Los contratos son como los de la Parte A. Verificamos también que a los $\frac{1}{2}$ no les conviene entrar: debemos tener $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{1} \leq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Como son indiferentes, asumimos que no entran, y entonces existe un equilibrio "típico" de limones.

Hay otro equilibrio en el cual entran todos los $\frac{3}{4}$ y sólo algunos $\frac{1}{2}$ (el precio depende de cuántos entren, y los de $\frac{1}{2}$ deben ser indiferentes entre entrar y no hacerlo).

40 D. Para que participen los tres tipos, deben querer participar los de probabilidad de acciente $\frac{1}{4}$. Ello sucederá si el contrato con seguro total les da más utilidad que no participar: $\sqrt{w} \geq \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{0} + \frac{3}{4}\sqrt{1}$, o $w \geq \frac{9}{16}$. Para que tal w sea de equilibrio, debe arrojar beneficios 0, y por lo tanto $(1-w)(1-\overline{p}) - w\overline{p} = 0 \Leftrightarrow w = 1 - \overline{p}$. De las dos ecuaciones obtenemos que $1 - \overline{p} \geq \frac{9}{16} \Leftrightarrow \overline{p} \leq \frac{7}{16}$. Como $\overline{p} = \frac{1-q}{2}\frac{3}{4} + \frac{1-q}{2}\frac{1}{2} + q\frac{1}{4} \leq \frac{7}{16}$, hay un equilibrio de este tipo si y sólo si $q \geq \frac{1}{2} \equiv q^*$ (vemos aquí por que si los $\frac{1}{4}$ eran sólo $\frac{1}{3}$ no había equilibrio).

3 Signalling: Spence y variantes.

Spence con educación no productiva. Hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. Estos tipos, que son no observables para la firma, son la productividad marginal del trabajador. También los distintos tipos tienen distintas preferencias, de tal forma que a los trabajadores más productivos también les cuesta menos trabajo estudiar. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es p. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta - w)^2$.

Un **equilibrio en estrategias puras** para este juego es un triplete $(w(e), (e_A, e_B); c(e))$ donde:

(a) $w(e)$ es la estrategia de la firma, que especifica un sueldo a pagar para cada nivel de educación.

(b) (e_A, e_B) es la estrategia del trabajador, y especifica un nivel de educación para cada tipo posible.

(c) $c(e) \in [0, 1]$ son las creencias de la firma, y $c(e)$ es la probabilidad que le asigna la firma a que un trabajador que estudió e sea de tipo θ_A.

(d) e_i es óptimo para un trabajador de tipo i dado $w(e)$; $w(e)$ es óptimo dado $c(e)$; $c(e)$ es consistente, en el sentido que se deriva de la regla de Bayes cuando ello es posible.

De la condición (d) deducimos que se satisface que para $e \in \{e_A, e_B\}$,

$$c(e) \equiv \Pr(\theta = \theta_A \mid e) = \frac{\Pr(e \mid \theta = \theta_A)\Pr(\theta = \theta_A)}{\Pr(e)}.$$

Tenemos entonces que para $e_A \neq e_B$,

$$c(e_A) = \frac{\Pr(e_A \mid \theta_A)\Pr(\theta_A)}{\Pr(e_A)} = \frac{1 * p}{1 * p + \Pr(e_A \mid \theta_B)\Pr(\theta_B)} = \frac{1 * p}{1 * p + 0 * (1 - p)} = 1 \tag{3.1}$$

$$c(e_B) = \frac{\Pr(e_B \mid \theta_A)\Pr(\theta_A)}{\Pr(e_B)} = \frac{0 * p}{0 * p + \Pr(e_B \mid \theta_B)\Pr(\theta_B)} = \frac{0}{0 + 1 * (1 - p)} = 0. \tag{3.2}$$

Para $e_A = e_B \equiv e_P$,

$$c(e_P) = \frac{\Pr(e_P \mid \theta_A)\Pr(\theta_A)}{\Pr(e_P \mid \theta_A)\Pr(\theta_A) + \Pr(e_A \mid \theta_B)\Pr(\theta_B)} = \frac{1 * p}{1 * p + 1 * (1 - p)} = p$$

Análisis de los equilibrios de este juego. Si la firma tiene creencias $c(e)$ su utilidad esperada es

$$-c(e)(\theta_A - w)^2 - (1 - c(e))(\theta_B - w)^2$$

por lo que el salario óptimo dadas sus creencias es el que iguala la derivada a 0 :

$$\begin{aligned} -c(e)\,2(\theta_A - w) - (1 - c(e))\,2(\theta_B - w) &= 0 \Leftrightarrow w(e) = c(e)\,\theta_A + (1 - c(e))\,\theta_B \Leftrightarrow \\ w(e) &= 1 + c(e) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Estas ecuaciones nos dicen que la firma fija el salario de tal forma de pagarle al trabajador su productividad esperada. Algunas veces no se especifican las preferencias de la firma, y se asume que hay libre entrada, competencia perfecta, etc, etc, de tal forma que se obtiene el mismo resultado: las firmas al pagar la productividad obtienen beneficios esperados de 0.

Empezamos analizando el caso en el que $e_A \neq e_B$, que en la jerga de los juegos de información incompleta se llama el **equilibrio separador**.

Comenzaremos el análisis determinando qué sabemos de e_B. Supongamos que $e_B > 0$. De las ecuaciones (3.2) y (3.3) sabemos que $w(e_B) = 1$, por lo que la utilidad del trabajador de tipo θ_B cuando estudia e_B es

$$u_2(e_B, w(e_B), \theta_B) = w(e_B) - \frac{e_B}{\theta_B} = 1 - e_B.$$

Veremos ahora que para el trabajador esto no es óptimo, pues le iría mucho mejor estudiando 0. Recordemos que $w(e) \geq 1$ para todo e, por lo que

$$u_2(0, w(0), \theta_B) = w(0) - \frac{0}{\theta_B} = w(0) \geq 1 > 1 - e_B = u_2(e_B, w(e_B), \theta_B).$$

De esto deducimos que e_B debe ser 0 : supusimos que e_B era parte de un equilibrio y $e_B > 0$ y llegamos a la contradicción de que e_B no era óptimo y por tanto no podía ser parte de un equilibrio.

Veremos ahora qué sabemos de e_A. Por un lado, e_A debe ser tal que θ_A quiera estudiar e_A y no algo distinto. Ese "algo distinto" debe ser lo mejor que pueda conseguir si se desvía, dadas las creencias $c(e)$ y, como estamos encontrando condiciones necesarias para un equilibrio, queremos que las creencias sean lo peor posible (si hay alguna forma de "soportar" un nivel muy alto de estudio para θ_A, tiene que ser asegurándonos que la alternativa si se desvía es realmente mala). Por lo tanto, la utilidad que se puede "asegurar" el tipo θ_A es aquella que obtiene si asumimos que $c(e) = 0$ para todo $e \neq e_A$. En ese caso, lo mejor que puede hacer θ_A es estudiar 0 (que en este caso particular, da la casualidad que es e_B). Recordando de (3.1) y (3.3) que $w(e_A) = 2$ tenemos que eso se traduce en que

$$\begin{aligned} u_2(e_A, w(e_A), \theta_A) &\geq u_2(e_B, w(e_B), \theta_A) \Leftrightarrow \\ w(e_A) - \frac{e_A}{\theta_A} &\geq w(e_B) - \frac{e_B}{\theta_A} \Leftrightarrow \\ 2 - \frac{e_A}{2} &\geq 1 \Leftrightarrow e_A \leq 2. \end{aligned}$$

En términos intuitivos, esto quiere decir que si "queremos" "obligar" al trabajador a estudiar demasiado para pagarle \$2, entonces él querrá estudiar lo mismo que θ_B. Por otro lado, también tiene que ser cierto que al tipo θ_B no le convenga estudiar e_A :

$$\begin{aligned} u_2(e_A, w(e_A), \theta_B) &\leq u_2(e_B, w(e_B), \theta_B) \Leftrightarrow \\ w(e_A) - \frac{e_A}{\theta_B} &\leq w(e_B) - \frac{e_B}{\theta_B} \Leftrightarrow \\ 2 - e_A &\leq 1 \Leftrightarrow e_A \geq 1. \end{aligned}$$

De modo que sabemos que un equilibrio con $e_A \neq e_B$ debe satisfacer: $e_B = 0$, $e_A \in [1,2]$, $c(0) = 0, c(e_A) = 1$, $w(e) = 1 + c(e)$. Esas son condiciones necesarias. Pues resulta que para cualquier $e_A \in [1,2]$ existe una función $c(e)$ tal que lo anterior es un equilibrio: ponemos $c(e) = 0$ para todo $e \neq e_A$, y $c(e_A) = 1$. Es fácil verificar que e_B y e_A son óptimos dada la función $w(e) = 1 + c(e)$ asociada a estas creencias; $w(e)$ es óptima por construcción; $c(e)$ es consistente. Hay otra cantidad de equilibrios con los mismos e_B y e_A, lo único que difiere es $c(e)$. Al elegir una función de creencias $c(e)$ para "soportar" el equilibrio, se debe tener cuidado que la función de salarios asociada sea tal que para ambos tipos sea óptimo elegir lo que se supone que eligen en equilibrio. Por ejemplo, la función de creencias que es

$$c(e) = \begin{cases} 0 & e < \frac{3}{2} \\ 1 & e \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

no soporta el equilibrio con $e_B = 0$ y $e_A = 2$, pues θ_A elegirá $e = \frac{3}{2}$.

Analizaremos ahora el caso en el que $e_A = e_B \equiv e_P$, que en la jerga de los juegos de información incompleta se llama el **equilibrio de pooling**. Los niveles de utilidad que se pueden asegurar los tipos θ_A y θ_B son los mismos que en la parte del equilibrio separador. Para que ninguno de los tipos se quiera desviar de e_P se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} u_2\left(e_P, w\left(e_P\right), \theta_A\right) &\geq u_2\left(0, 1, \theta_A\right) = 1 \Leftrightarrow 1 + p - \frac{e_P}{2} \geq 1 \Leftrightarrow e_P \leq 2p \\ u_2\left(e_P, w\left(e_P\right), \theta_B\right) &\geq u_2\left(0, 1, \theta_B\right) = 1 \Leftrightarrow 1 + p - e_P \geq 1 \Leftrightarrow e_P \leq p \end{aligned}$$

De modo que sabemos que un equilibrio con $e_A = e_B \equiv e_P$ debe satisfacer: $e_P \in [0, p]$, $c\left(e_P\right) = p$, $w\left(e\right) = 1 + c\left(e\right)$. Esas son condiciones necesarias. Pues resulta que para cualquier $e_P \in [0, p]$ existe una función $c\left(e\right)$ tal que lo anterior es un equilibrio: ponemos $c\left(e\right) = 0$ para todo $e \neq e_P$, y $c\left(e_P\right) = p$. Es fácil verificar que e_B y e_A son óptimos dada la función $w\left(e\right) = 1 + c\left(e\right)$ asociada a estas creencias; $w\left(e\right)$ es óptima por construcción; $c\left(e\right)$ es consistente.

Un **equilibrio en estrategias mixtas** para este juego es: un par de distribuciones de probabilidad (π_A, π_B) (una para cada tipo) que asignan probabilidades estrictamente positivas sólo a un número finito de niveles de educación, y tales que para cada e con probabilidad positiva según π_i, e maximiza la utilidad de i, dada una función $w\left(e\right)$ que dice el salario para un trabajador que estudió e; un par de funciones $\left(c\left(e\right), w\left(e\right)\right)$ (llamadas de creencias, y de salarios) tales que

(a) para cada e, $c\left(e\right) \in [0, 1]$ es la probabilidad de que el trabajador sea del tipo A, y satisface que para $e \in \left\{e : \pi_A\left(e\right) + \pi_B\left(e\right) > 0\right\}$, $c\left(e\right)$ se deduce utilizando la regla de Bayes

$$\begin{aligned} c\left(e\right) &= \frac{\Pr\left(\theta = \theta_A \text{ y } e_A = e\right)}{\Pr\left(e\right)} \\ &= \frac{p\pi_A\left(e\right)}{p\pi_A\left(e\right) + \left(1 - p\right)\pi_B\left(e\right)}. \end{aligned}$$

La función $c\left(\cdot\right)$ dice, para cada nivel de educación, cuáles son las creencias de la firma respecto a la "calidad" del trabajador.

(b) para cada e, $w\left(e\right)$ maximiza la utilidad esperada (de acuerdo a las probabilidades dadas por $c\left(\cdot\right)$) de la firma.

Ejercicio 1 Un equilibrio en estrategias mixtas es híbrido si algunos niveles de educación son elegidos sólo por un tipo, y otros por ambos. Suponga $p = \frac{1}{2}$.

Parte A. Construya un equilibrio híbrido en el cual el tipo A elige un subconjunto de los niveles de educación que B elige con probabilidad estrictamente positiva. Ilustre gráficamente.

Parte B. Construya un equilibrio híbrido en el cual el tipo B elige un subconjunto de los niveles de educación que A elige con probabilidad estrictamente positiva. Ilustre gráficamente.

Parte C. Construya un equilibrio híbrido en el cual ambos tipos eligen algunos, pero no todos, niveles de educación en común. Ilustre gráficamente.

Ejercicio 2 En clase. Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p = \frac{1}{4}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2\left(e, w, \theta\right) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\sqrt{e} + \theta - w)^2$.

Parte A. Pooling. Encuentre los niveles de educación que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles de educación, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Separating. Encuentre los niveles de educación e_A y e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta.

Ejercicio 3 Deberes. Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p = \frac{1}{2}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e^2}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta e - w)^2$.

Parte A. Pooling. Encuentre los niveles de educación que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles de educación, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Separating. Encuentre los niveles de educación e_A y e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta.

Ejercicio 4 Hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 5$ y $\theta_B = 3$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p = \frac{1}{2}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta_A) = w - e^2 \text{ y } u_2(e, w, \theta_B) = w - 2e^2$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta - w)^2$.

Parte A. Encuentre los niveles de educación que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles de educación, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Suponga que la firma cree que si $e \geq \frac{3}{4}$, entonces el agente es bueno con probabilidad $\frac{1}{2}$, mientras que si e es menor que $\frac{3}{4}$ piensa que es malo. ¿Pueden ser esas creencias parte de un equilibrio de pooling?

Ejercicio 5 Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p = \frac{1}{2}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{(e - \theta)^2}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta e - w)^2$.

Parte A. Pooling. Encuentre los niveles de educación que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles de educación, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Separating. Encuentre los niveles de educación e_A y e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta.

Ejercicio 6 Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es p. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta - w)^2$.

Parte A. Educación no observable. Encuentre el único equilibrio de este juego cuando el nivel de educación adquirido por los trabajadores no es observable (esto implica que la función de creencias de la firma debe ser constante). ¿Qué nivel de utilidad obtienen los trabajadores en este equilibrio?

Parte B. Educación observable. Encuentre los niveles de educación e_A y e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador. ¿Cuál es el máximo nivel de utilidad, entre todos los equilibrios separadores, que puede obtener cada uno de los trabajadores?

Parte C. Comparación. Encuentre los niveles de p, para los cuales la utilidad del tipo θ_A en el mejor equilibrio separador es mayor que la utilidad que obtiene en la Parte A. Ilustre gráficamente. Comente, en dos renglones, cuál es, a su criterio, la razón por la cual la posibilidad de señalizar la calidad alta puede dejar con menos utilidad a los dos tipos.

Ejercicio 7 Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es p (si se le complica, aunque no debería, asuma $p = 1/9$). La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e^2}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(e + \theta - w)^2$.

Parte A. Pooling. Encuentre los niveles de educación que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles de educación, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Separating. Encuentre los niveles de educación e_A y e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta.

Parte C. Repita las Partes A y B, asumiendo que la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(f(e) + \theta - w)^2$ para

$$f(e) = \begin{cases} e & \text{si } e < k \\ k & \text{si } e \geq k \end{cases}$$

con $k \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

Ejercicio 8 En el modelo de signaling de Spence, suponga, como siempre, que hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p \in (0, 1)$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta - w)^2$. Sean las creencias de la firma

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e < a \\ 1 & \text{si } e \geq a \end{cases}.$$

Encuentre los niveles de a para los cuales existe un equilibrio con estas creencias.

En todos los ejercicios anteriores, la forma de resolución ha sido la misma. Comenzamos por preguntarnos "¿cuánto se puede asegurar el tipo θ_A?" y "¿cuánto se puede asegurar el tipo θ_B?". La manera (en general) de averiguar eso, es asumiendo que las creencias son 0, y maximizando la utilidad del tipo correspondiente. Una vez que tenemos eso, podemos graficar las curvas de indiferencia de los dos tipos, cuando son tangentes a la curva de salarios (asumiendo que $c(e) = 0$ para todo e). Eso empieza siempre asi.

Para resolver el pooling, hay que hacer que la utilidad para ambos en el pooling sea mayor que esos niveles de utilidad. Entonces, hay que graficar w, asumiendo que $c(e) = p$ para todo e. Una vez que tenemos eso, debemos elegir los e para los cuales esa curva de salarios (con $c(e) = p$) está por encima de ambas curvas de indiferencia. La idea es que cuando estamos en un pooling, ambos tipos van a estar parados sobre algún punto de esa curva que hayamos elegido. Entonces, lo que elijamos como pooling, les tiene que dar más utilidad que lo que se pueden garantizar.

En forma similar, en el separating, el θ_B va a estar donde lo pusimos originalmente. Después, hay que elegir los niveles de e para los cuales la curva de salarios (asumiendo $c(e) = 1$ para todo e) están por encima de la curva de indiferencia del alto (para que en el separating obtenga más utilidad que la que se puede garantizar) y por debajo de la curva de indiferencia del bajo (para que la educación y salario del altos le den menos utilidad que lo que él obtiene en el equilibrio).

Ejercicio 9 Como siempre, hay dos jugadores, la empresa, y el trabajador. Los tipos posibles de trabajador son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el trabajador sea de un tipo θ_A es $p = \frac{1}{4}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -\left(e^2 + \theta - w\right)^2$. Encuentre el, o los, equilibrios, si los hay. Si no los hay, explique.

Ejercicio 10 Un gobernante debe elegir una política, y antes debe decidir cuánto consultarla con el sector privado. Puede elegir niveles de "cercanía" entre 0 y 1. Los gobernantes pueden ser honestos o corruptos: si son honestos el tipo es $\theta_h = 2$, si es deshonesto es $\theta_d = 1$. La probabilidad de que el gobierno sea de un tipo θ_h es $p = \frac{1}{8}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(c, w, \theta) = w - \frac{c^2}{\theta}.$$

El electorado debe "pagarle" al gobernante en donaciones (o pueden pensarlo si quieren en votos) y la función de utilidad de los electores es $u_1(c, w, \theta) = -\left(\frac{\theta}{4} - c(c-2) - w\right)^2$. La idea es que la cercanía es buena para el elector, pues ayuda al hacedor de políticas a tomar decisiones mejores (el término $-c(c-2)$ es creciente para $c \leq 1$). También, a los electores le gusta más un político honesto que uno deshonesto, por lo que quiere "embocarle" con el sueldo a la suma del tipo con la utilidad que le brinda la cercanía. Por otro lado, a un tipo honesto le cuesta menos la cercanía que a un tipo deshonesto, pues el tipo corrupto "sabe" que si se acerca mucho a los empresarios, aceptará alguna coima, y eso terminará en un escándalo. Por eso en la utilidad del gobernante, la cercanía aparece como $-\frac{c^2}{\theta}$ (para el honesto, la cercanía también aparece con signo negativo, pues independientemente de la utilidad que arroja tomar decisiones informadas, es más difícil hacer las investigaciones del caso, que tomar una decisión sin mucho estudio).

Parte A. Pooling. Llame $b(\cdot)$ a la función de creencias, y encuentre los niveles de cercanía que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.

Parte B. Separating. Encuentre los niveles de cercanía c_h y c_d que pueden ser parte de un equilibrio separador. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta.

Ejercicio 11 Un trabajador puede ser de tipo $\theta_A = 5$, o $\theta_B = 3$. Si le pagan un sueldo w y estudia e años, las utilidades son $u(e, w, \theta_A) = w - e^2$ y $u(e, w, \theta_B) = w - 2e^2$. La utilidad de la firma si contrata a un tipo θ y le paga w es $-(\theta - w)^2$. La proporción de cada tipo de trabajador es $p = \frac{1}{2}$.

Parte A. Encuentre los equilibrios separadores.
Parte B. Encuentre los equilibrios de pooling.
Parte C. ¿Puede haber algún equilibrio de pooling en que las creencias de la firma son $c(e) = 0$ para $e < \frac{3}{4}$ y $c(e) = \frac{1}{2}$ para $e \geq \frac{3}{4}$?

Ejercicio 12 Un gobernante debe elegir una política, y antes debe decidir cuánto consultarla con el sector privado. Puede elegir niveles de "cercanía" entre 0 y 1. Los gobernantes pueden ser honestos o corruptos: si son honestos el tipo es $\theta_h = 2$, si es deshonesto es $\theta_d = 1$. La probabilidad de que el gobierno sea de un tipo θ_h es $p = \frac{1}{8}$. La función de utilidad del alto es

$$u_2(c, w, \theta_A) = w - \frac{c^2}{\theta_h}$$

y la del bajo puede ser $u_2(c, w, \theta_B) = w - \frac{c^2}{2}$ con probabilidad 1/2 o sino $u_2(c, w, \theta_B) = w - c^2$ con probabilidad 1/2. Al momento de elegir su nivel de cercanía, el gobernante ya conoce su utilidad.

La función de utilidad de los electores es $u_1(c, w, \theta) = -\left(\frac{\theta}{4} - c(c-2) - w\right)^2$.

Parte A. Pooling. Llame $b(\cdot)$ a la función de creencias, y encuentre los niveles de cercanía que pueden ser parte de un equilibrio de pooling. Para alguno de esos niveles, encuentre una función de creencias que lo soporta como equilibrio.
Parte B. Mixto. Encuentre los niveles de cercanía c_h, c_d y c_d^t (donde c_h es lo elegido por el honesto, c_d lo elegido por el deshonesto con la utilidad $w - c^2$ y c_d^t es lo elegido por el deshonesto con la utilidad "trucha", la del alto, $w - c^2/2$) que pueden ser parte de un equilibrio en el cual el alto y el trucho eligen el mismo nivel de c, y el c_d es distinto.

Ejercicio 13 Deberes. Signalling sobre la calidad de la firma. Hay una firma que puede valer $G = 160$ o $B = 80$. La firma va a invertir en un proyecto que requiere \$100 de inversión (y que la firma debe juntar vendiendo acciones) y que tendrá un valor de 120 (ganará seguro \$20). Los gerentes maximizan la riqueza de los actuales ahorristas (por lo que venderán acciones a su verdadero valor, y no más baratas). El mercado de capitales es competitivo: los inversores pagarán \$100 si estiman que una inversión tendrá un retorno esperado de \$100.

Parte A. Muestre que si la firma vale $G = 160$, y todo el mundo lo sabe, para obtener los \$100 los gerentes deberán entregar una proporción $S^G = \frac{5}{14}$ a los nuevos accionistas. Calcule el valor final de las acciones de los viejos dueños.
Parte B. ¿Qué porción S^B de la firma deberá ser entregada a los nuevos inversores para que acepten invertir \$100, si todo el mundo sabe que la firma vale $B = 80$? ¿Cuál es el valor final de las acciones de los viejos accionistas?
Parte C. ¿Cuál sería el valor de las acciones de los viejos accionistas si se vendiera una porción S^B de la firma a cambio de la inversión de \$100, si en realidad la empresa valiera $G = 160$?

Parte D. Ahora asumamos que sólo los gerentes conocen el valor de la firma, pero que luego de la inversión, todo el mundo lo conocerá. Si los gerentes quieren maximizar la utilidad de los accionistas actuales, muestre que vender S^G cuando la firma es G y S^B cuando la firma es B no es un equilibrio separador.
Parte E. Muestre que hay un equilibrio en el cual los gerentes venden una porción S^B cuando la firma es B, y no hacen el proyecto si la firma es G.
Parte F. ¿Existe un equilibrio de pooling? Encuentre la proporción p^* de firmas tipo G tal que si $p \geq p^*$ entonces hay un equilibrio de pooling, y que si $p < p^*$ entonces no lo hay.

Ejercicio 14 Deberes. Signalling sobre la calidad de la firma. Hay una firma que puede valer $G = 160$ o $B = 80$. La firma va a invertir en un proyecto que requiere \$100 de inversión (y que la firma debe juntar vendiendo acciones) y que tendrá un valor de $R > 100$ (ganará seguro $\$R - 100$). Los gerentes maximizan la riqueza de los actuales ahorristas (por lo que venderán acciones a su verdadero valor, y no más baratas).

Parte A. Encuentre la proporción S^G que deberán entregar los gerentes a los nuevos ahorristas, para que quieran participar, si todo el mundo sabe que la firma es G (quedará como función de R). Calcule el valor final de las acciones de los viejos dueños.
Parte B. ¿Qué porción S^B de la firma deberá ser entregada a los nuevos inversores para que acepten invertir \$100, si todo el mundo sabe que la firma vale $B = 80$? ¿Cuál es el valor final de las acciones de los viejos accionistas?
Parte C. ¿Cuál sería el valor de las acciones de los viejos accionistas si se vendiera una porción S^B de la firma a cambio de la inversión de \$100, si en realidad la empresa valiera $G = 160$?
Parte D. Ahora asumamos que sólo los gerentes conocen el valor de la firma, pero que luego de la inversión, todo el mundo lo conocerá. Asuma que los gerentes quieren maximizar la utilidad de los accionistas actuales, y muestre que vender S^G cuando la firma es G y S^B cuando la firma es B no es un equilibrio separador.
Parte E. Encuentre un valor crítico R_b tal que si $R \leq R_b$ hay un equilibrio en el cual los gerentes venden una porción S^B cuando la firma es B, y no hacen el proyecto si la firma es G.
Parte F. ¿Existe un equilibrio de pooling? Encuentre un valor crítico R_a tal que si la proporción de firmas G es $\frac{1}{2}$, y: $R \geq R_a$ entonces hay un equilibrio de pooling en el cual ambos tipos de firmas ofrecen una porción S^P de la firma a los nuevos accionistas; si $R < R_a$ entonces no hay equilibrio de pooling.

Ejercicio 15 Deberes. Hay tres tipos de agentes, cuyos tipos son $\theta_B = 1$, $\theta_I = 2$ y $\theta_A = 3$ correspondientes a tipos Bajos, Intermedios y Altos respectivamente. Las probabilidades a priori de cada tipo son $\frac{1}{3}$. La función de utilidad de cada tipo es

$$u_2(e, w, \theta) = w - \frac{e}{\theta}$$

y la función de utilidad de la firma es $u_1(e, w, \theta) = -(\theta - w)^2$.

Un **equilibrio en estrategias puras** para este juego es: un trío de niveles de educación (e_B, e_I, e_A) para cada tipo, tales que e_i maximiza la utilidad de i, dada una función $w(e)$ que dice el salario para un trabajador que estudió e; un par de funciones $(c(e), w(e))$ (llamadas de creencias, y de salarios) tales que

(a) para cada e, $c_A(e) \in [0,1]$ y $c_I(e) \in [0,1]$ son las probabilidades de que el trabajador sea del tipo A e I respectivamente y que satisfacen que para $e \in \{e_A, e_B, e_I\}$, se deducen utilizando la regla de Bayes. La función $c(e) = (c_A(e), c_I(e))$ dice, para cada nivel de educación, cuáles son las creencias de la firma respecto a la "calidad" del trabajador. Cuando c satisface esta propiedad, se dice que es consistente.

(b) para cada e, $w(e)$ maximiza la utilidad esperada (de acuerdo a las probabilidades dadas por $c(\cdot)$) de la firma.

Parte A. Suponga que en un equilibrio el tipo θ_B elige un nivel de educación e_B, y los tipos θ_A y θ_I eligen un nivel de educación e_P (hay pooling entre los tipos altos e intermedios). Para $e \in \{e_P, e_B\}$ calcule el salario que maximiza la utilidad de la firma.

Parte B. En un equilibrio como el descripto en la parte A ¿qué nivel de educación elegirá el tipo θ_B? ¿Cuáles pueden ser los niveles de e_P?

Parte C. Construya un equilibrio en el cual θ_B elige el nivel de educación encontrado en la parte B, y $e_P = 3$ (lo único que necesita hacer es encontrar una $c(e)$ que sea consistente, para la cual cada tipo maximiza eligiendo el nivel que le corresponde).

Parte D. Puede existir algún equilibrio en el cual θ_I elige un nivel de educación e_I y los tipos θ_B y θ_A eligen un nivel $e_P \neq e_I$.

Ejercicio 16 Deberes. Signalling en una industria. Basado en Milgrom y Roberts (1982). Considere un mercado en el cual se vende un producto, y la demanda está dada por $P = 18 - Q$, donde Q es la cantidad ofrecida por la o las firmas en el mercado. El mercado existe durante dos períodos. En el primero, sólo la firma 1 participa. Para ambos períodos, los costos de producción de la firma están fijos en $C^G(q) = 0$ o $C^B(q) = 6q$; la probabilidad que la firma tenga costos bajos, la probabilidad que sea G, es p. En el segundo período la firma 2 tiene que decidir si entra al mercado o no, habiendo observado la producción de la firma 1, pero no su función de costos. Los costos de producción de la firma 2 son $C(q) = 3q$, pero debe pagar un costo fijo de 20 si entra al mercado. Si la firma entra, ambas compiten a la Cournot. La firma 1 desea maximizar la suma de los beneficios obtenidos en ambos períodos.

Parte A. Suponga que los costos de la firma 1 se pueden observar. Calcule las cantidades q_1^{Gm} y q_1^{Bm} que producirá la firma 1 en el período 1 cuando es monopolista, dependiendo de si los costos son G o B. Calcule también las cantidades q_1^{Gd} (firma 1, costos G, $d$uopolio), q_1^{Bd} (1, B, d), q_2^{Gd} (firma 2, costos de la firma 1 son G y están en un $d$uopolio) y q_2^{Bd} que ocurrirán si la firma 2 entró y compitieron a la Cournot. Calcule los beneficios de $\pi_1^{Gd}, \pi_1^{Bd}, \pi_2^{Gd}$ y π_2^{Bd}. ¿En qué casos entrará la firma 2?

Parte B. Si los costos de la firma 1 no son observables para la firma 2, muestre que las decisiones de la firma 1 en la parte A no son parte de un equilibrio separador. Es decir, la firma 1 tendrá incentivos a hacerle creer a la 2 que es G independientemente de sus verdaderos costos. En este contexto un equilibrio es un triplete $E = \left\{\left(q_1^G, q_1^B\right), q_2(\cdot), c(\cdot)\right\}$ donde: q_1^G es óptimo para el tipo G dado $q_2(\cdot)$; q_1^B es óptimo para el tipo B dado $q_2(\cdot)$; $q_2(q)$ es óptimo para la firma 2 dadas las creencias $c(q)$; las creencias $c(\cdot)$ son una función que a cada cantidad q producida por la firma 1, le asigna un número entre 0 y 1, que es la probabilidad que le asigna la firma 2 a que la firma 1 sea tipo G, y las creencias son consistentes (se derivan de Bayes siempre que sea posible: en un equilibrio separador, cuando $q_1^G \neq q_1^B$, $c\left(q_1^B\right) = 0$ y $c\left(q_1^G\right) = 1$; en un equilibrio de pooling, con $q_1^G = q_1^B \equiv q_1^P$ $c\left(q_1^P\right) = p$).

Parte C. Muestre que $q_1^{Gm} = 12$ y $q_1^{Bm} = 6$ puede ser parte de un equilibrio separador. Para ello, elija creencias de la firma 2 sobre la probabilidad de que los costos sean G cuando observa distintos niveles de q, y muestre que esas creencias soportan a las cantidades $q_1^{Gm} = 12$ y $q_1^{Bm} = 6$ como parte de un equilibrio.

Parte D. Asuma que la probabilidad de que la firma sea de tipo G es $1/2$. ¿La cantidad $q_1 = 9$ puede ser parte de un equilibrio de pooling? Si no lo es, ¿hay alguna cantidad $q_P < 9$ que pueda ser de pooling?

Parte E. Repita la Parte D con la probabilidad de que la firma sea de tipo G es $9/10$.

Parte F. ¿Hay alguna probabilidad del tipo G que haga que 9 sea un equilibrio de pooling en el que la firma 2 entra en el segundo período?

El ejercicio anterior se puede interpretar como uno de precios predatorios: el monopolista produce mucho (baja su precio) y "pierde plata" relativo al óptimo del primer período, con el objetivo de quedarse con el monopolio para el segundo período. Sin embargo, la práctica no es anti-competitiva: los consumidores reciben el producto a un precio bajo en el primer período, y además es óptimo para el entrante potencial quedarse fuera del mercado.

Ejercicio 17 La coca cola está por largar al mercado un nuevo producto que puede ser bueno o malo. La calidad del producto se puede testear con una sola probada. Sean $\pi^B = 150$, $\pi^M = 50$ y $\pi^U = 70$ los valores presentes netos de los beneficios (antes de gastos en publicidad) de la firma si el producto: es bueno y todo el mundo lo compra a un precio alto para siempre; es malo y la gente lo sabe y paga un precio bajo para siempre; y si es malo, pero la gente paga caro una vez, pero paga un precio bajo el resto de las veces, respectivamente. Imaginemos por ejemplo que el producto se consume una vez por año, durante 5 años, que la valuación de un producto bueno es 30 por período, y de uno malo 10 por período.

Parte A ¿Qué niveles de gasto en publicidad (por más que no sea informativa) nos convencerían de que el producto es bueno?

Parte B. Imaginemos que el producto se pudiera consumir una sola vez (si por ejemplo fuera una vacuna en vez de una gaseosa), y los consumidores estuvieran dispuestos a pagar 150 y 50 si el producto es bueno y malo respectivamente. ¿Hay algún nivel de publicidad que sirva como señal de la calidad?

Ejercicio 18 En la historia del Rey Salomón ¿Hubo alguna de las partes que actuó irracionalmente? Explique en 8 renglones quién o quienes y porqué.

Ejercicio 19 Deberes. Signaling mediante precios. Este ejercicio pretende mostrar porqué muchas veces los productos nuevos en un mercado tienden a subir de precio rápidamente. Hay dos períodos de tiempo $t = 0, 1$. Un monopolista produce un bien cuya calidad puede ser alta θ_A, con probabilidad q, o baja $\theta_B = 0 < \theta_A$, con probabilidad $1 - q$. El monopolista no puede elegir la calidad: si el toca ser alto, sólo puede producir bienes de calidad alta, si le toca bajo, sólo puede producir bienes de calidad baja. El tipo del monopolista se mantiene de un período al siguiente. Sólo el monopolista conoce la calidad del bien. En cada período, un bien de calidad θ_i comprado a un precio p le da al consumidor una utilidad $\theta_i - p$, y el consumidor busca maximizar la suma de las utilidades de ambos períodos. Los costos de producción para el monopolista son c_A y c_B, con $\theta_A > c_A > c_B > 0$, para los bienes de calidad alta y baja respectivamente.

El consumidor puede comprar una unidad del bien en cada período. Si el consumidor compra en el primer período, se entera de la calidad del bien. Si un consumidor no compra en el primer período, no puede comprar en el segundo. El monopolista no descuenta el futuro. En cada período cada tipo de monopolista debe elegir si produce o no, y a qué precio ofrece el bien.

Parte A. Asuma que $q\theta_A < c_B$ y demuestre que en este caso no hay un equilibrio de pooling en el cual ambos tipos de monopolista eligen producir y vender al mismo precio (muestre que el tipo θ_B eligiría no producir).

Parte B. Demuestre que en el equilibrio separador el monopolista de tipo bajo no producirá.

Parte C. Asuma que $2c_A - \theta_A < c_B$. Encuentre el rango de precios p_1 que puede fijar el monopolista en el primer período en un equilibrio separador (pista: en el segundo período los beneficios del monopolista de tipo θ_A son $\theta_A - c_A$, pues puede vender el bien a un precio de θ_A).

Parte D. El precio de equilibrio en el primer período, ¿alcanza a cubrir los costos del monopolista de calidad alta? Entre el primer y segundo período, el precio ¿sube o baja?

Ejercicio 20 Este ejercicio es una versión simple de una teoría que dice que la estructura óptima de leverage de las empresas se determina por motivos de Signaling: endeudarse es más costoso para los gerentes con proyectos malos que para aquellos con proyectos buenos. Por lo tanto, tomar mucha deuda es una forma de mandar una señal a los capitalistas que el proyecto que tengo es bueno. En la teoría tradicional, Modigliani Miller, la estructura de financiamiento era irrelevante. La referencia más relevante para este tema es Ross (1977, The Determination of Financial Structure: the Incentive Signalling Approach, Bell Journal of Economics, 8).

Hay dos tipos de firmas, aquellas que en el período 1 tendrán un retorno de a, y aquellas que tendrán un retorno b, con $0 < b < a$. Sólo el gerente de la empresa sabe si la empresa es a o b. El gerente debe decidir en el período 0 cuánto financiamiento F pedir en el mercado. El financiamiento no sirve para nada: se pide F, se entierra el dinero a varios metros de profundidad, y se debe repagar en el período 1. Si el retorno es mayor que F, la firma paga y se queda con el retorno menos F, más los F que desentierra (es decir, con el retorno). Si el retorno es menor, la firma da bancarrota. La utilidad del gerente si recibe un sueldo w, eligió una financiación de F, y tuvo un retorno de r es

$$u_G(w, F, r) = w + \beta \left\{ \begin{array}{cc} r & \text{si } r \geq F \\ r - P & \text{si } r < F \end{array} \right\}$$

donde el segundo término es como un "bono": recibe una proporción β del valor de la firma, a menos que de bancarrota, en cuyo caso tiene una pérdida de P (puede ser una pérdida de reputación, o de verdad por los costos de bancarrota). El dueño de la empresa le quiere pagar al gerente un sueldo igual a una proporción γ del valor percibido de la firma: si el gerente pide F, y la probabilidad que la firma sea tipo a es $c(F)$, el dueño maximiza

$$-c(F)(\gamma a - w)^2 - (1 - c(F))(\gamma b - w)^2.$$

Un equilibrio es un triplete $[(F_a, F_b), w(\cdot); c(\cdot)]$ donde F_a es óptimo para el gerente de una firma a, F_b es óptimo para b, $w(F)$ es el sueldo óptimo que paga el dueño cunado observa F y tiene creencias $c(F)$, y las creencias $c(\cdot)$ son consistentes.

Asuma que $\beta P > \gamma(a - b)$ y encuentre los rangos a los que pueden pertenecer F_b y F_a en un equilibrio separador. Elija un F_b y un F_a en esos rangos, y describa un equilibrio.

Ejercicio 21 Deberes. Este es una versión más elaborada del ejercicio anterior, también basado en el trabajo de Ross. **mirar el paper. por qué γ y $1 - \gamma$.** Una empresa tiene un único proyecto cuyos retornos se distribuyen uniformemente en $[0, t]$, donde t es un parámetro conocido sólo por el gerente

de la empresa. En términos de lo que veníamos viendo hasta ahora, t es el tipo del gerente, y $t \in \Theta = [1,2]$. Para cada nivel de deuda el dueño de la empresa tiene unas creencias $c(D)$ que son una distribución de probabilidad sobre los tipos posibles del gerente. Es decir, para cada D, $c(D)$ es una distribución de probabilidades sobre $[1,2]$. La función de utilidad del dueño de la empresa es

$$u_1(D,w,t) = -\left(\gamma\frac{t}{2} - w\right)^2.$$

La función de utilidad del dueño ilustra que el dueño querrá pagarle al gerente una proporción (fija) $\gamma \in (0,1)$ del valor de la empresa, que es $t/2$, pues los retornos del proyecto se distribuyen uniformemente entre 0 y t. Sólo para referencia, notamos que u_1 no depende de D, pero la utilidad esperada del dueño dependerá de D por intermedio de $c(\cdot)$. La utilidad del gerente depende de su sueldo, y de un término de "reputación" que depende positivamente del valor de la empresa, $t/2$ y negativamente de la penalidad esperada por caer en bancarrota: LD/t : si la penalidad en términos de reputación para el empresario es L, y la deuda es D, el valor esperado de la penalidad es L por la probabilidad de caer en bancarrota (la probabilidad que el proyecto rinda menos que el monto de deuda D). La utilidad del gerente es entonces

$$u_2(D,w,t) = w + (1-\gamma)\left(\frac{t}{2} - \frac{LD}{t}\right).$$

Un **equilibrio en estrategias puras** para este juego es un triplete $(w(\cdot), D(\cdot); c(\cdot))$ donde:

(a) $w(\cdot)$ es la estrategia del dueño de la empresa, que especifica un sueldo a pagar $w(D)$ para cada nivel de deuda D.

(b) $D(\cdot)$ es la estrategia del gerente, y especifica un nivel de deuda $D(t)$ para cada tipo posible t.

(c) $c(\cdot)$ son las creencias del dueño, y $c(D)$ es la distribución de probabilidades sobre $\Theta = [1,2]$ que le asigna el dueño a los distintos tipos de gerente, si observa un nivel de deuda D.

(d) $D(t)$ es óptimo para un gerente de tipo t dado $w(\cdot)$; $w(\cdot)$ es óptimo dado $c(\cdot)$; $c(\cdot)$ es consistente, en el sentido que se deriva de la regla de Bayes cuando ello es posible.

Vamos a encontrar el único equilibrio separador en el cual si $t' > t$, entonces $D(t') > D(t)$ (no hay equilibrios separadores en los cuales mayores tipos eligen menores deudas). A este tipo de equilibrio lo llamamos **monótono**.

Parte A. Argumente que en un equilibrio monótono, para cualquier $\widetilde{D}$ en el rango de $D(\cdot)$, $c\left(\widetilde{D}\right)$ le asignará probabilidad 1 al tipo t tal que $D(t) = \widetilde{D}$ (no se complique, es fácil)

Parte B. Llame $a(\cdot)$ a la función inversa de $D(\cdot)$, la que nos dice qué tipo eligió cada nivel de deuda, y muestre que en cualquier equilibrio monótono, la optimalidad de $w(\cdot)$ implica que

$$w(D) = \gamma\frac{a(D)}{2}$$

Parte C. Encuentre la mejor respuesta $D(t)$ a la estrategia $w(\cdot)$ del dueño encontrada en la Parte B (Pistas: usando $a'(\cdot) = 1/D'(\cdot)$ encontrará una ecuación de la forma $D'(t) = tk_1$, para una constante k_1; encuentre D integrando, pero no calcule aún la constante de integración).

Parte D. Demuestre que en cualquier equilibrio monótono $D(1) = 0$. Usando esa condición, encuentre la constante de integración de la Parte C.

Parte E. Suponga que $\gamma = \frac{1}{2}$ y $L = 1$. Grafique, con D en el eje de las abcisas y w en las ordenadas, las curvas de indiferencia de los tipos $1, \frac{3}{2}$ y 2. En el mismo gráfico incluya la función $w(D)$ de equilibrio. Muestre gráficamente que, sujeto a $w(D)$, los tipos $1, \frac{3}{2}$ y 2 maximizan eligiendo los niveles de deuda correspondientes al equilibrio.

Ejercicio 22 Hay una empresa y dos tipos posibles de trabajadores. La probabilidad a priori de que un trabajador sea de costo bajo c_B es $\frac{1}{2}$, y con probabilidad $\frac{1}{2}$ es de costo alto $c_A > c_B$. El costo para los trabajadores es el costo de entrar en un programa de capacitación. Si estudió se transforma en un tipo educado, θ_e, y si no estudió, θ_n. Ni el costo del trabajador ni su decisión de entrar en el curso son observables. Si un trabajador tomó el curso de capacitación, la probabilidad de pasar en un test que les pone la empresa es p y si no tomó el curso, es $q < p$. Después de tomar el test, la empresa los asigna a una de dos tareas. En la tarea "sin riesgo" S, todos los trabajadores rinden 0; en la tarea con riesgo, C, los trabajadores capacitados rinden 1 y los no capacitados -1. Es decir, la productividad de cada tipo de trabajador θ en cada tarea t viene dada por

$$P(\theta, t) = \begin{cases} 0 & t = S \\ 1 & \theta = \theta_e, t = C \\ -1 & \theta = \theta_n, t = C \end{cases}$$

La utilidad de la firma dadas las acciones de los trabajadores, θ, y sus acciones (la tarea que asigna y el sueldo que paga) es:

$$u_f(\theta, t, w) = P(\theta, t) - (P(\theta, t) - w)^2$$

Como siempre, esto resulta en que la firma paga a los trabajadores su productividad esperada. La utilidad de los trabajadores es

$$u(\theta, t, w; c) = \begin{cases} w - c & \theta = \theta_e \\ w & \theta = \theta_n \end{cases}.$$

Parte A. Encuentre el equilibrio de pooling en el cual nadie se entrena.

Parte B. Muestre que si $q = \frac{1}{10}$, $p = \frac{1}{2}$ y

$$c_A > \frac{(p-q)^2}{p+q} > c_B$$

entonces hay un equilibrio separador en el cual los trabajadores estudian si y sólo si son de costo bajo y son asigndos al trabajo riesgoso si y sólo si pasaron la prueba. Debe verificar que al de costo bajo le conviene estudiar, al de costo alto no; debe verificar también que a la firma le conviene poner a los que pasaron en la tarea con riesgo, y a los que no en la sin riesgo (en el camino deberá calcular la probabilidad $P(\theta_e \mid \text{no pasó})$, por ejemplo).

Ejercicio 23 Escriba y resuelva un modelo en el que: para los árboles es costoso hacer que sus hojas sean de tonos rojos fuerte en otoño; ser más rojos no afecta su utilidad directamente; hay unos parásitos que podrían instalarse en el árbol; hay árboles fuertes y árboles débiles; para los fuertes es más fácil matar los parásitos y más fácil pintarse de rojo. En el modelo, encuentre un equilibrio en el cual algunos árboles se pintan de rojo a pesar del costo y de que no les brinda utilidad directamente.

Ejercicio 24 Deberes. Considere un monopolista que produce un bien de calidad exógena θ. La firma conoce la calidad, pero los consumidores no. Si la calidad fuera observable, la firma tendría una demanda $Q = \theta - P$. La calidad puede ser alta, $\theta_H = 2$, o baja, $\theta_L = 1$. Si el bien es de calidad baja tiene un costo marginal de producción de 0, mientras que si es de calidad alta, el costo es $c > 0$. No hay costos fijos. En el primer período, la naturaleza elige θ_H con probabilidad λ, y θ_L con probabilidad $1 - \lambda$. En el segundo período, la firma elige el precio P, que es observable, y en el tercero los consumidores compran.

Llame $\mu(P)$ a la creencia de los consumidores como función del precio: $\mu(P)$ es la probabilidad que le asignan a que el bien sea de calidad alta, dado un precio de P. La curva de demanda es $Q = 2\mu(P) + 1 - \mu(P) - P$

Parte A. Encuentre los precios óptimos que fijarían los dos tipos de firmas si las calidades fueran observables, y calcule los beneficios. Por supuesto, su respuesta dependerá del valor de c.

Parte B. Asuma ahora que la calidad no es observable. Encuentre un c^* tal que si $c > c^*$ los precios de la Parte A serían un equilibrio separador. (Pista. Muestre primero que para todo $c \geq 2$ los precios son un equilibrio separador; luego encuentre el c^* en el rango $[0, 2]$).

Parte C. Asuma ahora que $c < c^*$. ¿Qué precio elegirá la firma L en un equilibrio separador? Encuentre el precio más bajo que cobraría una firma H en un equilibrio separador. (Van a precisar saber esto para la solución: $(2-k)(k-c) \geq \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ no se cumple para ningún $k \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Parte D. (Difícil). Modifique el problema de la siguiente manera: en el primer período la firma elige si invertir en la calidad del bien (puede elegir la calidad alta o la baj; nada intermedio). Si invierte, produce una calidad alta, $\theta_H = 2$; si no la baja, $\theta_L = 1$. No hay costo de invertir en calidad. Encuentre el equilbrio de este juego asumiendo que $c < \sqrt{3}$.

Ejercicio 25 Hay dos jugadores, el pavo y el depredador. Los tipos posibles de pavo son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el pavo sea de un tipo θ_A es $\frac{1}{2}$. El pavo debe elegir el tamaño de su cola t, que puede ser 0 o 2. El depredador a su vez debe elegir la cantidad óptima de ataque $a \in \mathbf{R}_+$. La función de utilidad de cada tipo de pavo es

$$u_2(t, a, \theta) = -a - \frac{t^2}{\theta}$$

y la función de utilidad del depredador es $u_1(t, a, \theta) = -(\theta - 2 + a)^2$.

Parte A. ¿Hay algún equilibrio separador? Si lo hay, encuentre uno.

Parte B. ¿Hay algún equilibrio de pooling? Si lo hay, encuentre uno.

Parte C. En las Partes A y B, ¿hay otros equilibrios?

Ejercicio 26 Hay dos jugadores, el pavo y el depredador. Los tipos posibles de pavo son $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. La probabilidad de que el pavo sea de un tipo θ_A es $\frac{1}{2}$. El pavo debe elegir el tamaño de su cola t, que puede ser 0 o 2. El depredador a su vez debe elegir la cantidad óptima de ataque $a \in \mathbf{R}_+$. La función de utilidad de cada tipo de pavo es

$$u_2(t, a, \theta) = -a - \frac{t}{\theta}$$

y la función de utilidad del depredador es $u_1(t, a, \theta) = -(\theta - 2 + a)^2$.

Parte A. ¿Hay algún equilibrio separador? Si lo hay, encuentre uno.

Parte B. ¿Hay algún equilibrio de pooling? Si lo hay, encuentre uno.

Parte C. En las Partes A y B, ¿hay otros equilibrios?

Ejercicio 27 Repita el Ejercicio 26, pero asumiendo que los pavos pueden elegir cualquer $t \geq 0$.

Ejercicio 28 El dueño de una empresa le prometió a un empleado recién contratado de la UM que le pagaría un MBA dentro de 4 años. Cuánto pagará la empresa depende de qué tan bueno sea el empleado (hay dos tipos de empleado, $\theta_A = 2$ y $\theta_B = 1$. Una vez que el empleado termine el MBA, volverá a la empresa y producirá $\theta f(t)$ donde $f(t)$ es la cantidad de "enseñanza" que compran t dólares de tuition (cuota). La enseñanza se potencia con el tipo, por lo que la productividad del estudiante, cuando vuelva será $\theta f(t)$; el sueldo del individuo a la vuelta será la mitad de lo que produzca (la otra mitad se la queda la empresa). La empresa quiere ganar la mayor cantidad posible de dinero; su utilidad es $\frac{\theta f(t)}{2} - t$.

Durante los primeros cuatro años, el trabajador debe elegir una cantidad de esfuerzo (para demostrar su valía). La utilidad del trabajador, si a la vuelta del MBA le pagan $\frac{\theta f(t)}{2}$ y en los primeros cuatro años se esfuerza e es $\frac{\theta f(t)}{2} - \frac{e}{\theta}$.

Parte A. Si las creencias de la empresa son $c(e)$ (es la probabilidad de que sea un tipo θ_A) y $f(t) = 2\sqrt{t}$ encuentre la cantidad óptima de inversión.

Parte B. Encuentre la utilidad que se puede asegurar un individuo de tipo θ en cualquier equilibrio.

Parte C. Encuentre los niveles de esfuerzo que pueden ser parte de un equilibrio de pooling (asuma que hay 50% de tipos θ_A).

Parte D. Encuentre los niveles de esfuerzo que pueden ser parte de un equilibrio separador.

Ejercicio 29 Deberes. Basado en Leland y Pyle. Un emprendedor tiene un proyecto que tendrá retornos $r \sim N(\mu, \sigma^2)$, y debe decidir qué proporción α de los retornos del proyecto poner a la venta. El emprendedor conoce μ, y los inversores potenciales no. El α ofrecido es la señal sobre el μ. El μ es un número del intervalo $[l, h]$. El emprendedor es averso al riesgo, con una función de utilidad (para un nivel de riqueza w) dada por $u(w) = -e^{-bw}$. Los inversores son neutrales al riesgo, y actúan en un mercado competitivo, por lo que si el tipo esperado de un emprendedor es $\widehat{m}(\alpha)$ (eso es la estimación del μ de un emprendedor, cuando ofrece vender una porción α de su proyecto), el mercado le pagará $\alpha\widehat{m}(\alpha)$ por la porción α ofrecida (viene a ser como $\alpha\mu$, porque son neutrales al riesgo).

Parte A. Muestre que si $y \sim N(a, s^2)$, $E(e^y) = e^{a+\frac{s^2}{2}}$. Recuerde que la densidad de una variable y con distribución Normal $N(m, s^2)$ es

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(y-m)^2}{2s^2}}.$$

Pista: muestre y utilice que $y - \frac{(y-a)^2}{2s^2} = -\frac{\left(y-s^2-a\right)^2}{2s^2} + \frac{s^2}{2} + a$.

Parte B. ¿Qué distribución tienen los retornos para un empresario de tipo μ, si vende una porción α del proyecto y si le pagan $\alpha\widehat{m}(\alpha)$?

Parte C. Utilizando las Partes A y B, calcule la utilidad esperada para un empresario de tipo μ, si vende una porción α del proyecto y si le pagan $\alpha\widehat{m}(\alpha)$.

Parte D. ¿Qué cantidad de dinero c deja a un empresario de tipo μ, indiferente entre: ser el dueño del proyecto, y vender una porción α del proyecto y que le paguen $\alpha\widehat{m}(\alpha)$; entregar todo, y recibir la suma c? En otras palabras, ¿cuál es la cantidad cierta de dinero c que "vale lo mismo" (o es equivalente) que ser el dueño del proyecto, vender una porción α y que le paguen $\alpha\widehat{m}(\alpha)$?

Parte E. Encuentre el equilibrio separador. El equilibrio separador es un par de funciones $[\alpha(\cdot), \widehat{m}(\cdot)]$ tal que $\alpha(\mu)$ es el α óptimo para el tipo μ, dadas las creencias $\widehat{m}(\cdot)$; $\widehat{m}(\alpha)$ es el tipo estimado para un emprendedor que elige vender α; $\widehat{m}(\cdot)$ es consistente: para cada número α, si $\alpha = \alpha(\mu)$ (si α es la proporción elegida por el tipo μ), se debe cumplir que $\widehat{m}(\alpha) = \widehat{m}(\alpha(\mu)) = \mu$.

Pista: debe resolver una ecuación diferencial en $\widehat{m}(\alpha)$, y la condición de borde es que el tipo más bajo, $\mu = l$, debe elegir vender todo: $\alpha(l) = 1 \Leftrightarrow \widehat{m}(1) = l$.

Ejercicio 30 En un mercado hay dos tipos de emprendedores, los θ_b y los $\theta_a > \theta_b > 1$; la proporción de θ_a es π. Un emprendedor de tipo θ_i tiene acceso a un proyecto que cuesta \$1, y que tiene un rendimiento aleatorio z que se distribuye $N\left(\theta_i, \sigma^2\right)$. El emprendedor tiene $w > 1$ de riqueza inicial, por lo que podría financiar el proyecto si quisiera. Pero como su utilidad por un nivel de riqueza final x es, para algún $r > 0$, $u(x) = -e^{-rx}$, es averso al riesgo y si pudiera vender una parte del proyecto a un precio justo, lo haría. En el mercado de crédito hay competencia entre financistas que son neutrales al riesgo, por lo que pagarán por un proyecto de inversión, su valor esperado.

Los emprendedores eligen qué porcentaje α de su proyecto vender, y si p es el valor esperado de θ, los emprendedores pagan $p\alpha$ por la porción comprada. Un equilibrio cuando los tipos no son observables es: un α para cada tipo de emprendedor; una función de creencias $c(\alpha)$ ($c(\alpha)$ es la probabilidad de que sea θ_a dado que ofreció vender α) y un precio $p(\alpha) = c(\alpha)\theta_a + (1 - c(\alpha))\theta_b$; la función $c(\cdot)$ es consistente y α_i maximiza la utilidad de θ_i dada la función $p(\alpha)$.

Parte A. Si los θ son observables, encuentre el α_i que maximiza la utilidad de θ_i, cuando los financistas pagan $\alpha\theta$ por un proyecto θ. Pista: primero, notamos que si k es una constante e y es aleatorio, $E\left(e^{k+y}\right) = e^k E\left(e^y\right)$; en segundo lugar, del Ejercicio 29 sabemos que si $y \sim N\left(a, s^2\right)$, entonces $E\left(e^y\right) = e^{a+\frac{s^2}{2}}$.
Parte B. Suponga ahora que los θ no son observables. Si las únicas alternativas de los emprendedores fueran vender (la fracción que quisieran) a un precio p, o autofinanciarse, ¿qué condición debe cumplir p, para que θ_i quiera vender (una condición para cada θ_i)?
Parte C. Utilice la Parte B para mostrar que para que haya un equilibrio de pooling, en el cual ambos tipos de emprendedores eligen participar, se debe cumplir que $r\sigma^2 \geq (1 - \pi)(\theta_a - \theta_b)$.
Parte D. Supongamos que no se cumple la condición anterior, por lo que la asignación eficiente no está disponible (la asignación en la cual los dos emprendedores venden el 100% de los proyectos). Encuentre los equilibrios separadores. Primero, encuentre el α_b que elegirá el θ_b en equilibrio, y luego encuentre los niveles de α_a que podrían ser de equilibrio para θ_a (pista: la violación de la condición de la Parte C implica que la utilidad de reserva de θ_a es quedarse afuera del mercado; muéstrelo) ¿Cuál es el mejor equilibrio separador para θ_a? (todos los equilibrios separadores le dan la misma utilidad a los financistas y a θ_b). Sólo plantee la ecuación que arroja el mejor α, no la resuelva.

Ejercicio 31 Considere un mercado de crédito con dos tipos de emprendedores, buenos y malos, $\theta = \{b, m\}$, con una proporción a de buenos b y $0 < m < b < 1$. Los emprendedores son neutrales al riesgo, y para ambos

tipos, el proyecto puede ser exitoso y rendir R (al final del proyecto, el valor del mismo será R, y eso incluye todo lo que se haya invertido) o fracasar y rendir 0 (idem: si fracasa, el valor es 0; se pierde lo invertido). Un emprendedor de tipo θ es exitoso con probabilidad θ. Ambos tipos de proyecto requieren una inversión I, que se financia con un préstamo de I, y repago D (si el proyecto falla, no se repaga D). El emprendedor tiene un "gran" capital C, que no es líquido y por eso no se puede invertir en el proyecto, pero parte puede ser puesto como colateral. Si el proyecto rinde 0, el banco exigirá la parte c que se haya puesto como colateral. Como en general, en la liquidación de una garantía o colateral se pierde una parte ineficiencias (trámites, abogados, costos legales, etc) asumimos por simplicidad que *todo* lo que se puso como colateral se pierde. En particular, si el emprendedor firmó un contrato con un colateral de $c \leq C$, y el proyecto rinde 0, el individuo perderá c, y el banco no ganará nada. El emprendedor le ofrece al único banco de la economía un colateral c y el banco, en función de sus creencias $\mu(c)$ ($\mu(c)$ es la probabilidad que el tipo sea b, dado que ofreció c) le ofrece prestarle I a cambio de un repago

$$D = \frac{I}{(\mu b + (1-\mu)\, m)}$$

Parte A. Escriba los beneficios esperados del banco de un contrato (c, D) si piensa que el emprendedor es bueno con probabilidad $\mu(c)$. Calcule la deuda D que hace que el beneficio esperado sea 0.
Parte B. Encuentre los equilibrios de pooling.
Parte C. Encuentre los equilibrios separadores.

Al igual que en los ejercicios anteriores, la firma buena puede señalizar su calidad ofreciendo algo que es un desperdicio de recursos. En los casos anteriores, el desperdicio de recursos era ofrecer colateral, que se perdía. En el ejercicio que viene, el desperdicio de recursos es una campaña publicitaria que no redunda en ningún beneficio.

Ejercicio 32 Hay dos tipos de firma, la θ_b vale \$50, y la θ_a vale 100. A priori, la probabilidad de una firma θ_a es $\frac{1}{10}$. Las firmas tienen acceso a un proyecto que cuesta $I = \$20$, que rinde \$30. La firma no puede financiarse sola: hay un mercado competitivo de inversores, que pueden poner los \$20, a cambio de un porcentaje de la firma: como el mercado financiero es competitivo, recibirán un porcentaje s tal que $s * (\text{Valor de la firma luego del proyecto}) = 20$.

Parte A. Si las firmas pueden elegir hacer el proyecto o no, y si lo hacen, qué porcentaje de la firma ofrecer, ¿hay algún equilibrio de pooling en que ambos tipos hacen el proyecto? (sabemos que no hay ningún separador, ya que ambas ofrecerían el mismo s bajo)
Parte B. Encuentre el equilibrio separador en este caso (qué hace cada firma, qué porción de la firma ofrece, y cuáles son las creencias de los financistas que soportan el equilibrio).
Parte C. Asuma ahora que los dueños (originales) de la firma pueden decidir si hacer una campaña publicitaria que se pagará después de que se hayan realizado las ganancias del proyecto (y la pagarán tanto dueños viejos como nuevos), al tiempo que deciden si vender una porción de la firma a cambio de los \$20 para financiar el proyecto. El costo k de la campaña puede ser elegido por los dueños de la firma. Encuentre un equilibrio separador, en el cual ambas firmas hacen el proyecto, y eligen campañas de tamaños distintos k_b y k_a.

Ejercicio 33 En el mercado hay dos tipos de autos usados: los buenos dan una utilidad de 1000 al vendedor, y los malos 100. Hay una proporción α de buenos en el mercado, hay competencia por el lado de los vendedores, y los compradores no pueden observar la calidad del auto. Hay una prueba de calidad a la que

los dueños de los autos pueden someter a sus vehículos: preparar a un auto bueno para pasar la prueba cuesta $100, y cuesta $600 para uno malo (si se preparan pasan, y si no se preparan, no la pasan).

Parte A. Encuentre los precios p_I y p_N que ofrecerá (digamos el único) comprador de autos, en un equilibrio en el cual los autos buenos pasan la inspección y los malos no (para fijar los precios recuerde que hay competencia en el mercado de los vendedores). En cualquier caso asumimos que el comprador valora los autos más que su valor para los vendedores, más el costo de la inspección.
Parte B. Encuentre los equilibrios cuando los costos de pasar la inspección para el malo son 200, y cuando son 1000. ¿qué pasa con los precios cuando el costo sube?

Ejercicio 34 Hay dos conductores, uno de alto riesgo de accidente, y uno de bajo, con probabilidades de accidente $\overline{\pi} > \underline{\pi}$. Hay una proporción α de conductores de bajo riesgo. Ambos tipos tienen riqueza w y sufren una pérdida L en caso de accidente. Tienen una utilidad $u(s) = \sqrt{s}$ cuando su riqueza final es s. Los conductores pueden ofrecerle a la compañía de seguros contratos del tipo (B, p), donde B es el beneficio que reciben en caso de accidente, y p es la prima que pagan. Primero la naturaleza decide el tipo de conductor, luego los conductores ofrecen contratos a la compañía de seguros, y finalmente la compañía de seguros acepta o rechaza los contratos. La compañía de seguros es maximizadora de beneficios.

Parte A. Escriba la utilidad esperada de cada tipo de consumidor, para un contrato (B, p).
Parte B. Encuentre el nivel de utilidad que se puede asegurar cada tipo, asumiendo $\overline{\pi} = \frac{2}{3}$ y $\underline{\pi} = \frac{3}{5}$.
Parte C. Para $w = 9$ y $L = 5$, grafique con B en las abcisas y p en las ordenadas: la curva de beneficio 0 para la empresa, para cada tipo de conductor; las curvas de indiferencia encontradas en la Parte B. Identifique la región en el gráfico de los contratos que: son preferidos por el de bajo riesgo, $\underline{\pi}$, a los de la Parte B, son peores para el del alto riesgo, $\overline{\pi}$, que los de la Parte B; la firma los aceptaría.
Parte D. Encuentre los contratos (B, p) con $p = \underline{\pi}B$ que podrían ser parte de un equilibrio separador.
Parte E. Encuentre el α^* tal que si $\alpha < \alpha^*$ no hay equilibrio de pooling.

Ejercicio 35 Crawford y Sobel, Econometrica 1982. A decision maker must choose some decision $y \in [0, 1]$. His payoff depends on the decision and on the state of the world θ: $U(y, \theta) = -(y - \theta)^2$. The decision maker can base his decision on a message m sent at no cost by an expert who knows θ. The expert's payoff function is $V(y, \theta) = -\left(y - \theta - \frac{1}{10}\right)^2$ (el experto tiene un sesgo "hacia arriba" de $\frac{1}{10}$). Assume that the decision maker believes that θ is uniformly distributed on $[0, 1]$. In stage 1 the expert sends a message $m \in [0, 1]$. In stage 2 the decision maker chooses y. Let $m^*(\theta)$ denote an equilibrium message as a function of θ.

Parte A. Muestre que no hay un equilibrio completamente revelador. Es decir, muestre que no hay ningún equilibrio en el cual si $\theta \neq \theta'$, $m^*(\theta) \neq m^*(\theta')$.
Parte B. Muestre que hay un equilibrio en el cual: si $\theta \in \left[0, \frac{3}{10}\right]$ el experto manda un mensaje y si $\theta \in \left(\frac{3}{10}, 1\right]$ manda otro. Más formalmente, $m^*(\theta) = A$ si $\theta \in \left[0, \frac{3}{10}\right]$ y $m^*(\theta) = B \neq A$ si $\theta \in \left(\frac{3}{10}, 1\right]$. ¿qué elige el receptor después de un mensaje de A? ¿Y después de B? Calcule la utilidad esperada ex-ante (antes de que se sepa θ) del experto y del tomador de decisiones en este equilibrio.
Parte C. Suppose now that the decision maker delegates the decision to the expert and describe the equilibrium choice in this case. Compute the ex-ante expected payoff of the expert and of the decision maker in this equilibrium. Comment.

Ejercicio 36 Hay dos tipos de trabajadores, productivos e improductivos, y dos tipos de empleos, buenos y malos. En el empleo malo todos producen $x < 60$ (un x fijo, no aleatorio) y en el bueno los buenos producen 100 y los malos 0. Hay 60% de trabajadores buenos en el mercado. Los trabajadores conocen sus tipos, pero

los empresarios no; también, como hay competencia, los empleadores le pagan a los trabajadores su producto esperado. Los trabajadores eligen en qué empleo ubicarse.

Parte A. Si no hay posibilidad de señalización, ¿qué sucederá en esta economía? (¿cuáles serán los sueldos en cada actividad, y dónde trabajará cada tipo de trabajador?)

Suponga ahora que un trabajador improductivo puede educarse, con un costo de e^2 por e años de estudio, mientras que el productivo puede educarse con un costo de $\frac{e^2}{2}$ por e años de estudio. La educación no influye en la productividad.

Parte B. Encuentre los equilibrios de pooling (en que se educan lo mismo, y hacen lo mismo en términos de qué empleo agarran).
Parte C. Encuentre los equilibrios separadores.
Parte D. ¿Cómo se compara el bienestar de cada tipo de trabajador entre el separador más eficiente, y el equilibrio de la Parte A? (depende del valor de x).

Ejercicio 37 Una leona observa una gacela y trata de decidir si perseguirla o no. Las gacelas son de dos tipos, rápidas r con probabilidad π, y lentas l con probabilidad $1-\pi$. La gacela ve a la leona, y debe decidir si "demostrar" su velocidad dando unos saltitos. Los tiempos son: la gacela actúa o no, y la leona decide si perseguir o no. Las utilidades son las siguientes: una leona que no persigue a la gacela tiene un pago de 0; si persigue a una gacela rápida, tiene un pago de -1, y si persigue a una lenta, un pago de 2. Para las gacelas, ser perseguidas tiene un costo de $a > 0$, mientras que dar los saltos tiene un costo de t_r y t_l para las gacelas rápidas y lentas respectivamente, con $t_r < t_l < a$. Para formalizar, sea $m \in \{s, n\}$ el movimiento de la gacela, saltar o no. Las creencias de la leona son una función c que mapea cada movimiento a un número entre 0 y 1, indicando la probabilidad de que la gacela sea rápida. Las acciones de la leona son perseguir (p) o quedarse (q).

Parte A. Encuentre todos los equilibrios de pooling. ¿Hay algún pooling en que las dos gacelas saltan? ¿Hay alguno en que no saltan?

Parte B. ¿Hay algún equilibrio separador?

Parte C. Suponga que $\pi(-1) + (1-\pi)2 > 0 \Leftrightarrow \pi < \frac{2}{3}$. ¿Hay algún equilibrio híbrido? En principio hay dos tipos: la rápida salta seguro, y la lenta a veces; o la lenta no salta, y la rápida salta a veces. La leona puede perseguir con probabilidad $\alpha \in (0,1)$, no tiene que restringirse a elegir perseguir seguro o quedarse seguro. Si hay un equilibrio híbrido, descríbalo en detalle (quien salta con qué probabilidad, cuáles son las creencias de la leona (hay que hacer Bayes), y qué acciones sigue luego de cada movimiento de la gacela.

Signalling: Soluciones

Ejercicio 1.A. Construiremos un equilibrio en el cual B elige niveles de educación 0 y e^*, y A elige e^*. Para que B elija e^* y 0 tiene que suceder que la utilidad de elegir 0 sea igual a la utilidad de elegir e^* :

$$u_2(0,1,B) = 1 = w(e^*) - e^* = u_2(e^*, w(e^*), B)$$

(la utilidad de elegir 1 es 1 pues el salario debe ser 1, pues como sólo el bajo está eligiendo 0, $c(0) = 0$ y por tanto $w(0) = 1$). De esa ecuación y de

$$\begin{aligned} c(e^*) &= \frac{p\pi_A(e^*)}{p\pi_A(e^*) + (1-p)\pi_B(e^*)} \\ &= \frac{p}{p + (1-p)\pi_B(e^*)} = \frac{1}{1+\pi_B(e^*)} \end{aligned}$$

deducimos que para cualquier par $(\pi_B(e^*), e^*)$ que satisfaga

$$\frac{1}{1+\pi_B(e^*)} = e^*$$

se obtiene un equilibrio híbrido (también habría que verificar que el tipo A no quiera desviarse y estudiar 0, pero si el B es indiferente entre 0 y e^*, A preferirá seguro e^*). La idea es que si el tipo B está jugando e^* con una probabilidad muy alta, el salario cuando e^* ocurre será bajo (cercano a $\frac{3}{2}$), mientras que si $\pi_B(e^*)$ es cercano a 0, el sueldo será cercano al de un equilibrio separador, $w = 2$. En particular, si ponemos $\pi_B(e^*) = \frac{1}{2}$ y $e^* = \frac{2}{3}$, obtenemos un equilbrio como el que estamos buscando.

1.B. Construiremos un equilibrio en el cual A elige los niveles $\frac{3}{2}$ y $e^* < \frac{3}{2}$ y B elige sólo e^*. Para que ello suceda, debemos tener que A quiera elegir ambos niveles:

$$\begin{aligned} u_2\left(\frac{3}{2}, 2, A\right) &= 2 - \frac{\frac{3}{2}}{2} = w(e^*) - \frac{e^*}{2} = u_2(e^*, w(e^*), A) \Leftrightarrow \\ \frac{5}{2} &= 2w(e^*) - e^* = 2(1 + c(e^*)) - e^* \Leftrightarrow \\ e^* &= 2c(e^*) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $c(e^*) = \frac{\pi_A(e^*)}{\pi_A(e^*)+1}$ obtenemos que cualquier par $(\pi_A(e^*), e^*)$ que satisfaga

$$e^* = 2\frac{\pi_A(e^*)}{\pi_A(e^*)+1} - \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

es un candidato para equilibrio híbrido. Debemos también verificar que el tipo B no quiera desviarse de e^* a 0 :

$$\begin{aligned} u_2(e^*, 1 + c(e^*), B) &= 1 + \frac{\pi_A(e^*)}{\pi_A(e^*)+1} - e^* \geq 1 = u_2(0,1,B) \Leftrightarrow \\ \frac{\pi_A(e^*)}{\pi_A(e^*)+1} &\geq e^* \end{aligned} \tag{3.5}$$

Poniendo $\pi_A(e^*) = \frac{1}{2}$ y $e^* = \frac{1}{6}$ obtenemos que se satisfacen las ecuaciones (3.4) y (3.5), por lo que es un equilibrio.

1.C. Construiremos un equilibrio en el cual A elige $\frac{3}{2}$ y e^* y B elige 0 y e^*. El salario en e^* es

$$\begin{aligned} 1+\Pr\left(\theta=\theta_A \mid e=e^*\right) &= 1+\frac{\Pr\left(e^*\cap A\right)}{\Pr\left(e^*\right)}=1+\frac{\Pr\left(e^* \mid A\right)\Pr\left(A\right)}{\Pr\left(e^* \mid A\right)\Pr\left(A\right)+\Pr\left(e^* \mid B\right)\Pr\left(B\right)} \\ &= 1+\frac{\pi_A\left(e^*\right)p}{\pi_A\left(e^*\right)p+\pi_B\left(e^*\right)\left(1-p\right)}=1+\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que el tipo B sea indiferente entre estudiar 0 y e^*, se debe satisfacer

$$1=1+\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}-e^* \Leftrightarrow e^*=\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}. \tag{3.6}$$

Por su parte, para que el tipo A sea indiferente entre estudiar $\frac{3}{2}$ y e^* se debe satisfacer

$$2-\frac{\frac{3}{2}}{2}=1+\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}-\frac{e^*}{2} \Leftrightarrow e^*=2\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}-\frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Juntando (3.6) y (3.7) queda

$$\frac{\pi_A\left(e^*\right)}{\pi_A\left(e^*\right)+\pi_B\left(e^*\right)}=\frac{1}{2}$$

Poniendo entonces $\pi_A\left(e^*\right)=\pi_B\left(e^*\right)=\frac{1}{2}$, obtenemos $e^*=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2.A. *Primer paso. Encontrar el nivel de utilidad que se puede asegurar el tipo bajo, θ_B.* Del problema de maximización de la firma, sabemos que si las creencias son $c\left(e^*\right)$, el salario que pagará la firma será $\sqrt{e}+1+c\left(e^*\right)$. Por lo tanto, el nivel de utilidad que se puede asegurar el trabajador de tipo θ_B es aquél que hace tangente sus curvas de indiferencia a la función $\sqrt{e}+1$. Esto se encuentra eligiendo e para maximizar $w-e$, sujeto a $w=\sqrt{e}+1$, cuya solución es $e=\frac{1}{4}$, y el nivel de utilidad es $\frac{5}{4}$.

Segundo paso. Para un p dado, encontrar los niveles de educación de pooling para los cuales el tipo bajo no se quiere desviar. Como en el pooling el salario debe ser $\sqrt{e}+1+p$, debemos tener que

$$u_2\left(e,\sqrt{e}+1+p,\theta_B\right)\geq\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{e}+1+p-e\geq\frac{5}{4}.$$

Poniendo $\sqrt{e}=z$, obtenemos que la solución es $\sqrt{e}\in\left[\frac{1}{2}-\sqrt{p},\frac{1}{2}+\sqrt{p}\right]$.

$\sqrt{e}+1+p-e\geq\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{e}+p-\frac{1}{4}-e\geq 0$

$x+p-\frac{1}{4}-x^2=0$, roots: $\begin{matrix}\sqrt{p}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\sqrt{p}\end{matrix}$

$\frac{-1+\sqrt{1-1+4p}}{-2}$

*Tercer paso. Encontrar el nivel de utilidad que se puede asegurar el tipo alto, θ_A.*El nivel de utilidad que se puede asegurar el trabajador de tipo θ_A es aquél que hace tangente sus curvas de indiferencia a la función $\sqrt{e}+1$. Esto se encuentra eligiendo e para maximizar $w-\frac{e}{2}$, sujeto a $w=\sqrt{e}+1$, cuya solución es $e=1$, y el nivel de utilidad es $\frac{3}{2}$.

Cuarto paso. Para un p dado, encontrar los niveles de educación de pooling para los cuales el tipo alto no se quiere desviar. Como en el pooling el salario debe ser $\sqrt{e}+1+p$, debemos tener que

$$u_2\left(e,\sqrt{e}+1+p,\theta_A\right)\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{e}+1+p-\frac{e}{2}\geq\frac{3}{2}.$$

Poniendo $\sqrt{e}=z$, obtenemos que la solución es $\sqrt{e}\in\left[1-\sqrt{2p},1+\sqrt{2p}\right]$.

Quinto paso. Para un p dado, y un nivel de educación e^* para el cual ninguno de los dos tipos se quiere desviar, encontrar una función de creencias que sostiene a e^* como parte de un equilibrio de pooling. Como

$1-\sqrt{2p} \geq \frac{1}{2}-\sqrt{p}$ y $1+\sqrt{2p} \geq \frac{1}{2}+\sqrt{p}$, debo elegir e^* para que $\sqrt{e^*} \in \left[1-\sqrt{2p}, \frac{1}{2}+\sqrt{p}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Unas creencias (probabilidad que el trabajador sea θ_A) que soportan el nivel $e^*=1$ son

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e<1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } e \geq 1 \end{cases}.$$

Para verificarlo, debemos mostrar que, dadas las creencias, ambos tipos quieren elegir $e=1$. Los dos tipos deben maximizar $w-\frac{e}{\theta}$ sujeto a

$$w = \begin{cases} \sqrt{e}+1 & \text{si } e<1 \\ \sqrt{e}+\frac{5}{4} & \text{si } e \geq 1 \end{cases}.$$

Mirando el primer y tercer paso, vemos que este problema es análogo, pues en la restricción, no cambian las pendientes. Por lo tanto, $e=1$ maximiza la utilidad del tipo alto. Para verificar que el bajo también quiere elegir $e=1$ verificamos que el nivel de utilidad en el equilibrio propuesto es mayor o igual que $\frac{5}{4}$: $\sqrt{e}+1+p-e \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}$ (que fue lo que verificamos en el segundo paso).

Si hubiéramos elegido como nivel de pooling $e=\frac{1}{2}$, esas creencias (adaptadas)

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } e \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

no funcionarían, pues el alto querría elegir $e=1$. Es más "seguro" poner

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } e = \frac{1}{2} \end{cases}$$

pues ya sabemos que al alto le quedan dos opciones, elegir $e=\frac{1}{2}$, o maximizar su utilidad sujeto a $c(e)=0$, y ya hicimos esa cuenta (queda $e=1$) y usamos exactamente la utilidad que recibe en $e=1$ como cota inferior de la utilidad de pooling (por lo que sabemos que le conviene elegir $e=\frac{1}{2}$).

2.B. *Primer paso. Encontrar los niveles e_B que pueden ser parte de un equilibrio separador.* Si e_B es parte de un equilibrio separador, tiene que pasar que en e_B, la curva de indiferencia del tipo bajo es tangente a la curva $\sqrt{e}+1$ y las creencias son $c(e_B)=0$, pues la firma debe creer que si observa e_B, el trabajador es del tipo bajo. Por lo tanto, si asumimos que $e_B \neq \frac{1}{4}$ es parte de un equilibrio separador, en el cual las creencias son $\widetilde{c}(e)$, tendremos que

$$\begin{aligned} u_2\left(e_B, \sqrt{e_B}+1, \theta_B\right) &= \sqrt{e_B}+1-e_B \overset{\text{por Parte A}}{<} \sqrt{\frac{1}{4}}+1-\frac{1}{4} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{4}}+1+\widetilde{c}\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = u_2\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{4}}+1+\widetilde{c}\left(\frac{1}{4}\right), \theta_B\right) \end{aligned}$$

que es la utilidad de estudiar 1/4. Deducimos que el único nivel de estudio posible para un tipo θ_B en un equilibrio separador es 1/4.

Segundo paso. Encontrar los niveles e_A que pueden ser parte de un equilibrio separador. Los niveles de educación e_A deben satisfacer dos condiciones. Por un lado, el alto no debe querer desviarse de e_A, y por el otro, el bajo no debe querer irse a e_A.

El tipo θ_A no quiere desviarse de e_A. De la parte A sabemos que el tipo alto puede asegurarse un nivel de utilidad de $\frac{3}{2}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} u_2\left(e_A, w, \theta_A\right) &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_2\left(e_A, \sqrt{e_A}+2, \theta_A\right) \geq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{e_A}+2-\frac{e_A}{2} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Del cuarto paso de la parte A sabemos que eso implica $e_A \leq 2\sqrt{2}+3$.

El tipo θ_B no quiere desviarse a e_A. Debemos tener que

$$\begin{aligned} u_2\left(e_A, w, \theta_B\right) &\leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow u_2\left(e_A, \sqrt{e_A}+2, \theta_B\right) \leq \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{e_A}+2-e_A \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

o, equivalentemente, $e_A \geq \frac{9}{4}$.

Tercer paso. Para (e_A, e_B), donde $e_A \in \left[\frac{9}{4}, 2\sqrt{2}+3\right]$, $e_B = \frac{1}{4}$, encontrar una función de creencias que soporta a los niveles (e_A, e_B) como parte de un equilibrio separador. Las siguientes creencias soportan a $(e_A, e_B) = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$:

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e < \frac{9}{4} \\ 1 & \text{si } e \geq \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Ejercicio 3. Lo primero que haremos será deducir cuánto quiere pagar la firma a un trabajador si cree que es de calidad alta con probabilidad $c(e)$. Debe elegir w para maximizar

$$-c(e)(2e-w)^2 - (1-c(e))(e-w)^2$$

lo que da como resultado $w = e(1+c(e))$.

Entonces, el nivel de utilidad que se puede garantizar un trabajador de tipo θ_B, es aquél que obtiene eligiendo e para maximizar

$$w - e^2$$

sujeto a que $w = e$ (este es el más bajo de los salarios que podría recibir si estudia e). La solución es $e = \frac{1}{2}$, que da una utilidad de $\frac{1}{4}$.

El nivel de utilidad que se puede garantizar un trabajador de tipo θ_A es el que se obtien eligiendo e para maximizar $w - \frac{e^2}{2}$ sujeto a $w = e$. La solución es $e = 1$, y da un nivel de utilidad de $\frac{1}{2}$.

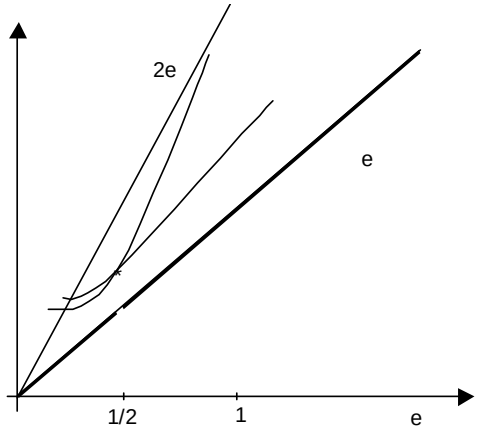
3.A. Para encontrar los niveles de educación que pueden ser equilibrios de pooling, debemos asegurarnos que el θ_B obtenga más que $\frac{1}{4}$ y que θ_A obtenga más que $\frac{1}{2}$. En un equilibrio de pooling con educación e^*, el sueldo es $\frac{3}{2}e^*$, por lo que la utilidad de θ_B es $\frac{3}{2}e^* - e^{*2}$, y la de θ_A es $\frac{3}{2}e^* - \frac{e^{*2}}{2}$. Por lo tanto, e^* debe satisfacer

$$\frac{3}{2}e^* - e^{*2} \geq \frac{1}{4} \text{ y } \frac{3}{2}e^* - \frac{e^{*2}}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^* \in \left[-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\right] = [0.382, 1.309].$$

Por lo tanto, un nivel de educación $e^* = \frac{1}{2}$ puede ser parte de un equilibrio. Unas creencias (probabilidad que el trabajador sea θ_A) que soportan ese nivel de educación como un equilibrio de pooling son

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } e = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

El equilibrio descripto se encuentra en la siguiente figura



donde la línea oscura (y el asterisco) son la función $e\left(1+c\left(e\right)\right)$. Por supuesto, en el dibujo, las curvas de indiferencia más empinadas son las del trabajador de tipo θ_B.

3.B. El nivel de educación de un tipo θ_B debe ser $\frac{1}{2}$. Para el tipo θ_A, el nivel de educación debe ser tal que (i) θ_A no se quiera desviar a $e=1$, (ii) θ_B no se quiera deviar a e_A.
(i) La condición en este caso es que $2e_A - \frac{e_A^2}{2} \geq \frac{1}{2}$, es decir, que el salario de equilibrio debe ser mayor que la utilidad que se puede garantizar.
(ii) En este caso debemos tener $2e_A - e_A^2 \leq \frac{1}{4}$.

Un nivel de educación e_A que satisface ambas condiciones es $e_A = 2$, y unas creencias (probabilidad que el trabajador sea θ_A) que soportan este equilibrio son

$$c\left(e\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq 2 \\ 1 & \text{si } e = 2 \end{cases}.$$

Ejercicio 5. Como en el Ejercicio 3, tendremos $w\left(e\right) = e\left(1+c\left(e\right)\right)$. Entonces, el nivel de utilidad que se puede garantizar un trabajador de tipo θ_B, es aquél que obtiene eligiendo e para maximizar

$$u_2\left(e,w,\theta\right) = w - \left(e-1\right)^2 \Rightarrow e = \frac{3}{2} \;\; \& \;\; u_2\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\theta_B\right) = \frac{5}{4}.$$

El nivel de utilidad que se puede garantizar un trabajador de tipo θ_A es el que se obtien eligiendo e para maximizar $u_2\left(e,w,\theta\right) = w - \left(e-2\right)^2/2$ sujeto a $w = e$. La solución es $e=3$, y da un nivel de utilidad de $\frac{5}{2}$.

Ejercicio 4.A. Como la educación no sirve a las firmas, el salario que se puede asegurar cada tipo es 3 (independiente de e). Por lo tanto, en equilibrio debemos garantizar $\overline{u}_A = \overline{u}_B = 3$ a ambos tipos. Si se sabrá que el malo es malo, en equilibrio debe tener $w_B = 3$, y si e_B fuera mayor que 0, no sería un equilibrio (pues reduciendo su educación aumentaría débilmente su salario, y bajaría el costo de educarse). Por lo tanto en equilibrio $e_B = 0$. El salario de A en equilibrio será 5, y para que el θ_B no quiera hacerse pasar por θ_A debemos tener $\overline{u}_B = 3 \geq 5 - 2e_A^2 \Leftrightarrow e_A \geq 1$. Por otro lado, para que θ_A no quiera desviarse a su utilidad de reserva, debemos tener $\overline{u}_A = 3 \leq 5 - e_A^2 \Leftrightarrow e_A \leq \sqrt{2}$. Cualquier creencia "si estudia más que x asumo que es bueno, mientras que si estudia menos, asumo que es malo" para $x \in \left[1,\sqrt{2}\right]$ funcionará para un equilibrio separador: el malo estudiará 0, y el bueno x.
4.B. En el pooling el sueldo será 4. El tipo θ_B puede asegurarse $\overline{u}_B = 3$, mientras que si estudia e_P obtiene $4 - 2e_P^2$. La solución de $4 - 2e_P^2 \geq 3$ es $e_P \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, y como $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ aproximadamente, el θ_B elegiría $e=0$, por lo que no es un equilibrio de pooling.

5.A. Para encontrar los niveles de educación que pueden ser equilibrios de pooling, debemos asegurarnos que el θ_B obtenga más que $\frac{5}{4}$ y que θ_A obtenga más que $\frac{5}{2}$. En un equilibrio de pooling con educación e^*, el sueldo es $\frac{3}{2}e^*$, por lo que la utilidad de θ_B es $\frac{3}{2}e^* - (e^* - 1)^2$, y la de θ_A es $\frac{3}{2}e^* - (e^* - 2)^2/2$. Por lo tanto, e^* debe satisfacer

$$\frac{3}{2}e^* - (e^* - 1)^2 \geq \frac{5}{4} \text{ y } \frac{3}{2}e^* - \frac{(e^* - 2)^2}{2} \geq \frac{5}{2}.$$

que arroja $e^* \in \left[-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{7}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{13} + \frac{7}{4}\right]$, por lo tanto, $e^* = 2$ puede ser parte de un equilibrio de pooling, con creencias $c(e) = 0$ para todo $e \neq 2$ y $c(2) = 1/2$.

5.B. El nivel de educación de un tipo θ_B debe ser $\frac{3}{2}$. Para el tipo θ_A, el nivel de educación debe ser tal que (i) θ_A no se quiera desviar a $e = 3$, (ii) θ_B no se quiera deviar a e_A. La condición (i) en este caso es que $2e_A - \frac{(e_A-2)^2}{2} \geq \frac{5}{2}$, es decir, que la utilidad de equilibrio debe ser mayor que la utilidad que se puede garantizar; por la (ii) debemos tener $2e_A - (e_A - 1)^2 \leq \frac{5}{4}$. Las dos condiciones requieren que $e_A \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{7} + 2, \sqrt{7} + 4\right] \approx [3.3, 6.6]$. Un nivel de educación e_A que satisface ambas condiciones es $e_A = 4$, y unas creencias (probabilidad que el trabajador sea θ_A) que soportan este equilibrio son

$$c(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq 4 \\ 1 & \text{si } e = 4 \end{cases}.$$

Ejercicio 6.A. Como la función de creencias debe ser constante, y consistente, la firma debe creer que la probabilidad de un tipo alto es p. Por lo tanto, el sueldo que pagará es $1 + p$. Dado que ese es el sueldo, sin importar el nivel de educación, ambos tipos de trabajadores estudiarán 0. El nivel de utilidad de los altos y bajos es el mismo: $1 + p$.

6.B. Siguiendo los pasos habituales, sabemos que el bajo estudiará 0, y el alto cualquier $e_A \in [1, 2]$. Los niveles de utilidad máximos son 1 para el bajo, y $\frac{3}{2}$ para el alto.

6.C. Para $p \leq \frac{1}{2}$ el mejor equilibrio separador es mejor que el equilibrio de la Parte A. La posibilidad de señalizar calidad deja peor parados a ambos tipos porque el equilibrio de pooling de la Parte A ya no está disponible (pues la comparación es con los separadores). De todas maneras, cualquier pooling con educación observable es debilmente peor que el pooling de la Parte A.

Una respuesta incorrecta a esta pregunta es "los dos tipos están peor en términos de utilidad pues la utilidad de la firma aumenta de $-3p^2 - p$ a 0". La razón por la cual esta respuesta es incorrecta es la siguiente. Imaginemos un juego en el cual en vez de una firma, hay dos. La utilidad de las firmas es el tipo del trabajador que contrata, menos el salario pagado (y no el cuadrado de la distancia entre el sueldo y el tipo). Una vez que el trabajador eligió el nivel de educación deseado, las firmas compiten ofreciendo un salario, y las creencias de las firmas tienen que ser las mismas. En este juego, las firmas siempre tienen una utilidad esperada de 0, y se obtienen exactamente los mismos resultados que en este ejercicio.

Ejercicio 7.A. El salario elegido por la firma es

$$w(e) = e + 1 + c(e)$$

El θ_B se garantiza una utilidad lo más alta posible cuando $e_B = \frac{1}{2}$ y tiene una utilidad de $\frac{5}{4}$. Por su lado, el θ_A cuando trata de garantizarse una cierta utilidad, maximiza en $e_A^g = 1$, con una utilidad de $\frac{3}{2}$.

Para que haya un equilibrio de pooling, debemos tener que la educación y el salario en pooling, (e_P y $e_P + 1 + p$) deben ser tales que ninguno de los tipos se quiera desviar:

$$\begin{aligned} e_P + 1 + p - e_P^2 &\geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow e_P \in \left[-\sqrt{p} + \frac{1}{2}, \sqrt{p} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right] \\ e_P + 1 + p - \frac{e_P^2}{2} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow e_P \in \left[-\sqrt{2}\sqrt{p} + 1, \sqrt{2}\sqrt{p} + 1\right] = [0.53, 1.47] \end{aligned}$$

Los niveles de equilibrio de pooling son entonces $e_P \in \left[0.53, \frac{5}{6}\right]$. Para $e_P = \frac{3}{5}$ las creencias $c(e_P) = 1/9$ y $c(e) = 0$ para todo $e \neq 3/5$ soportan el equilibrio.

7.B. La educación de θ_B es $e_b = 1/2$. Las restricciones de incentivos sobre e_A en este caso son

$$\left.\begin{array}{l} e_A + 2 - e_A^2 \leq \frac{5}{4} \\ e_A + 2 - \frac{e_A^2}{2} \geq \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow e_A \in \left[\frac{3}{2}, \sqrt{2} + 1\right].$$

7.C. Este ejercicio se hace a veces con $p = k = \frac{1}{2}$, y otras con $p = \frac{1}{9}$ y $k = \frac{3}{4}$. El θ_B maximiza en $e_B = 1/2$, y tiene una utilidad de 5/4. El θ_A maximiza en $e_A^g = k$, y obtiene una utilidad de $k + 1 - \frac{k^2}{2}$.

Pooling. Como la intersección de la curva de indiferencia del bajo, en su nivel de utilidad de reserva $\overline{u} = \frac{5}{4}$, con la curva de salarios del pooling ($f(e) + 1 + p$) ocurre a la derecha de k (eso es porque de la Parte A sabemos que, con $p = 1/9$, la intersección de la curva de indiferencia con $e + \frac{10}{9}$ ocurre en $e = \frac{5}{6} > k$; cuando $p = k = 1/2$, la intersección tiene que ocurrir a la derecha de k, porque el bajo maximiza justo en $\frac{1}{2} = k$), debemos ver para qué niveles de e, la curva de indiferencia $w = \frac{5}{4} + e^2$ está por debajo de la función $w = f(e) + 1 + p$, que es donde estará el punto de $(e_P, w(e_P))$. Hay que encontrar dos intersecciones de la curva de indiferencia: para $e \geq k$ y para $e < k$. Para $e \geq k$, la solución de los e_P que sirven es $k + 1 + p - e_P^2 \geq \frac{5}{4}$ que queda $e_P \leq \sqrt{k + p - \frac{1}{4}}$; para $e < k$, los e_P que sirven son los mismos que en las partes anteriores (porque el $f(e)$ es e, como antes), y queda entonces $e_P + 1 + p - e_P^2 \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow e_P \geq \frac{1}{2} - \sqrt{p}$. Por lo tanto, para los bajos el intervalo relevante es $\left[\frac{1}{2} - \sqrt{p}, \sqrt{k + p - \frac{1}{4}}\right]$.

En el caso del alto sucede algo similar: tenemos que encontrar un corte de la curva de indiferencia de su utilidad de reserva $\overline{u} = k + 1 - \frac{k^2}{2}$, $w = k + 1 - \frac{k^2}{2} - \frac{e^2}{2}$, con la curva $w = f(e) + 1 + p$ para $e \geq k$ y otro para $e < k$. Para $e \geq k$, debemos resolver

$$k + 1 + p - \frac{e_P^2}{2} \geq k + 1 - \frac{k^2}{2} \Leftrightarrow e_P \leq \sqrt{k^2 + 2p}$$

y para $e < k$, la ecuación queda

$$e_P + 1 + p - \frac{e_P^2}{2} \geq k + 1 - \frac{k^2}{2} \Leftrightarrow e_P \geq 1 - \sqrt{k^2 - 2k + 2p + 1}.$$

Para los altos, el intervalo relevante es entonces $e_P \in \left[1 - \sqrt{k^2 - 2k + 2p + 1}, \sqrt{k^2 + 2p}\right]$.

Si $p = \frac{1}{9}$ y $k = \frac{3}{4}$, los intervalos son $\left[\frac{1}{2} - \sqrt{p}, \sqrt{k + p - \frac{1}{4}}\right] = \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4}}\right] = \left[\frac{1}{6}, 0.78\right]$ y $\left[1 - \sqrt{k^2 - 2k + 2p + 1}, \sqrt{k^2 + 2p}\right] = \left[1 - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{9} + 1}, \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{2}{9}}\right] = [0.47, 0.89]$ y por lo tanto $e_P \in [0.47, 0.78]$

Si $p = k = \frac{1}{2}$, los intervalos son $\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right] = [-0.21, 0.87]$ y $\left[1 - \sqrt{\frac{1}{4} - 1 + 1 + 1}, \sqrt{\frac{1}{4} + 1}\right] = [-0.12, 1.12]$.

La estructura es similar a la de la Parte A: cada tipo nos da un intervalo de e_P posibles; en general el bajo no quiere un e_P alto, y el alto no quiere un e_P bajo, y siempre terminamos con que el rango de e_P viene dado por la cota superior del bajo, y la cota inferior del alto.

Separating. Las utilidades garantizadas son las mismas que antes. El bajo elige $e_B = \frac{1}{2}$. Se debe cumplir que el alto no se quiera desviar,

$$k + 1 - \frac{k^2}{2} \leq k + 2 - \frac{e_A^2}{2} \Leftrightarrow e_A \leq \sqrt{2 + k^2},$$

y que el bajo no se quiera desviar. Para el bajo, como la intersección de la curva de indiferencia garantizada (con la de salarios de pooling) estaba siempre a la derecha de k, con más razón lo está ahora (que consideramos la intersección de la curva de indiferencia con una curva más alta: antes la intersectábamos con $k + 1 + p$ y ahora con $k + 2$; por lo tanto, el punto de intersección debe ser un e más alto). Por lo tanto, la condición es que

$$k + 2 - e_A^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow e_A \geq \sqrt{k + \frac{3}{4}}.$$

Ejercicio 8. Como en las notas de clase, tendremos $1 \leq a \leq 2$.

Ejercicio 9 En este ejercicio no hay equilibrio. Antes de ver por qué, va una aclaración: si encontraron la mínima utilidad que se puede asegurar un tipo cualquiera, está mal (les da la utilidad mínima que pueden obtener; la gente se puede garantizar cualquier nivel de utilidad que deseen; no se cumplen las condiciones de segundo orden). La razón es que la educación aumenta los sueldos a tasa creciente (porque la firma valora a la educación en e^2). Por lo tanto, dado un nivel cualquiera de utilidad que propongamos como equilibrio, digamos u, un agente de tipo θ puede obtener más que ese nivel estudiando un e tal que $e^2 - \frac{e}{\theta} > k$. Y siempre hay un e que cumple con esa condición.

Ejercicio 10. El electorado elegirá w para maximizar

$$-b\left(\frac{2}{4} - c\left(c-2\right) - w\right)^2 - \left(1-b\right)\left(\frac{1}{4} - c\left(c-2\right) - w\right)^2 \Rightarrow w\left(c\right) = \frac{1 + b\left(c\right)}{4} - c\left(c-2\right).$$

Para ver la utilidad que se puede asegurar cada tipo de gobernante, asumimos que los electores creen que el gobernante es malo "seguro" y el gobernante elige c para maximizar su utilidad:

$$\begin{aligned} w - c^2 \text{ sujeto a } w &= \frac{1}{4} - c\left(c-2\right) \Rightarrow c_d^* = \frac{1}{2} \text{ y } u_2^*\left(c, \frac{1}{4} - c\left(c-2\right), \theta_d\right) = \frac{3}{4}. \\ w - \frac{c^2}{2} \text{ sujeto a } w &= \frac{1}{4} - c\left(c-2\right) \Rightarrow c_h^* = \frac{2}{3} \text{ y } u_2^*\left(c, \frac{1}{4} - c\left(c-2\right), \theta_h\right) = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Parte A. Para mantener un equilibrio de pooling, la utilidad del honesto en c_P, $w = \frac{1+p}{4} - c\left(c-2\right)$ debe ser mayor que $\frac{11}{12}$ y la del deshonesto mayor que $\frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{1+\frac{1}{8}}{4} - c\left(c-2\right) - c^2 &\geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow c \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right] = \left[0.375\,, 0.625\,\right] \\ \frac{1+\frac{1}{8}}{4} - c\left(c-2\right) - \frac{c^2}{2} &\geq \frac{11}{12} \Leftrightarrow c \in \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{3}\right] = \left[0.522\,33, 0.811\,\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, c_P puede ser un nivel de cercanía de pooling sólo si está en el intervalo $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\sqrt{3}, \frac{5}{8}\right]$.

Parte B. Para un separador debemos tener

$$\begin{aligned} \frac{1+1}{4} - c\left(c-2\right) - c^2 &\leq \frac{3}{4} \Rightarrow c \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 0.854 \\ \frac{1+1}{4} - c\left(c-2\right) - \frac{c^2}{2} &\geq \frac{11}{12} \Leftrightarrow c \in \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right] = \left[0.258, 1\right] \end{aligned}$$

Por lo que cualquier $c \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, 1\right]$ puede ser parte de un equilibrio separador.

Ejercicio 11. Para unas creencias $c(e)$, la utilidad de la firma de pagar w es

$$-c(e)(\theta_A - w)^2 - (1 - c(e))(\theta_B - w)^2 \Rightarrow w(e) = c(e)\theta_A + (1 - c(e))\theta_B = 3 + 2c(e).$$

Si las creencias son 0, la educación que elige cada tipo es $\overline{e}_A = \overline{e}_B = 0$, y por los sueldos $w(e) = 3$, las utilidades de reserva son $\overline{u}_A = \overline{u}_B = 3$. Con estos números, en un separador debemos tener, como siempre $e_B = 0$ (como es separador le pagan $w(e_B) = 3$, y si e_B fuera positivo, el tipo θ_B estaría mejor estudiando $\overline{e}_B = 0$, que reduce su costo y potencialmente aumenta el salario), y además

$$\begin{aligned} w(e_A) - e_A^2 &\geq w(\overline{e}_A) - \overline{e}_A^2 \Leftrightarrow 5 - e_A^2 \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq e_A \\ w(e_B) - 2e_B^2 &\geq w(e_A) - 2e_A^2 \Leftrightarrow 3 \geq 5 - 2e_A^2 \Leftrightarrow e_A \geq 1. \end{aligned}$$

Con $e_A \in \left[1, \sqrt{2}\right]$, podemos elegir creencias del estilo $c(e) = 0$ si $e < e_A$ y $c(e) = 1$ para $e \geq e_A$ y tendremos un separador (también funciona con otra cantidad de creencias, como por ejemplo si cambiamos $e < e_A$ por $e \neq e_A$).

Para el pooling debemos tener que $c(e_P) = p = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $w(e_P) = 4$. Por lo tanto, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} w(e_P) - e_P^2 &\geq w(\overline{e}_P) - \overline{e}_P^2 \Leftrightarrow 4 - e_P^2 \geq 3 \Leftrightarrow e_P \leq 1 \\ w(e_P) - 2e_P^2 &\geq w(\overline{e}_B) - 2\overline{e}_B^2 \Leftrightarrow 4 - 2e_P^2 \geq 3 \Leftrightarrow e_P \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707. \end{aligned}$$

Con cualquier $e_P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, unas creencias que sean $c(e) = 0$ si $e < e_P$ y $c(e) = \frac{1}{2}$ para $e \geq e_P$ hacen que ambos tipos elijan $e = e_P$ y tenemos un equilibrio de pooling.

Esto nos muestra que no puede haber un equilibrio como el propuesto en la parte C: el tipo bajo querría desviarse a algún otro nivel de educación, ya que sabemos que se puede asegurar una utilidad de al menos $\overline{u}_B = 3$.

Ejercicio 12.A. Es igual a la Parte A del Ejercicio 10, porque si un e_P atrae a un tipo h, atraerá al deshonesto con la utilidad como la del h; y si el e_P atraía al h en el otro ejercicio, lo atraerá en este si tiene la misma función de utilidad que antes.

12.B. En equilibrio, la regla de Bayes nos dice que

$$b(c_p) = p(h \mid c_p) = \frac{p(c_p \mid h)\, p(h)}{p(c_p \mid h)\, p(h) + p(c_p \mid d)\, p(d)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{7}{8}} = \frac{2}{9}$$

para $c_p = c_h = c_d^t$, por lo que los salarios serán

$$w = \frac{\frac{2}{9}2 + \frac{7}{9}1}{4} - c(c-2) = \frac{11}{36} - c(c-2).$$

Para que el deshonesto no se desvíe,

$$\frac{11}{36} - c(c-2) - c^2 \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow c \notin \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Para que el honesto y el trucho no se desvíen, $\frac{11}{36} - c(c-2) - \frac{c^2}{2} \geq \frac{11}{12} \Leftrightarrow c \in \left[-\frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{3}, \frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right] = [0.474\,22, 0.859\,12]$.

Ejercicio 13.A. Luego de realizado el proyecto, la firma valdrá 280, por lo que si las acciones nuevas prometían $x\%$ de la firma, debemos tener $x280 = 100 \Leftrightarrow x = \frac{5}{14} = S^G$. Los $\frac{9}{14}$ restantes (el valor para los viejos accionistas) de la firma valen $\frac{9}{14} * 280 = 180$.

13.B. En este caso, $x200 = 100 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = S^B$ (obviamente se les tiene que prometer más a los inversores, porque la firma valía menos, y los \$100 están fijos). El valor de las acciones para los viejos inversionistas es 100.

13.C. Entregan la mitad de la firma, que vale 280; el valor es 140. Parece una cuenta tonta, pero es relevante para la Parte E.

13.D. Si fuera un equilibrio, el gerente, cuando la empresa valiera 80, ofrecería el contrato S^G, pues ello le daría a sus accionistas una utilidad de $\frac{9}{14}200 = \frac{900}{7}$ que es mayor que lo que obtendrían si ofreciera el contrato S^B (que daba un valor para los accionistas de 100).

13.E. En este equilibrio, las creencias de los inversores son: si sale a buscar plata, es mala (eso es consistente, porque sólo las malas salen a buscar plata en este equilibrio). Con estas creencias, su estrategia óptima es aceptar cualquier oferta de acciones que les prometa una porción de la firma $B \geq S^B$. Dada este comportamiento por parte de los inversores (digamos que esto es como la curva de salarios en los ejercicios típicos de clase), a una firma de tipo B le conviene hacer el proyecto y ofrecer S^B. Por otra parte, a la firma tipo G, le conviene no hacer el proyecto, porque se queda con un valor de 160, mientras que hacer el proyecto entregando la mitad de la firma les arroja un valor de 140.

13.F. Si hubiera un equilibrio de pooling, en que ambos tipos de firmas G o B ofrecieran el mismo contrato S^P, debe satisfacer

$$100 = x\left(p280 + (1-p)\,200\right) \Leftrightarrow S^P = \frac{5}{4p+10}.$$

Para que ambos tipos, G y B, quieran participar (y no, por ejemplo, no hacer el proyecto), les tiene que ir mejor con $1 - S^P$ de la firma, que quedándose con el valor inicial:

$$\begin{aligned}
\left(1-S^P\right)280 &\geq 160 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{5}{4p+10}\right)280 \geq 160 \Leftrightarrow p \geq \frac{5}{12} \equiv p^* \\
\left(1-S^P\right)200 &\geq 80 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{5}{4p+10}\right)200 \geq 80 \Leftrightarrow p \geq 0.
\end{aligned}$$

Si hubiéramos resuelto la primer desigualdad hubiera quedado que los G aceptan participar si y sólo si $S^P \leq \frac{3}{7}$, mientras que los B participan sí y sólo si $S^P \leq \frac{3}{5}$. Por lo tanto, para cada $p \geq \frac{5}{12}$ tenemos un equilibrio en que $S^P = \frac{5}{4p+10}$.

Una cosa interesante: supongamos que $p = \frac{1}{2} > p^*$, en ese caso, con mercados competitivos, $S^P = \frac{5}{12}$ (para que los inversores tengan un retorno esperado de 0). Sin embargo, podría suceder que los inversores tuvieran creencias del estilo de "si ofrece menos de $\frac{11}{24}$, creeré que es malo; si ofrece $\frac{11}{24}$ creeré que es bueno con probabilidad $p = \frac{1}{2}$"; en ese caso, ambos tipos de empresas querrían participar, y las creencias serán consistentes. Ese tipo de equilibrio lo descartamos porque asumimos que el mercado de capitales era competitivo y tenían que tener retorno 0. Si hubiera un solo inversor que quisiera embocarle al valor esperado del retorno (como hacemos siempre: pide un S que maximice $-(\theta - S)^2$), en ese caso el equilibro de este párrafo podría existir.

Ejercicio 14.A. La porción S^G debe satisfacer $100 = S^G(160 + R) \Leftrightarrow S^G = \frac{100}{R+160}$, y el valor final de las acciones de los viejos dueños es $\left(1 - S^G\right)(160 + R) = \left(1 - \frac{100}{R+160}\right)(160 + R) = R + 60$. Una forma de interpretar este resultado es que se quedan con todo el proyecto, pero pagan los \$100 de lo que valía la firma.

14.B. Cuando la firma es B, tenemos $100 = S^B(80 + R) \Leftrightarrow S^B = \frac{100}{80+R}$ y el valor final de las acciones de los viejos dueños es $\left(1 - S^B\right)(80 + R) = \left(1 - \frac{100}{80+R}\right)(80 + R) = R - 20$.

14.C. El valor de las acciones de los viejos accionistas, si entregan S^B cuando la firma es G es

$$v\left(S^B, G\right) = \left(1 - S^B\right)(160 + R) = \left(1 - \frac{100}{80 + R}\right)(160 + R) = \frac{(R-20)(R+160)}{R+80}$$

14.D. Ese par de estrategias (con las creencias asociadas) no es un equilibrio separador, pues a los dueños de la empresa tipo B les convendrá ofrecer S^G en vez de S^B.

14.E. Para que el par de estrategias propuesto sea un equilibrio, a los G les tiene que convenir quedarse afuera del mercado (no emitir acciones, y no hacer el proyecto). En el equilibrio propuesto, las creencias de los potenciales accionistas son que si la firma pide plata, es tipo B seguro, por lo que no prestarán si la firma hace el proyecto y ofrece cualquier $S \leq S^B$. Por lo tanto, hacer el proyecto le da a la firma

$$\left(1 - S^B\right)(160 + R) = \frac{(R-20)(R+160)}{R+80} \text{ y } \frac{(R-20)(R+160)}{R+80} \leq 160 \Leftrightarrow R \leq 10\sqrt{161} + 10 \equiv R_b \approx 137.$$

Los accionistas de B, dadas las creencias, maximizan su utilidad emitiendo acciones por una porción S^B, ya que eso les da una utilidad de $R - 20 \geq 100 > 80$.

14.F. Para que exista un equilibrio de pooling, la porción de la firma que entregan los accionistas debe satisfacer

$$100 = S^P\left(\frac{1}{2}(160 + R) + \frac{1}{2}(80 + R)\right) \Leftrightarrow S^P = \frac{100}{R + 120}.$$

Para que a los G les sirva participar, debe suceder que $\left(1 - S^P\right)(160 + R) \geq 160 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{100}{R+120}\right)(160 + R) \geq 160$, que sucede sólo si $R \geq 10\sqrt{161} - 10 \equiv R^a \approx 117$. La diferencia entre el 137 de la parte E y este 117, es que en el 137 los inversores creían que si pedías eras B seguro, mientras que en este caso si pedís sos B con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 15.A. Tenemos

$$\begin{aligned} w(e_B) &= 1 \\ w(e_P) &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

15.B. El tipo θ_B elegirá $e_B = 0$ y $e_P \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

15.C. Unas creencias que soportan ese equilibrio son

$$c(e) = (c_A(e), c_I(e)) = \begin{cases} (0,0) & e \neq 3 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & e = 3 \end{cases}.$$

Otras son

$$c(e) = (c_A(e), c_I(e)) = \begin{cases} (0,0) & e < 3 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & e \geq 3 \end{cases}.$$

15.D. No.

Ejercicio 16.A. En el primer período, la firma debe elegir q para maximizar

$$pq - c(q) = (18 - q)q - c(q)$$

lo que arroja

$$q = \frac{18 - c'(q)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^{Gm} = 9 \\ q_1^{Bm} = 6 \end{cases}.$$

Para cualquier q_2, la firma 1 debe elegir q_1 para maximizar

$$pq_1 - c(q_1) = (18 - q_1 - q_2)q_1 - c(q_1)$$

lo que arroja

$$q_1 = \frac{18 - q_2 - c'(q_1)}{2}. \tag{3.8}$$

Por otra parte, para cualquier creencia k (probabilidad que la firma sea G), la firma 2 debe elegir q_2 para maximizar

$$\pi_2^d(k) = k\left(18 - q_1^G - q_2 - 3\right)q_2 + (1-k)\left(18 - q_1^B - q_2 - 3\right)q_2 = \left(18 - \overline{q}_1 - q_2 - 3\right)q_2$$

lo que arroja

$$q_2(k) = \frac{15 - \overline{q}_1}{2}. \tag{3.9}$$

Sustituyendo las dos versiones de (3.8) en (3.9) obtenemos

$$q_2(k) = \frac{15 - k\left(\frac{18-q_2}{2}\right) - (1-k)\left(\frac{18-q_2-6}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow q_2^d(k) = 6 - 2k \tag{3.10}$$

y eso implica

$$q_1^{Gd}(k) = 6 + k \text{ y } q_1^{Bd}(k) = 3 + k. \tag{3.11}$$

Luego,

$$\pi_1^{Gd}(k) = \left(18 - q_1^{Gd}(k) - q_2^{Gd}(k)\right)q_1^{Gd}(k) = (k+6)^2 \quad \pi_2^d(k) = \left(18 - \overline{q}_1 - q_2(k) - 3\right)q_2(k) - 20 = 4(k-3)^2 - 20$$
$$\pi_1^{Bd} = \left(18 - q_1^{Bd}(k) - q_2^{Bd}(k) - 6\right)q_1^{Bd}(k) = (k+3)^2$$

por lo que la firma 2 entrará si y sólo si sabe que la firma 1 tiene costos marginales altos (B).

16.B. La firma 1, con costos marginales altos obtiene, si "juega" $q_1^{Bm} = 6$,

$$36 + \pi_1^{Bd} = 36 + 9 = 45.$$

Si en cambio juega $q_1^{Gm} = 9$, obtiene hoy beneficios menores que 36, pero mañana obtiene los beneficios de monopolio con costos marginales altos: 36. Los beneficios totales son entonces

$$(18-9)9 - 6*9 + 36 = 63$$

por lo cual la firma con costos marginales altos querrá desviarse y comportarse como una con costos bajos. Por lo tanto $(9, 6)$ no es parte de un equilibrio separador.

16.C. Elegimos creencias tales que 2 cree que 1 es G con probabilidad 0 para todo $q \neq 12$, y que es G con probabilidad 1 si $q = 12$. Queremos mostrar que $(12, 6)$ es un equilibrio separador con estas creencias.

Si se va a saber que 1 tiene costos altos, la mejor elección es $q = 6$ (como tenemos en el equilibrio propuesto). Si quisiera desviarse y producir 12, sus beneficios serían

$$(18-12)*12 - 6*12 + 36 = 36 < 45$$

por lo que no le conviene.

Para una firma con costos bajos, seguir el equilibrio propuesto y producir 12 en el primer período le da

$$(18-12)*12 + 81 = 153.$$

Desviarse y producir lo mejor en el primer período le da 81 más lo que obtenga en el segundo período cuando la firma 2 entre (crea que la firma es de costos altos, $k = 0$) y produzca $q_2^d(0) = 6$. De la ecuación (3.8) sabemos que producirá 6 unidades y ello le dará un beneficio de $(18-12)*6 = 36$. Por lo tanto, los beneficios de desviarse son

$$81 + 36 = 117 < 153.$$

Tenemos que el propuesto, es un equilibrio separador.

16.D. Primero notamos que, en principio, hay dos tipos de equilibrios de pooling. En uno, la firma 2 entra en el segundo período, y en el otro tipo no. Analizaremos primero si cuando ambos tipos de firmas producen 9, a la firma 2 le conviene entrar al mercado o no.

Calcularemos ahora los beneficios para 2 de entrar en el segundo período si cree que la firma es G con probabilidad $p = \frac{1}{2}$.

Si 2 entra, G está produciendo q_1^G y B, q_1^B, sus beneficios son

$$\begin{aligned} & p\left[\left(18 - q_1^G - q_2 - 3\right) q_2 - 20\right] + (1-p)\left[\left(18 - q_1^B - q_2 - 3\right) q_2 - 20\right] \\ = \quad & \left(18 - pq_1^G - (1-p)\, q_1^B - 3 - q_2\right) q_2 - 20. \end{aligned}$$

Poniendo $\overline{q} = pq_1^G + (1-p)\, q_1^B$ tenemos que la función de reacción de 2 es

$$q_2 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\overline{q}$$

A su vez, teníamos que las funciones de reacción de G y B venían dadas por la ecuación (3.8)

$$\begin{aligned} q_1^G &= \frac{18 - q_2}{2} \\ q_1^B &= \frac{18 - q_2 - 6}{2} \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo $p = \frac{1}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{18-q_2}{2} + \frac{18-q_2-6}{2}}{2}\right) \Leftrightarrow q_2 = 5 \\ q_1^G &= \frac{13}{2}, \quad q_1^B = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Los beneficios de las firmas en el equilibrio propuesto son entonces $(18 - 5 - 5 - 3)\, 5 = 25$

$$\begin{aligned} \pi_1^G &= 81 + \left(18 - 5 - \frac{13}{2}\right)\frac{13}{2} = 81 + \frac{169}{4} = \frac{493}{4} \\ \pi_1^B &= 27 + \frac{49}{4} = \frac{157}{4} \\ \pi_2 &= (18 - 5 - 5 - 3)\, 5 - 20 = 5 \end{aligned}$$

Como $\pi_2 = 5 > 0$, a 2 le conviene entrar, en el equilibrio propuesto.

En principio, podría parecer que si la firma 2 entra en el segundo período, entonces no puede ser un equilibrio de pooling. La razón para esto es que uno puede pensar: para qué querría la firma B hacer el esfuerzo de producir 9 en el primer período y no 6 si igual va a entrar la firma 2? El problema con este razonamiento es que si la firma 2 entra o no no es la única variable relevante, pues por ejemplo, en el equilibrio propuesto, la firma 2 es menos agresiva (produce menos) si cree que se enfrenta con la firma G con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por ejemplo, en el equilibrio propuesto, la firma 2 produce 5, mientras que si sabe que se enfrenta a una firma B la firma 2 producirá 6 (ver Parte A).

La mejor "chance" que tiene el equilibrio propuesto de ser un equilibrio es castigando los desvíos de las firmas con creencias desfavorables. Veremos ahora que aún con las creencias más desfavorables, a la firma B le conviene desviarse y producir 6 en el primer período (su cantidad de monopolio óptima) y 3 en el segundo período. Ello arroja beneficios de

$$(18 - 6)\, 6 - 6 * 6 + (18 - 3 - 6)\, 3 - 6 * 3 = 45 > \frac{157}{4}$$

por lo que la firma B se desviará, y $q_1 = 9$ no es parte de un equilibrio de pooling.

Finalmente, existe un equilibrio de pooling si $q_1 \in \left[\frac{13}{2}, 6 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right]$. La idea es que las firmas producen x en el primer período y luego obtienen $\frac{49}{4}$ la B o $\frac{169}{4}$ la G. Para B los beneficios de atenerse al equilibrio son $\pi = (18 - x - 6)\, x + \frac{49}{4}$ que deben ser mayores que 45 (los beneficios de desviarse: 36 del monopolio en el primer período y el Cournot del segundo cuando la 2 produce 6 y la 1 produce 3). Eso arroja

$$(18 - x - 6)\, x + \frac{49}{4} - 45 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{13}}{2} + 6, \frac{\sqrt{13}}{2} + 6\right].$$

En forma similar, la firma de costos bajos, la firma G, debe comparar sus beneficios de pooling (hacer x y luego obtener $\frac{169}{4}$) o hacer 9 y que luego la firma 2 piense que es B :

$$(18 - x)\, x + \frac{169}{4} - 81 - (18 - 6 - 6)\, 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{13}{2}, \frac{23}{2}\right].$$

Entonces, cualquier x entre $\frac{13}{2}$ y $\frac{\sqrt{13}}{2} + 6$ puede ser parte de un equilibrio de pooling.

16.E. La última parte de la parte D, y esta, son dos intentos de rescatar el equilibrio de pooling. En un intento, mejoramos la utilidad de la firma B en el primer período, bajando de 9 a x. Ahora aumentamos los beneficios de la firma B, al hacer que la firma 2 no entre en el segundo período.

Verificamos ahora que si la probabilidad de que la firma 1 sea G es $\frac{9}{10}$, la cantidad 9 es parte de un equilibrio de pooling en el cual la firma 2 no entra. La idea es que si la probabilidad de G es suficientemente alta, a 2 no le conviene entrar (porque estamos en una situación parecida a la de la parte A). Para soportar este equilibrio de pooling, asumimos que las creencias de la firma 2 son tales que si la firma 1 no produce 9 en el primer período, la firma 2 le asigna probabilidad 1 a que la firma 1 sea B (y por lo tanto entra en el segundo período).

Para verificar que producir 9 es parte de un equilibrio de pooling en el cual 2 no entra, mostraremos: (1) que los beneficios de entrar son negativos para 2 después de observar 9; (2) que a G y a B les conviene producir 9 en el primer período.

(1) De las partes anteriores sabemos que

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\overline{q} \\ q_1^G &= \frac{18 - q_2}{2} \\ q_1^B &= \frac{18 - q_2 - 6}{2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

por lo que sustituyendo la segunda y tercera en la primera obtenemos

$$q_2 = \frac{21}{5},\ q_1^G = \frac{69}{10} \text{ y } q_1^B = \frac{39}{10}.$$

Los beneficios para 2 son entonces

$$\pi_2 = \left(18 - pq_1^G - (1 - p)\, q_1^B - 3 - q_2\right) q_2 - 20 = -\frac{59}{25}$$

(2) Debemos ahora mostrar que ni G ni B quieren desviarse y producir otra cosa en el período 1. Para empezar, G no querrá, porque obtiene 81 en el primer período y 81 en el segundo, que es lo máximo a lo que puede aspirar. El tipo B por su parte, si sigue la estrategia de equilibrio obtiene 36 en el segundo período cuando es un monopolista, y

$$(18 - 9)\, 9 - 6 * 9 = 27$$

en el primero, con lo cual los beneficios de equilibrio son 63. Si se desvía y produce 6 en el primer período, obtiene 36 cuando es un monopolista y 9 en el segundo cuando es un duopolista y la firma 2 está segura que 1 es B. Por lo tanto, los beneficios de desviarse son $45 < 63$.

16.F. No hay tal equilibrio si $p \leq \frac{1}{2}$. Para darnos cuenta comparamos los beneficios de desviarse que tenía la firma B cuando $p = 1/2$ (que son los mismos que ahora que p es más chico) con los beneficios de seguir el pooling. Siguiendo el pooling, obtiene los mismos beneficios que antes en el primer período, y los beneficios del segundo período son aún menores que antes, pues la firma 2 será más agresiva (porque es menos probable que la firma sea G). Entonces, si los beneficios de desviarse eran mayores que los de seguir el pooling antes, son aún mayores ahora.

El método sería entonces buscar algún p entre $1/2$ y $9/10$ que hiciera que 2 entrara, pero que fuera dócil. Para eso calculamos el p más grande para el que 2 quiere entrar. De la ecuación (3.12) obtenemos

$$q_2 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\left(p\frac{18-q_2}{2} + (1-p)\frac{12-q_2}{2}\right) \Leftrightarrow q_2 = 6 - 2p \Rightarrow q_1^B = 3 + p \text{ y } q_1^G = 6 + p.$$

Entonces los beneficios de la firma 2 en el segundo período son

$$(18 - 6 + 2p - p(6+p) - (1-p)(3+p) - 3)(6-2p) - 20 = 4p^2 - 24p + 16 \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 3 - \sqrt{5}.$$

Deducimos que si $p \leq 3 - \sqrt{5}$, la firma 2 entrará. Debemos entonces hacer p lo más grande posible (para que la firma 2 sea dócil y la firma 1 tipo B quiera seguir el pooling). Los beneficios de seguir el pooling con 9 son entonces:

$$\pi_1^B = (18 - 9 - 6)9 + (18 - 6 + 2p - (3+p) - 6)(3+p) = (p+3)^2 + 27$$

y esto debe ser mayor que los beneficios de desviarse, producir 6 en el primer período y luego jugar Cournot en el segundo:

$$\pi_1^B = (18 - 6 - 6)6 + (18 - 6 - 3 - 6)3 = 45.$$

Como la diferencia entre los beneficios es

$$(p+3)^2 + 27 - 45 = (p+3)^2 - 18$$

no hay ningún p que lo cumpla.

Ejercicio 17.A. Para poner esto en los términos habituales, un equilibrio es una función de creencias $c(p)$ que dice cuál es la probabilidad que el producto sea de calidad alta dado que la firma invirtió p; un precio que están dispuestos a pagar los consumidores como función de sus creencias (pagan el valor esperado de su disposición a pagar); y un nivel de publicidad elegido por cada tipo de firma.

Supongamos que $(0, p)$ es parte de un equilibrio separador (la firma con producto malo invierte 0 y la que tiene producto bueno p) para $p < 20$. Ese no puede ser un equilibrio, pues la firma con el producto malo invertirá p en publicidad y toda la gente lo probará a un precio caro la primera vez, luego verá que es malo y pagará el precio bajo para siempre, por lo que ganará $70 - p > 50$ (estos son los beneficios si la firma no invierte en publicidad y todo el mundo sabe que es malo, y compra el producto siempre a un precio bajo). Si en cambio $p > 20$, $(0, p)$ puede ser parte de un equilibrio, y vemos que la publicidad es efectiva, por más que no nos informe directamente sobre la calidad del producto.

Una pregunta que no estamos contestando es "¿qué tan grande puede ser p?". Si a la firma con el producto bueno le pedimos que gaste una fortuna, no lo hará. Pero la pregunta sólo pedía qué niveles de p nos convencerán que es buena, y la respuesta es $p \geq 20$.

17.B. Si el producto se puede consumir una sola vez, la publicidad no sirve, pues tiene el mismo costo y da los mismos beneficios a ambos tipos de productos.

Ejercicio 18. La impostora fué irracional: le daba lo mismo medio bebe que nada, y sin embargo mandó la señal que le interesaba poco la vida del bebe, mostrando que no era la madre.

Ejercicio 19.A. Si hubiera un equilibrio de pooling con producción, el precio elegido por ambos tipos de monopolistas debería ser $p_1 \leq q\theta_A$ para que el consumidor compre. Si se fija un precio con esa característica, el monopolista de tipo θ_B obtendrá beneficio 0 en el segundo período, pues el consumidor conoce la calidad del bien. Por lo tanto, los beneficios del monopolista de tipo bajo serán $p_1 - c_B + 0$, y como

$$p_1 \leq q\theta_A < c_B$$

los beneficios totales del tipo bajo serán negativos, y por tanto decidirá no producir en el primer período.

19.B. Supongamos que hay un equilibrio separador en el cual el tipo bajo produce el bien y lo ofrece a un precio de p_1^B. Como es un equilibrio separador, cuando el consumidor observa ese precio, sabe que es un bien de calidad baja, que no le genera ninguna utilidad. Por lo tanto, no comprará. En ese caso, el monopolista de tipo bajo habrá incurrido un costo de c_B y no habrá vendido el bien, obteniendo una utilidad negativa. Eso es un absurdo, pues tiene la opción de no producir.

19.C. Para que el bajo no quiera hacerse pasar por alto, debemos tener $p_1 \leq c_B$. Para que el alto no quiera salirse del mercado (no producir en el primer período) sus beneficios deben ser positivos:

$$p_1 - c_A + \theta_A - c_A \geq 0 \Leftrightarrow p_1 \geq 2c_A - \theta_A.$$

Ejercicio 20. Si hay un equilibrio separador, cuando el b elija su F_b se sabrá que es malo, y su retorno será $\gamma b + \beta b$, si $b \geq F_b$ o $\gamma b + \beta (b - P)$, si $b < F_b$. El caso de $b < F_b$ se puede descartar, pues el gerente podría elegir otro $F \leq b$, mejoraría su w, y no perdería P. Por lo tanto debemos tener $F_b \leq b$.

Por otro lado, en un separador, el a obtiene $\gamma a + \beta a$, si $a \geq F_a$ o $\gamma a + \beta (a - P)$, si $a < F_a$. Si queremos sostener un equilibrio "loco" en el cual el a se endeuda hasta la bancarrota, sólo para que señalizar que es bueno en el período 0, debemos tener $\gamma a + \beta (a - P) \geq \gamma b + \beta a \Leftrightarrow \gamma (a - b) \geq \beta P$. Pero en ese caso, si la desigualdad entre parámetros fuera estricta, el tipo b querría desviarse y hacerse pasar por alto y no habría equilibrio:

$$\gamma b + \beta b < \gamma a + \beta (b - P) \Leftrightarrow \beta P < \gamma (a - b).$$

Vemos entonces que no hay equilibrio si $a < F_a$, por lo que nos queda $a \geq F_a$. A su vez, F_a debe ser tal que el b no quiera hacerse pasar por a : si $F_a \leq b$, cuando el b hace F_a obtiene $\gamma a + \beta b > \gamma b + \beta b$, que es su utilidad de equilibrio. Por lo tanto, para que F_a sea de equilibrio debemos tener $F_a > b$.

Tomamos ahora cualquier $F_b \leq b$ y $F_a \in (b, a]$ y verificamos que son parte de un equilibrio. En el equilibrio propuesto, a elige F_a y b elige F_b, y las creencias son $c(F) = 0$ si $F < F_a$ y $c(F) = 1$ si $F \geq F_a$, que son consistentes. El dueño de la empresa paga $w = \gamma b$ si $F < F_a$ y $w = \gamma a$ si $F \geq F_a$. El b no quiere hacerse pasar por a, ya que $\gamma b + \beta b \geq \gamma a + \beta (b - P) \Leftrightarrow \beta P \geq \gamma (a - b)$, como asumimos. El a no quiere elegir ningún otro F : con F más chico obtiene $\gamma b + \beta a < \gamma a + \beta a$, y para F más grande obtiene lo mismo (si $F \leq a$) o $\gamma a + \beta (a - P) < \gamma a + \beta a$ si $F > a$.

Una forma más mecánica de ver este ejercicio, siguiendo los pasos que hacemos normalmente en clase es primero calcular las utilidades de reserva de los dos tipos $\overline{u}_a$ y $\overline{u}_b$, las utilidades que se puede asegurar cada tipo. Si creen que es malo, el a se puede asegurar $\overline{u}_a = \gamma b + \beta a$ (no elegirá $F > a$), y el b se puede asegurar

$\overline{u}_b = \gamma b + \beta b$. Las condiciones que usamos siempre para encontrar los rangos donde estarán F_a y F_b son: que b esté mejor en F_b que en $\overline{u}_b$, o

$$u_G\left(w\left(F_b\right), F_b, b\right) = \gamma b + \beta \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{si } b \geq F_b \\ b - P & \text{si } b < F_b \end{array} \right\} \geq \gamma b + \beta b = \overline{u}_b \Rightarrow b \geq F_b;$$

que a esté mejor en equilibrio que en $\overline{u}_a$, o

$$u_G\left(w\left(F_a\right), F_a, a\right) = \gamma a + \beta \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } a \geq F_a \\ a - P & \text{si } a < F_a \end{array} \right\} \geq \gamma b + \beta a = \overline{u}_a \Rightarrow a \geq F_a$$

ya que si $a < F_a$ tendríamos $\gamma a + \beta\left(a - P\right) \geq \gamma b + \beta a \Leftrightarrow \gamma\left(a - b\right) \geq \beta P$, que contradice el supuesto sobre los parámetros; finalmente, también requerimos que b esté mejor en F_b que en F_a, o

$$u_G\left(w\left(F_b\right), F_b, b\right) = \gamma b + \beta b \geq \gamma a + \beta \left\{ \begin{array}{ll} b & \text{si } b \geq F_a \\ b - P & \text{si } b < F_a \end{array} \right\} = u_G\left(w\left(F_b\right), F_b, a\right) \Leftrightarrow b < F_a.$$

Tenemos entonces los rangos $F_b \leq b$ y $F_a \in \left(b, a\right]$, como ya habíamos obtenido.

Ejercicio 21.A. Si c es consistente y el equilibrio es monótono, cuando se observa un nivel de deuda D tal que algún tipo t lo elige en el equilibrio, tendremos que c le asignará probabilidad 1 al t tal que $D\left(t\right) = D$ (debe asignarle probabilidad positiva a ese t y como, por monotonía, ningún otro tipo elige D, debe asignarle probabilidad 1).

21.B. Tenemos que el dueño debe maximizar

$$U_1\left(D, w\right) = E_c\left[-\left(\gamma\frac{t}{2} - w\right)^2\right] = -\left(\gamma\frac{a\left(D\right)}{2} - w\right)^2$$

y como para cada D las creencias $c\left(D\right)$ le asignan probabilidad 1 a $a\left(D\right)$,

$$U_1\left(D, w\right) = -\left(\gamma\frac{a\left(D\right)}{2} - w\right)^2$$

que se maximiza cuando

$$w\left(D\right) = \gamma\frac{a\left(D\right)}{2}$$

21.C. Sustituyendo $w\left(D\right)$ en la función de utilidad del gerente obtenemos

$$\gamma\frac{a\left(D\right)}{2} + \left(1 - \gamma\right)\left(\frac{t}{2} - \frac{LD}{t}\right)$$

que se maximiza cuando

$$\gamma\frac{a'\left(D\right)}{2} = \left(1 - \gamma\right)\frac{L}{t} \Leftrightarrow \gamma\frac{1}{2D'\left(t\right)} = \left(1 - \gamma\right)\frac{L}{t} \Leftrightarrow D'\left(t\right) = t\frac{\gamma}{2\left(1 - \gamma\right)L} \Leftrightarrow D\left(t\right) = t^2\frac{\gamma}{4\left(1 - \gamma\right)L} + k$$

21.D. Supongamos que $D\left(1\right) = d > 0$ en un equilibrio monótono. En ese caso la utilidad de elegir d, para un tipo $t = 1$, es

$$\begin{array}{rcl} \gamma\frac{a\left(d\right)}{2} + \left(1 - \gamma\right)\left(\frac{1}{2} - L\frac{d}{t}\right) & = & \gamma\frac{1}{2} + \left(1 - \gamma\right)\left(\frac{1}{2} - L\frac{d}{t}\right) < \gamma\frac{1}{2} + \left(1 - \gamma\right)\left(\frac{1}{2} - L0\right) \\ & \leq & \gamma\frac{a\left(0\right)}{2} + \left(1 - \gamma\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = u_2\left(0, \gamma\frac{a\left(0\right)}{2}, 0\right). \end{array}$$

Esta desigualdad muestra que para un tipo $t = 1$, es mejor elegir un nivel de deuda 0, que cualquier nivel positivo.

Deducimos entonces

$$D(1) = \frac{\gamma}{4(1-\gamma)L} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{\gamma}{4(1-\gamma)L} \Leftrightarrow D(t) = t^2 \frac{\gamma}{4(1-\gamma)L} - \frac{\gamma}{4(1-\gamma)L}$$

21.E. Suponga que $\gamma = \frac{1}{2}$ y $L = 1$. De la ecuación de $D(t)$ obtenemos $a(D)$ y con eso $w(D)$:

$$D(t) = \frac{t^2 - 1}{4} \Leftrightarrow a(D) = \sqrt{4D+1} \Rightarrow w(D) = \gamma \frac{a(D)}{2} = \frac{\sqrt{4D+1}}{4}$$

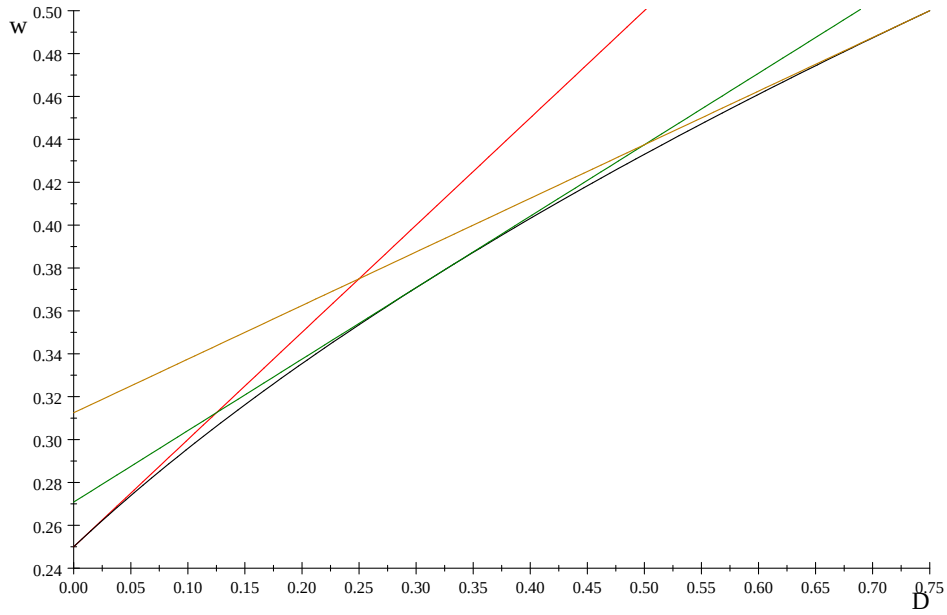
La utilidad de cada uno de los tipos en equilibrio es

$$u_2 = w + \frac{t}{4} - \frac{D}{2t} = \frac{\sqrt{4D+1}}{4} + \frac{t}{4} - \frac{D}{2t} = \frac{\sqrt{4\frac{t^2-1}{4}+1}}{4} + \frac{t}{4} - \frac{\frac{t^2-1}{4}}{2t} = \frac{3t^2+1}{8t}$$

por lo que las curvas de indiferencia que me pide el ejercicio son, para $t = 1, \frac{3}{2}, 2$

$$w + \frac{t}{4} - \frac{D}{2t} = \frac{3t^2+1}{8t} \Leftrightarrow w = \frac{3t^2+1}{8t} + \frac{D}{2t} - \frac{t}{4}$$

que en el gráfico son



y se ve que las curvas de Indiferencia de cada tipo son tangentes a la curva de salario.

Ejercicio 22.A. En el equilibrio de pooling: los trabajadores no se capacitan; las creencias de la firma son tales que para cualquier resultado del examen la probabilidad que le asigna a que el trabajador esté capacitado es 0 (eso se deriva de Bayes); consistente con sus creencias, a la firma le resulta óptimo asignar a los trabajadores a la tarea sin riesgo y pagarle 0. También podría asignarlos a la tarea con riesgo y pagarles -1, pero en este equilibrio, la firma los asigna a la tarea sin riesgo. Los trabajadores no se prepararán pues cualquier resultado del examen se interpreta como proveniendo de un trabajador no calificado y las firmas no tendrán incentivos a poner al trabajador en la tarea con riesgo.

22.B. Dada la estrategia de los trabajadores, que estudian si y sólo si son c_B, y eso sucede con probabilidad $\frac{1}{2}$, la probabilidad que un trabajador se haya educado dado que pasó la prueba es, por Bayes,

$$\Pr(\theta_e \mid \text{pasó}) = \frac{\Pr(\text{pase} \mid \theta_e)\Pr(\theta_e)}{\Pr(\text{pase} \mid \theta_e)\Pr(\theta_e) + \Pr(\text{pase} \mid \theta_n)\Pr(\theta_n)} = \frac{p\frac{1}{2}}{p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2}} = \frac{p}{p+q}.$$

En forma similar, la probabilidad que no haya estudiado, dado que pasó, es $1 - p/(p+q) = q/(p+q)$, o por Bayes,

$$\Pr(\theta_n \mid \text{pasó}) = \frac{\Pr(\text{pase} \mid \theta_n)\Pr(\theta_n)}{\Pr(\text{pase} \mid \theta_n)\Pr(\theta_n) + \Pr(\text{pase} \mid \theta_e)\Pr(\theta_e)} = \frac{q\frac{1}{2}}{p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2}} = \frac{q}{p+q}.$$

La productividad esperada de un trabajador que pasó la prueba, en la tarea con riesgo, es entonces

$$\Pr(\theta_e \mid \text{pasó})\,1 + \Pr(\theta_n \mid \text{pasó})\,(-1) = \frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Si los tipos c_B estudian, su utilidad esperada, dada la estrategia de la firma de pagar la productividad esperada, es el sueldo esperado (dependiendo del resultado del examen) menos el costo:

$$p\frac{p-q}{p+q} + (1-p)\,0 - c_B.$$

La utilidad esperada de un tipo c_B de no estudiar es

$$q\frac{p-q}{p+q} + (1-q)\,0.$$

Por lo tanto se debe cumplir que

$$p\frac{p-q}{p+q} + (1-p)\,0 - c_B \geq q\frac{p-q}{p+q} + (1-q)\,0 \Leftrightarrow \frac{(p-q)^2}{p+q} \geq c_B.$$

Por otro lado, debemos tener que un trabajador c_A no quiera estudiar. Para eso, se debe cumplir que su utilidad esperada de estudiar sea menor que la de no estudiar. La productividad esperada de estudiar es

$$p\frac{p-q}{p+q} + (1-p)\,0 - c_A$$

y la de no estudiar es

$$q\frac{p-q}{p+q} + (1-q)\,0.$$

Debemos tener entonces

$$q\frac{p-q}{p+q} + (1-q)\,0 \geq p\frac{p-q}{p+q} + (1-p)\,0 - c_A \Leftrightarrow c_A \geq \frac{(p-q)^2}{p+q}.$$

La firma que asigna un trabajador que pasó a la tarea con riesgo obtiene

$$\frac{p}{p+q}\left(1 - \left(1 - \frac{p-q}{p+q}\right)^2\right) + \frac{q}{p+q}\left(-1 - \left(-1 - \frac{p-q}{p+q}\right)^2\right) = \frac{p^2 - 4pq - q^2}{(p+q)^2} > 0$$

por lo que la firma prefiere asignarlo a la tarea con riesgo.

Un trabajador que no pasó es capacitado con probabilidad

$$\Pr(\theta_e \mid \text{no pasó}) = \frac{\Pr(\text{np} \mid \theta_e)\Pr(\theta_e)}{\Pr(\text{np} \mid \theta_e)\Pr(\theta_e) + \Pr(\text{np} \mid \theta_n)\Pr(\theta_n)} = \frac{1-p}{2-p-q}.$$

La productividad esperada (y por tanto el sueldo) de un trabajador que no pasó y que es asignado a la tarea con riesgo es entonces

$$\frac{1-p}{2-p-q}-\frac{1-q}{2-p-q}=\frac{p-q}{p+q-2}$$

Por lo tanto, la firma que asigna un trabajador que no pasó a la tarea sin riesgo obtiene 0, mientras que si lo asignara a la tarea con riesgo obtendría

$$\frac{1-p}{2-p-q}\left(1-\left(1-\frac{p-q}{p+q-2}\right)^2\right)-\frac{1-q}{2-p-q}\left(1+\left(1+\frac{p-q}{p+q-2}\right)^2\right)=\frac{p^2-4pq+2p-q^2+6q-4}{(p+q-2)^2}<0.$$

Vemos entonces que la estrategia de la firma es óptima también.

Ejercicio 24.A. Como θ es es observable, los precios dependen de θ. Sea $p_i=p(\theta_i)$ para $i=H,L$.

La firma L debe elegir p para maximizar $(\theta_L-p)\,p$, que arroja

$$p_L=\frac{\theta_L}{2}=\frac{1}{2}\quad y\quad Q_L=\theta_L-p_L=\frac{\theta_L}{2}=\frac{1}{2}\quad y\quad \pi_L^f=\frac{1}{4}$$

Para la firma H, si el costo es $c\geq 2$, el precio óptimo es cualquier $p_H\geq 2$, ya que en ese caso venderá 0 (poniendo un precio $2>p_H$, vendería cantidades positivas y perdería dinero. Si el costo es $c<2$, debe elegir p para maximizar

$$(\theta_H-p)(p-c)$$

que arroja un precio $p_H=\frac{\theta_H+c}{2}$. La cantidad demandada es

$$Q_H=\theta_H-p_H=\theta_H-\frac{\theta_H+c}{2}=\frac{\theta_H-c}{2}\quad y\quad \pi_H^f=\left(\frac{\theta_H-c}{2}\right)^2$$

24.B. Para $c\geq 2$, la firma H no quiere elegir ningún precio para el cual venda algo (porque perdería plata), y cualquier precio para el cual no venda nada, le da lo mismo; por lo tanto, el precio propuesto para la firma de calidad alta puede ser parte de un equilibrio separador. Por otro lado, la firma L tiene beneficios positivos con el precio de $\frac{1}{2}$ y no vendería nada si eligiera el precio p_H. Por lo tanto, para cualquier $c\geq 2$, los precios de información completa son de equilibrio.

Supongamos ahora que $c<2$. Sabemos de la Parte A que los precios de información completa son $p_L=\frac{1}{2}$ y $p_H=\frac{2+c}{2}$, y que los beneficios son $\pi_L^f=\frac{1}{4}$ y $\pi_H^f=\left(\frac{2-c}{2}\right)^2$ respectivamente. Encontraremos la cota para c en un equilibrio en el cual si la firma H se desvía, el consumidor está seguro que la firma es L. En ese caso, el H debe encontrar su desviación óptima. Elige p para maximizar $(p-c)(1-p)\Rightarrow p=(1+c)/2\Rightarrow \pi=(1-c)^2/4$. Las condiciones de compatibilidad de incentivos (que L no quiera elegir el precio de H y que H no se quiera desviar) son

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &\geq \left(2-\frac{2+c}{2}\right)\frac{2+c}{2}\Leftrightarrow c\geq\sqrt{3}\\ \left(\frac{2-c}{2}\right)^2 &\geq \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \text{ que se cumple siempre}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c^*=\sqrt{3}$. La razón por la cual la segunda condición se cumple siempre es que el de calidad alta está haciendo lo que es óptimo para él (no es como la parte siguiente en la cual "obligamos" al alto a hacer algo que no es óptimo, con la amenaza de "si te desviás, creemos que sos bajo".

24.C. En un equilibrio separador, $\mu(p_L) = 0$, por lo que la firma L elige $p_L = 1/2$, como antes. Las condiciones de compatibilidad de incentivos son

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\geq (2-p_H)\,p_H \Leftrightarrow p_H \notin \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (2-p_H)\,(p_H-c) &\geq \left(\frac{1+c}{2}-c\right)\left(1-\frac{1+c}{2}\right) = \frac{(1-c)^2}{4}. \end{aligned}$$

La primera ecuación nos dice que p_H tiene que ser muy bajo o muy alto. La segunda ecuación no se cumple para ningún $c > 0$, con $p_H \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. La forma de verlo, es ver que:

1. la segunda ecuación se cumple para p_H en el siguiente rango

$$\frac{c+\sqrt{3-2c}}{2} + 1 \geq p_H \geq \frac{c-\sqrt{3-2c}}{2} + 1$$

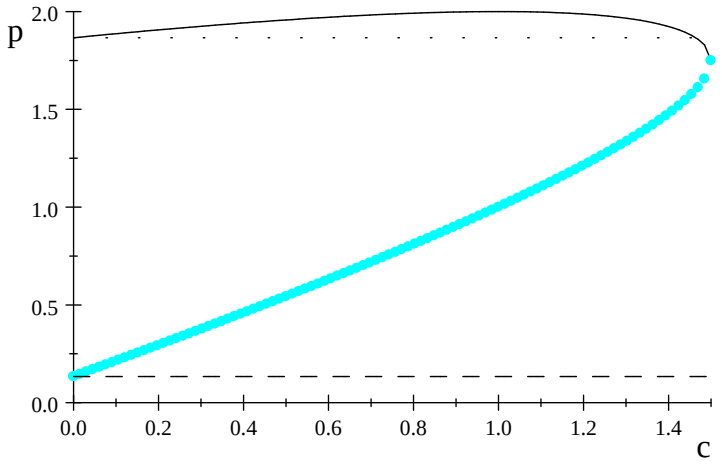
2. la cota inferior tiene derivada positiva

$$\frac{d\left(\frac{c+\sqrt{3-2c}}{2}\right)}{dc} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3-2c}-1}{\sqrt{3-2c}}$$

   por lo que es más chica con el c más chico posible ($c = 0$)

3. para $c = 0$, la cota inferior vale $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, pero como $c = 0$ no es admisible, ya que $c > 0$, la segunda ecuación no se cumple para ningún $p_H \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gráficamente, con c en el eje de las abcisas, tenemos que la cota superior está con la línea sólida, la cota inferior con los punos gordos, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ con rayitas y $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ con puntitos. El p_H debe estar entre las dos líneas curvas, y ser menor que $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ o mayor que $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Deducimos que el precio más chico que puede cobrar la firma H en equilibrio es $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

24.D. Es largo, pero la firma elige la calidad baja.

Ejercicio 25.A. Probamos con $t_B = 0$ y $t_A = 2$. En ese caso, $a(t_B) = 1$ y $a(t_A) = 0$. La utilidad del θ_B en equilibrio propuesto es -1, mientras que si se desvía obtiene -4. Le sirve elegir $t = 0$. La utilidad del θ_A en

el equilibrio es -2, y la utilidad en el desvío es -1, por lo que le sirve desviarse. Es fácil verificar que $t_B = 2$ y $t_A = 0$ tampoco es un equilibrio. No hay equilibrio separador.

25.B. Hay un pooling en que los dos tipos eligen $t = 0$. Una cosa que hay que tener cuidado en este caso. Algunas veces, cuando la gente resuelve este problema dice "voy a encontrar un equilibrio de pooling; para hacerlo, debo encontrar t_P tal que le de a los dos tipos de pavo una utilidad mayor a la que se pueden garantizar." La utilidad que se pueden garantizar los pavos es -1, que corresponde a $t = 0$, y $c = 0$ y $a = 1$. Pero si calculamos la utilidad en el pooling con $t_P = 0$, ningún desvío le asegura al pavo una utilidad de -1, ya que el único desvío es a $t = 2$, en cuyo caso las utilidades que se pueden garantizar θ_A y θ_B son -3 y -5 respectivamente.

25.C. No hay separadores, ni pooling con $t = 2$. En un pooling, el depredador elige $a = \frac{1}{2}$. En ese caso, la utilidad del bajo de elegir $t = 2$ es $-\frac{1}{2} - 4$ que es peor que elegir 0, que en el peor de los casos arroja una utilidad de -1. Hay varios equilibrios de pooling, pero todos son con $t = 0$; la diferencia está en las creencias si se observa $t = 2$.

Ejercicio 26.A. Si $t_B = 0$ y $t_A = 2$, las creencias son 0 y 1 respectivamente. La cantidad óptima de ataque es $a = 2 - E(\theta)$, por lo que los ataques son 1 y 0 respectivamente. La utilidad del θ_B en t_B es -1, mientras que en t_A es -2. No le conviene desviarse. El θ_A tiene una utilidad de -1 en equilibrio, y de -1 si hace $t_B = 0$. Le da lo mismo desviarse o no, por lo que si asumimos que no se desvía, es un equilibrio.

26.B. Hay un pooling con $t_B = t_A = t_P = 0$, $c(0) = \frac{1}{2}$ y $c(2) = 0$

26.C. Probamos primero a ver si hay otros equilibrios, donde las acciones son distintas que en las Partes A y B. No hay. El separador con $t_B = 2$ no funciona, porque el bajo quiere desviarse y hacer $t_A = 0$ (tiene menos costo, y menos ataque). Tampoco hay pooling con $t_P = 2$, ya que la utilidad del bajo en el equilibrio es, con $a = 1/2$, $-5/2$. Si se desvía y hace $t = 0$, lo más grande que puede ser el ataque es 2, y eso le da una utilidad de -2; le conviene desviarse.

Sin embargo, hay más equilibrios de pooling con $t_P = 0$, donde lo que hacemos es cambiar las creencias en $t = 2$. Por ejemplo, podemos poner $c(0) = \frac{1}{2}$ y $c(2) = \frac{1}{10}$ e igual habría equilibrio.

Ejercicio 28.A. La empresa debe elegir t para maximizar

$$c\left(\frac{4\sqrt{t}}{2} - t\right) + (1-c)\left(\frac{2\sqrt{t}}{2} - t\right) \Rightarrow t(e) = \left(\frac{c(e)+1}{2}\right)^2.$$

28.B. Si la empresa cree que el individuo es bueno con probabilidad 0, el individuo debe elegir e para maximizar

$$\frac{\theta f(t)}{2} - \frac{e}{\theta} \text{ sujeto a } t = \frac{1}{4} \Rightarrow e^* = 0 \Rightarrow \underline{u} = \frac{\theta}{2}.$$

(igual que en las notas de clase: si la educación no agrega nada en productividad, los dos tipos se aseguran eligiendo $e = 0$).

28.C y D. Para el pooling debemos tener

$$\frac{\theta f(t)}{2} - \frac{e}{\theta} = \frac{\theta(1+p)}{2} - \frac{e}{\theta} \geq \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{p\theta^2}{2} \geq e_P$$

que implica que $e_P \leq \frac{1}{4}$.

Para el separador debemos tener para el alto:

$$\frac{\theta f(t)}{2} - \frac{e_A}{\theta} \geq \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{2f(1)}{2} - \frac{e_A}{2} \geq \frac{2}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{e_A}{2} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq e_A.$$

Para el bajo, cuando se esfuerza e_A, el dueño de la empresa invierte 1, y el individuo obtiene

$$\frac{\theta f(t)}{2} - \frac{e_A}{\theta} \leq \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{f(1)}{2} - e_A \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{2} - e_A \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e_A \geq \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 29.A. Tenemos que

$$\begin{aligned} E(e^y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(y-a)^2}{2s^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{y-\frac{(y-a)^2}{2s^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{\left(y-s^2-a\right)^2}{2s^2}+\frac{s^2}{2}+a} dy \\ &= e^{a+\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{\left(y-s^2-a\right)^2}{2s^2}} dy = e^{a+\frac{s^2}{2}} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta porque lo que está en la integral es la densidad de una variable con distribución $N\left(s^2+a, s^2\right)$.

29.B. Si el retorno original era $r \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, la riqueza final del empresario será $w = (1-\alpha) r + \alpha \widehat{m}(\alpha)$ que se distribuye $N\left((1-\alpha)\mu + \alpha\widehat{m}(\alpha), (1-\alpha)^2 \sigma^2\right)$.

29.C. Debemos calcular $E\left(-e^{-bw}\right) = -E\left(e^{-b((1-\alpha)r+\alpha\widehat{m}(\alpha))}\right)$ y $-bw \sim N\left(-b\left((1-\alpha)\mu + \alpha\widehat{m}(\alpha)\right), b^2(1-\alpha)^2\sigma^2\right)$. Por lo tanto, por la Parte A,

$$-E\left(e^{-b((1-\alpha)r+\alpha\widehat{m}(\alpha))}\right) = -e^{-b((1-\alpha)\mu+\alpha\widehat{m}(\alpha))+\frac{b^2(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}} = -e^{-b\left[(1-\alpha)\mu+\alpha\widehat{m}(\alpha)-\frac{b(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right]}$$

29.D. De la Parte C, vemos que

$$E\left(-e^{-b((1-\alpha)r+\alpha\widehat{m}(\alpha))}\right) = -e^{-b\left[(1-\alpha)\mu+\alpha\widehat{m}(\alpha)-\frac{b(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right]},$$

por lo que $c = (1-\alpha)\mu + \alpha\widehat{m}(\alpha) - \frac{b(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}$. Esto es un resultado general, que dice que para un individuo con utilidad $-e^{-bw}$, le da lo mismo tener un $w \sim N\left(a, s^2\right)$ que $c = a - b\frac{s^2}{2}$.

29.E. La utilidad esperada en el equilibrio es $-e^{-b\left[(1-\alpha)\mu+\alpha\widehat{m}(\alpha)-\frac{b(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right]}$, por lo que el individuo de tipo μ debe elegir α para maximizar $(1-\alpha)\mu + \alpha\widehat{m}(\alpha) - \frac{b(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}$. La condición de primer orden es que para el α óptimo,

$$-\mu + \widehat{m}(\alpha) + \alpha\widehat{m}'(\alpha) + b\sigma^2(1-\alpha) = 0$$

y usando $\widehat{m}(\alpha) = \widehat{m}(\alpha(\mu)) = \mu$, obtenemos $\alpha\widehat{m}'(\alpha) + b\sigma^2(1-\alpha) = 0$ que es una ecuación diferencial en $\widehat{m}$. Queda entonces

$$\alpha\widehat{m}'(\alpha) + b\sigma^2(1-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \widehat{m}'(\alpha) = b\sigma^2 - \frac{b\sigma^2}{\alpha} \Leftrightarrow \widehat{m}(\alpha) = b\sigma^2\alpha - b\sigma^2\log\alpha + k.$$

Utilizando la condición de borde $\widehat{m}(1) = l$ obtenemos

$$\begin{aligned} l &= \widehat{m}(1) = b\sigma^2 + k \Leftrightarrow \widehat{m}(\alpha) = b\sigma^2\alpha - b\sigma^2\log\alpha + l - b\sigma^2 \Leftrightarrow \\ \widehat{m}(\alpha) &= b\sigma^2(\alpha - 1 - \log\alpha) + l \end{aligned}$$

Ejercicio 30.A. Un individuo de tipo θ debe elegir α para maximizar

$$E\left(-e^{-r(w-1+\alpha\theta+(1-\alpha)z)}\right) = -E\left(e^{-r(w-1+\alpha\theta)-r((1-\alpha)z)}\right) = -e^{-r(w-1+\alpha\theta)}E\left(e^{-r(1-\alpha)z}\right). \tag{3.13}$$

Como $y = -r(1-\alpha)z$ se distribuye $N\left(-r(1-\alpha)\theta, r^2(1-\alpha)^2\sigma^2\right)$ la utilidad esperada en (3.13) es

$$\begin{aligned} E\left(-e^{-r(w-1+\alpha\theta+(1-\alpha)z)}\right) &= -e^{-r(w-1+\alpha\theta)}E\left(e^{-r(1-\alpha)z}\right) = -e^{-r(w-1+\alpha\theta)}e^{-r(1-\alpha)\theta+\frac{r^2(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}} \\ &= -e^{-r(w-1+\theta)+\frac{r^2(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}} = u\left(w-1+\theta-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right). \end{aligned}$$

La utilidad se maximiza cuando se minimiza el exponente de e, es decir, cuando se minimiza $\frac{r^2(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}$. Por lo tanto, ambos tipos elegirán $\alpha = 1$, y este es el resultado eficiente: si a un individuo averso al riesgo le ofrecen cambiar un proyecto riesgoso por uno con igual valor esperado, sin riesgo, lo cambiará; para los financistas, la utilidad comprar una parte del proyecto o no les da la misma utilidad.

30.B. Para que θ quiera participar, se debe cumplir que la utilidad de no vender nada (no participar en el mercado) sea menor a la mejor de las alternativas dentro de la opción vender:

$$\begin{aligned} E\left(-e^{-r(w-1+z)}\right) &= u\left(w-1+\theta-\frac{r\sigma^2}{2}\right) \leq E\left(-e^{-r(w-1+\alpha p+(1-\alpha)z)}\right) = u\left(w-1+\alpha p+(1-\alpha)\theta-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right) \Leftrightarrow \\ w-1+\theta-\frac{r\sigma^2}{2} &\leq w-1+\alpha p+(1-\alpha)\theta-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2} \Leftrightarrow \alpha\theta-\frac{r\sigma^2}{2} \leq \alpha p-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2} \Leftrightarrow \theta \leq p-\frac{1}{2}r\sigma^2(\alpha-2) \end{aligned}$$

Esta última condición se cumple para algún α si se cumple para el mejor α, que en este caso es $\alpha = 0$. La condición es entonces $\theta_i \leq p + r\sigma^2$.

30.C. En un equilibrio de pooling debemos tener $p = \pi\theta_a + (1-\pi)\theta_b$; y para que ambos tipos quieran participar, se debe cumplir la condición de la parte B para ambos tipos; como la más restrictiva es la de θ_a, se debe cumplir

$$\theta_a \leq p + r\sigma^2 = \pi\theta_a + (1-\pi)\theta_b + r\sigma^2 \Leftrightarrow r\sigma^2 \geq (1-\pi)(\theta_a - \theta_b).$$

La condición dice que para que ambos tipos quieran participar y vender parte del proyecto (que es lo eficiente), la aversión al riesgo debe ser suficientemente grande (si es muy pequeña, los θ_a no estarán dispuestos a entregar parte de su proyecto por un precio "injusto", que los penaliza porque también están participando los θ_b).

30.D. Si α_b es lo que venden los θ_b en equilibrio, debemos tener $\alpha_b = 1$. La razón es que si no fuera así, y $\alpha_b < 1$, el tipo θ_b tendría incentivos a desviarse y vender $\alpha = 1$, le pagarían $p(1) = c(1)\theta_a + (1-c(1))\theta_b \geq \theta_b$, y obtendría una utilidad

$$u(w-1+p(1)) \geq u(w-1+\theta_b) > u\left(w-1+\theta_b-\frac{r(1-\alpha_b)^2\sigma^2}{2}\right)$$

(es decir, una utilidad mayor a la que obtiene en equilibrio). Como siempre, la idea es sencilla: si saben que soy malo, el α de equilibrio maximiza la utilidad del malo sujeto a información completa.

La utilidad de reserva del θ_a se calcula asumiendo $c(\alpha) = 0$, o $p = \theta_b$. Con ese p, de la Parte B, sabemos que θ_a no querrá participar si $\theta_a \geq p - r\sigma^2 = \theta_b - r\sigma^2$. Como la letra nos dice que $r\sigma^2 < (1-\pi)(\theta_a - \theta_b)$, sabemos que $r\sigma^2 < \theta_a - \theta_b$, que implica que la utilidad de reserva de θ_a es cuando no participa. Por lo tanto, para cualquier $\alpha > 0$, el tipo θ_a estará mejor vendiendo α (en un equilibrio separador en el cual le pagan $p = \theta_a$) que no participando. La condición sobre los α viene por el lado de los θ_b : el α debe ser suficientemente chico, para que el bajo no se quiera pasar.

$$\begin{aligned} u(w-1+\theta_b) &\geq u\left(w-1+\alpha\theta_a+(1-\alpha)\theta_b-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2}\right) \Leftrightarrow \theta_b \geq \alpha\theta_a+(1-\alpha)\theta_b-\frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{r(1-\alpha)^2\sigma^2}{2} &\geq \alpha(\theta_a-\theta_b) \Leftrightarrow \frac{r\sigma^2}{2(\theta_a-\theta_b)} \geq \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

El equilibrio más eficiente es aquél en el cual el α es lo más grande posible, el que resuelve la ecuación anterior con igualdad.

Ejercicio 31.A. El beneficio esperado es

$$\mu(c)\left[b(D-I)-(1-b)I\right]+(1-\mu(c))\left[m(D-I)-(1-m)I\right]$$

que se iguala a 0 cuando $D=I/(\mu b+(1-\mu)m)$.

31.B. En un equilibrio de pooling el monto D de repago de deuda es $D=I/(ab+(1-a)m)$, que arroja utilidades para buenos y malos de

$$\begin{aligned} b(R+C-D)+(1-b)(C-c) &= b\left(R-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)-(1-b)c+C \\ m(R+C-D)+(1-m)(C-c) &= m\left(R-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)-(1-m)c+C \end{aligned}$$

Estas utilidades deben ser mayores que las que obtendrían de desviarse y que el banco pensara que son malos seguro. Es decir, para un c_d de "desvío":

$$b\left(R-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)-(1-b)c+C\geq b\left(R-\frac{I}{m}\right)-(1-b)c_d+C.$$

Como la utilidad en el desvío es decreciente en c_d, se maximiza con $c_d=0$, y eso arroja

$$\begin{aligned} b\left(R-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)-(1-b)c &\geq b\left(R-\frac{I}{m}\right)\Leftrightarrow\frac{b}{1-b}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)\geq c \\ m\left(R-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)-(1-m)c &\geq m\left(R-\frac{I}{m}\right)\Leftrightarrow\frac{m}{1-m}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{ab+(1-a)m}\right)\geq c. \end{aligned}$$

La más restrictiva de estas dos condiciones es la segunda, y es la que define para qué niveles de c existe un equilibrio de pooling. Es igual a lo de las notas de clase, en que la condición para el pooling la da el bajo; no es casualidad, niveles "altos" de c en un equilibrio de pooling son mas costosos para el bajo y lo mismo sucedía con niveles altos de e en las notas de clase.

31.C. Si van a saber que es malo en equilibrio, obviamente $c_m=0$. La utilidad del malo es $m\left(R-\frac{I}{m}\right)+C$. Por su parte, el alto puede asegurarse (sin importar las creencias del banco) una utilidad de $b\left(R-\frac{I}{m}\right)+C$: eso lo consigue cuando ofrece un contrato de $c=0$ y el banco cree que es malo seguro. Las condiciones que definen las cotas sobre c_b (el contrato ofrecido por el bueno en equilibrio) son

$$\begin{aligned} b\left(R-\frac{I}{b}\right)-(1-b)c_b+C &\geq b\left(R-\frac{I}{m}\right)+C\Leftrightarrow\frac{b}{1-b}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{b}\right)\geq c_b \\ m\left(R-\frac{I}{m}\right)+C &\geq m\left(R-\frac{I}{b}\right)-(1-m)c_b+C\Leftrightarrow c_b\geq\frac{m}{1-m}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{b}\right). \end{aligned}$$

Verificamos (por las dudas) que el intervalo para c_b sea no vacío:

$$\frac{b}{1-b}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{b}\right)\geq\frac{m}{1-m}\left(\frac{I}{m}-\frac{I}{b}\right)\Leftrightarrow b\geq m$$

que se cumple.

Ejercicio 32.A. No hay un equilibrio de pooling. Para que lo hubiera s tendría que satisfacer

$$20=s\left(\frac{9}{10}(50+30)+\frac{1}{10}(100+30)\right)\Leftrightarrow s=\frac{4}{17},$$

pero para los dueños originales de la firma buena θ_a, el valor que les queda es

$$(1-s)\,130 = \frac{13}{17}130 \simeq 99,4 < 100.$$

Por lo tanto no hay un equilibrio de pooling en que ambas invierten. Más generalmente, si $\mu(s)$ son las creencias de los financistas (que enfrentan una firma θ_a) para una oferta de s, el s debe cumplir

$$20 = s\left(\left(1-\mu(s)\right)80 + \mu(s)\,130\right).$$

Una pregunta que no es relevante en este caso, es cuál es la utilidad de reserva del θ_b : si se queda afuera es 50, si participa, y creen que es malo seguro, los financistas demandarán $20 = s\,(50+30) \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}$, por lo que la utilidad sería $(1-s)\,80 = 60$. La utilidad de reserva es entonces $60 > 50$. Para los altos, θ_a, participar y entregar $\frac{1}{4}$ es aún peor que no participar, por lo que la utilidad de reserva estuvo bien elegida en 100.

32.B. En el equilibrio separador, la θ_b emite, y la θ_a no, y los financistas creen que si emite es θ_b seguro. En este caso, la porción ofrecida es tal que $s\,(50+30) = 20 \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}$ y las utilidades de ambos tipos de firma son

$$\theta_b : (1-s)\,80 = 60 > 50 \text{ y } \theta_a : (1-s)\,130 = 97,5 < 100.$$

32.C. Si los financistas van a saber que la firma θ_b es θ_b, como siempre, el k_b del equilibrio separador será aquél que maximiza la utilidad de los dueños de θ_b : tenemos que s_b resuelve $s_b\,(80-k_b) = 20$, o $s_b = \frac{20}{80-k_b}$, y da una utilidad de $(1-s_b)\,(80-k_b) = 60-k_b$. Como esta expresión es decreciente en k_b, los dueños de la firma θ_b elegirán $k_b = 0$. La forma más correcta de ver que k_b es el único k posible para θ_b en un separador es asumir que $k_b > 0$, y argumentar que los dueños podrían elegir $k = 0$, el s sería potencialmente más chico (si las creencias de los financistas fueran que la probabilidad de una firma θ_a es mayor que 0 cuando $k = 0$) y por lo tanto obtendrían beneficios mayores que con k_b (tanto porque desperdician menos con k, como porque pueden beneficiarse de un s más chico). Haciendo el proyecto, y ofreciendo $k_b = 0$, los dueños de la firma θ_b ganan \$10.

El nivel k_a debe satisfacer que los θ_a lo prefieran (a quedarse afuera, o a hacer el proyecto y ofrecer $k_b = 0$; pero ya sabemos que hacer el proyecto no les sirve) y que los θ_b no quieran ofrecer k_a en vez de k_b. El s_a cumple $s_a\,(130-k_a) = 20 \Leftrightarrow s_a = \frac{20}{130-k_a}$ y las restricciones de incentivos son

$$\begin{aligned}(1-s_a)\,(130-k_a) &= \left(1-\frac{20}{130-k_a}\right)(130-k_a) = 110-k_a \geq 100\\ (1-s_a)\,(80-k_a) &= \frac{1}{130-k_a}\left(k_a^2-190k_a+8800\right) \leq 60.\end{aligned}$$

De la primera obtenemos $k_a \leq 10$ y de la segunda $k_a^2 - 130k_a + 1000 \leq 0 \Leftrightarrow k_a \in \left[65-5\sqrt{129}, 65+5\sqrt{129}\right]$. Por lo tanto, hay un equilibrio separador cuando $8,2 \simeq 65-5\sqrt{129} \leq k_a \leq 10$.

La utilidad de los dueños de la firma θ_a es, en el mejor equilibrio, $110-k_a \simeq 110-\left(65-5\sqrt{129}\right) = 101.79$.

Ejercicio 33.A. Este es un modelo de signalling, con solo dos acciones posibles (preparar el auto, o no). En el equilibrio que pide la letra, si un auto pasa es bueno, y si no la pasa, es malo (esas son las creencias). El precio debe ser entonces $p_I = 1.100$ para los buenos (si fuera cualquier cosa más chica, el vendedor no lo prepararía, y más grande no tiene sentido pues el comprador sabe que por 1.100 le venderán por la competencia entre vendedores). El precio de los malos debe ser tal que a los bajos no les convenga preparar el auto: $p_{NI} \geq p_I - 600 = 500$. Tampoco será más grande que eso, pues hay competencia entre vendedores, y por tanto $p_{NI} = 500$.

33.B. Con el costo de preparar a 200 para el malo, tendríamos $p_{NI} = p_I - 200 = 900$ (pues p_I no cambia) y con costos de 1000, $p_{NI} = p_I - 1000 = 100$.

Ejercicio 34.A. Las utilidades esperadas son $\underline{\pi}u\left(w-L+B-p\right)+\left(1-\underline{\pi}\right)u\left(w-p\right)$ y $\overline{\pi}u\left(w-L+B-p\right)+\left(1-\overline{\pi}\right)u\left(w-p\right)$.

34.B. Si el individuo ofrece a la compañía de seguros un contrato con $\left(B,\overline{\pi}B\right)$, la compañía aceptará el contrato. Eso es así pues en este caso, si la firma asume que el que le ofrece el contrato es malo, "sabe" que su probabilidad de accidente es $\overline{\pi}$. Como es maximizadora de beneficios, y no tiene ningún poder (acepta o rechaza), si le ofrecen un contrato en el que tiene que pagar B con probabilidad $\overline{\pi}$, su costo esperado es $\overline{\pi}B$. Entonces, si la prima es $\overline{\pi}B$, gana 0, y lo acepta.

Por lo tanto, cada individuo debe elegir B para maximizar su utilidad asumiendo $p=\overline{\pi}B$. Para el de riesgo alto, sabemos que eso significa seguro total, con $B=L$. Para el de riesgo bajo, el problema es el de elegir B para maximizar

$$\begin{aligned}\underline{\pi}\sqrt{w-L+B-\overline{\pi}B}+\left(1-\underline{\pi}\right)\sqrt{w-\overline{\pi}B} &\Rightarrow \frac{d\left(\frac{3}{5}\sqrt{w-L+B-\frac{2}{3}B}+\left(1-\frac{3}{5}\right)\sqrt{w-\frac{2}{3}B}\right)}{dB}=0\Leftrightarrow\\ \frac{1}{10}\frac{\sqrt{3}\sqrt{3w-2B}-\frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{B-3L+3w}}{\sqrt{3w-2B}\sqrt{B-3L+3w}} &= 0\Leftrightarrow 3w-2B=\frac{16}{9}\left(B-3L+3w\right)\Leftrightarrow B=\frac{48L-21w}{34}\end{aligned}$$

El nivel de utilidad que se puede asegurar el alto es entonces $\overline{u}_a=\sqrt{w-\overline{\pi}L}=\sqrt{9-\frac{2}{3}5}=\sqrt{\frac{17}{3}}$. El bajo, a su vez puede obtener

$$\overline{u}_b=\underline{\pi}\sqrt{w-L+B-\overline{\pi}B}+\left(1-\underline{\pi}\right)\sqrt{w-\overline{\pi}B}=\frac{\sqrt{34}\sqrt{3w-2L}}{10}.$$

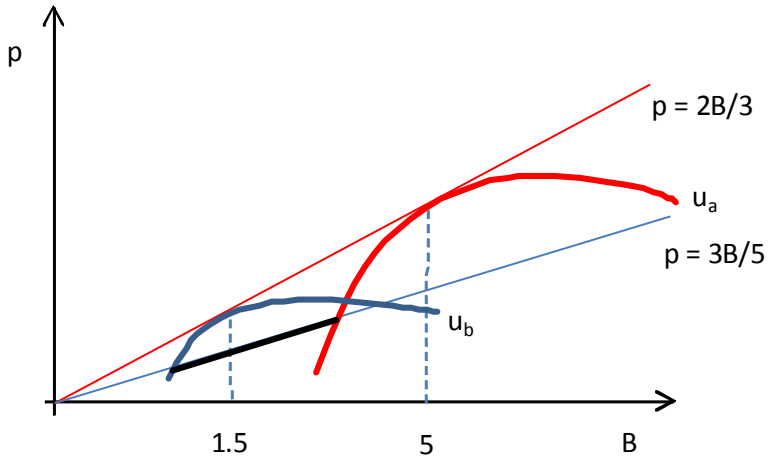
34.C,D. La curva de indiferencia del alto en el nivel de utilidad que se puede asegurar es:

$$\begin{aligned}\overline{\pi}\sqrt{w-L+B-p}+\left(1-\overline{\pi}\right)\sqrt{w-p} &= \sqrt{\frac{17}{3}}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\sqrt{4+B-p}+\frac{1}{3}\sqrt{9-p}=\sqrt{\frac{17}{3}}\Leftrightarrow\\ p &= \frac{4}{3}B+\frac{4}{3}\sqrt{17}\sqrt{22-B}-26\end{aligned}$$

La curva de indiferencia del bajo en en nivel que se puede asegurar es

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\sqrt{w-L+B-p}+\frac{2}{5}\sqrt{w-p} &= \frac{\sqrt{34}\sqrt{3w-2L}}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{5}\sqrt{4+B-p}+\frac{2}{5}\sqrt{9-p}=\frac{17}{10}\sqrt{2}\Leftrightarrow\\ p &= \frac{9}{5}B+\frac{102}{25}\sqrt{339-10B}-\frac{3757}{50}\end{aligned}$$

La región de los contratos que el de bajo riesgo podría ofrecer, que la firma aceptaría y que el alto no querría ofrecer es la zona entre el segmento negro grueso (sobre la línea $\frac{3}{5}B$, entre la curva de indiferencia del bajo y la curva de indiferencia del alto), la curva de indiferencia del bajo, y la curva de indiferencia del alto.



El segmento negro grueso referido más arriba es lo que se pide en la Parte D (el gráfico de verdad no queda tan bien, porque todas las curvas quedan muy pegadas; la representación de este gráfico es para que entiendan la solución).

34.E. Debemos encontrar qué contratos con $\underline{\pi}B = p$ le dan al bajo una utilidad mejor que $\frac{\sqrt{34}\sqrt{3w-2L}}{10}\sqrt{3w-2L}$. Para $w = 9$ y $L = 5$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}\sqrt{w-L+\frac{2}{5}B}+\frac{2}{5}\sqrt{w-\frac{3}{5}B} &\geq \frac{\sqrt{34}\sqrt{3w-2L}}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sqrt{4+\frac{2}{5}B}+\frac{2}{5}\sqrt{9-\frac{3}{5}B}-\frac{\sqrt{34}\sqrt{17}}{10} \geq 0 \Leftrightarrow \\ B &\in \left[\frac{289}{60}-\frac{17}{30}\sqrt{66}, \frac{17}{30}\sqrt{66}+\frac{289}{60}\right] = [0.21, 9.4] \end{aligned}$$

A su vez, debemos tener que la utilidad del alto, en el contrato del bajo, sea menor que en su utilidad de reserva:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt{w-L+\frac{2}{5}B}+\frac{1}{3}\sqrt{w-\frac{3}{5}B} &\leq \sqrt{w-\frac{2}{3}L} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{4+\frac{2}{5}B}+\frac{1}{3}\sqrt{9-\frac{3}{5}B} \leq \sqrt{9-\frac{10}{3}} \Leftrightarrow \\ B &\notin \left(\frac{890}{121}-\frac{120}{121}\sqrt{34}, \frac{120}{121}\sqrt{34}+\frac{890}{121}\right) = (1.6, 13.1) \end{aligned}$$

Parte E. En el gráfico vemos que si el α es tal que la línea de beneficio 0 para un conductor promedio pasa por encima de la intersección de las dos curvas de indiferencia, no habrá contrato posible de pooling: no hay ningún contrato que deje a ambos tipos de conductores mejor que en su utilidad de reserva. A los de bajo riesgo, todos los contratos que ofrecerían los de alto riesgo les parece que tienen "demasiado seguro (para el precio tan alto)" (un B muy alto), mientras que a los de alto riesgo les parece que los contratos que ofrecerían los de riesgo bajo tienen demasiado poco seguro (un B muy bajo).

Ejercicio 35.A. Supongamos que lo hubiera. En tal caso, la acción del receptor (del tomador de decisiones) cuando le dicen $m^*(\theta)$ debe ser óptima cuando el estado es θ, y por lo tanto elige $y = \theta$. Sabiendo eso, cuando el estado es $\theta = 0$, no es óptimo para el experto mandar $m^*(0)$, ya que el receptor elegirá $y = 0$, y obtendría una utilidad de $-\frac{1}{100}$; en cambio diciendo $m^*\left(\frac{1}{10}\right)$, el receptor elegirá $y = \frac{1}{10}$, y el experto obtendrá una utilidad de 0.

35.B. Si el tomador de decisiones tiene unas creencias representadas por una densidad f sobre $[0,1]$ elegirá y para maximizar

$$-\int_0^1 f(\theta)(y-\theta)^2 d\theta \overset{\text{derivando}}{\rightarrow} \int_0^1 f(\theta) 2(y-\theta) d\theta = 2(y - E(\theta)) = 0 \Leftrightarrow y = E(\theta).$$

Entonces, en este equilibrio, luego de un mensaje de A, el tomador de decisiones sabe que el estado de la naturaleza es uniforme en $\left[0, \frac{3}{10}\right]$ y elige $y_A = E(\theta) = \frac{3}{20}$. Luego de B elige $y_B = \frac{13}{20}$. Esto es un equilibrio pues cuando $\theta = \frac{3}{10}$ el experto está indiferente entre ambos mensajes, y prefiere estrictamente A si $\theta < \frac{3}{10}$ y B si $\theta > \frac{3}{10}$:

$$V\left(y_A, \frac{3}{10}\right) = -\left(\frac{3}{20}-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\right)^2 = -\frac{1}{16} = -\left(\frac{13}{20}-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\right)^2 = V\left(y_B, \frac{3}{10}\right).$$

Las utilidades esperadas son

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^{\frac{3}{10}}\left(\frac{3}{20}-\theta\right)^2 d\theta - \int_{\frac{3}{10}}^1\left(\frac{13}{20}-\theta\right)^2 d\theta = -\frac{37}{1200}. \\ V &= -\int_0^{\frac{3}{10}}\left(\frac{3}{20}-\theta-\frac{1}{10}\right)^2 d\theta - \int_{\frac{3}{10}}^1\left(\frac{13}{20}-\theta-\frac{1}{10}\right)^2 d\theta = -\frac{49}{1200} \end{aligned}$$

35.C. El experto elegirá $y = \theta + \frac{1}{10}$ para $\theta \leq \frac{9}{10}$, y $y = 1$ para $\theta \geq \frac{9}{10}$. Las utilidades esperadas son entonces

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^{\frac{9}{10}} \left(\theta + \frac{1}{10} - \theta\right)^2 d\theta - \int_{\frac{9}{10}}^1 (1-\theta)^2 \, d\theta = -\frac{7}{750} \\ V &= -\int_0^{\frac{9}{10}} \left(\theta + \frac{1}{10} - \theta - \frac{1}{10}\right)^2 d\theta - \int_{\frac{9}{10}}^1 \left(1 - \theta - \frac{1}{10}\right)^2 d\theta = -\frac{1}{3000} \end{aligned}$$

Ambos están mejor. No es raro que el experto esté mejor, pero sí lo es que el tomador de decisiones lo esté. El tema es que en el equilibrio se pierde mucha información pues sólo se mandan dos mensajes. En el caso de la delegación se revela más información y aunque las preferencias de ambos jugadores no son iguales, sí están bastante alineadas. Por ejemplo, en el equilibrio, cuando $\theta \in \left(\frac{3}{10}, 1\right]$ las decisiones son muy malas, pues se elige $y_B = \frac{13}{20}$ que está muy lejos de los extremos del intervalo y en esos casos las pérdidas son grandes.

Ejercicio 36.A. Si no se puede señalizar, todos los trabajadores tienen las mismas preferencias, por lo que elegirán todos el empleo bueno, o el malo. Si todos eligen el bueno, la productividad promedio es $\frac{3}{5}100 + \frac{2}{5}0 = 60 > x$, por lo que el sueldo será \$60, y todo el mundo elegirá esa tarea.

36.B. En este caso, las acciones que pueden tomar los trabajadores son (e, a), donde e es la educación y $a \in \{b, m\}$ la actividad o empleo que eligen. Por lo tanto, un equilibrio es un triplete $[[(e_P, a_P), (e_I, a_I)], w(\cdot), c(\cdot)]$ en que (e_i, a_i) son las acciones elegidas por el individuo de tipo i, que son óptimas dada la función de salarios $w(\cdot)$, $w(e)$ es la productividad promedio esperada en el empleo bueno (pagan x en el empleo malo) dadas las creencias $c(e)$, y la función $c(\cdot)$ es consistente.

Supongamos que hay un equilibrio de pooling con educación $\overline{e}$. Si es $(\overline{e}, m)$, las creencias sobre el trabajador son tales que el mercado le asigna una productividad promedio de 60 en la tarea b, por lo que no es un equilibrio (deberían agarrar la tarea b y no la m). En un equilibrio $(\overline{e}, b)$, el sueldo es \$60, y ambos tipos deben preferir eso antes que 0 educación y x. Verificamos al improductivo (si él quiere estudiar, el productivo también):

$$60 - e^2 \geq x \Leftrightarrow e \leq \sqrt{60 - x}.$$

Para cualquiera de esos e, unas creencias que soportan a e como equilibrio son "es bueno con probabilidad 60% si hace e, y 0 de lo contrario".

Notamos que si en cambio las creencias dependieran también del trabajo elegido (no sólo de la educación), podría haber equilibrios de pooling con el trabajo malo: la gente estudia (digamos) un e, y elige el trabajo m; si se desvía y elige b, los empresarios asumen que es malo y le pagan 0. En este caso podría haber un pooling $(0, m)$, pero nunca un nivel de educación positivo.

36.C. En un equilibrio separador, sea cual sea e_I, la creencia es que es productivo con probabilidad 0, por lo que su sueldo será \$0 en el empleo bueno; el trabajador improductivo elegirá entonces la actividad m, y se educará $e_I = 0$ (no le sirve como signalling, y tiene un costo). El productivo en cambio podrá señalizar, y el nivel de educación tiene que ser tal que no le convenga desviarse a $a = m$ con 0 educación, y tal que al improductivo no le convenga hacerse pasar por productivo:

$$\begin{aligned} 100 - \frac{e_P^2}{2} &\geq x \Leftrightarrow e_P \leq \sqrt{200 - 2x} \\ 100 - e_P^2 &\leq x \Leftrightarrow e_P \geq \sqrt{100 - x}. \end{aligned}$$

El sueldo es 100 en la actividad buena, porque si es un separador, sólo el productivo se educa e_P, y entonces se sabe que es bueno. Notamos que el separador más eficiente, es con el e_P lo más chico posible, $e_P = e \leq \sqrt{100 - x}$.

Para cualquiera de esos e_P, unas creencias que lo soportan como equilibrio son "si estudia e_P pienso que es bueno seguro; de lo contrario es malo seguro".

36.D. El improductivo estará peor en el separador, pues recibe x y cuando no hay señalización recibía 60. El productivo, recibe 60 en la Parte A y

$$100 - \frac{e_P^2}{2} = 100 - \frac{100 - x}{2} = 50 + \frac{x}{2} \geq 60 \Leftrightarrow x \geq 20.$$

La intuición de este resultado es que si el x es demasiado chico, el trabajador improductivo no quiere ese trabajo, entonces el productivo deberá educarse mucho para disuadirlo de no tratar de pasarse al empleo bueno. Si x es grande, el trabajo malo será atractivo para el improductivo, y el productivo no deberá educarse mucho.

Ejercicio 37.A. Si $\pi(-1) + (1-\pi)2 \geq 0$, es rentable para la leona perseguir a una gacela promedio. En ese caso no tiene sentido que ambas salten en un equilibrio (pagan el costo, pero igual son perseguidas). Por otro lado, hay un equilibrio en el cual ninguna salta, y si alguna salta también se la persigue (las creencias de la leona deben soportar esta acción). Entonces, el equilibrio de pooling sería: $(m_r, m_l) = (n, n)$ (eso sería como e_A, e_B), $c(n) = \pi$, y $c(s)$ debe cumplir que a la leona le convenga perseguir

$$c(s)(-1) + (1 - c(s))2 \geq 0 \Leftrightarrow c(s) \leq \frac{2}{3}.$$

Si en cambio $\pi(-1) + (1-\pi)2 \leq 0$, a la leona no le conviene perseguir a una gacela promedio. En ese caso hay dos tipos de equilibrios. El más eficiente es aquél en el cual las gacelas no saltan, y en ese caso las creencias de la leona pueden ser cualquier cosa: si la que salta es rápida, tampoco persigue, pero ninguna salta porque debería pagar el costo; si la que salta es lenta, la leona perseguiría, pero igual la gacela no saltaría (pues pagaría el costo, y la perseguirían).

El otro equilibrio en este caso es uno en que ambas saltan, y la leona no persigue. La forma de mantener este equilibrio es asumiendo que si una no salta, es lenta y la leona persigue. En particular, necesitamos $c(n)(-1) + (1 - c(n))2 \geq 0 \Leftrightarrow c(n) \leq \frac{2}{3}$.

37.B. No hay separador en el cual la rápida salta: la leona perseguiría a la que no salta (identificada como la lenta), que obtendría un pago de $-a$; en este equilibrio, la leona no persigue a la que salta (la rápida), por lo que el pago de la gacela lenta de hacerse pasar por rápida es $-t_l$ que es mayor que $-a$. Tampoco ("menos aún") hay un separador en que la lenta salta y la rápida no: a la lenta le convendría no saltar, ahorrarse el costo de saltar, y encima no la persiguen.

37.C. En el equilibrio que describimos, la gacela rápida siempre salta, y la lenta salta con probabilidad p; la leona persigue a cualquier gacela que no salta, y persigue a una que salta con probabilidad q. Las creencias de la leona cuando ve a una saltarina son

$$c(s) = P(r \mid s) = \frac{P(s \mid r) P(r)}{P(s \mid r) P(r) + P(s \mid l) P(l)} = \frac{\pi}{\pi + p(1-\pi)}$$

que debe dejar a la leona indiferente entre perseguir y no hacerlo:

$$c(s)(-1) + (1 - c(s))2 = 0 \Leftrightarrow c(s) = \frac{2}{3} \Rightarrow c(s) = \frac{2}{3} = \frac{\pi}{\pi + p(1-\pi)} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-\pi}.$$

(notamos que $p \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-\pi} \leq 1 \Leftrightarrow \pi \leq \frac{2}{3}$, que se cumple). La gacela lenta debe ser indiferente entre saltar y no hacerlo,

$$U(n; l) = -a = q(-a - t_l) + (1-q)(-t_l) = U(s; l) \Leftrightarrow q = \frac{a - t_l}{a} \in (0, 1).$$

Finalmente, "es obvio" que a la rápida le conviene saltar, pues la lenta es indiferente, y el costo de la rápida es menor:

$$U(s;r) = q(-a - t_r) + (1-q)(-t_r) = \frac{a - t_l}{a}(-a - t_r) + \left(1 - \frac{a - t_l}{a}\right)(-t_r) = -a + (t_l - t_r) > -a = U(n;r).$$

4 Screening.

Mercado Competitivo.

En el modelo de los limones vimos cómo la información asimétrica hacía que desapareciera el mercado de autos usados. Luego, con los modelos de signalling, vimos cómo la parte informada podía tomar acciones que revelaran su información. Ahora veremos cómo la parte peor informada puede tomar acciones que hagan que las partes informadas, con sus elecciones, revelen su información.

El modelo que veremos fue utilizado por primera vez por Rothschild y Stiglitz en 1976, en su artículo "Equilibrium in competitive insurance markets: An essay in the economics of imperfect information." Nosotros veremos una versión para el mercado de trabajo que se basa muy fuertemente en libro de Mas-Colell, Whinston y Green. La idea básica es que las empresas pueden ofrecer distintos tipos de contrato a los trabajadores. Ellos, dependiendo de su "calidad" elegirán unos u otros, y así revelarán, sin quererlo, la información que la firma no posee.

En el mercado hay dos firmas y un trabajador que puede ser de tipo θ_A o θ_B (es de tipo θ_A con probabilidad p), con $\theta_A > \theta_B$. En el primer período, cada una de las firmas puede ofrecer los contratos que desee, con cada contrato especificando un nivel de salario y un nivel de esfuerzo. Es decir, cada contrato será un par (w, t), donde w es el salario, y t es el nivel de esfuerzo que deberá ejercer el trabajador. Puede interpretarse por ejemplo que t es la velocidad a la que corre la cinta de montaje en una fábrica, o el número de horas que deberá trabajar el trabajador. En el segundo período el trabajador decide cuál contrato aceptar (podríamos especificar que tiene la opción de no aceptar ninguno, pero dada la forma que le daremos a las funciones de utilidad de cada participante, en equilibrio el trabajador siempre aceptará algún trabajo).

Para la firma que contrata a un trabajador de tipo θ_i con un contrato (w, t), la utilidad es $\theta_i - w$. Es decir, θ_i es la productividad, y el nivel de esfuerzo no tiene ningún efecto sobre los beneficios. Otra vez, esto puede parecer un supuesto "raro" (como que la educación no tiene ningún efecto sobre la productividad del trabajador) pero sirve para mostrar que las firmas ofrecerán, en equilibrio, contratos que requieren esfuerzo positivo, aunque este no le sirva para nada más que para hacer que los trabajadores revelen su verdadera productividad.

La utilidad de cada trabajador depende del sueldo recibido, de su tipo y del esfuerzo que realiza. Para un trabajador de tipo θ, la utilidad de aceptar un contrato (w, t) es

$$u(w, t \mid \theta) = w - c(\theta, t)$$

y asumimos que $c(\theta, 0) = 0$, $c_t, c_{tt} > 0$ y $c_\theta, c_{t\theta} < 0$. Esta última condición se puede escribir en forma alternativa como $c_t(\theta_A, t) < c_t(\theta_B, t)$. Una curva de indiferencia de un trabajador en el plano (t, w) (con t en el eje de las abcisas) es el conjunto de (t, w) tales que

$$u(w, t \mid \theta) = w - c(\theta, t) = k \Leftrightarrow w = k + c(\theta, t).$$

La condición $c_t > 0$ nos dice que la curva de indiferencia tiene pendiente positiva (o lo que es lo mismo, para que esté indiferente después de un aumento en el esfuerzo, me tienen que subir el sueldo). La condición $c_{tt} > 0$ nos dice que la curva de indiferencia es convexa. También, si tomamos un punto cualquiera y la curva de indiferencia del tipo θ_A por ese punto, la condición $c_{t\theta} < 0$ nos dice que la pendiente, c_t, de la curva aumenta cuando cae el tipo. Es decir, la curva de indiferencia del tipo θ_A es más "chata" que la de θ_B.

Como antes, hay dos tipos de equilibrio: pooling, en el cual ambos tipos de trabajador aceptan el mismo contrato; separating, en el que distintos tipos aceptan distintos contratos.

Demostraremos ahora un Lema que nos será de gran utilidad.

Lema 1 *En cualquier equilibrio, las firmas tienen beneficios* 0.

Demostración. Sean (w_B, t_B) y (w_A, t_A) los contratos aceptados por cada tipo de trabajador (pueden ser el mismo). Supongamos que una firma obtiene beneficios positivos. Como los beneficios tienen que ser mayores o iguales a 0 (pues siempre se puede ofrecer únicamente un contrato con sueldo 0), la suma de los beneficios de ambas firmas, π, debe ser estrictamente positivo. Alguna de las dos firmas debe estar ganando beneficios menores o iguales que $\frac{\pi}{2}$. Como los beneficios totales son $\pi = p(\theta_A - w_A) + (1-p)(\theta_B - w_B)$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ para que $\pi - \varepsilon > \pi/2$. Si la firma que gana $\pi/2$ o menos ofrece sólo los contratos $(w_B + \varepsilon, t_B)$ y $(w_A + \varepsilon, t_A)$, tenemos que

(a) $(w_A + \varepsilon, t_A)$ atraerá al tipo alto pues

$$w_A - c(\theta_A, t_A) \geq w_B - c(\theta_A, t_B) \Leftrightarrow w_A + \varepsilon - c(\theta_A, t_A) \geq w_B + \varepsilon - c(\theta_A, t_B).$$

Es decir, si el alto prefería su contrato (w_A, t_A) al que estaba aceptando el bajo, (w_B, t_B), una vez que le agreguemos ε a cada contrato, el alto preferirá $(w_A + \varepsilon, t_A)$ a $(w_B + \varepsilon, t_B)$.
(b) $(w_B + \varepsilon, t_B)$ atraerá al tipo bajo, por argumentos similares.

Los beneficios de ofrecer estos dos contratos son $\pi - \varepsilon > \frac{\pi}{2}$, por lo cual la situación anterior (con beneficios positivos) no podía ser un equilibrio.[7] ■

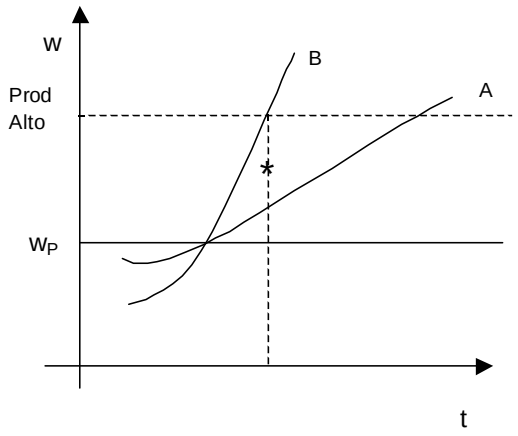
Un corolario inmediato de este lema es que si para algún perfil de contratos ofrecido por la firma j, la firma $i \neq j$ puede ofrecer un menú de contratos que le dé beneficios positivos, el perfil de contratos ofrecido por j no puede ser parte de un equilibrio. Usando este argumento demostraremos ahora que no hay equilibrios de pooling.

Lema 2 *No existe ningún equilibrio de pooling.*

Demostración. Por el Lema 1, debemos tener que si (w_P, t_P) es el contrato aceptado por ambos tipos de trabajador en un equilibrio de pooling, entonces $w_P = p\theta_A + (1-p)\theta_B$. Si la firma j está ofreciendo ese contrato, entonces la firma $k \neq j$ puede ofrecer un contrato (w^*, t^*) que se lleve sólo a los trabajadores altos y obtenga beneficios positivos. Gráficamente, el contrato se muestra en la siguiente gráfica, con el símbolo $*$:

[7] Asumimos que en equilibrio los trabajadores aceptan sólo dos tipos de contratos. Por un lado, podríamos decir: sean (w_A^i, t_A^i) para $i = 1, ..., n$ los contratos aceptados por los tipos θ_A y sean (w_B^i, t_B^i) para $i = 1, ..., m$ los contratos aceptados por los tipos θ_B; y después repetir el análisis del lema.

Por otro lado, podríamos haber demostrado que sólo se aceptan dos tipos de contratos. El argumento sería así: si hubiera dos contratos (w_A^i, t_A^i) para $i = 1, 2$ para (digamos) el tipo θ_A, éste tendría que estar indiferente entre ambos; la firma que ofreciera aquél con un sueldo mayor, digamos w_A^2, podría ganar más dinero ofreciendo los mismos contratos que antes, pero cambiando (w_A^2, t_A^2) por (w_A^1, t_A^1).



La idea es que un contrato como el $*$ atrae a los tipos altos, pero no a los bajos, y como les paga a los altos menos que su productividad, obtiene beneficios positivos. Como el Lema 1 nos dice que en equilibrio los beneficios deben ser 0, (w_P, t_P) no puede ser el contrato de equilibrio: para la firma k, los beneficios en equilibrio deben ser tanto o más grandes que los beneficios de ofrecer sólo el contrato $*$, y como los beneficios en el contrato $*$ son estrictamente positivos, los beneficios en equilibrio deben ser estrictamente positivos, lo que constituye un absurdo por el Lema 1.

Veremos ahora formalmente cómo se encuentra un contrato como el (w^*, t^*). Sea t^* aquél t para el cual

$$\theta_A - c(\theta_B, t^*) = w_P - c(\theta_B, t_P) \tag{4.1}$$

es decir, aquél t en el cual se intersecta la curva de indiferencia del bajo con el nivel de productividad del alto.

Sabemos que como $c_t(\theta_A, t) < c_t(\theta_B, t)$, se cumple que

$$c(\theta_A, t^*) - c(\theta_A, t_P) = \int_{t_P}^{t^*} c_t(\theta_A, x)\, dx < \int_{t_P}^{t^*} c_t(\theta_B, x)\, dx = c(\theta_B, t^*) - c(\theta_B, t_P).$$

Es decir, el aumento en el costo de θ_A de pasar de t_P a t^* es menor que el aumento en el costo de θ_B. Usando esta última ecuación y (4.1) obtenemos

$$\theta_A - c(\theta_A, t^*) - w_P + c(\theta_A, t_P) > \theta_A - c(\theta_B, t^*) - w_P + c(\theta_B, t_P) = 0$$

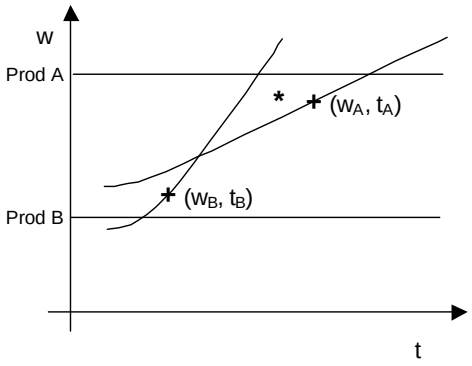
que nos dice que la utilidad de θ_A en el contrato (θ_A, t^*) es estrictamente mayor que en el contrato (w_P, t_P). Teníamos también que la utilidad de θ_B en el contrato (θ_A, t^*) era igual a la utilidad en el contrato (w_P, t_P). Por lo tanto, reduciendo un poco w de θ_A, a un nivel $w^* < \theta_A$, obtenemos que (w^*, t^*) es preferido por el tipo alto a (w_P, t_P), y (w^*, t^*) es peor que (w_P, t_P) para el tipo bajo. Para que el θ_A elija el contrato (w^*, t^*) debemos tener $\theta_A - c(\theta_A, t^*) > w^* - c(\theta_A, t^*) > w_P - c(\theta_A, t_P)$. ■

Ahora demostraremos que en todos los equilibrios, cada tipo recibe un salario igual a su productividad, o lo que es lo mismo, todos los contratos aceptados en equilibrio dan beneficio 0.

Lema 3 *Si (w_B, t_B) y (w_A, t_A) son los contratos aceptados por los tipos θ_B y θ_A en equilibrio, $w_B = \theta_B$ y $w_A = \theta_A$.*

Demostración. Si $w_B < \theta_B$, cualquier firma que ofrezca sólo el contrato $(\widetilde{w}, t_B)$ con $\widetilde{w} \in (w_B, \theta_B)$ atraerá al trabajador de tipo θ_B, y quizás al de tipo θ_A, por lo que obtendría seguro beneficios positivos. Por lo tanto, por el Lema 1 debemos tener $w_B \geq \theta_B$.

Si $w_A < \theta_A$, debemos tener por el Lema 1 que $w_B > \theta_B$. Si la firma j es la que ofrece el contrato (w_B, t_B), la firma $k \neq j$ puede ofrecer un contrato como el $*$ en la siguiente figura.



Dicho contrato atraerá al trabajador de tipo θ_A y no al θ_B (pues la firma j sigue ofreciendo el contrato (w_B, t_B)). Un contrato como el $*$ obtiene beneficios positivos, pues $w^* < \theta_A$. Por el Lema 1 entonces, $[(w_B, t_B), (w_A, t_A)]$ no podía ser parte de un equilibrio. Deducimos entonces $w_A \geq \theta_A$.

En el primer párrafo de la demostración dedujimos que $w_B \geq \theta_B$, y ahora acabamos de deducir que $w_A \geq \theta_A$. Como los beneficios para cada firma deben ser 0, w_i no puede ser mayor estricto que θ_i, pues si así fuera, no podría compensar las pérdidas pagando $w_j < \theta_j$ para $j \neq i$. La conclusión es que $w_i = \theta_i$ para $i = A, B$. ■

Demostraremos ahora que el trabajador de tipo bajo aceptará en equilibrio un contrato con nivel de esfuerzo 0.

Lema 4 *Si (θ_B, t_B) es el contrato aceptado por un trabajador de tipo θ_B en equilibrio, debemos tener $t_B = 0$.*

Demostración. Supongamos para proceder por el absurdo que $t_B > 0$. En ese caso, existe un $\widetilde{w} < w_B$ tal que

$$\theta_B - c(\theta_B, t_B) = \widetilde{w} - c(\theta_B, 0)$$

por lo tanto, cualquiera de las firmas podría ofrecer sólo un contrato $(w^*, 0)$ con $w^* \in (\widetilde{w}, \theta_B)$ y obtener beneficios positivos, pues dicho contrato atrae al tipo θ_B y posiblemente al θ_A, y cualquiera de ellos da beneficios positivos. Por el Lema 1 entonces, (θ_B, t_B) con $t_B > 0$ no puede ser parte de un equilibrio. Deducimos $t_B = 0$. ■

Mostratremos ahora que en el único equilibrio de este juego, el trabajador de tipo θ_B es indiferente entre aceptar su contrato y el del tipo θ_A.

Lema 5 *Si (θ_A, t_A) es el contrato aceptado por un trabajador de tipo θ_A en equilibrio, debemos tener que t_A satisface $\theta_A - c(\theta_B, t_A) = \theta_B - c(\theta_B, 0)$.*

Demostración. Supongamos para proceder por el absurdo que $[(\theta_B, 0), (\theta_A, t_A)]$ son los contratos aceptados en equilibrio, y que $\theta_A - c(\theta_B, t_A) < \theta_B - c(\theta_B, 0)$ (es decir que el nivel de esfuerzo requerido por el contrato del alto es tal que el bajo está estrictamente peor si se desvía al contrato del alto). En ese caso existe un $t^* < t_A$ tal que

$$\theta_A - c(\theta_B, t_A) < \theta_A - c(\theta_B, t^*) < \theta_B - c(\theta_B, 0). \tag{4.2}$$

A su vez,

$$\theta_A - c(\theta_A, t_A) < \theta_A - c(\theta_A, t^*) \tag{4.3}$$

por lo que existe un sueldo $w^* < \theta_A$ (cercano a θ_A) tal que

$$\begin{aligned} w^* - c(\theta_B, t^*) &< \theta_B - c(\theta_B, 0) \text{ (por eq (4.2))} \\ \theta_A - c(\theta_A, t_A) &< w^* - c(\theta_A, t^*) \text{ (por eq (4.3)).} \end{aligned}$$

Si la firma j está ofreciendo el contrato $(\theta_B, 0)$, la firma $k \neq j$ puede ofrecer sólo el contrato (w^*, t^*) y: el bajo no querrá desviarse de $(\theta_B, 0)$ a (w^*, t^*); el alto querrá desviarse de (θ_A, t_A) a (w^*, t^*); la firma k obtendrá beneficios positivos. Por el Lema 1 entonces, $[(\theta_B, 0), (\theta_A, t_A)]$ no pueden ser contratos aceptados en equilibrio si $\theta_A - c(\theta_B, t_A) < \theta_B - c(\theta_B, 0)$. Concluimos que $\theta_A - c(\theta_B, t_A) = \theta_B - c(\theta_B, 0)$ como queríamos demostrar. ■

La idea del siguiente ejercicio es mostrar que tiene que haber suficientes tipos bajos para que haya equilibrio. De momento, tenemos un único par de contratos que es candidato a equilibrio. Si la productividad promedio es mayor que el punto donde se intersectan la curva de indiferencia del alto (la de "equilibrio") con el eje y, entonces cualquiera podría ofrecer un contrato sobre el eje y, que estuviera por debajo de la productividad promedio, y por arriba de ambas curvas de indiferencia. En ese caso, se irían ambos tipos con quien hubiera ofrecido ese contrato (ya que está por arriba de ambas curvas de indiferencia) y ese contrato ganaría dinero (por estar por debajo de la productividad de pooling).

Ejercicio 6 Sea (θ_A, t_A) el contrato encontrado en el Lema 5. Demostrar que si las preferencias y el p (la probabilidad de un tipo θ_A) son tales que

$$c(\theta_A, 0) - c(\theta_A, t_A) < (1-p)(\theta_B - \theta_A)$$

entonces no existe ningún equilibrio. (pista: encuentre un contrato que atraiga a ambos tipos y que gane dinero)

Ejercicio 7 Screening competitivo, idéntico al de clase. En el mercado hay dos firmas y un trabajador que puede ser de tipo $\theta_A = 2$ o $\theta_B = 1$. La probabilidad a priori del tipo θ_A es p. En el primer período, cada una de las firmas puede ofrecer los contratos que desee, con cada contrato especificando un nivel de salario y un nivel de esfuerzo. Es decir, cada contrato será un par (w, t), donde w es el salario, y t es el nivel de esfuerzo que deberá ejercer el trabajador. En el segundo período el trabajador decide cuál contrato aceptar.

Para la firma que contrata a un trabajador de tipo θ_i con un contrato (w, t), la utilidad es $\theta_i - w$. La utilidad de cada trabajador depende del sueldo recibido, de su tipo y del esfuerzo que realiza. Para un trabajador de tipo θ, la utilidad de aceptar un contrato (w, t) es

$$u(w, t \mid \theta) = w - \frac{t^2}{\theta}.$$

Parte A. Utilizando los resultados de la primera parte de estas notas (no los repita) encuentre los dos contratos de equilibrio.

Parte B. Encuentre el p^* más chico tal que si $p > p^*$ no existe equilibrio.

Ejercicio 8 Screening competitivo, idéntico al de clase. En el mercado hay dos firmas y un trabajador que puede ser de tipo $\theta_A = 6$ o $\theta_B = 2$. La probabilidad a priori del tipo θ_A es p. En el primer período, cada

una de las firmas puede ofrecer los contratos que desee, con cada contrato especificando un nivel de salario y un nivel de esfuerzo. Es decir, cada contrato será un par (w,t), donde w es el salario, y t es el nivel de esfuerzo que deberá ejercer el trabajador. En el segundo período el trabajador decide cuál contrato aceptar.

Para la firma que contrata a un trabajador de tipo θ_i con un contrato (w,t), la utilidad es $\theta_i - w$. La utilidad de cada trabajador depende del sueldo recibido, de su tipo y del esfuerzo que realiza. Para un trabajador de tipo θ, la utilidad de aceptar un contrato (w,t) es

$$u(w,t \mid \theta) = w - \frac{t^3}{\theta}.$$

Parte A. Utilizando los resultados de la primera parte de estas notas (no los repita) encuentre los dos contratos en el único candidato a equilibrio.

Parte B. Encuentre el conjunto de ps para los cuales existe equilibrio. En particular, determine para cuáles de los siguientes p existe equilibrio (ojo que hay una trampa): $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$.

Demanda de Seguros con información completa. Esta aplicación dice que si existe un seguro con una prima "justa" el individuo se asegurará completamente, si es averso al riesgo.

El individuo posee una casa valuada en $\$D$, que puede quemarse con una probabilidad p, y pasar a valer $\$D - L$. La persona puede comprar tantas unidades como quiera, a un precio de $\$q$ por unidad, de un seguro que paga \$1 en caso de accidente, y 0 en caso contrario. Como hay competencia en el mercado de seguros, los beneficios esperados de las compañías son 0 :

$$q - p * 1 - (1-p) * 0 = 0 \Leftrightarrow p = q.$$

¿Cuánto comprará el individuo de seguro si su función de utilidad esperada es tal que $u'' < 0$?

El individuo debe elegir x, la cantidad de unidades de seguro, para maximizar su utilidad esperada

$$pu(D - L + x - px) + (1-p)\, u(D - px).$$

La condición de primer orden (como u es cóncava, es necesaria y suficiente) es

$$pu'(D - L - px + x)(1-p) = (1-p)\, u'(D - px)\, p \Leftrightarrow u'(D - L - px + x) = u'(D - px).$$

Como $u'' < 0$, eso implica que se debe cumplir que $D - L - px + x = D - px$ o lo que es lo mismo, $x = L$. Es decir, el individuo se asegura completamente. Otra forma fácil de ver que la solución es la propuesta, es ver que si el individuo compara asegurarse completamente con tomar un seguro con $x \neq L$, ambas loterías tienen la misma media, $D - pL$, pero una tiene riesgo y la otra no: para cada x, el valor esperado de la riqueza es

$$E(w) = p(D - L - px + x) + (1-p)(D - px) = D - Lp.$$

Por definición de aversión al riesgo, el individuo preferirá el seguro total.

Otra forma de verlo, es pensando que la compañía de seguros ofrece dos niveles de riqueza al individuo, w_n en caso de *no* fuego, y w_f en caso de fuego. Es fácil ver que cada x que uno elige se tranforma en un par de niveles de riqueza w_n y w_f; pero también es cierto que se puede pasar de un "contrato" w_n, w_f a un x, notando que si uno elige un nivel de riqueza $w_n = w$, está eligiendo el x tal que $D - px = w \Leftrightarrow x = \frac{D-w}{p}$. Es decir, se puede pasar de un tipo de contrato al otro. Si la firma nos ofreciera contratos en la forma w_n, w_f, la condición de beneficio 0 sería que el individuo puede elegir los w_f y w_n que quiera, mientras cumplan $pw_f + (1-p)\, w_n = D - pL$. Graficando eso en un par de ejes con w_n en las abcisas y w_b en las ordenadas, queda como una restricción presupuestal. El individuo debe maximizar $pu(w_f) + (1-p)\, w_n$ sujeto a esa restricción, y se maximiza en $w_n = w_f$.

Ejercicio 9 Considere el siguiente mercado de seguros. Hay dos tipos de trabajadores, los de alto riesgo y los de bajo riesgo; la proporción de alto riesgo es q. Cada uno tiene una riqueza inicial de W, pero hay una chance de que ocurra un accidente que reduzca su riqueza en L. La probabilidad de que eso suceda es p_B para los de bajo riesgo y p_A para los de alto riesgo, donde $p_A > p_B$. Los dos tipos tienen la misma función de utilidad sobre niveles de riqueza u, con $u' > 0 > u''$ y u continua y no acotada por arriba. Hay dos compañías de seguro que ofrecen contratos de seguro, que consisten en una prima M que debe pagar el asegurado y un pago R de la firma al individuo si ocurre un accidente. Suponga que cada individuo puede comprar un sólo contrato de seguros y que las firmas ofrecen los contratos simultáneamente.

Parte A. Sean W y L dados. Demuestre que cada contrato (M, R) puede expresarse como (w_a, w_n), los niveles de riqueza que ocurren si hay *a*ccidente o *n*o hay accidente, y viceversa. Es decir, demuestre que para cada (w_a, w_n) existe un contrato (M, R) que hace que w_a y w_n sean los niveles de riqueza en caso de accidente, o no accidente. A partir de ahora, nos olvidaremos de los contratos tipo (M, R) y trabajaremos sólo con el formato (w_a, w_n).

Parte B. Demuestre que si las firmas saben a que tipo de agente se enfrentan, el equilibrio es que cada agente se asegure completamente con un contrato que le da beneficio 0 a la firma.

Parte C. Demuestre que en el equilibrio cada firma tiene beneficios 0.

Parte D. Demuestre que no existe ningún equilibrio de pooling.

Parte E. Demuestre que si $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ y $\left(w_a^B, w_n^B\right)$ son los contratos aceptados por el tipo alto y bajo respectivamente, entonces cada contrato le da a la firma beneficio esperado 0. Asuma que las firmas ofrecen sus contratos simultáneamente. Encuentre el o los equilibrios posibles. ¿Existe necesariamente un equilibrio?

En el ejercicio anterior, Ejercicio 9, el único candidato a equilibrio es con un contrato que maximiza la utilidad del riesgo alto, sujeto a la restricción de beneficio 0, y un contrato para el riesgo bajo que deja al alto indiferente entre su contrato y el de riesgo bajo. En ese caso, $w_a^A > w_a^B$ y $w_n^A < w_n^B$, por lo que (utilizando la equivalencia de la Parte A) vemos que $M^A > M^B$ y $R^A > R^B$: la prima es mayor para el riesgo alto, y el "deducible" (la diferencia entre el valor del choque, L, y lo que recibe R) es menor. En particular, en el equilibrio, el deducible para el de riesgo alto es 0 : recibe la misma riqueza si choca que si no choca. Para el alto, el deducible es positivo. Eso tiene sentido: si ofrecen dos contratos, uno con prima alta, y deducible bajo, y otro con prima baja y deducible alto, los buenos conductores elegirán este último, mientras que los malos elegirán aquél en el cual si chocan, no les cuesta nada.

Ejercicio 10 Un cliente quiere asegurar su auto contra accidentes. La empresa sabe que el individuo puede ser un buen o un mal conductor (es bueno con una probabilidad $t \in (0, 1)$. La probabilidad de accidente para el conductor seguro es $p_s = \frac{1}{3}$ y la del anormal es $p_a = \frac{1}{2}$. Hay varias firmas en el mercado. La utilidad del cliente si tiene una riqueza x es $u(x) = \log x$. La riqueza inicial del individuo es $w = 64$ y si choca, pierde 63: el costo c de un accidente es $c = 63$. Las compañías ofrecen contratos con una prima (que llamamos ρ), y con un nivel de cobertura q (el individuo paga ρ cuando contrata el seguro, y en caso de accidente, le devuelven q). Después el cliente elige el contrato que prefiere.

Parte A. Escriba la utilidad esperada de cada tipo de agente (cliente) cuando compra un contrato (ρ, q). Escriba también las restricciones de participación de cada tipo de conductor.
Parte B. Calcule los contratos de equilibrio si hay información simétrica (se sabe si un conductor es bueno o malo).

Parte C. Esos contratos, ¿podrían ser de equilibrio con información asimétrica?
Parte D. Encuentre los contratos de equilibrio cuando hay información asimétrica.
Parte E. Muestre que si $t = \frac{2}{3}$ el par de contratos descrito en la Parte D no es un equilibrio. Esto es lo de siempre: existe un contrato que atrae a ambos tipos, y que le puede dar beneficios positivos a la firma que lo ofrece (y eso rompe el supuesto equilibrio encontrado en la Parte D).

Ejercicio 11 En un mercado laboral hay dos firmas, y dos tipos posibles de trabajadores, los de costo alto y los de costo bajo. Para un sueldo de s y un nivel de esfuerzo de x, la utilidad de cada tipo es

$$u_b(s,x) = s - \frac{2x^2}{3} \quad y \quad u_a(s,x) = s - x^2.$$

Vemos que la desutilidad y la desutilidad marginal del esfuerzo son mayores para el de costo alto. Sólo el trabajador sabe su tipo. El trabajador con el costo bajo produce $2x$ con un esfuerzo de x, mientras que el de costo alto produce x. La proporción de cada tipo de trabajador en el mercado es $\frac{1}{2}$, y sus utilidades de reserva son 0.

Las firmas deben ofrecer simultáneamente menúes de contratos (s,x), y luego los trabajadores eligen el que más les conviene. Es decir, cada firma puede ofrecer la cantidad de contratos que quiera.

Parte A. Muestre que no puede haber ningún equilibrio de pooling, en el cual todos los tipos de trabajadores aceptan el mismo contrato. Puede usar, sin demostrar, que en equilibrio las firmas deben tener beneficio 0. Con un dibujo se ve fácilmente. Pero hay que formalizar lo más posible.

Parte B. Encuentre los contratos que serían de equilibrio si el tipo del trabajador fuera observable. Son dos, uno para cada tipo.

Parte C. Muestre que si los tipos no son observables, los contratos de la Parte B no pueden ser un equilibrio.

Parte D. Encuentre el p^* tal que si la proporción de trabajadores de costo bajo es $p > p^*$, entonces no existe equilibrio. Para ello debe encontrar primero el único candidato a ser el equilibrio.

Ejercicio 12 Considere un mercado de crédito con dos tipos de emprendedores, $\theta = \{b, m\}$, con una proporción a de buenos b y $0 < m < b < 1$. Los emprendedores son neutrales al riesgo, y para ambos tipos, el proyecto puede ser exitoso y rendir R (al final del proyecto, el valor del mismo será R, y eso incluye todo lo que se haya invertido) o fracasar y rendir 0 (idem: si fracasa, el valor es 0; se pierde lo invertido). Un emprendedor de tipo θ es exitoso con probabilidad θ. Ambos tipos de proyecto requieren una inversión I, que se financia con un préstamo de I, y repago D (si el proyecto falla, no se repaga D). El emprendedor tiene un "gran" capital C, que no es líquido y por eso no se puede invertir en el proyecto, pero parte puede ser puesto como colateral. Si el proyecto rinde 0, el banco exigirá la parte c que se haya puesto como colateral. Como en general, en la liquidación de una garantía o colateral se pierde una parte por ineficiencias (trámites, abogados, costos legales, etc) asumimos por simplicidad que *todo* lo que se puso como colateral se pierde. En particular, si el emprendedor firmó un contrato con un colateral de $c \leq C$, y el proyecto rinde 0, el individuo perderá c, y el banco no ganará nada. Hay dos bancos que actúan en forma competitiva, y que ofrecen contratos de préstamo $p = (D, c)$.

Parte A. Escriba los beneficios esperados de los emprendedores buenos y malos, y la condición de beneficio 0 para los bancos (escriba esta última para tres casos: si se enfrenta a un bueno, a un malo, o a un emprendedor promedio).
Parte B. ¿Qué contratos ofrecerán los bancos, si se saben los tipos de los emprendedores?

Parte C. Argumente, con un gráfico, que no hay equilibrios de pooling.
Parte D. Encuentre el o los candidatos a equilibrio separador.
Parte E. ¿Qué condición debe cumplir a para que exista un equilibrio separador?

Ejercicio 13 Considere un mercado de crédito con dos tipos de emprendedores, $\theta = \{b, m\}$, con una proporción α de buenos b y $0 < m < b < 1$. Un emprendedor de tipo θ puede ejecutar un proyecto que da un rendimiento π_θ con probabilidad θ y 0 con probabilidad $1 - \theta$; ambos tipos de proyecto tienen el mismo retorno esperado: $\pi_b b = \pi_m m = \overline{\pi}$ (pero los buenos tienen menos riesgo). Tanto π_b como π_m son retornos brutos (ya tienen lo invertido adentro). Ambos tipos de proyecto requieren una inversión I, que se financia con un préstamo de I. El emprendedor tiene una riqueza R (que no es líquida y por eso no se puede invertir en el proyecto), pero que puede ser puesta como colateral: si el proyecto rinde 0, el banco exigirá lo que se haya puesto como colateral: si el emprendedor firmó un contrato con un colateral de $r \leq R$, y el proyecto rinde 0, se pierde el colateral (lo pierde el emprendedor, y no lo gana el banco). Hay dos bancos que actúan en forma competitiva, y que ofrecen contratos $c = \{r, D\}$, donde D es el monto que debe devolver el que pide el dinero.

Parte A. Escriba los beneficios esperados de los emprendedores buenos y malos, y la condición de beneficio 0 para los bancos (escriba esta última para tres casos: si se enfrenta a un bueno, a un malo, o a un emprendedor promedio).
Parte B. ¿Qué contratos ofrecerán los bancos, si se saben los tipos de los emprendedores?
Parte C. Argumente, con un gráfico, que un contrato $c = \{D_p, r_p\}$ con $r_p < R$ no puede ser un equilibrio de pooling.
Parte D. ¿Puede $c = \{D_p, R\}$ ser un equilibrio de pooling?
Parte E. Encuentre el o los candidatos a equilibrio separador.
Parte D. ¿Qué condición debe cumplir α para que exista un equilibrio separador?

Ejercicio 14 (Thomas Nechyba; screening competitivo). Suponga que hay un mercado competitivo de seguros de ingresos. La gente puede tener un ingreso bajo x_1, o alto, $x_2 \geq x_1$. Hay dos tipos de consumidores: aquellos para quienes el riesgo del ingreso bajo es d, y aquellos para quienes el riesgo es más alto, $f \geq d$. Cada tipo de persona conoce su riesgo, pero las compañías de seguro no. Hay una proporción γ de agentes de bajo riesgo. Las compañías compiten ofreciendo contratos (p, b), donde p es la prima y b el beneficio (pagas p, y si ocurre x_1 la empresa te da b). Suponga que la función de utilidad de los agentes es $u(w) = a \ln w$, si tiene una riqueza w. Suponga también que $x_1 = 10$, $x_2 = 250$, $d = \frac{1}{4}$ y $f = \frac{1}{2}$.

Parte A. Encuentre el único par de contratos (p_d, b_d) y (p_f, b_f) candidato a equilibrio en este mercado.

Parte B. Encuentre los contratos óptimos cuando f pasa a ser $\frac{3}{4}$. ¿Cómo cambia la utilidad del agente d?

Parte C. Grafique los resultados de las Partes A y B en un gráfico con b en las abcisas y p en las ordenadas (dibuje las curvas de beneficio 0 para cada agente, y las curvas de indiferencia en el equilibrio).

Screening Monopolístico.

Hasta ahora habíamos analizado un mercado en el cual había dos firmas compitiendo por los clientes, o trabajadores. Pasamos ahora a analizar una situación en la cual una sola firma ofrece contratos a varios trabajadores o consumidores. Presentaremos primero un modelo más o menos general, y luego una serie de ejercicios. El modelo sirve para al menos dos tipos de situaciones distintas: agente-principal en las cuales la

acción del agente es observable, pero el principal no puede saber las preferencias o la productividad del agente; situaciones en las cuales un monopolista ofrece bienes a consumidores cuyas preferencias son desconocidas para quien debe diseñar el menú de contratos.La presentación será en base al modelo de la primera parte de estas notas.

Una firma debe contratar trabajadores para que trabajen en su fábrica. La firma no conoce las preferencias de los trabajadores respecto al costo que les significa realizar un cierto esfuerzo. Debe ofrecer menúes de contratos de esfuerzo y nivel de salario para maximizar su beneficio: como antes, el esfuerzo es observable. Los trabajadores pueden hacer cualquier esfuerzo $e \in \mathbf{R}_+$, y ello afectará los beneficios $\pi(e)$ de la firma, que satisfacen $\pi(0) = 0$, $\pi'(e) > 0$ y $\pi''(e) \leq 0$ para todo e. En la primera parte supusimos que los beneficios de la firma dependían del tipo de trabajador, y no del esfuerzo, y aquí asumimos lo contrario. No es que un supuesto sea más "razonable" que el otro, es sólo para ilustrar. El caso general en el que los beneficios dependen del tipo y del esfuerzo es fácil de generalizar a partir de este modelo.

La utilidad del trabajador es una función $u(w, e, \theta) = w - g(e, \theta)$ donde g mide la desutilidad del esfuerzo en términos de "plata" y la utilidad de reserva del agente es $\overline{u}$. Asumimos que los sueldos w pueden ser negativos.

La función g y sus derivadas parciales satisfacen

$$g(0,\theta) = 0, \quad g_{ee} > 0, \quad g_\theta \begin{cases} < 0 & e > 0 \\ = 0 & e = 0 \end{cases}, \quad g_e \begin{cases} > 0 & e > 0 \\ = 0 & e = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_{e\theta} \begin{cases} < 0 & e > 0 \\ = 0 & e = 0 \end{cases}$$

Las derivadas parciales tienen las interpretaciones habituales cuando tipos más altos son mejores: por ejemplo $g_{e\theta} < 0$ quiere decir que la des-utilidad marginal del esfuerzo es más chica para tipos más altos. Asumimos también que hay sólo dos tipos posibles de trabajador: $\theta_A > \theta_B > 0$ con $p(\theta_A) = \lambda$.

Para analizar las distorsiones que genera la información asimétrica analizaremos primero el caso en que los tipos θ son observables.

Tipos Observables.

Un menú de contratos con información completa es un par $[(e_A^*, w_A^*), (e_B^*, w_B^*)]$ que es óptimo si resuelve el problema de elegir $(e_A, w_A), (e_B, w_B)$ para maximizar

$$\begin{array}{rc} & \lambda[\pi(e_A) - w_A] + (1-\lambda)[\pi(e_B) - w_B] \\ \text{sujeto a} & w_A - g(e_A, \theta_A) \geq \overline{u} \\ & w_B - g(e_B, \theta_B) \geq \overline{u} \end{array} \tag{4.4}$$

Es importante notar (por la forma como formulamos el problema) que cada tipo de trabajador debe querer aceptar el contrato que le ofrezca la firma. Es decir, no es que un trabajador antes de conocer su información acepta un menú que "en promedio" lo deja satisfecho, y que si tiene "mala suerte" y le toca un tipo que recibiría en el contrato menos que $\overline{u}$ se la tiene que bancar. La restricción en el caso en que el trabajador aceptaría el contrato "ex ante" (antes de conocer su tipo y después se la tiene que bancar) sería $\lambda[w_A - g(e_A, \theta_A)] + (1-\lambda)[w_B - g(e_B, \theta_B)] \geq \overline{u}$.

Por los argumentos habituales (si no lo estuvieran, el dueño de la empresa podría pagarle ε menos a cada tipo y ganar más), las dos restricciones deben estar activas y el problema se transforma en el de elegir e_A y e_B para maximizar

$$\lambda[\pi(e_A) - g(e_A, \theta_A) - \overline{u}] + (1-\lambda)[\pi(e_B) - g(e_B, \theta_B) - \overline{u}]. \tag{4.5}$$

Vemos entonces que el problema de elegir los contratos óptimos con información perfecta se reduce al problema de elegir los contratos por separado. Es decir, $[(e_A^*, w_A^*), (e_B^*, w_B^*)]$ son óptimos en el problema de maximizar (4.4), si y sólo si (e_A^*, w_A^*) es óptimo en el problema de maximizar $\pi(e_A) - w_A$ sujeto a $w_A - g(e_A, \theta_A) = \overline{u}$ y (e_B^*, w_B^*) es óptimo en el problema de maximizar $\pi(e_B) - w_B$ sujeto a $w_B - g(e_B, \theta_B) = \overline{u}$.

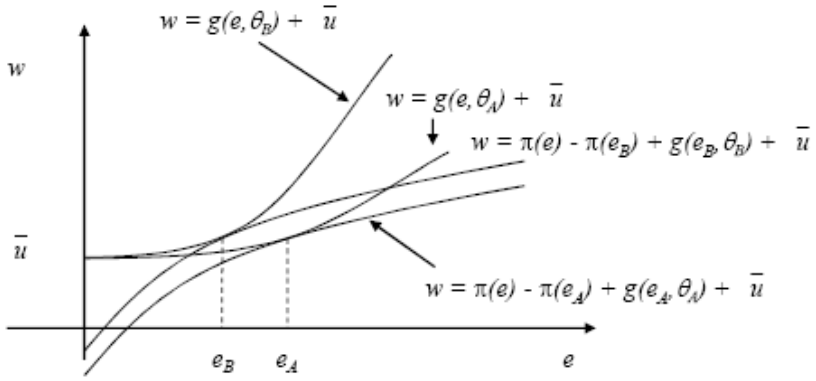
Las condiciones de primer orden del problema en (4.5) son

$$\pi'(e_A^*) = g_e(e_A^*, \theta_A) \qquad \text{y} \qquad \pi'(e_B^*) = g_e(e_B^*, \theta_B). \tag{4.6}$$

Las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes porque una solución de esquina, con $e_i = 0$, no es óptima, ya que la derivada de (4.5) con respecto a e_A evaluada en $e_A = 0$ es (ver los supuestos hechos sobre π y g)

$$\lambda[\pi'(0) - g_e(0, \theta_A)] > 0.$$

En forma similar, e_B^* debe ser mayor que 0, y las CPO son necesarias y suficientes. La interpretación de las CPO es la de siempre: el dueño elige el nivel de esfuerzo del empleado que hace que la desutilidad marginal del esfuerzo sea igual al beneficio marginal que genera. La siguiente figura ilustra la solución del problema.



Screening Monopolístico con Información Perfecta.

Ejercicio 15 Usando $\pi'' < 0$ y $g_{ee} > 0$ muestre que la solución al problema en (4.5), caracterizada por las condiciones de primer orden en (4.6) es única. Es decir, muestre que para todo $e_i \neq e_i^*$

$$\pi(e_i^*) - g(e_i^*, \theta_i) - \overline{u} > \pi(e_i) - g(e_i, \theta_i) - \overline{u}. \tag{4.7}$$

Ejercicio 16 Usando las condiciones de primer orden en (4.6) y los supuestos sobre π y g demuestre que $e_A^* > e_B^*$.

El Ejercicio 16 sólo refleja el hecho que como la desutilidad marginal del esfuerzo es más baja con el tipo alto, el tipo alto trabajará más en el óptimo.

Tipos No Observables.

En la figura anterior se ve que si los tipos no son observables, los contratos $[(e_A^*, w_A^*), (e_B^*, w_B^*)]$ no pueden ser óptimos, pues el tipo θ_A querrá el contrato (e_B^*, w_B^*). El dueño de la empresa debe entonces

elegir $(e_A, w_A), (e_B, w_B)$ para maximizar

$$\begin{array}{lcll} & \lambda\left[\pi\left(e_A\right)-w_A\right]+(1-\lambda)\left[\pi\left(e_B\right)-w_B\right] & & \\ \text{sujeto a} & w_A-g\left(e_A,\theta_A\right)\geq\overline{u} & \text{Participación } \theta_A & \\ & w_B-g\left(e_B,\theta_B\right)\geq\overline{u} & \text{Participación } \theta_B & (4.8) \\ & w_A-g\left(e_A,\theta_A\right)\geq w_B-g\left(e_B,\theta_A\right) & \text{Incentivos } \theta_A & \\ & w_B-g\left(e_B,\theta_B\right)\geq w_A-g\left(e_A,\theta_B\right) & \text{Incentivos } \theta_B & \end{array}$$

Ejercicio 17 Usando sólo las restricciones del problema anterior y $g_\theta < 0$ muestre que la restricción de participación del tipo θ_A sobra. Es decir, es una consecuencia de las otras restricciones.

El ejercicio anterior establece algo muy importante en este tipo de problemas: el tipo alto siempre obtendrá una "renta informacional": su restricción de participación no estará activa, y recibirá más utilidad que lo que recibiría con información completa. En general, el principal quiere saber cuál es el trabajador con costo bajo (para hacerlo trabajar más; o el consumidor con una disposición alta a pagar, para cobrarle más). Para que el alto revele su tipo, deberán darle un poco más de utilidad que $\overline{u}$.

En lo que sigue, $[(e_A^*, w_A^*), (e_B^*, w_B^*)]$ serán, como antes, los contratos óptimos con información completa. En general llamaremos $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ a los contratos óptimos con información asimétrica.

Ejercicio 18 Muestre que si $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ es parte de una solución al problema del dueño de la empresa, entonces $\widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) = \overline{u}$. Recuerde que los sueldos w pueden ser cualquier número real.

Lema 19 *Si $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ son los contratos óptimos en el problema con información asimétrica, entonces $\widehat{e}_B \leq e_B^*$ y $\widehat{e}_A = e_A^*$.*

Prueba. Primera parte, $\widehat{e}_B \leq e_B^*$. Supongamos que $\widehat{e}_B > e_B^*$ y que $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ son los contratos óptimos. Mostraremos ahora que $[(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A), (e_B^*, w_B^*)]$ satisfacen todas las restricciones del problema con información asimétrica en (4.8) y que le dan estrictamente más beneficios al dueño de la empresa. De la solución del problema con información perfecta sabemos que $w_B^* - g\left(e_B^*, \theta_B\right) = \overline{u}$, por lo que se cumple la restricción de participación de θ_B. Por el Ejercicio 17 sabemos que si $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ son los contratos óptimos en el problema con información asimétrica, entonces $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ satisface la restricción de participación de θ_A. Por el Ejercicio 18 sabemos que $\widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) = \overline{u}$, por lo que $\widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) = w_B^* - g\left(e_B^*, \theta_B\right) = \overline{u}$. Eso implica que

$$\widehat{w}_B - w_B^* = g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) - g\left(e_B^*, \theta_B\right) = \int_{e_B^*}^{\widehat{e}_B} g_e\left(e, \theta_B\right) de \overset{g_{e\theta}<0}{\geq} \int_{e_B^*}^{\widehat{e}_B} g_e\left(e, \theta_A\right) de = g\left(\widehat{e}_B, \theta_A\right) - g\left(e_B^*, \theta_A\right) \quad (4.9)$$

y como $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ son óptimos cumplen

$$\widehat{w}_A - g\left(\widehat{e}_A, \theta_A\right) \geq \widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_A\right) \overset{4.9}{\geq} w_B^* - g\left(e_B^*, \theta_A\right)$$

por lo que también se cumple la restricción de incentivos para θ_A. Finalmente, tenemos que

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) = w_B^* - g\left(e_B^*, \theta_B\right) = \overline{u} \\ \widehat{w}_B - g\left(\widehat{e}_B, \theta_B\right) \geq \widehat{w}_A - g\left(\widehat{e}_A, \theta_B\right) \end{array}\right\} \Rightarrow w_B^* - g\left(e_B^*, \theta_B\right) \geq \widehat{w}_A - g\left(\widehat{e}_A, \theta_B\right)$$

por lo que también se cumple la restricción de incentivos de θ_B.

Sabemos ahora que $[(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A), (e_B^*, w_B^*)]$ satisfacen todas las restricciones del problema con información asimétrica. También sabemos, de la discusión que siguió a la ecuación (4.5), y del Ejercicio 15, que (e_B^*, w_B^*)

es el único óptimo en el problema de maximizar $\pi(e_B) - w_B$ sujeto a $w_B - g(e_B, \theta_B) = \overline{u}$ y como $\widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) = \overline{u}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(e_B^*) - g(e_B^*, \theta_B) - \overline{u} &> \pi(\widehat{e}_B) - g(\widehat{e}_B, \theta_B) - \overline{u} \Rightarrow \\ \lambda[\pi(\widehat{e}_A) - \widehat{w}_A] + (1-\lambda)[\pi(\widehat{e}_B) - \widehat{w}_B] &= \lambda[\pi(\widehat{e}_A) - \widehat{w}_A] + (1-\lambda)[\pi(\widehat{e}_B) - g(\widehat{e}_B, \theta_B) - \overline{u}] \\ &< \lambda[\pi(\widehat{e}_A) - \widehat{w}_A] + (1-\lambda)[\pi(e_B^*) - g(e_B^*, \theta_B) - \overline{u}] \\ &= \lambda[\pi(\widehat{e}_A) - \widehat{w}_A] + (1-\lambda)[\pi(e_B^*) - w_B^*] \end{aligned}$$

lo que contradice que $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ fueran óptimos.

Segunda parte, $\widehat{e}_A = e_A^*$. Debemos mostrar ahora que el esfuerzo que querrá elegir el dueño para su empleado, cuando no puede observar el tipo, $\widehat{e}_A$, es igual al que elegiría si pudiera observarlo, e_A^*. Sabiendo que el esfuerzo óptimo para el bajo, cuando los tipos no son observables, $\widehat{e}_B$, es tal que $\widehat{e}_B \leq e_B^*$, el dueño debe elegir ahora (e_A, w_A) para maximizar

$$\begin{array}{lcl} & \lambda[\pi(e_A) - w_A] + (1-\lambda)[\pi(\widehat{e}_B) - \widehat{w}_B] & \\ \text{sujeto a} & w_A - g(e_A, \theta_A) \geq \overline{u} & \text{Participación } \theta_A \\ & w_A - g(e_A, \theta_A) \geq \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A) & \text{Incentivos } \theta_A \\ & \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) \geq w_A - g(e_A, \theta_B) & \text{Incentivos } \theta_B \end{array}$$

Imaginemos ahora que el dueño decide resolver el problema sin la restricción de incentivos para el tipo θ_B, y recordemos que por el Ejercicio 17 la restricción de participación de θ_A sobra (la de θ_B ya la eliminamos porque el contrato $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ lo estamos tomando como fijo en esta parte de la demostración). El problema que se propone resolver el dueño es entonces el de elegir (e_A, w_A) para maximizar

$$\begin{array}{lcl} & \lambda[\pi(e_A) - w_A] + (1-\lambda)[\pi(\widehat{e}_B) - \widehat{w}_B] & \\ \text{sujeto a} & w_A - g(e_A, \theta_A) \geq \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A) & \text{Incentivos } \theta_A \end{array}$$

Como en este problema la restricción tiene que estar activa (se podría bajar el sueldo indefinidamente) el problema se transforma en el de elegir de elegir (e_A, w_A) para maximizar

$$\lambda[\pi(e_A) - \widehat{w}_B + g(\widehat{e}_B, \theta_A) - g(e_A, \theta_A)] + (1-\lambda)[\pi(\widehat{e}_B) - \widehat{w}_B]$$

cuya condición de primer orden es

$$\pi'(\widehat{e}_A) = g_e(\widehat{e}_A, \theta_A).$$

En el Ejercicio 15 vimos que hay un único e que satisface esa condición, y como, por la condición (4.6) e_A^* la satisface, obtenemos $\widehat{e}_A = e_A^*$, como queríamos demostrar. Falta ahora demostrar que $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A) = (e_A^*, g(e_A^*, \theta_A) + \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A))$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ satisfacen la restricción de incentivos previamente ignorada (la de θ_B), y eso es el próximo ejercicio. ■

Ejercicio 20 Mostrar que si $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ cumplen la restricción de incentivos de θ_A y $\widehat{e}_A$ y $\widehat{e}_B \leq \widehat{e}_A$, entonces satisfacen la restricción de incentivos de θ_B.

Eso establece que como $\widehat{e}_B \leq e_B^*$ (del Lema 19) y $e_B^* < e_A^*$ (del Ejercicio 16), el contrato

$$(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A) = (e_A^*, g(e_A^*, \theta_A) + \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A)),$$

que cumple la restricción de incentivos de θ_A con igualdad, los contratos $(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A)$ y $(\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)$ satisfacen la restricción de incentivos de θ_B. (debe utilizar los métodos de la ecuación 4.9).

Una consecuencia de los Ejercicios 17 y 20 es que sólo 2 de las 4 restricciones estarán activas en la solución. Poniendo esas dos restricciones con igualdad, nos queda el problema de elegir 2 variables para maximizar los beneficios del dueño, y sin restricciones adicionales. Formalmente, debemos elegir $(e_A, w_A), (e_B, w_B)$ para maximizar

$$\lambda [\pi (e_A) - w_A] + (1-\lambda) [\pi (e_B) - w_B]$$
$$w_B - g (e_B, \theta_B) = \overline{u}$$
$$w_A - g (e_A, \theta_A) = w_B - g (e_B, \theta_A)$$

o, lo que es lo mismo, elegir e_A, e_B para maximizar

$$\lambda [\pi (e_A) - g (e_A, \theta_A) + g (e_B, \theta_A) - \overline{u} - g (e_B, \theta_B)] + (1-\lambda) [\pi (e_B) - \overline{u} - g (e_B, \theta_B)]. \tag{4.10}$$

Como ya sabemos del análisis anterior, el e_A óptimo es $\widehat{e} = e_A^*$, que cumple con la condición (4.6). El e_B óptimo satisface

$$\lambda g_e (\widehat{e}_B, \theta_A) + (1-\lambda) \pi' (\widehat{e}_B) - g_e (\widehat{e}_B, \theta_B) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} [g_e (\widehat{e}_B, \theta_A) - g_e (\widehat{e}_B, \theta_B)] + \{\pi' (\widehat{e}_B) - g_e (\widehat{e}_B, \theta_B)\} = 0. \tag{4.11}$$

El término entre llaves es 0 en $\widehat{e}_B = e_B^*$ y estrictamente positivo para $\widehat{e}_B < e_B^*$, mientras que el término entre paréntesis rectos es siempre estrictamente negativo, por lo que $\widehat{e}_B < e_B^*$, y no sólo menor o igual como mostró el Lema 19. Para ver por qué este resultado es cierto, imaginemos que creemos que el óptimo se da con $\widehat{e}_B = e_B^*$. En ese caso, movernos "un poco" (marginalmente) de e_B^* no cambia los beneficios del dueño, pues la derivada del segundo paréntesis recto en (4.10) es 0: como e_B^* era óptimo, se cumplía (4.6) (eso quiere decir que mover "poco" el e_B no cambia los beneficios generados por θ_B). Pero mover e_B un poco para abajo "relaja" un poco la restricción de incentivos del tipo θ_A y le permite al dueño pagarle menos a ese tipo. Ese efecto lo captura la derivada del primer paréntesis recto en (4.10): es $g_e (e_B^*, \theta_A) - g_e (e_B^*, \theta_B) < 0$, por lo que reducir e_B de e_B^* aumenta los beneficios. Concretamente, de $w_B = \overline{u} + g (e_B, \theta_B)$ en la restricción de incentivos del alto, obtenemos

$$w_A - g (e_A, \theta_A) = \overline{u} + g (e_B, \theta_B) - g (e_B, \theta_A);$$

al bajar un poco e_B desde e_B^*, se relaja estrictamente el lado derecho de la restricción de incentivos de θ_A (pues $g_e (e_B, \theta_B) - g_e (e_B, \theta_A) < 0$), y eso permite bajar el w_A. Por eso, el efecto total sobre los beneficios, captado en el paréntesis recto de (4.11), es exactamente $g_e (e_B, \theta_B) - g_e (e_B, \theta_A)$, lo que se obtiene de relajar la restricción de incentivos de θ_A.

Ejercicio 21 Mostrar que cuando λ crece, $\widehat{e}_B$ cae.

Ejercicio 22 Un economista quiere contratar a un asistente que es neutral al riesgo. Las funciones de utilidad del asistente pueden ser $U^G = w - e^2$ ó $U^B = w - 2e^2$, donde w es salario y e esfuerzo. La utilidad buena, G, es buena porque el agente no es haragán, mientras que la mala B es tal pues al agente le produce mucha desutilidad trabajar. La utilidad de reserva de ambos tipos de asistentes es 0 y la probabilidad de que un agente sea G es $q = \frac{2}{3}$. La función de utilidad del economista es $\pi (e, w) = 8e - w$.

Parte A. Suponga que el economista sabe el tipo de asistente que tiene. Un contrato para un tipo dado de asistente, es un salario y un nivel de esfuerzo. Diseñe el contrato óptimo para cada agente.

Parte B. Formule, sin resolver, el problema del economista cuando no sabe el tipo de asistente que tiene. Las variables de elección del economista son $\left(w^G, e^G\right)$ y $\left(w^B, e^B\right)$, los contratos que los G y B elegirán. Dato: hay cuatro restricciones.

Parte C. Ignore la restricción de participación para el G y la de incentivos para el B, y encuentre los contratos óptimos. Luego verifique que las dos restricciones ignoradas no están activas en la solución.

Ejercicio 23 Un principal quiere contratar a un agente, pero no sabe si es haragán o no. Al principal sólo le importa el esfuerzo del agente, pues le da ingresos $\pi(e) = e^{\frac{1}{2}}$; a eso le tiene que restar los sueldos pagados. Con probabilidad q el agente tiene motivación alta (tipo A) y su utilidad de sueldo s y esfuerzo e es $s - e$; con probabilidad $1 - q$ tiene baja motivación (B) y su utilidad es $s - 2e$. Las utilidades de reserva de los agentes son 0.

Parte A. Encuentre los contratos óptimos con información completa.

Parte B. Encuentre los contratos óptimos con información incompleta (quedarán como función de q). Verifique que se cumplen los supuestos del teórico, o verifique que se cumplen las restricciones que haya ignorado.

Ejercicio 24 Dos consumidores con ingresos de \$15 tienen utilidades $u_a(x, y) = 6\ln(x + 1) + y$ y $u_b(x, y) = 4\ln(x + 1) + y$, donde x son las millas voladas e y es el ingreso (no gastado en volar); la utilidad de reserva de los consumidores es 15 (consumir su ingreso). El costo del monopolista es $c(x) = x$.

Parte A. Asuma que el monopolista puede observar el tipo de consumidor. Un contrato es un par (p, x) donde p es la transferencia del consumidor al monopolista (no es el precio por milla) y x es el número de millas viajadas. Encuentre los contratos óptimos que ofrecería el monopolista si conociera el tipo de consumidor.
Parte B. Asuma que el monopolista no sabe los tipos de consumidores. Encuentre los contratos óptimos y los beneficios del monopolista cuando las proporciones de tipo a son $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ (le conviene resolver para un α, y después sustituir).
Parte C. Grafique la solución cuando la proporción de tipos a es $\frac{1}{2}$ en un par de ejes (x, y).

Ejercicio 25 (Tirole) Un monopolista sabe que hay dos tipos posibles de compradores: aquellos a los que les gusta mucho su producto, θ_2 y aquellos a los que no les gusta, θ_1, con $\theta_1 < \theta_2$. La probabilidad que un consumidor sea del tipo θ_1 es p. La utilidad de un consumidor de tipo θ que compra q unidades del producto y paga t pesos es $\theta v(q) - t$, donde

$$v(q) = \frac{1 - (1 - q)^2}{2}$$

Si un consumidor no compra el producto, obtiene un nivel de utilidad de reserva de 0. El costo de producir q unidades para el monopolista es cq, con $c < \theta_1 < \theta_2$.

Parte A. Escriba, y no resuelva, el problema de maximización del monopolista, cuando no puede distinguir entre los consumidores, y debe ofrecer pares (q_1, t_1) y (q_2, t_2) para que cada tipo de consumidor elija el que quiera (pista: hay 4 restricciones en el problema).

Parte B. Muestre que si la restricción de participación del tipo θ_1 se satisface para algún contrato (q_1, t_1), con $q_1 > 0$, entonces la del tipo θ_2 se cumple en (q_1, t_1) y en (q_2, t_2) (si se satisface la restricción de incentivos de θ_2). Esto quiere decir que cuando resuelva el problema de los contratos óptimos, podrá olvidarse de la restricción de participación de θ_2.

Parte C. Resuelva el problema del monopolista (de encontrar (q_1, t_1) y(q_2, t_2)) ignorando la restricción de participación de θ_2 y la de incentivos de θ_1. Pista: las dos restricciones restantes estarán activas en el óptimo.

Parte D. Verifique que las restricciones que no fueron usadas no están activas con los contratos encontrados en la Parte C.

Parte E. Ponga $\theta_2 = 4$, $\theta_1 = 3$, $c = 1$ y $p = \frac{1}{2}$. Grafique con q en el eje de las abcisas y t en el de las ordenadas: los contratos óptimos y las curvas de indiferencia de cada tipo, en los contratos óptimos.

Ejercicio 26 Suponga que hay dos tipos de persona en el mundo: los que precisan computadoras rápidas para cálculos, R, y los que no, N. La proporción de R en el mundo es λ. Los R valoran una computadora con coprocesador matemático en \$3000, y sin coprocesador en \$2000, mientras que los N las valoran \$2500 y \$2000 respectivamente. El costo de producir ambos tipos de computadoras es \$1000.

Un contrato en este mercado es un par (i, p_i), para $i = C, S$ (con y sin coprocesador). La única empresa productora de computadoras debe decidir el menú de contratos a ofrecer.

Parte A. Calcule los beneficios máximos que podría obtener la firma si produjera sólo computadoras C (con coprocesador).

Parte B. Calcule los beneficios máximos que podría obtener la firma si produjera ambos tipos de computadora.

Parte C. De qué depende que los beneficios de la Parte A sean mayores o menores que los de la Parte B. Explique.

Ejemplo 27 Un autor precisa que le traduzcan las páginas que escribe. Si le traducen n páginas, y le paga w al traductor, su beneficio es $\pi(n, w) = 40\sqrt{n} - w$. Por su parte, los traductores tienen una desutilidad de \$10 por hora de trabajar; si el traductor es rápido, cada página le lleva media hora; si es lento, le lleva 1 hora. La utilidad del trabajador si le pagan w y trabaja x horas es $w - 10x$, y su utilidad de reserva es 0.

Parte A. Resuelva el problema del autor, si conoce el tipo de traductor. Los contratos que ofrece son del tipo "te pago w y vos me traducís n páginas".
Parte B. Resuelva el problema del autor si no conoce el tipo de traductor, y la proporción de traductores rápidos es $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 28 General Foods es un monopolista que sabe que el mercado de Cereal Killer contiene dos tipos de consumidores. Los de tipo a tienen una utilidad, para cada calidad $z \in [1, 2]$ y precio p, $v_a(z, p) = 20z - p$, mientras que los de tipo b tienen utilidad $v_b(z, p) = 10z - p$. Hay N consumidores, y una fracción λ de los consumidores es de tipo a y el resto de b. El monopolista puede elegir la calidad que quiera, y el costo en cualquier caso es 0. La utilidad de reserva de los consumidores es 0.

Parte A. Encuentre la estrategia óptima para el monopolista si $\lambda < \frac{1}{2}$.
Parte B. Encuentre la estrategia óptima para el monopolista si $\lambda > \frac{1}{2}$ (recuerde que puede elegir venderle sólo a los altos, si le conviene).

Ejercicio 29 Este ejercicio se basa en las ideas de Mirrlees (1971) por lo que se ganó el premio Nobel. Este ejercicio se basa en la exposición de Bolton y Dewatripont. Un gobierno quiere maximizar el promedio ponderado de las utilidades de sus ciudadanos (que poseen diferentes habilidades) utilizando impuestos y transferencias. Antes de continuar, piense un segundo, y verá que con utilidades cóncavas, eso ya pone presión hacia la redistribución: para el hábil será más fácil generar dinero, pero cualquier peso adicional será disfrutado más por el menos hábil (por la utilidad marginal decreciente).

Suponga que el ingreso q es producido con esfuerzo e y talento θ, de tal forma que $q = \theta e$. Asuma que hay dos niveles posibles de θ, θ_L y $\theta_H > \theta_L$; la proporción de θ_L es p. Todos los individuos tienen la misma función de utilidad $u(q - t - f(e))$ donde q es el ingreso, t es el impuesto o transferencia se suma fija (lump sum) que el individuo paga (o recibe del gobierno), y $f(e)$ es el costo de realizar un esfuerzo e. Asumimos que u es tal que $u' > 0 \geq u''$ y f es creciente y convexa. La restricción presupuestal del gobierno es $pt_L + (1-p)t_H \geq 0$: por ejemplo, puede ponerle impuestos a los altos, y pasarle a los bajos, pero no puede hacer transferencias netas. Los individuos no tienen utilidad de reserva y el gobierno debe elegir contratos para cada tipo (t_L, e_L) y (t_H, e_H) para maximizar

$$pu(\theta_L e_L - t_L - f(e_L)) + (1-p)u(\theta_H e_H - t_H - f(e_H)). \tag{4.12}$$

Parte A. Suponga que $\theta_L = 1$ y $\theta_H = 2$, que $f(e) = \frac{e^2}{2}$ y que el gobierno puede observar los tipos de cada individuo. Encuentre los contratos óptimos (Pista: argumente que la restricción del gobierno estará activa; usando eso, elimine una de las variables de la función objetivo, y tome las condiciones de primer orden respecto a las tres variables restantes). Muestre que las utilidades de ambos tipos son iguales, y que hay redistribución: $t_H > t_L$.

Parte B. Si el gobierno si no puede observar el tipo del agente, ni su esfuerzo, pero sí su nivel de ingreso, le ofrece contratos (t_L, q_L) y (t_H, q_H) a los individuos (si tu ingreso es q_i tu transferencia será t_i). Pero en definitiva, si el tipo θ_i elige el contrato (t_i, q_i), el gobierno efectivamente sabe que $q_i = \theta_i e_i$, por lo que cada contrato (t_i, q_i) se corresponde con un contrato (t_i, e_i). La oración anterior es porque seguiremos hablando de contratos (t_i, e_i) aunque en realidad los observables son (t_i, q_i).

Encuentre el nivel de esfuerzo que debe realizar θ_L cuando elige el contrato (t_H, e_H) (es decir, cuando decide hacer un esfuerzo que arrojará un producto $\theta_H e_H$). De la misma manera, encuentre el esfuerzo que debe realizar θ_H cuando elige el contrato (t_L, e_L). (hacemos algo parecido en el Ejercicio 41 de Baron y Myerson).

Parte C. Escriba el problema que debe resolver el gobierno cuando no puede observar ni los tipos ni los esfuerzos de los agentes, pero sí sus niveles de ingreso.

Parte D. Resuelva el problema del gobierno cuando $p = \frac{1}{3}$ y $u(w) = \sqrt{w}$ (difícil).

Ejercicio 30 Screening Monopolístico. Suponga que hay dos tipos de consumidores $\theta_1 = 2$ y $\theta_2 = 4$. La proporción de gente con tipo θ_1 es $2/3$, y la utilidad de cada consumidor es $u(q, t \mid \theta) = \theta\sqrt{q} - t$, donde t es la transferencia total de dinero por comprar q unidades (si no compran nada su utilidad es 0). El costo marginal de la única firma de producir una unidad es 1.

Parte A. Encuentre el par de contratos (q_1, t_1) y (q_2, t_2) que maximizan la utilidad de la firma. Recuerde que típicamente se pueden ignorar dos restricciones (no dos cualesquiera!) resolver, y verificar que en el óptimo las restricciones ignoradas se satisfacen.

Parte B. Esta parte y las siguientes están destinadas a encontrar la tarifa en dos partes que es óptima para la firma. A veces por razones institucionales las firmas no pueden ofrecer sólo dos contratos, los contratos óptimos, y una tarifa en dos partes puede ser un buen sustituto. Una tarifa en dos partes es una transferencia entre el consumidor y la firma tal que la cantidad pagada es $t = A + pq$. Calcule las demandas de ambos tipos de consumidores cuando la tarifa es $A + pq$ (asumiendo que pueden comprar tanto como quieran). Calcule la utilidad como función de A y p (la "utilidad indirecta").

Parte C. Encuentre el precio p y la carga fija A que son óptimas si la firma decide que todos participen**.** Calcule los beneficios de la firma.

Parte D. Encuentre el precio p y la carga fija A que son óptimas si la firma decide que sólo el consumidor con valuación alta participe. Calcule los beneficios. Compárelos con los de la Parte C, y determine si la firma querrá que todos participen, o que sólo los altos participen. Luego, compare los beneficios (máximos, dependiendo de si participan todos o no) con aquellos de la Parte A.

El ejercicio anterior muestra una cosa peculiar. De la Parte A, uno puede dibujar en un gráfico con q en las abcisas y t en las ordenadas los dos contratos óptimos. Luego, uno puede trazar una recta por esos dos puntos, y decir "esta es mi tarifa en dos partes óptima" y "deducir" que con esa tarifa en dos partes no le puede ir peor que ofreciendo sólo los dos contratos encontrados en la Parte A. El problema con ese razonamiento es que en una tarifa en dos partes, el consumidor puede elegir la cantidad que desee, y con la tarifa en dos partes "inventada" con la recta, el monopolista fija p y A, y luego el consumidor elige cuánto quiere comprar. Eso típicamente arroja menos beneficios que cuando el monopolista "fuerza" al consumidor a elegir lo que el monopolista quiere.

El par de contratos óptimo es $(q_1, t_1) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ y $(q_1, t_1) = (4, 7)$. Encontramos la tarifa en dos partes "asociada" a estas canastas, encontrando la pendiente (la diferencia en el costo, dividido la diferencia en las cantidades), el aumento en el costo asociado a un aumento en la cantidad:

$$p = \frac{7-1}{4-\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$$

Luego,

$$t_2 = A + pq_2 \Leftrightarrow 7 = A + 4\frac{8}{5} \Leftrightarrow A = \frac{3}{5}.$$

(y por supuesto, $t_1 = A + pq_1$ se verifica). El problema, es que dado este precio, si los consumidores pueden elegir cualquier cantidad, el consumidor θ_1 elige $q_1 = \frac{25}{64}$ y el consumidor θ_2 elige $q_2 = \frac{25}{16}$ (y no $q_1 = 1/4$ y $q_2 = 4$). Estas compras le dan al monopolista

$$\frac{2}{3}(A + pq_1 - cq_1) + \frac{1}{3}(A + pq_2 - cq_2) = \frac{171}{160}.$$

Estos beneficios son menores que los del contrato óptimo (3/2) y menores que los beneficios de la tarifa en dos partes óptima (cuando ambos participan, que está asegurado que ambos participan, pues ya participaban en el contrato óptimo, y al dejarlos elegir, los consumidores mejoran aún más su utilidad).

Ejercicio 31 Hay tres tipos de trabajadores, que valoran en forma diferente el esfuerzo y el dinero. La mitad de la gente, tiene utilidad $u_1(w, e) = w - e^2$ cuando el sueldo es w y el esfuerzo e. La otra mitad se divide en partes iguales entre los que tienen utilidad $u_2(w, e) = w - 2e^2$ y aquellos con utilidad $u_3(w, e) = w - 3e^2$. El principal sólo puede elegir contratos de la forma $w = ax + b$, donde x es el nivel de producto (y tenemos $e = x$).

Parte A. Para a y b dados, ¿qué niveles de esfuerzo elegirá cada tipo de agente?
Parte B. Si el principal sólo puede ofrecer un contrato lineal (no uno para cada tipo), ¿qué contrato elegirá? (considere si quiere que todos participen, o sólo algunos)
Parte C. Si el principal pudiera ofrecer contratos de la forma (w, e), ¿le iría mejor o peor que en el caso de contratos lineales? Explique.

Parte D. Si hubiera sólo tipos 1 y 2 en iguales proporciones, y no pudiera observar el tipo de agente, y pudiera ofrecer contratos de la forma (w, e), ¿qué contratos ofrecería? (asuma que los agentes deben tener utilidades mayores o iguales que 0)

Ejercicio 32 Un monopolista enfrenta dos tipos distintos de consumidores: una proporción λ que valoran una calidad z de producto en $20z$ (los llamamos θ_a); una proporción $1-\lambda$ de consumidores, tipo θ_b, que la valoran en $10z$; si no compran, obtienen 0 de utilidad. El monopolista puede elegir cualquier calidad z del intervalo $[1, 2]$, y el costo de elegir cualquier calidad es 0.

Parte A. Asuma que el monopolista puede observar el tipo de consumidor, y cobrarle distintos precios por la misma calidad a los distintos consumidores. ¿Qué calidades elegirá, y qué precios cobrará?
Parte B. Asuma ahora que el monopolista no puede observar los tipos de consumidor. Determine, para cada λ, qué calidades y a qué precios venderá el monopolista, si decide atender a ambos tipos de consumidores (es decir, encuentre la estrategia óptima para el monopolista, cuando ofrece a ambos tipos, y muestre cómo cambia con λ). Pista: como siempre, elija el precio p_b a ser cobrado por la calidad z_b que se ofrecerá a los θ_b usando la restricción de participación de θ_b, y el precio p_a a ser cobrado por la calidad z_a de la de incentivos de θ_a; luego escriba los beneficios del monopolista como función de z_a y z_b; elija z_a y z_b para maximizar beneficios.
Parte C. Calcule los beneficios que obtendría el monopolista si no pudiera observar los tipos, pero decidiera vender sólo a los altos. Comparando esta parte con la anterior, determine la estrategia óptima para cada λ.

Ejercicio 33 Considere un monopolista que tiene la posibilidad de producir un producto de baja calidad (v_L) y otro de calidad alta (v_H), cada uno con costos marginales c_L y c_H respectivamente. Hay N consumidores, cada uno de los cuales obtiene una utilidad indirecta de $\theta v_j - p_j$ por comprar el producto de calidad $j = L, H$, donde p_j es el precio del bien. Los consumidores compran como máximo un producto. El parámetro θ refleja los gustos específicos del consumidor, y mide la disposición marginal a pagar por la calidad. El parámetro θ se distribuye uniforme en el intervalo $\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, y normalizamos de forma que $\overline{\theta} - \underline{\theta} = N$; asumimos $c_j \leq v_j \overline{\theta}$..

Parte A. Suponga que la empresa puede vender sólo un tipo de calidad. Derive los precios y cantidad que maximizan beneficios.
Parte B. Suponga que ahora la empresa puede vender ambas calidades. Dados los precios p_j, derive la demanda por ambas calidades. ¿Cuáles son las cantidades y los precios de equilibrio?
Parte C. Ahora suponga que $c_L = c_H = 0$. ¿Cuáles son los precios y cantidades de equilibrio ahora?

Ejemplo 34 Ventas Atadas. Un monopolista vende un producto A (una sola unidad) a los consumidores, que luego comprarán varias unidades de B. Hay dos tipos de consumidores, los de baja disposición a pagar v_b y los de alta disposición a pagar v_a, con $v_a \geq v_b$. La utilidad del consumidor (de tipo $v = v_a$ o v_b) de una unidad de A, q de B y pagar t pesos es

$$U(q, t; v) = q - \frac{q^2}{2v} - t.$$

Consumir los bienes por separado da 0 utilidad (digamos la fotocopiadora y el toner). La proporción de consumidores de tipo v_b es λ, y $1-\lambda$ son del tipo v_a. La firma es monopolista en la producción de A, pero enfrenta competencia en el mercado de B. Los costos de producir A son c_A y los costos marginales de producir B son $c_B < 1$. No hay costos fijos, ni hundidos. Al final, asumiremos que $c_A = c_B = 0$, $v_a = 2$, $v_b = 1$, $\lambda = 11/20$. Pero mientas haremos todo con los parámetros generales.

Ventas no atadas, todos compran, hay Bertrand en el mercado de B ($p_B = c_B$). Dados los precios, el consumidor elige q para maximizar su utilidad:

$$\frac{dU}{dq} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\left(q - \frac{q^2}{2v} - p_A - p_B q\right)}{dq} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{v}\left(q - v + vp_B\right) = 0 \Leftrightarrow q^* = v\left(1 - p_B\right).$$

El consumidor comprará sólo si su bienestar es positivo, o

$$\begin{aligned} q - \frac{q^2}{2v} - p_A - p_B q &\geq 0 \Leftrightarrow v\left(1-p_B\right) - \frac{v^2\left(1-p_B\right)^2}{2v} - p_A - p_B v\left(1-p_B\right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ v\left(1-p_B\right)^2 - \frac{v\left(1-p_B\right)^2}{2} - p_A &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{v\left(1-p_B\right)^2}{2} - p_A \geq 0 \Leftrightarrow p_A^n = \frac{v_b\left(1-c_B\right)^2}{2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

(pues hemos asumido que todos los compradores compran, y por eso hemos puesto v_b y no v_a). Por supuesto, los consumidores de baja disposición a pagar tendrán un excedente de 0, pero de la ecuación (4.13) sabemos que la utilidad de los consumidores altos es

$$E_a^n = \frac{v_a\left(1-c_B\right)^2}{2} - \frac{v_b\left(1-c_B\right)^2}{2} = \frac{\left(v_a - v_b\right)\left(1-c_B\right)^2}{2}.$$

Como hay competencia en el bien B, los beneficios del productor son sus beneficios por la venta del bien A : $\pi^n = \frac{v_b(1-c_B)^2}{2} - c_A$. El excedente total será entonces

$$W^n = (1-\lambda)\frac{\left(v_a - v_b\right)\left(1-c_B\right)^2}{2} + \frac{v_b\left(1-c_B\right)^2}{2} - c_A = \frac{\left(\left(1-\lambda\right)v_a + \lambda v_b\right)\left(1-c_B\right)^2}{2} - c_A$$

Dados los supuestos que hemos hecho sobre los parámetros, esto se reduce a $W^n = \frac{2-\lambda}{8} - c_A$.

Ventas no atadas, sólo los altos compran. Investigamos ahora la posibilidad que al monopolista le sirva venderle sólo a los de alta valuación. Dado $p_B = c_B$ los consumidores altos elegirán $q^* = v_a\left(1-c_B\right)$, luego, el monopolista fijará el precio que le extraiga todo el excedente a los altos:

$$p_A^{n.a} = \frac{v_a\left(1-c_B\right)^2}{2}.$$

En este caso, el bienestar de los consumidores es 0, y el de los productores es el bienestar total, sus beneficios por la venta de A :

$$W^{n.a} = \pi^{n.a} = (1-\lambda)\left(\frac{v_a\left(1-c_B\right)^2}{2} - c_A\right) = (1-\lambda)\left(\frac{1}{4} - c_A\right).$$

Para saber cuál de las dos estrategias elegirá el monopolista (vender a todos, o sólo a los de valuación alta) debemos comparar π^n con $\pi^{n.a}$:

$$\pi^n \geq \pi^{n.a} \Leftrightarrow \frac{v_b\left(1-c_B\right)^2}{2} - c_A \geq (1-\lambda)\left(\frac{v_a\left(1-c_B\right)^2}{2} - c_A\right) \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\left(v_a - v_b\right)\left(1-c_B\right)^2}{v_a\left(1-c_B\right)^2 - 2c_A}$$

Dados los supuestos sobre los parámetros, esto se reduce a $\lambda \geq \frac{1}{2-8c_A}$. También es relevante calcular la diferencia en el bienestar de la sociedad:

$$W^n - W^{n.a} = \frac{2-\lambda}{8} - c_A - (1-\lambda)\left(\frac{1}{4} - c_A\right) = \frac{1}{8}\lambda\left(1 - 8c_A\right)$$

Ventas atadas. Supongamos ahora que el monopolista decide atar sus ventas de A y B, y supongamos que puede obligar al consumidor a comprarle las unidades de B (mediante un contrato, o algo así). Como dado p_B, que ya no es c_B, la demanda es $q^* = v\left(1-p_B\right)$, los beneficios de la firma son, para $\overline{v} = \lambda v_b + (1-\lambda)v_a$

$$\pi = \left(p_B - c_B\right)\left(\lambda v_b\left(1-p_B\right) + (1-\lambda)v_a\left(1-p_B\right)\right) + p_A - c_A = \overline{v}\left(p_B - c_B\right)\left(1-p_B\right) + p_A - c_A.$$

Para el precio p_A sabemos que se fijará para dejar al bajo indiferente entre participar y no participar, por lo que tenemos $p_A^t = \frac{v_b(1-p_B)^2}{2}$, y los beneficios quedan

$$\begin{aligned}\pi &= \overline{v}\,(p_B - c_B)\,(1-p_B) + \frac{v_b\,(1-p_B)^2}{2} - c_A \Rightarrow p_B = \frac{(\overline{v}\,(1+c_B) - v_b)}{2\overline{v} - v_b} > c_B \Rightarrow \\ \pi &= \frac{1}{2}\frac{\overline{v}^2\,(1-c_B)^2}{2\overline{v} - v_b} - c_A\end{aligned}$$

Por su parte, el excedente de los altos y el total son

$$\begin{aligned}E^t &= \frac{(v_a - v_b)\,(1-p_B)^2}{2} = \frac{(v_a - v_b)\left(1 - \frac{(\overline{v}(1+c_B) - v_b)}{2\overline{v} - v_b}\right)^2}{2} = \frac{\overline{v}^2\,(v_a - v_b)}{2}\frac{(c_B - 1)^2}{(2\overline{v} - v_b)^2} \\ W^t &= (1-\lambda)\,\frac{\overline{v}^2\,(v_a - v_b)}{2\,(2\overline{v} - v_b)^2}\,(c_B - 1)^2 + \frac{\overline{v}^2\,(1-c_B)^2}{2\,(2\overline{v} - v_b)} - c_A = \left[(1-\lambda)\,\frac{\overline{v}^2\,(v_a - v_b)}{(2\overline{v} - v_b)^2} + \frac{\overline{v}^2}{2\overline{v} - v_b}\right]\frac{(1-c_B)^2}{2} - c_A\end{aligned}$$

Con esto, uno puede comparar el bienestar y los beneficios en los 3 equilibrios (no atadas, con atención a todos los consumidores, o sólo a los altos, y atadas). Cuando se atiende a todos los consumidores (sin atar) los beneficios son mayores con las ventas atadas (porque el monopolista tiene disponible una estrategia útil, como la de discriminar precios), pero el bienestar total es menor. La razón es que el beneficio de los consumidores (obviamente) es menor: cuando no hay ventas atadas, el precio de B es su costo marginal, y la gente compra todas las unidades que "deberían" producirse (con ventas atadas, p_B^t es mayor que c_B, y eso reduce las ventas y el bienestar).

Formalmente,

$$\pi^t - \pi^n = \frac{1}{2}\frac{\overline{v}^2\,(1-c_B)^2}{2\overline{v} - v_b} - c_A - \left(\frac{v_b\,(1-c_B)^2}{2} - c_A\right) = \frac{1}{2}\,(1-c_B)^2\,\frac{(\overline{v} - v_b)^2}{2\overline{v} - v_b} > 0.$$

Cuando sin atar, sólo se atiende a los altos, las ventas atadas pueden incrementar el bienestar. La razón es que sin ventas atadas, el excedente del consumidor es 0, mientras que es positivo con ventas atadas. Por lo tanto, siempre que las ventas atadas sean más rentables que las no atadas (sirviendo sólo a los altos), el bienestar será mayor.

	Solo altos	Todos	Atadas
π	$(1-\lambda)\left(\frac{v_a(1-c_B)^2}{2} - c_A\right)$	$\frac{v_b(1-c_B)^2}{2} - c_A$	$\frac{1}{2}\frac{\overline{v}^2(1-c_B)^2}{2\overline{v} - v_b} - c_A$
W	$(1-\lambda)\left(\frac{v_a(1-c_B)^2}{2} - c_A\right)$	$\frac{((1-\lambda)v_a + \lambda v_b)(1-c_B)^2}{2} - c_A$	$(1-\lambda)\,\frac{\overline{v}^2(v_a - v_b)}{2}\frac{(c_B-1)^2}{(2\overline{v} - v_b)^2} + \frac{\overline{v}^2(1-c_B)^2}{2(2\overline{v} - v_b)} - c_A$

Ejemplo 35 Esquiadores entusiastas traen su propio equipo a la montaña, mientras que los casuales no y alquilan. Los entusiastas están dispuestos a pagar hasta v_e por un pase diario a los medios, mientras que los casuales $v_c + c$ con $v_e > v_c$, y c el costo de alquiler de equipos (esquíes, botas, etc.). El problema de screening es que los que venden los pases no pueden distinguir a los tipos de esquiadores (simplificamos y asumimos que el costo de un pase para un medio de elevación es 0).

Aunque en una montaña dada hay un monopolista en los medios, debe competir con los otros que alquilan equipos de esquí, que cobran p por los alquileres. Como hay Bertrand, tenemos que $p = c$.

Encontraremos ahora los beneficios máximos para la firma. (1) si ofrece sólo medios a v_e, sólo los entusiastas compran; (2) si cobra v_c, les regala utilidad a los entusiastas; sin embargo, (3) si cobra v_e por los medios y alquila equipos por $p - (v_e - v_c)$, les extrae todo el excedente a los casuales.

Si la proporción de entusiastas es λ, los beneficios de (1) son λv_e; los de (2), v_c y los de (3) son

$$\lambda v_e + (1-\lambda)\left(v_e + \underbrace{p-(v_e-v_c)}_{\text{precio alquiler esquíes}} - \underbrace{p}_{\text{costo alquiler esquíes}}\right) = \lambda v_e + (1-\lambda)\, v_c$$

y extrae todo el excedente.

In that case enthusiastic skiers pay their reservation price for skiing, while casual skiers pay their reservation price for the package of skiing and renting, and after cross subsidization from the ticket office, the resort breaks even on its rental operation.

Ejercicio 36 Consider a principal (P) who wants to hire a risk neutral agent (A) for a job. In exchange for the effort e made by the agent, which is observed by P, the agent would receive a wage w. Effort level e generates a revenue x(e) = e1=2 to the principal. This agent can be of two types: either A with probability q, or B with probability $1-q$. Agents' preferences over certain lotteries are given UA (w; e) = $w-e$ and UB (w; e) = $w-2e$ (a) Find the contract(s) offered by P if she can distinguish the type of the agent. Comment and discuss why she will not offer the same contracts in case of asymmetric information.

cA = (wA; eA) = (1=4; 1=4) ; cB = (1=8; 1=16)

UA (cA) < UA (cB) ;UB (cA) < UB (cB) Therefore, both agents prefer cB.

(b) Find the contract(s) ovvered by P in the case of adverse selection and explain them. How do the contracts vary as a function of q? (Hint: (i) there is a redundant constraint, and (ii) another one which can not directly showed whether it is binding or not).

another example

We first consider a geographically isolated retail market monopolized by a firm selling kitchen and laundry detergents or bathroom toiletries to two types of consumers, large volume commercial buyers and small volume households.

The commercial demanders are willing to search over a wider area for suppliers, and consider a greater range of close substitutes (paper towels versus blow dry).

Households have less incentive to search for these low cost items, rarely consider substitute products, and limited space to store these items; household rental rates for inventory storage are typically greater than commercial property rates (per cubic foot).

Suppose the reservation value of a commercial demander is vc and the reservation price of a household is vh where vc < vh.

We also assume a commercial demander would buy k units if the price is less than its reservation value, whereas a household would only buy one unit.

Commercial and household demanders are distributed in proportion p and (1 – p) respectively throughout the local market.

Unit (wholesale) costs for the monopolist are c, where c < vc.

If the firm adopts a uniform pricing policy, then the maximum monopoly profits are found by charging a high price and only serving households, or charging a low price to capture all the local demand:

$$\max\{p(vc - c) + (1 - p)k(vc - c),\ p(vh - c)\ \}$$

If the firm charges a high price for single units and a discount price vc for bulk orders of k units then the maximum monopoly profits are

$$p(vh - c) + (1 - p)k(vc - c)$$

Comparing the net profits of the two, we see that discounting bulk orders is profitable.

Ejercicio 37 Este ejercicio de screening monopolístico es muy parecido (pero no idéntico al de clase). Los resultados de las notas pueden no aplicarse. Un empresario quiere contratar a un trabajador, para lo cual debe ofrecer menúes de contratos (w, e). La utilidad del trabajador es $u(w, e, \theta) = w - \theta e^2$ para $\theta = 1, 2$ (al $\theta = 2$ lo llamamos haragán). La utilidad de reserva del trabajador es 0 y la probabilidad de cada tipo es $1/2$. El empresario valora un contrato (w, e) en $e - w$.

Parte A. Encuentre los contratos óptimos que ofrecerá el empresario para el caso de información completa, y calcule los beneficios. Encuentre los contratos óptimos con información asimétrica y calcule los beneficios. Compare los esfuerzos y las utilidades de los dos tipos de agente con y sin información asimétrica.

Parte B. Suponga ahora que hay información asimétrica y que el empresario no puede contratar haraganes. ¿Cuál es el contrato óptimo? ¿cuánto son los beneficios del principal? ¿Había alguna forma de saber, sin hacer las cuentas, que eran menores que los de la Parte A, con información asimétrica?

Ejercicio 38 Este ejercicio de screening monopolístico es muy parecido (pero no idéntico al de clase). Los resultados de las notas pueden no aplicarse, por lo que debe justificar por qué hace cada cosa. Un empresario quiere contratar a un trabajador, para lo cual debe ofrecer menúes de contratos (w, e), con $w \in \mathbf{R}$ y $e \geq 0$. La utilidad del trabajador es $u(w, e, \theta) = w - ke - \theta e^2$ para $k \geq 0$ y $\theta = 1, 2$. La utilidad de reserva del trabajador es 0 y la probabilidad de cada tipo es $1/2$. El empresario valora un contrato (w, e) en $e - w$.

Parte A. Encuentre los contratos óptimos que ofrecerá el empresario para el caso de información completa, y calcule los beneficios. Debe considerar dos casos, que dependen del valor de k.

Parte B. Encuentre los contratos óptimos con información asimétrica y calcule los beneficios. Debe considerar dos casos, que dependen del valor de k.

Ejercicio 39 Medianería como screening. Un estanciero tiene dos campos para arrendar y se le presentan dos arrendatarios potenciales, con productividades baja, Q_b, y alta, $Q_a > Q_b$, pero no puede distinguirlos (en cada caso Q es el valor de la producción, y no hay costos de generar esa producción). La utilidad de reserva de ambos tipos de arrendatarios es $\overline{u} < Q_b$. El estanciero puede ofrecer dos tipos de contrato: uno (de medianería) donde el arrendatario se queda con una porción α de lo producido (y el estanciero con una proporción $1 - \alpha$), y otro (un arrendamiento) donde el arrendatario paga una cantidad fija R.

Parte A. Encuentre los contratos de información completa (no importa cuál elija resolver, si el de medianería o el de arrendamiento, la solución va a ser la misma)

Parte B. Hay un contrato de arrendamiento de pooling óptimo, y un contrato de medianería de pooling óptimo. Calcule ambos, y elija el contrato de pooling óptimo.

Parte C. Encuentre los contratos con screening con información completa donde al tipo de productividad alta se le ofrece un arrendamiento y al de baja, un contrato de medianería.

Parte D. Encuentre los contratos con screening con información completa donde al tipo de productividad baja se le ofrece un arrendamiento y al de alta, un contrato de medianería.

Parte E. Encuentre los contratos con screening con información incompleta donde al tipo de productividad alta se le ofrece un arrendamiento y al de baja, un contrato de medianería. Esta parte es rara: debe mostrar

que a menos que $R = 0$ y $\alpha = 1$, no se cumplen las dos restricciones de incentivos. Entonces, solamente es posible este contrato (que le da beneficio 0 al estanciero).

Parte F. Encuentre los contratos con screening con información incompleta donde al tipo de productividad baja se le ofrece un arrendamiento y al de alta, un contrato de medianería.

Parte G. Contrato óptimo con información asimétrica. Compare los beneficios para el estanciero de la Parte B (pooling óptimo; aunque no se incluyen las restricciones de incentivos, la Parte B es un problema de información asimétrica), de la Parte E (screening óptimo con arrendamiento para el bajo) y de la Parte F (screening óptimo con medianería para el bajo).

Ejercicio 1. Una firma va a contratar a un trabajador para producir un bien x. La firma no sabe qué tipo de trabajador es el que enfrenta cuando ofrece sus contratos. El trabajador puede ser tipo θ_A o θ_B, y difieren en la probabilidad de que salga un nivel de producto de $x = 10$: para el θ_A es $p_A = \frac{3}{4}$ y para el θ_B es $p_B = \frac{1}{2}$; si no sale $x = 10$, sale $x = 5$. Si la firma paga s y se produce x, los beneficios de la firma son $x - s$. Las preferencias de los dos tipos de trabajadores son $u(s) = \sqrt{s}$, pero sus utilidades de reserva son distintas $\overline{u}_A = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{10}}{4}$ y $\overline{u}_B = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}$ (esto es distinto de lo que vimos en las notas, por lo que no se puede resolver igual que siempre; tengan cuidado). La firma ofrece contratos de la forma (s_5, s_{10}) que corresponden a los pagos que hace cuando ocurren los niveles de producto 5 y 10 respectivamente.
Parte A (15 puntos). Encuentre los contratos que ofrecería la firma si pudiera observar el tipo de trabajador.
Parte B (35 puntos). Encuentre los contratos de información incompleta cuando la proporción de cada tipo de trabajador es $\frac{1}{2}$ (recuerde que ya no puede asumir que la restricción de participación de θ_A no estará activa; y si ignora alguna restricción, verifique que se cumple).

Ejercicio 40 Una empresa turística tiene que contratar a un trabajador para atender al público. Las ventas pueden ser de \$1, \$10 o \$300, donde \$1 corresponde a una temporada pésima, y \$300 a una temporada top. El esfuerzo del trabajador no afecta las probabilidades relativas de \$1 o \$300 (digamos que un esfuerzo alto incluye un elemento de riesgo que aumenta las probabilidades de ambos extremos). Con esfuerzo alto $e_a = 1$, las probabilidades de $1, 10$ y 300 son $\frac{1}{3}$ cada una, mientras que si el es bajo $e_b = 0$, las probabilidades de 1 y 300 son $\frac{1}{4}$. La función de utilidad del trabajador es $\sqrt{s} - e$ donde s es el sueldo y e el esfuerzo; su utilidad de reserva es $\overline{u} = 4$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada esfuerzo, y el contrato que elegirá el principal.
Parte B. Repita la Parte A, pero con $\overline{u} = 0$

Para el próximo ejercicio, una pequeña introducción, del informe del comité Nobel cuando le dieron el premio a Jean Tirole en el 2014, para que vean la importancia de lo que van a hacer.

> **Towards a mechanism-design approach** Under realistic assumptions about the government's objectives and informational asymmetries, the regulator must thus balance the efficiency of the regulated firm against the social value of extracting the firm's rents. In 1982, David Baron and 2007 Economics Laureate Roger Myerson studied this problem without imposing any *ad hoc* restrictions on the regulatory scheme. This initiated the modern mechanism-design approach to regulation. However, Baron and Myerson (1982) assumed that the regulated firm's cost function is given and immutable. This assumption rules out production inefficiencies and cost overruns, problems that are central in many regulated industries. Sappington (1982) took an important

step forward. He endogenized the cost function by assuming the regulated firm can take unobserved actions to reduce its production cost. However, by restricting the regulator to offering linear contracts, Sappington (1982) left an important question unanswered: what is the optimal shape of the regulatory contract?

Ejercicio 41 Baron Myerson 1982. En este caso, el que hace screening es un regulador que tiene que decidir a qué precio podrá vender un monopolista (imaginen la Ursec regulando el precio que puede cobrar Antel por las llamadas). El asunto es que el monopolista conoce su producto, y su función de costos. El estado puede ser a o b (alto o bajo), y eso determina cuanto valoran los consumidores el bien, pero también la función de beneficios de la empresa (porque, por ejemplo, afecta los costos producir un bien mejor). El regulador sólo sabe que el estado b ocurre con probabilidad $\varphi \in (0,1)$. El regulador le pregunta a la firma cuál es el estado, y la firma puede decir lo que tenga ganas; pero para cualquier estado $i = a, b$ que la firma anuncie el regulador determinará el precio p_i y una transferencia T_i de los consumidores a la firma (digamos que es como una tarifa en dos partes que fija el regulador; dice el precio es p, pero si compran cualquier cantidad, tienen que pagar T). El excedente neto del consumidor es $S_i(p,T) = v_i(p) - T$ (típicamente, v_i sería la integral debajo de la demanda y por encima del precio; es cuánto excedente obtienen los consumidores). La renta de las firmas es $R_i(p,T) = \pi_i(p) + T$ (esto no hay que usarlo en este ejercicio, pero típicamente esto sería $\pi_i(p) = pQ_i(p) - c_i(Q_i(p))$ donde $Q_i(p)$ es la demanda para el precio p en el estado i).

Un esquema regulatorio en este caso es dos pares (p_a, T_a) y (p_b, T_b) tal que: la firma elige el par (p_i, T_i) en el estado i (con $i = a, b$), esto es la compatibilidad de incentivos; la firma obtiene una renta mayor o igual que 0 en cada estado (esto es participación). El objetivo del regulador es maximizar el valor esperado de $S + \alpha R$ para algún $\alpha \in [0,1)$.

Parte A. Escriba el problema del regulador (las variables de elección, función objetivo, y las restricciones).

Parte B. Sea $R_i = \pi_i(p_i) + T_i$ la renta que obtendría la firma en el estado i, si reportara i. Muestre que podemos representar el problema regulatorio en vez de en términos de pares (p,T), en términos de pares (p,R) en los cuales el regulador determina un precio, y una renta a ser obtenida por la firma. Es decir, muestre que para cada equema regulatorio (p_a, T_a) y (p_b, T_b) existen dos pares (p_a, R_a) y (p_b, R_b) que arrojan la misma utilidad para el regulador. Escriba el problema del regulador en función de estas nuevas variables. A partir de ahora nos olvidamos de T y trabajamos sólo con p y R.

Parte C. Muestre que para cualquier esquema regulatorio $(p_i, R_i)_{i=a,b}$ la función objetivo del regulador se puede escribir como $w_i(p_i) - (1-\alpha) R_i$, donde $w_i(p) = v_i(p) + \pi_i(p)$ es el excedente total en el estado i.

Parte D. Usando $\Delta^\pi(p) \equiv \pi_a(p) - \pi_b(p)$ escriba las restricciones de participación y de incentivos para cada estado.

Parte E. Defina $p_i^* = \arg\max w_i(p)$. Determine qué p y qué R elegiría el regulador si supiera el estado (o, lo que es lo mismo, resuelva el problema sin información asimétrica)

Parte F. Muestre que si hay información asimétrica los contratos de información completa se pueden implementar si y sólo si

$$\Delta^\pi(p_a^*) \geq 0 \geq \Delta^\pi(p_b^*) \tag{4.14}$$

(hay que hacer el si, y el sólo si).

Parte G. Decimos que un par de precios p_a, p_b es implementable si existe un par de rentas R_a, R_b tal que el menú $(p_i, R_i)_{i=a,b}$ satisface las restricciones de participación e incentivos. Muestre que un par de precios p_a, p_b es implementable si y sólo si

$$\Delta^{\pi}(p_a) \geq \Delta^{\pi}(p_b).$$

Ejercicio 42 Aplicación de Baron Myerson. El marco es igual que en el Ejercicio 41, con $\alpha = 1$. Asuma que el estado sólo afecta el estado de la demanda, y por tanto sólo afecta $v_i(p)$. Concretamente, en el estado $i = a, b$ la demanda es $Q_i(p)$. Asuma también que la función de costos de la empresa regulada es convexa, de tal manera que $c''(q) \geq 0$. En este ejercicio mostraremos que los contratos de información completa son implementables. Para eso procederemos en tres pasos.

Parte A. Muestre que los contratos de información completa se pueden implementar (cuando hay información asimétrica) si y sólo si

$$\pi_i(p_i) \geq \pi_j(p_i) \text{ para } i, j \in \{a, b\}.$$

Parte B. Muestre que debido a la convexidad de c, para todo q_1 y q_2,

$$c(q_2) \geq c(q_1) + c'(q_1)(q_2 - q_1).$$

Parte C. Muestre que $p_i^* = c'(Q_i(p_i^*))$.

Parte D. Use las Partes B y C para mostrar que la condición de la Parte A siempre se cumple.

Ejercicio 43 Un regulador quiere minimizar el precio cobrado por un monopolio natural, que es el único que conoce su costo de producir. El monopolista produce un bien, cuyo costo es $c = t - e$, donde: sólo se observa c, no se pueden observar ni t (que es el tipo del monopolista, $t \in \{t_a, t_b\}$, $\Delta t = t_a - t_b > 0$) ni $e \geq 0$, el esfuerzo realizado por el monopolista para reducir los costos. Para el monopolista, un esfuerzo de e, tiene un costo de $e^2/2$. El monopolista es de tipo bajo, t_b, con probabilidad β. El regulador desea minimizar el pago al monopolista, $P = s + c$, donde s es un subsidio fijo y c es el costo, por la producción del bien; sin embargo, debe asegurarle un beneficio de al menos 0 al monopolista. El monopolista maximiza sus beneficios $P - c - \frac{e^2}{2}$.

Parte A. Asuma que el regulador puede observar t y encuentre el nivel óptimo de esfuerzo y el subsidio asociado.

Parte B. Asuma ahora que el regulador no puede observar ni t ni e. Sea (s_i, e_i) el contrato aceptado en equilibrio por el tipo $i = a, b$. En el contrato (s, c) el monopolista debe proveer el bien al costo c (que es observable) y recibe como compensación $s + c$. Sea e_{ij} el nivel de esfuerzo que debe realizar un agente de tipo i, que elige el contrato j, para $i, j \in \{a, b\}$. Asumimos que esos niveles son positivos. Muestre que $e_{ba} = e_{aa} - \Delta t$, y que $e_{ab} = e_{bb} + \Delta t$.

Parte C. Escriba primero las restricciones de participación (beneficio mayor o igual que 0) e incentivos de ambos tipos. Luego, escriba cada una de ellas como función solamente de las variables s_i, s_j, e_{ii} y e_{jj} (y del parámetro Δt) para $i, j = a, b$.

Parte D. Encuentre el contrato óptimo; si ignora restricciones en el proceso de solución, recuerde verificarlas al final.

Ejercicio 44 Un empresario quiere contratar a un trabajador para que trabaje a cambio de un sueldo; el esfuerzo es observable, y un esfuerzo de e genera unos ingresos de $x(e) = 24e$ para el empresario. El agente puede ser de dos tipos: A, con utilidad $U_A(w, e) = w - 3e^2$ con probabilidad q, o B con utilidad $U_B(w, e) = w - 2e^2$ con probabilidad $1 - q$. Ambos tipos tienen una utilidad de reserva de $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre los contratos que ofrecerá el empresario si puede observar el tipo de agente. ¿Podrían ser esos contratos también los que ofrecería en caso de información asimétrica?
Parte B. Encuentre los contratos que ofrecerá el empresario si no puede observar los tipos. ¿Cómo varían los contratos cuando aumenta q?
Parte C. ¿Cuáles serán los contratos de equilibrio si hay dos empresarios en vez de uno?

Ejercicio 45 Hay dos tipos de agente. Los A reciben riqueza 36 con probabilidad $\frac{1}{2}$, y 64 en otro caso. Los B reciben 36 con probabilidad $\frac{3}{4}$, y 64 en otro caso. La utilidad de ambos agentes es $\sqrt{w}$ si tienen riqueza w.

Una compañía de seguros neutral al riesgo y monopólica puede asegurarles el ingreso: les ofrece contratos (w_b, w_a) que son las riquezas que reciben los agentes en caso que su ingreso sea bajo o alto (y la compañía se queda con la riqueza que habría tenido el agente).

Parte A. Si se puede observar el tipo de agente, ¿qué contratos ofrecerá la compañía? (los contratos son riquezas que ofrecerá la empresa en caso que la riqueza sea 36, o 64)
Parte B. Si no se puede observar el tipo de agente, ¿qué contratos ofrecerá la compañía?
Parte C. Si hay más de una compañía de seguros, ¿cuál es el único candidato a equilibrio? ¿Es un equilibrio?

Ejercicio 46 Un principal desea maximizar $\pi = e - w$, y puede elegir contratos para ofrecer de la forma $w = ae + b$ donde e es el esfuerzo observable. Hay tres tipos de agente, $j = 1, 2, 3$ que tienen utilidades $u_j = w - je^2$ (ej, $u_2 = w - 2e^2$). La probabilidad de un agente 1 es $\frac{1}{2}$ y la de los otros dos $\frac{1}{4}$.

Parte A. Encuentre el contrato que elegirá cada tipo de agente (enfrentan la curva de salarios $ae + b$, y al elegir un e eligen el salario que le pagarán) como función de a y b.
Parte B. Encuentre el a y el b que querrá elegir el principal (los números no son lindos, especialmente el de b).

Ejercicio 47 Un dueño neutral al riesgo ofrece contratos a dos tipos de agentes para producir un bien x. La firma no sabe en principio el tipo de trabajador (en la Parte A lo sabrá, luego no). Un trabajador θ_B produce $x = 5$ y $x = 10$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada uno; un trabajador tipo θ_A produce $x = 10$ con probabilidad $\frac{3}{4}$. La firma tiene beneficios $x - w$, donde w es el salario, y el trabajador tiene una utilidad de $\sqrt{w}$. Las utilidades de reserva son distintas: $\overline{u}_B = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ y $\overline{u}_A = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{10}$.

Parte A. Encuentre el contrato de información completa.

Parte B. Encuentre los contratos que ofrecerá el dueño cuando no puede observar el tipo de agente y hay una proporción de $\frac{1}{2}$ de cada tipo de agente. Tenga cuidado: las utilidades de reserva no son iguales, y no tiene por qué aplicarse lo visto en clase.

Screening: Soluciones

Ejercicio 7. El contrato de equilibrio para el bajo es $(w_B, t_B) = (\theta_B, 0) = (1, 0)$, que le da una utilidad de $u(w_B, t_B, \theta_B) = 1$. Para que el contrato de equilibrio $(w_A, t_A) = (\theta_A, t_A)$ del alto lo deje indiferente (al bajo), se debe cumplir $1 = \theta_A - t_A^2 \Leftrightarrow t_A = 1$. La utilidad que obtiene el alto en equilibrio es $u(w_A, t_A, \theta_A) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Para que no exista equilibrio, se debe cumplir que $p\theta_A + (1-p)\theta_B$ sea mayor que el w que hace que el alto sea indiferente entre (w_A, t_A) y $(w, 0)$. Es decir, para w tal que $w - \frac{0}{2} = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow w = \frac{3}{2}$ debemos tener $p\theta_A + (1-p)\theta_B \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2} \equiv p^*$.

Ejercicio 8.A. Para el bajo, $t_B = 0$ y $w_B = 2$. Eso le da una utilidad de 2, y con $w_A = 6$, el bajo obtiene una utilidad de 2 con $t_A = 2$.

8.B. Con el contrato $(w_A, t_A) = (6, 2)$, el alto obtiene una utilidad de $\frac{14}{3}$, por lo que el alto es indiferente entre ese contrato y uno con $t = 0$ sólo si $w = \frac{14}{3}$. El p que hace que $p6 + (1-p)2 = \frac{14}{3}$, es $p^* = \frac{2}{3}$. Si p es menor estricto que 1 y mayor estricto que $\frac{2}{3}$, no hay equilibrio. Pero si $p = 1$, hay un equilibrio porque no hay información asimétrica: el único equilibrio es con $w = 6$ y $t = 0$. Para los $p \leq \frac{2}{3}$ el equilibrio es el de la Parte A.

Ejercicio 9. Este ejercicio está basado en el artículo de Rothschild y Stiglitz mencionado en la introducción. Vale la pena consultar el artículo, porque está muy bien escrito y debería convencerlos de porqué el tema de screening es importante. Si lo leen, una diferencia relevante entre el artículo y la forma como está presentado en estas notas, es que ellos asumen que hay libre entrada de firmas al mercado de seguros (no como estas notas que asumen que hay sólo dos). Cada forma de hacerlo tiene sus pro y sus contras, pero formalmente, me parece a mí, es más claro de esta forma.

9.A. Cada contrato (M, R) genera una riqueza $W - M$ si no hay accidente, y una riqueza $W - M - L + R$ si hay accidente. Es decir,

$$(w_a, w_n) = (W - M - L + R, W - M).$$

Para ver la dirección opuesta, notamos que dado un contrato (w_a, w_n), podemos deducir que $M = W - w_n$ y $R = w_a - w_n + L$. Es decir,

$$(M, R) = (W - w_n, w_a - w_n + L). \tag{4.15}$$

9.B. Notamos primero que en equilibrio cada firma obtiene beneficios 0. Supongamos que no es así, que los beneficios agregados son $\pi > 0$, y llamemos $\left\{\left(w_a^i, w_n^i\right)\right\}_{i=1}^n$ a los contratos (1 a n) aceptados por los individuos en equilibrio. Esos contratos dan niveles de utilidad $\left(u_a^i, u_n^i\right)$ al individuo que los acepta (siempre asumimos que la firma conoce las funciones de utilidad, por lo que para cada contrato, el vector $\left(u_a^i, u_n^i\right)$ es conocido). En ese caso, la firma que está obteniendo débilmente menos que $\pi/2$ podría ofrecer, para ε pequeño, contratos que dieran utilidades $\overline{u}^i = \left(\overline{u}_a^i, \overline{u}_n^i\right) = \left(u_a^i + \varepsilon, u_n^i + \varepsilon\right)$. Los individuos que aceptaban el contrato i antes, aceptarán el contrato $\overline{u}^i$ ahora y no, digamos, el contrato $\overline{u}^j$: si $pu_a^i + (1-p)u_n^i \geq pu_a^j + (1-p)u_n^j$, tendremos

$$\begin{aligned} pu_a^i + (1-p)u_n^i + \varepsilon &\geq pu_a^j + (1-p)u_n^j + \varepsilon \Leftrightarrow p\left(u_a^i + \varepsilon\right) + (1-p)\left(u_n^i + \varepsilon\right) \geq p\left(u_a^j + \varepsilon\right) + (1-p)\left(u_n^j + \varepsilon\right) \Leftrightarrow \\ p\overline{u}_a^i + (1-p)\overline{u}_n^i &\geq p\overline{u}_a^j + (1-p)\overline{u}_n^j. \end{aligned}$$

Estos nuevos contratos atraerían a todos los individuos y le daría un beneficio cercano a π, si ε es pequeño, que es mayor que $\frac{\pi}{2}$. El argumento de sumarle ε a las utilidades y no a las riquezas es relevante, pues podría pasar que un individuo que aceptaba el contrato i pasara a aceptar el $\overline{u}^j$, y eso provocara que la firma perdiera dinero.

Si en equilibrio la utilidad del individuo es $u^* < u(W - pL)$ (lo que corresponde a un contrato de seguro total, con un precio que le da beneficio 0 a las firmas) y el individuo acepta el contrato (w_a, w_n) en equilibrio, cualquiera de las firmas podría ofrecer el contrato $(W - pL - \varepsilon, W - pL - \varepsilon)$, atraer a todos los agentes (porque para ε suficientemente chico la utilidad es $u(W - pL - \varepsilon) > u^*$) y ganar plata (porque el contrato $(W - pL, W - pL)$ daba beneficio 0 a la firma). Si podía ofrecer ese contrato y no lo ofreció, quiere decir que en equilibrio obtiene beneficios débilmente mayores que los que obtendría con este contrato, lo que contradice que obtiene beneficios 0 en equilibrio.

9.C. Supongamos hay un equilibrio en el cual una firma tiene beneficios mayores estrictos que 0. Como los beneficios son siempre mayores o iguales que 0 (porque las firmas podrían no ofrecer ningún contrato, u ofrecer contratos que cobren una prima y paguen 0 en caso de accidente). Sean $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ y $\left(w_a^B, w_n^B\right)$ los contratos que aceptan los tipos A y B respectivamente en equilibrio (podrían ser iguales). Sea $\pi > 0$ la suma de los beneficios. Alguna de las firmas debe tener beneficios menores o iguales a $\pi/2$. Sea f una de esas firmas. Sea $\widetilde{w}_k^i$, para $i = A, B$ y $k = a, n$, tal que

$$u\left(\widetilde{w}_k^i\right) = u\left(w_k^i\right) + \varepsilon$$

para ε suficientemente pequeño (ese ε lo podemos encontrar porque u es continua, como en el Lema 6 de Agente Principal; no precisa ser no acotada por arriba, porque podemos usar un ε tan chico como queramos). Tenemos entonces que para $i = A, B$

$$p_i u\left(\widetilde{w}_a^i\right) + (1 - p_i)\, u\left(\widetilde{w}_n^i\right) = p_i u\left(w_a^i\right) + (1 - p_i)\, u\left(w_n^i\right) + \varepsilon$$

y como $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ y $\left(w_a^B, w_n^B\right)$ eran parte de un equilibrio, tenemos que para $j \neq i$,

$$p_i u\left(w_a^i\right) + (1 - p_i)\, u\left(w_n^i\right) \geq p_i u\left(w_a^j\right) + (1 - p_i)\, u\left(w_n^j\right)$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_i u\left(\widetilde{w}_a^i\right) + (1 - p_i)\, u\left(\widetilde{w}_n^i\right) &\geq p_i u\left(w_a^j\right) + (1 - p_i)\, u\left(w_n^j\right) + \varepsilon \\ &= p_i u\left(\widetilde{w}_a^j\right) + (1 - p_i)\, u\left(\widetilde{w}_n^j\right). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que el tipo A prefiere el contrato $\left(\widetilde{w}_a^A, \widetilde{w}_n^A\right)$ antes que $\left(\widetilde{w}_a^B, \widetilde{w}_n^B\right)$ o $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ (esto último porque le da ε más en cada caso). También, el B prefiere $\left(\widetilde{w}_a^B, \widetilde{w}_n^B\right)$ antes que $\left(\widetilde{w}_a^A, \widetilde{w}_n^A\right)$ o $\left(w_a^B, w_n^B\right)$. Por lo tanto, si la firma f ofrece sólo los contratos $\left(\widetilde{w}_a^i, \widetilde{w}_n^i\right)$ para $i = A, B$, ambos tipos de trabajadores aceptarán sus contratos, y obtendrá beneficios de casi π (porque ε era pequeño). Esto demuestra que la situación en la cual una firma tenía beneficios positivos no podía ser un equilibrio.

9.D. Lo haremos gráficamente, pero no es necesario. Se puede hacer formalmente.

Curvas de indiferencia. Lo primero que haremos, será encontrar la "forma" de las curvas de indiferencia en el plano (w_a, w_n). Una curva de indiferencia para el tipo i son todos los puntos (w_a, w_n) tales que

$$p_i u(w_a) + (1 - p_i)\, u(w_n) = t \tag{4.16}$$

para alguna constante t. Tomando diferenciales en w_a y w_n (que es medio "informal" pero funciona) tenemos

$$p_i u'(w_a)\, dw_a + (1 - p_i)\, u'(w_n)\, dw_n = 0.$$

Lo que hicimos fue hacer que cambiaran w_a y w_n sin que cambiara el nivel de utilidad (por eso el 0 del lado derecho). Despejando obtenemos

$$\frac{dw_n}{dw_a} = -\frac{p_i}{1-p_i}\frac{u'(w_a)}{u'(w_n)} < 0 \tag{4.17}$$

lo que quiere decir que la curva de indiferencia tiene pendiente negativa. La forma correcta de hacerlo es con el teorema de la función inversa. De la ecuación (4.16) obtenemos una expresión para w_n, y luego el teorema de la función inversa nos dice que la derivada de u^{-1} es $\frac{1}{u'}$:

$$w_n = u^{-1}\left(\frac{t - p_i u(w_a)}{1-p_i}\right) \Rightarrow \frac{dw_n}{dw_a} = -\frac{p_i}{1-p_i}\frac{u'(w_a)}{u'(w_n)}.$$

Tomando la derivada de ambos lados con respecto a w_a en la ecuación (4.17) obtenemos

$$\frac{d^2 w_n}{dw_a dw_a} = -\frac{1}{1-p_i}\frac{u"(w_a)}{u'(w_n)} > 0$$

(es decir, se parecen a las curvas de indiferencia "típicas").

Nos preguntamos ahora cuál curva de indiferencia es más empinada, la de A o la de B. Intuitivamente debería ser claro. Si a un trabajador de tipo B le dicen "cuánto te tengo que bajar la riqueza en caso de accidente si te aumento la riqueza en caso de no accidente, para que estés indiferente?" Si la probabilidad de accidente es baja, la curva de indiferencia en el plano será casi horizontal, pues no le interesa lo que suceda en caso de accidente. Formalmente, calcularemos el cambio en la pendiente ante un cambio en p_i :

$$\frac{d^2 w_n}{dw_a dp_i} = -\frac{1}{(1-p_i)^2}\frac{u'(w_a)}{u'(w_n)} < 0.$$

Es decir, cuando p_i aumenta de p_B a p_A, la pendiente baja, es decir, se vuelve más empinada la curva de indiferencia.

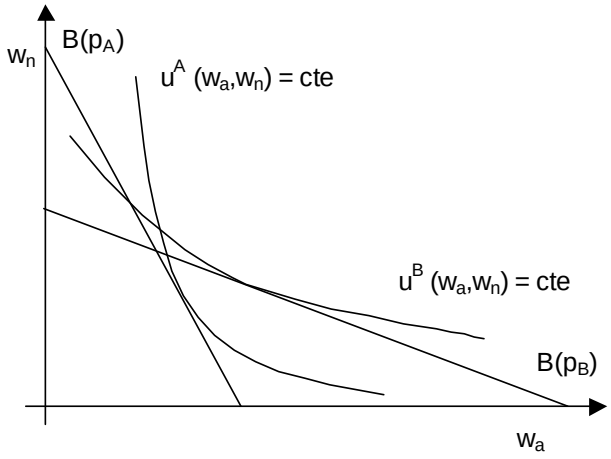
Curvas de beneficio 0**.** Encontraremos ahora las curvas (rectas) de contratos que dan beneficio esperado 0 para cada probabilidad de accidente p. Tenemos que para que la empresa tenga beneficio 0 en un contrato se debe cumplir que $M = pR$, o en términos de w_a y w_n, de la ecuación (4.15) tenemos

$$W - w_n = p(w_a - w_n + L) \Leftrightarrow w_n = \frac{W - pL - pw_a}{1-p}. \tag{4.18}$$

Vemos que la pendiente aumenta cuando cae p. Es decir, la curva de 0 beneficio para las firmas asociada a un trabajador de tipo B es menos empinada que la del A. La intersección de las curvas de beneficio 0 para los tipos A y B se obtiene igualando la expresión (4.18) para p_A y p_B. El resultado es $w_a = W - L$ y $w_n = W$. Es decir, por arriba de la recta de 45^o. Eso tiene sentido por dos razones. Primero, como los trabajadores son aversos al riesgo, si se les ofrece un seguro que da beneficio esperado 0 a la firma, elegirán el seguro que los asegura completamente (es decir, el punto sobre la línea de beneficio 0 que yace sobre la recta de 45^o). Como el tipo A choca con mayor probabilidad, debería obtener menos riqueza en ambos períodos que el tipo B, y eso es exactamente lo que sucede cuando el punto de corte de ambas curvas de beneficio 0 está por arriba de la línea de 45^o.

La segunda razón por la cual eso tiene sentido, es que el punto de corte de ambas rectas de 0 beneficio es aquél en el cual la compañía de seguros no ofrece ningún seguro: en caso de accidente la riqueza es $W - L$ y en caso de no accidente es W. Es obvio que para cualquier nivel de riesgo del individuo, si la compañía no ofrece ningún seguro, obtiene beneficios 0.

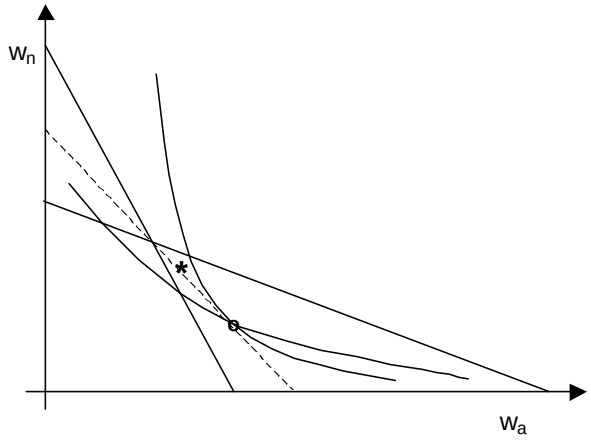
Llamando $B(p)$ al conjunto de puntos (w_a, w_b) que dan beneficios 0 si la probabilidad de accidente es p, tenemos en el gráfico que sigue, las curvas de indiferencia para ambos tipos, y las curvas de 0 beneficio para la firma para cada uno de los tipos.



Inexistencia del Pooling. En la gráfica de abajo la linea punteada corresponde a la línea de beneficios 0 cuando p es la probabilidad promedio de un accidente en la población. Es decir, si λ es la proporción de trabajadores de riesgo alto,

$$p = \lambda p_A + (1 - \lambda)\, p_B.$$

Por la parte B del ejercicio, sabemos que si $\left(w_a^P, w_n^P\right)$ es un equilibrio de pooling, el contrato debe estar sobre la línea $B\left(p\right)$ (dicho contrato está marcado con el símbolo o en la gráfica). Dado esto, cualquier contrato como el $*$ que esté por debajo de $B\left(p_B\right)$ y la curva de indiferencia de A que pasa por $\left(w_a^P, w_n^P\right)$ y por encima de la curva de indiferencia de B que pasa por $\left(w_a^P, w_n^P\right)$ tendrá las propiedades siguientes: el B querrá moverse a $*$; el A no querrá moverse a $*$; si sólo los B se mueven, la firma que ofrezca $*$ tendrá beneficios positivos.



Por la Parte B del ejercicio sabemos que el contrato $\left(w_a^P, w_n^P\right)$ tiene beneficios 0, por lo que si una firma tiene una acción disponible (ofrecer $*$) que le da beneficios positivos, entonces $\left(w_a^P, w_n^P\right)$ no puede ser un equilibrio.

Si el contrato o estuviera a la izquierda del punto de corte de las tres líneas de beneficio 0 (que es donde la linea de beneficio 0 para el A está por encima de la del B) el contrato $*$ tendría que ser tal que atrajera al A. Por lo demás, los casos son iguales.

9.D. Supongamos primero que $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ da beneficios positivos. Si $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ está por debajo de ambas curvas de 0 beneficio, cualquiera de las firmas podría ofrecer solamente un contrato que estuviera por encima de la curva de indiferencia del A y por debajo de ambas curvas, y obtendría beneficios positivos sin importar a qué tipos atraería. Esto demuestra que $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ no puede estar por debajo de ambas curvas. Supongamos ahora que está por debajo de la curva de 0 beneficios asociada a A, pero por encima de la de B. En ese caso, un contrato $*$ que esté hacia el "sureste" de $\left(w_a^A, w_n^A\right)$, por encima de la curva de indiferencia de A que pasa por $\left(w_a^A, w_n^A\right)$, y por debajo de la de B por el mismo contrato, y que aún esté por debajo de la curva de 0 beneficios asociada a A tendrá las siguientes propiedades: atraerá a A y no a B; dará beneficios positivos si atrae a A. Eso termina de demostrar que $\left(w_a^A, w_n^A\right)$ no puede estar por debajo de la curva de 0 beneficios asociada a A.

Ejercicio 10.A. Las utilidades esperadas, y restricciones son

$$\begin{aligned} p_s \log(w-c+q-\rho) + (1-p_s)\log(w-\rho) &\geq p_s \log(w-c) + (1-p_s)\log(w) \\ (64-\rho)^{\frac{2}{3}}(1+q-\rho)^{\frac{1}{3}} &\geq 16 \\ p_a \log(w-c+q-\rho) + (1-p_a)\log(w-\rho) &\geq p_a \log(w-c) + (1-p_a)\log(w) \\ (64-\rho)^{\frac{1}{2}}(1+q-\rho)^{\frac{1}{2}} &\geq 8 \end{aligned}$$

10.B. La firma obtendrá beneficios 0 y si no maximiza la utilidad del consumidor, una empresa podría ofrecer un contrato que ganara plata y le diera más utilidad al conductor. Por lo tanto, los contratos de equilibrio maximizan la utilidad del asegurado, sujeto a beneficios 0.

El contrato del seguro resuelve el problema de elegir ρ_s y q_s para maximizar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\log(1+q-\rho) + \frac{2}{3}\log(64-\rho) \\ \text{sujeto a } \frac{1}{3}q &= \rho \end{aligned}$$

Sustituyendo la restricción y derivando obtenemos:

$$\frac{1}{3}\log\left(1+q-\frac{1}{3}q\right) + \frac{2}{3}\log\left(64-\frac{1}{3}q\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}q+1\right) + \frac{2}{3}\ln\left(64-\frac{1}{3}q\right).$$

La derivada con respecto a q es

$$-2\frac{q-63}{-2q^2+381q+576} = 0 \Leftrightarrow q_s = 63 \Rightarrow \rho_s = 21.$$

Obtenemos el resultado esperado: el seguro con una prima justa (con beneficio 0) que maximiza la utilidad de un conductor averso es seguro total. El resultado para el conductor anormal es similar y se omite, pero el resultado es $q_a = 63$ (también) pero $\rho_a = \frac{63}{2}$.

10.C. No. Si la firma ofrece esos dos contratos, todos los consumidores elegirán el contrato s.

10.D. Siguiendo los pasos de siempre en screening competitivo, obtenemos que el contrato del malo (anormal) es el de información completa, y que el contrato del alto es sobre la curva de beneficio 0 para el alto, $q_s = 3\rho_s$, maximizando la utilidad del alto sujeto a que el bajo no se quiera cambiar: elegir q_s, ρ_s para maximizar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\log(1+q-\rho) + \frac{2}{3}\log(64-\rho) \\ \text{sujeto a } q_s &= 3\rho_s \\ \log\left(64-\frac{63}{2}\right) &\geq \frac{1}{2}\log(1+q_s-\rho_s) + \frac{1}{2}\log(64-\rho_s) \end{aligned}$$

Como las firmas deben distorsionar la cantidad de seguro que ofrecen (deben achicar q_s) relativo al óptimo, la solución se encuentra con el q lo más grande posible, que cumpla con la segunda restricción:$\log\left(64-\frac{63}{2}\right)=\ln\frac{65}{2}$

$$\begin{aligned}\ln\frac{65}{2} &\geq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2}{3}q_s\right)+\frac{1}{2}\log\left(64-\frac{q_s}{3}\right)\Leftrightarrow \ln\frac{65}{2}\geq\log\left(1+\frac{2}{3}q_s\right)^{\frac{1}{2}}+\log\left(64-\frac{q_s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\\ \ln\frac{65}{2} &\geq \log\left(1+\frac{2}{3}q_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(64-\frac{q_s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{65}{2}\geq\left(1+\frac{2}{3}q_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(64-\frac{q_s}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow q_s=\frac{381}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{8191}=27.372\end{aligned}$$

10.E. Un contrato que rompe el equilibrio es aquél en el cual la compañía ofrece seguro total, $q=63$, y cobra una prima ρ a penas por arriba de la que da beneficio 0. Como la probabilidad de accidente si todos aceptan el nuevo contrato es $\frac{2}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$, la prima que da beneficio 0 es $\rho^*=\frac{7*63}{18}=\frac{49}{2}$. La utilidad del alto en el supuesto equilibrio (ρ_s,q_s) de la Parte E es

$$\frac{1}{3}\log(1+q-\rho)+\frac{2}{3}\log(64-\rho)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{129}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8191}\right)+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\sqrt{8191}+\frac{129}{4}\right)=3.6559.$$

Si la firma le ofrece un contrato con seguro total y prima $\rho=25$ (mayor que $\rho^*=\frac{49}{2}$) obtendrá $\ln(64-25)=3.663\,6$ que es mayor que 3.6559 y por lo tanto lo aceptará. El bajo por su parte, también lo aceptará, porque le da más utilidad que el contrato (ρ_a,q_a) pues tiene la misma cobertura, y es mucho más barato (le cobran casi como al promedio de los conductores, mientras que en (ρ_a,q_a) le cobraban como al malo). Este contrato da beneficios positivos, y atrae a todos los conductores.

Ejercicio 11.A. Es como siempre y se omite.

11.B. Para tipos observables, los sueldos deben ser las productividades y además maximizar la utilidad del trabajador. Por lo que el contrato del tipo de costo alto resuelve el problema de elegir x para maximizar $x-x^2$

$$x-x^2\Leftrightarrow(x_a,s_a)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

y el del bajo

$$2x-\frac{2x^2}{3}\Leftrightarrow(x_b,s_b)=\left(\frac{3}{2},3\right)$$

11.C. Tenemos que $u_a\left(\frac{3}{2},3\right)=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}>\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=u_a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ por lo que el de costo alto se pasaría al contrato del bajo.

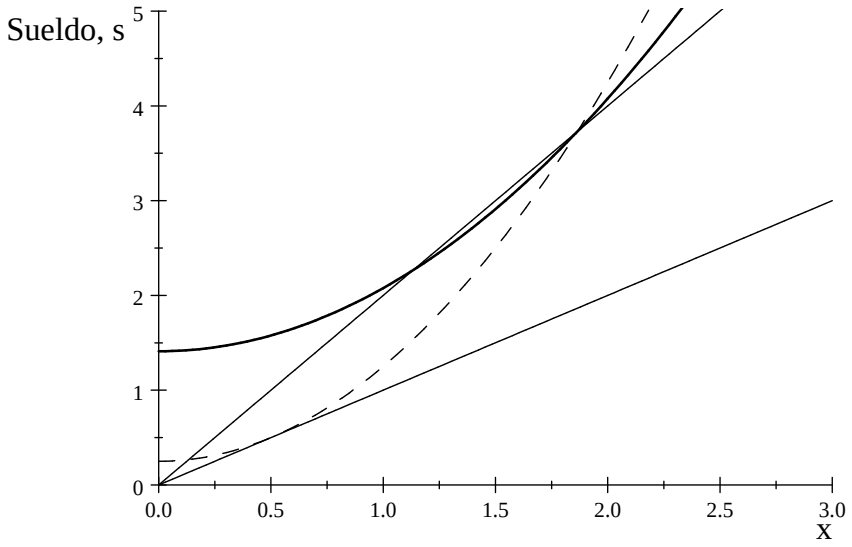
11.D. Empezamos por encontrar el único candidato a ser equilibrio. En el único candidato, $(x_a,s_a)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y el contrato del alto deja al bajo indiferente:

$$u_a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=2x-x^2\Leftrightarrow x_b=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow s_b=2+\sqrt{3}.$$

La utilidad del de costo bajo en este caso es

$$u_b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}-\frac{2}{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{6}$$

El siguiente gráfico ilustra el equilibrio.



Si la linea de beneficio 0 con pooling, $s = (1+p)\,x$, pasara por encima de la curva gruesa, una empresa podría ofrecer un contrato por debajo de debajo $(1+p)\,x$, pero por encima de ambas curvas de indiferencia, que atraería a todos los tipos, ganaría dinero, y rompería el equilibrio propuesto. Por lo tanto, p^* resuelve el problema de elegir p, x para minimizar $1+p$ sujeto a $(1+p)\,x - \frac{2x^2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{6}$. Despejando $1+p$, y minimizando obtenemos $x = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}+5} = 1.4547$ y

$$p^* = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}+5}} + \frac{5}{3\sqrt{2\sqrt{3}+5}} + \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}+5} - 1 = 0.9395.$$

Ejercicio 12.A. Los beneficios para los emprendedores son

$$b\,(R - D + C) + (1-b)\,(C-c)$$
$$m\,(R - D + C) + (1-m)\,(C-c)$$

y el beneficio esperado para el banco es

$$a\,[b\,(D-I) - (1-b)\,I] + (1-a)\,[m\,(D-I) - (1-m)\,I]\,. \tag{4.19}$$

Para $a = 1$ obtenemos los beneficios esperados de enfrentar a un bueno, y para $a = 0$ los de enfrentar a un malo.

12.B. Como siempre, cuando los bancos saben el tipo de agente, compiten por maximizar su utilidad (si el agente obtuviera menos que el máximo, el otro banco podría ofrecerle un contrato mejor al agente, y que ganara dinero). Entonces, para el bueno, el banco elige D, c para maximizar

$$\begin{aligned} & b\,(R - D + C) + (1-b)\,(C-c) \\ \text{sujeto a } b\,(D-I) - (1-b)\,I &= 0 \\ c &\leq C \end{aligned}$$

Eso arroja $D = \frac{I}{b}$ que en la función objetivo da que hay que elegir c para maximizar

$$\begin{aligned} b\left(R - \frac{I}{b} + C\right) + (1-b)\,(C-c) &= C - I + bR - (1-b)\,c \\ \text{sujeto a } c &\leq C. \end{aligned}$$

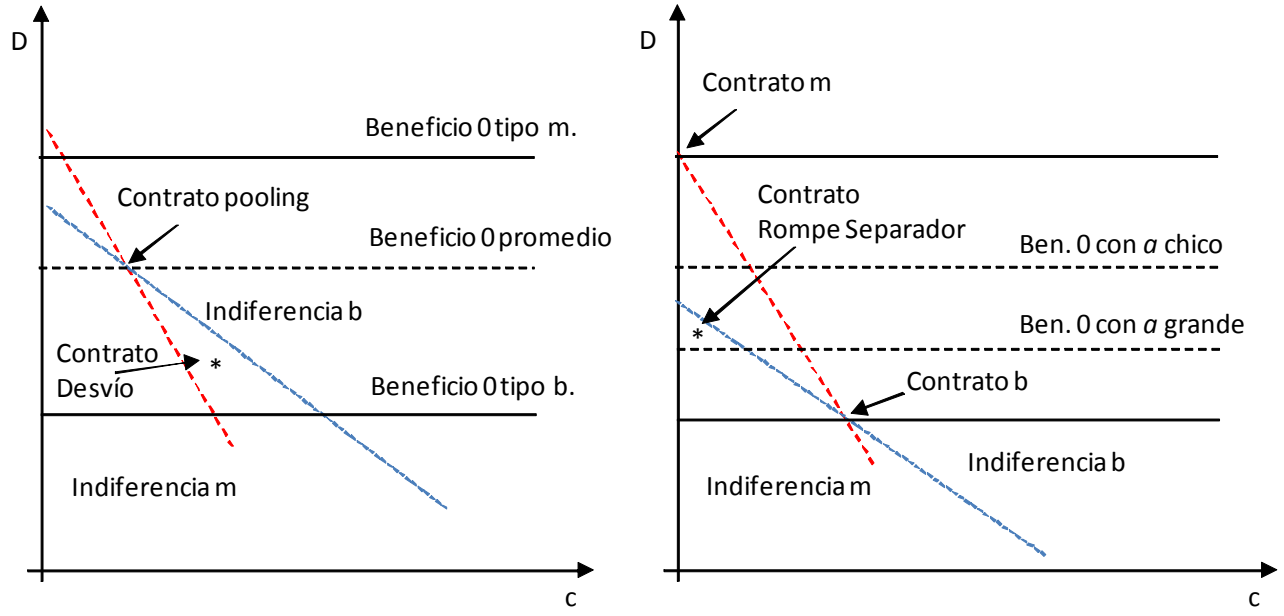
que se maximiza para $c = 0$. La utilidad del emprendedor es como si pudiera financiar la inversión con su capital C, por lo que obtiene $C - I$; luego, gana bR en términos esperados, y pierde c con probabilidad $1 - b$. En forma similar, al m le ofrecerán un contrato (D, c) con $c = 0$ y $D = I/m$.

12.C. Con c en el eje horizontal y D en el vertical, la curva de indiferencia es más chata para el tipo b: las curvas de indiferencia son

$$D = \frac{C-k}{b} + R - \frac{1-b}{b}c \text{ y } D = \frac{C-k}{m} + R - \frac{1-m}{m}c;$$

crecen hacia el suroeste. Las curvas de beneficio 0 para el banco, son rectas horizontales: la curva de beneficio 0 para el banco cuando se enfrenta a un malo es $D = I/m$ y cuando se enfrenta a un bueno $D = I/b$.

Si existiera un contato de pooling, tendría que estar sobre la curva de beneficio 0 promedio. Digamos que la firma i está ofreciendo ese contrato. En ese caso, si la firma $j \neq i$ ofreciera sólo un contrato como el marcado con un $*$ en el gráfico, obtendría beneficios positivos, y eso demuestra que el de pooling no puede ser un contrato de equilibrio (si la firma j no lo ofrece, quiere decir que en equilibrio está obteniendo beneficios positivos, y eso no puede ser).



12.D. El único candidato a equilibrio separador es cuando se le ofrece al m su contrato de información completa (sin distorsiones) y se le ofrece al bueno el contrato que deja indiferente al m entre su contrato y el que se le ofrece al b. Entonces, al m se le ofrece $p = \left(0, \frac{I}{m}\right)$ que le da una utilidad de $C - I + mR - (1-m)\,c$ y al alto un contrato con $D_b = I/b$, tal que

$$C - I + mR = m\,(R - D + C) + (1-m)\,(C - c) = m\left(R - \frac{I}{b} + C\right) + (1-m)\,(C - c) \Leftrightarrow c_b = \frac{I}{b}\frac{b-m}{1-m}.$$

12.E. En el gráfico más arriba vemos que la condición para que exista un separador es que la curva de retorno esperado 0 para los bancos, cuando se enfrentan a un emprendedor promedio, caiga por encima de la intersección de la curva de indiferencia del b en equilibrio con el eje de las ordenadas (D). Matemáticamente, calculamos la utilidad del alto en equilibrio, y la igualamos a la utilidad con un contrato $(D^*, 0)$:

$$U_{eq} = b\left(R - \frac{I}{b} + C\right) + (1-b)\left(C - \frac{I}{b}\frac{b-m}{1-m}\right) = b\,(R - D^* + C) + (1-b)\,C$$

Eso define $D^* = \frac{2b-m-b^2}{1-m}\frac{I}{b^2}$. Debemos tener entonces que la deuda que da beneficio 0 cuando el emprendedor es promedio, de la ecuación (4.19) es $D_p = \frac{I}{ab+(1-a)m}$, debe ser mayor que D^* :

$$D_p \geq D^* \Leftrightarrow \frac{I}{ab+(1-a)\,m} \geq \frac{2b-m-b^2}{1-m}\frac{I}{b^2} \Leftrightarrow a \leq \frac{b-m}{2b-m-b^2}.$$

Ejercicio 13.A. El beneficio esperado para los emprendedores es

$$b\,(R+\pi_b-D)+(1-b)\,(R-r) \text{ ó } m\,(R+\pi_m-D)+(1-m)\,(R-r)$$

y la condición de beneficio 0 es

$$\mu\,[b\,(D-I)-(1-b)\,I]+(1-\mu)\,[m\,(D-I)-(1-m)\,I]=0.$$

13.B. Los bancos maximizarán la utilidad de cada tipo de emprendedor, sabiendo su tipo y asumiendo beneficio 0. Para el b, tenemos $D = I/b$ y entonces

$$b\,(R+\pi_b-D)+(1-b)\,(R-r) = b\left(R+\pi_b-\frac{I}{b}\right)+(1-b)\,(R-r)$$

por lo que la solución es $r = 0$. En forma similar, para el m, tenemos $D = I/m$ y $r = 0$.

13.C. El panel izquierdo en la solución del Ejercicio 12, con r en las abcisas muestra que $\{r_p, D_p\}$ no puede ser un equilibrio de pooling si $r_p < R$ ($r_p < R$ se usa porque el contrato de desvío ofrece un $c = r$ mayor).

13.D. Tampoco puede ser un equilibrio porque si el contrato propuesto de pooling fuera $\left(R, D = \frac{I}{\alpha b+(1-\alpha)m}\right)$, cualquiera de los dos podría ofrecer un contrato con $\left(\frac{R}{2}, D+\varepsilon\right)$ para $\varepsilon > 0$ chico, y atraería a ambos tipos y ganaría dinero.

13.E. El separador es con $r_m = 0$, $D_m = I/m$, y $D_b = I/b$, con r_b que deja al m indiferente:

$$m\left(R+\pi_m-\frac{I}{m}\right)+(1-m)\,R = m\left(R+\pi_m-\frac{I}{b}\right)+(1-m)\,(R-r_b) \Leftrightarrow r_b = \frac{b-m}{b\,(1-m)}I.$$

Ejercicio 14. El único candidato a equilibrio es el par de contratos que deja al bajo con seguro total, con una prima justa, y el contrato para el alto tiene una prima justa y deja al bajo indiferente entre los dos contratos.

Para el de riesgo alto tenemos que su ingreso promedio es $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2 = \frac{10}{2}+\frac{250}{2} = 130$ por lo que lo que paga es lo que lo deja con un ingreso de 130 en caso del ingreso alto: $p_f = 120$. Con eso y un $b_f = 240$ el individuo queda con un ingreso constante. En caso de tener el ingreso bajo, tiene 10, paga 120, y recibe 240, para un neto de 130.

Para que el contrato del de riesgo bajo sea justo tiene que suceder que con el contrato el individuo tenga el mismo ingreso esperado que sin contrato

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2 = 190 = \frac{1}{4}\,(10-p_f+b_f)+\frac{3}{4}\,(250-p_f) \Leftrightarrow p_f = \frac{1}{4}b_f.$$

El contrato del alto debe dejar al bajo indiferente:

$$\begin{aligned} a\ln 130 &= \frac{1}{2}a\ln\left(10+\frac{3}{4}b_f\right)+\frac{1}{2}a\ln\left(250-\frac{1}{4}b_f\right) \Leftrightarrow \\ \ln 130 &= \ln\left(10+\frac{3}{4}b_f\right)^{\frac{1}{2}}\left(250-\frac{1}{4}b_f\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b_f = \frac{1480}{3}-\frac{40}{3}\sqrt{937}, p_f = \frac{370}{3}-\frac{10}{3}\sqrt{937}. \end{aligned}$$

Cuando $f = \frac{3}{4}$, obtenemos que el ingreso promedio del de riesgo alto es $\frac{3}{4}10+\frac{1}{4}250 = 70$ por lo que el contrato para el alto que lo deja indiferente es

$$a\ln 70 = \frac{3}{4}a\ln\left(10+\frac{3}{4}b_f\right)+\frac{1}{4}a\ln\left(250-\frac{1}{4}b_f\right) \Leftrightarrow b_f = 48.75, p_f = 12.19.$$

Uno puede verificar que la utilidad del agente de riesgo bajo cae con los números encontrados. Pero no se necesita: le están vendiendo menos seguro que antes, porx lo que su utilidad cae: le gustaría tener un b_f de 240, con un p_f de 60; cuando $f = \frac{1}{2}$, $b_f = 85$ y cuando $f = \frac{3}{4}$, $b_f = 49$, aún más bajo.

Ejercicio 15. Notamos primero que como $\pi'(e) > 0$ para todo e y $g_e(e, \theta) = 0$ en $e = 0$, la solución del problema de máximo, si existe, es interior, con $e > 0$. En este caso, como $\pi'' < 0$ y $g_{ee} > 0$, el máximo está caracterizado por las condiciones de primer orden $\pi'(e_A^*) = g_e(e_A^*, \theta_A)$ y $\pi'(e_B^*) = g_e(e_B^*, \theta_B)$. Para cada θ, la función $\pi'(e) - g_e(e, \theta)$ es estrictamente decreciente en e (por $\pi'' < 0$ y $g_{ee} > 0$) y por tanto, hay un único e^* para el cual $\pi'(e) = g_e(e, \theta)$.

Ejercicio 16. Si tuviéramos $e_B^* \geq e_A^*$ se cumpliría que $\pi'(e_B^*) \leq \pi'(e_A^*)$ (por $\pi'' < 0$), pero como $g_{e\theta} < 0$ y $g_{ee} > 0$, tendríamos también

$$\pi'(e_B^*) = g_e(e_B^*, \theta_B) \overset{g_{ee}>0}{\geq} g_e(e_A^*, \theta_B) \overset{g_{e\theta}<0}{>} g_e(e_A^*, \theta_A) = \pi'(e_A^*)$$

y eso no puede ser.

Ejercicio 17. La restricción de incentivos del tipo θ_A nos dice que $w_A - g(e_A, \theta_A) \geq w_B - g(e_B, \theta_A)$, pero como $g_\theta < 0$, tenemos que $g(e_B, \theta_A) < g(e_B, \theta_B)$ por lo que $w_A - g(e_A, \theta_A) > w_B - g(e_B, \theta_B) \geq \overline{u}$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 18. Un par de contratos $[(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A), (\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)]$ con $\widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) > \overline{u}$ no puede ser óptimo pues para $\Delta = \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) - \overline{u}$ los contratos

$$[(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A - \Delta), (\widehat{e}_B, \widehat{w}_B - \Delta)]$$

le dan estrictamente más beneficios al dueño, y cumplen todas las restricciones pues la optimalidad de $[(\widehat{e}_A, \widehat{w}_A), (\widehat{e}_B, \widehat{w}_B)]$ implicaría que se cumplirían los lados izquierdos de las siguientes cadenas de implicaciones

$$\begin{array}{ccc} \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) \geq \overline{u} & \Rightarrow & \widehat{w}_B - \Delta - g(\widehat{e}_B, \theta_B) = \overline{u} \\ \widehat{w}_A - g(\widehat{e}_A, \theta_A) \geq \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A) & \Rightarrow & \widehat{w}_A - \Delta - g(\widehat{e}_A, \theta_A) \geq \widehat{w}_B - \Delta - g(\widehat{e}_B, \theta_A) \\ \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B) \geq \widehat{w}_A - g(\widehat{e}_A, \theta_B) & \Rightarrow & \widehat{w}_B - \Delta - g(\widehat{e}_B, \theta_B) \geq \widehat{w}_A - \Delta - g(\widehat{e}_A, \theta_B) \end{array}$$

Ejercicio 20. El par $(e_A^*, g(e_A^*, \theta_A) + \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A))$ fue elegido para que cumpliera con igualdad la restricción de incentivos de θ_A, por lo que

$$\begin{aligned} \widehat{w}_A - g(\widehat{e}_A, \theta_A) &= \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_A) \Leftrightarrow \widehat{w}_A - \widehat{w}_B = g(\widehat{e}_A, \theta_A) - g(\widehat{e}_B, \theta_A) = \int_{\widehat{e}_B}^{\widehat{e}_A} g_e(e, \theta_A)\, de \\ &< \int_{\widehat{e}_B}^{\widehat{e}_A} g_e(e, \theta_B)\, de = g(\widehat{e}_A, \theta_B) - g(\widehat{e}_B, \theta_B) \Rightarrow \widehat{w}_A - g(\widehat{e}_A, \theta_B) < \widehat{w}_B - g(\widehat{e}_B, \theta_B). \end{aligned}$$

Ejercicio 21. De las condiciones de primer orden en el problema (4.10) sabemos que el e_B óptimo satisface

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\left[g_e(\widehat{e}_B, \theta_A) - g_e(\widehat{e}_B, \theta_B)\right] + \left\{\pi'(\widehat{e}_B) - g_e(\widehat{e}_B, \theta_B)\right\} = 0.$$

Como $g_e(\widehat{e}_B, \theta_A) - g_e(\widehat{e}_B, \theta_B) < 0$, cuando aumenta λ tiene que aumentar $\pi'(\widehat{e}_B) - g_e(\widehat{e}_B, \theta_B)$, que ocurre cuando cae e_B.

Para hacerlo más formalmente, vean el método 4 de la Sección 7. Veremos ahora que la función objetivo en (4.10) satisface la propiedad de cruce único en $(e,-\lambda)$. Asumamos que $e'>e$, que $-\lambda'>-\lambda$ y que (la versión sin las cosas que no dependen de e_B o λ de) la función objetivo es tal que

$$\lambda\left[g\left(e',\theta_A\right)-g\left(e',\theta_B\right)\right]+(1-\lambda)\left[\pi\left(e'\right)-g\left(e',\theta_B\right)\right]>\lambda\left[g\left(e,\theta_A\right)-g\left(e,\theta_B\right)\right]+(1-\lambda)\left[\pi\left(e\right)-g\left(e,\theta_B\right)\right]. \tag{4.20}$$

Debemos demostrar que esa misma ecuación se cumple para λ'. Reordendando (4.20) vemos que se cumple si y sólo si

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\left[g\left(e',\theta_A\right)-g\left(e',\theta_B\right)-g\left(e,\theta_A\right)+g\left(e,\theta_B\right)\right]+\pi\left(e'\right)-g\left(e',\theta_B\right)-\pi\left(e\right)+g\left(e,\theta_B\right)>0. \tag{4.21}$$

De $g_{e\theta}<0$ y los métodos del ejercicio 13 sabemos que $g\left(e',\theta_A\right)-g\left(e',\theta_B\right)-g\left(e,\theta_A\right)+g\left(e,\theta_B\right)<0$ por lo que la ecuación (4.21) y $\lambda'<\lambda$ implican que

$$\frac{\lambda'}{1-\lambda'}\left[g\left(e',\theta_A\right)-g\left(e',\theta_B\right)-g\left(e,\theta_A\right)+g\left(e,\theta_B\right)\right]+\pi\left(e'\right)-g\left(e',\theta_B\right)-\pi\left(e\right)+g\left(e,\theta_B\right)>0$$

Ejercicio 22.A. En este caso, el economista debe ofrecer un contrato distinto a cada asistente. El contrato para el haragán resuelve el problema de elegir (w,e) para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & 8e-w \\ s.a & w-2e^2 & \geq & 0 \end{array}$$

lo que arroja $\left(w^B,e^B\right)=(8,2)$. Para el asistente de tipo G el contrato óptimo es $\left(w^G,e^G\right)=(16,4)$.

22.B. El problema del economista es el de elegir $\left(w^B,e^B\right),\left(w^G,e^G\right)$ para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & \frac{2}{3}\left(8e^G-w^G\right)+\frac{1}{3}\left(8e^B-w^B\right) \\ s.a. \quad 0 & \leq & w^B-2e^{B2} \\ 0 & \leq & w^G-e^{G2} \\ 0 & \leq & w^G-e^{G2}-w^B+e^{B2} \\ 0 & \leq & w^B-2e^{B2}-w^G+2e^{G2} \end{array}$$

22.C. Ignoramos la segunda y la cuarta restricción y obtenemos $e^G=4, e^B=1, w^G=17$ y $w^B=2$.

Ejercicio 23.A. En el óptimo tenemos $(s_A,e_A)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ y $(s_B,e_B)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$. Una cosa típica de estos ejercicios es que el alto querrá pasarse al contrato del bajo (tiene excedente 0 en su contrato, pero como le cuesta menos trabajar que al vago, si agarra el contrato del vago, estará más contento que el vago, y por tanto tendrá excedente positivo).

23.B. $(s_A,e_A)=\left(\frac{1}{4}\left[\frac{(1-q)^2}{(2-q)^2}+1\right],\frac{1}{4}\right)$, $(s_B,e_B)=\left(\frac{1}{2}\frac{(1-q)^2}{(2-q)^2},\frac{1}{4}\frac{(1-q)^2}{(2-q)^2}\right)$. Siempre pueden verificar que se cumplen las restricciones ignoradas. Así como está, el problema no cumple con los supuestos del teórico (por ejemplo, $g_e\left(0,\theta\right)$ no es 0). Sin embargo, con el cambio de variable $z=e^{\frac{1}{2}}$ funciona todo perfecto.

Ejercicio 24.A. Elegir (p,x) para maximizar $p-x$ sujeto a $6\ln\left(x+1\right)+15-p=15$. De la restricción queda $p=6\ln\left(x+1\right)$, por lo que $6\ln\left(x+1\right)-x$ se maximiza para $x_a^*=5$, $p_a^*=6\ln 6=10.75$ con un beneficio de $6\ln 6-5$. Para el tipo b el contrato óptimo maximiza $4\ln\left(x+1\right)-x$ en $x_b^*=3$, y $p_b^*=4\ln 4=5.55$, y deja un beneficio de $4\ln 4-3$.

24.B. El monopolista debe elegir (p_a, x_a) y (p_b, x_b) para maximizar

$$\begin{aligned} & q\,(p_a - x_a) + (1-q)\,(p_b - x_b) \\ \text{sujeto a} \quad & 6\ln(x_a+1) + 15 - p_a \geq 15 \\ & 4\ln(x_b+1) + 15 - p_b \geq 15 \\ & 6\ln(x_a+1) + 15 - p_a \geq 6\ln(x_b+1) + 15 - p_b \\ & 4\ln(x_b+1) + 15 - p_b \geq 4\ln(x_a+1) + 15 - p_a \end{aligned}$$

Probamos con la segunda y tercera restricciones activas, y quedan $p_b = 4\ln(x_b+1)$ y $p_a = 6\ln(x_a+1) - 2\ln(x_b+1)$. El problema es entonces el de elegir x_a y x_b para maximizar

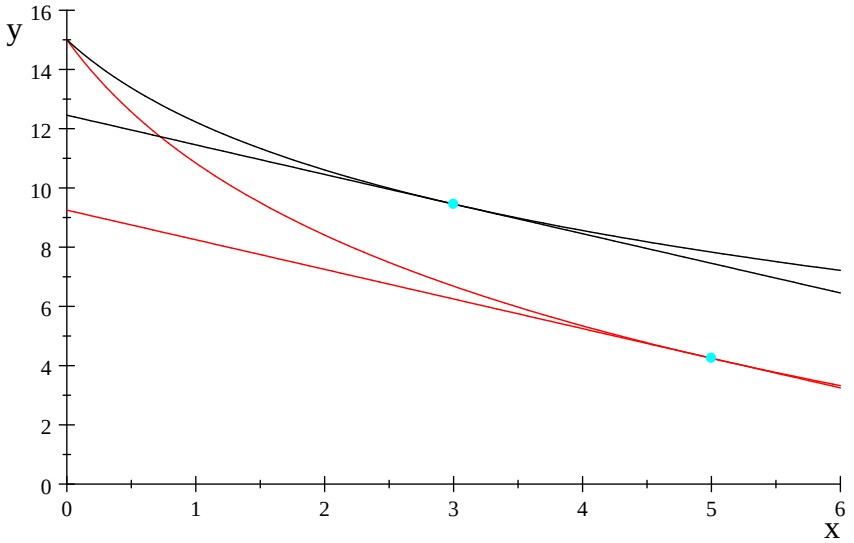
$$q\,(6\ln(x_a+1) - 2\ln(x_b+1) - x_a) + (1-q)\,(4\ln(x_b+1) - x_b)$$

que arroja $x_a = 5$ y la condición de primer orden para x_b es $\frac{-2q}{x_b+1} + \frac{4(1-q)}{x_b+1} - 1 + q = 0$, que implica $x_b = \frac{3-5q}{1-q}$.

Si $q \geq \frac{3}{5}$, quedaría $x_b \leq 0$; entonces ponemos $x_b = 0$ y $p_b = 0$, y el problema es el de información completa sólo con los altos. Para $q = \frac{1}{2}$, $x_b = 1$ y los precios son $p_b = 4\ln 2 = 2.8$ y $p_a = 6\ln(5+1) - 2\ln(1+1) = 6\ln 6 - 2\ln 2 = 9.4$.

Es fácil chequear que las restricciones ignoradas se cumplen.

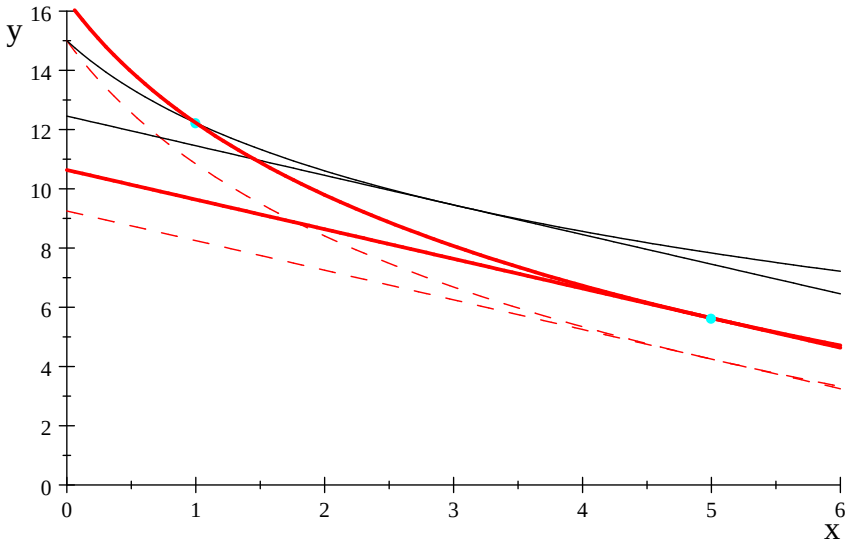
24.C. El gráfico de información completa se obtiene con las restricciones de participación $p = 6\ln(x+1)$ y $p = 4\ln(x+1)$ que arrojan, con $y = 15 - p$ las curvas $y = 15 - 6\ln(x+1)$ y $y = 15 - 4\ln(x+1)$. La firma maximiza $p - x$, sujeto a esta restricción (hacemos para el alto, después para el bajo) y obtiene $p - x = 6\ln 6 - 5$ para el alto y por tanto $p = 6\ln 6 - 5 + x$ y $y = 20 - 6\ln 6 - x$. Para el bajo, queda $y = 15 - (4\ln 4 - 3 + x) = 18 - 8\ln 2 - x$. El gráfico es



En equilibrio con información asimétrica, la restricción de participación del bajo sigue igual. El contrato de equilibrio del bajo es $(x_b, p_b) = (1, 2.8)$, por lo que en el gráfico queda $(x_b, y_b) = (1, 12.2)$. Como sabemos que la restricción de incentivos del alto está activa, su curva de indiferencia de equilibrio pasa por ese punto:

$$\begin{aligned} 6\ln(x_a+1) + 15 - p_a &= 6\ln(x_b+1) + 15 - p_b = 6\ln 2 + 15 - 4\ln 2 = 2\ln 2 + 15 \Leftrightarrow \\ p_a &= 6\ln(x_a+1) + 15 - 2\ln 2 - 15 \Leftrightarrow y_a = 15 - p_a = 15 - 6\ln(x_a+1) + 2\ln 2 \end{aligned}$$

y la firma maximiza $p - x$ sujeto a esa restricción. La curva de indiferencia de la firma es $p - x = 6\ln 6 - 2\ln 2 - 5 \Leftrightarrow p = 6\ln 6 - 2\ln 2 - 5 + x$ y por lo tanto $y = 15 - p$ queda $y = 15 - 6\ln 6 + 2\ln 2 + 5 - x$.



Vemos que la firma gana menos con cada tipo pues cada contrato está por encima de la curva de indiferencia de información completa. También vemos que no se distorsiona la elección del alto, y que se distorsiona hacia abajo la del bajo.

Ejercicio 25.A. El monopolista debe elegir (q_1, t_1) y (q_2, t_2) para maximizar

$$p\,(t_1 - cq_1) + (1-p)\,(t_2 - cq_2)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \theta_i v\,(q_i) - t_i &\geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2 \\ \theta_1 v\,(q_1) - t_1 &\geq \theta_1 v\,(q_2) - t_2 \\ \theta_2 v\,(q_2) - t_2 &\geq \theta_2 v\,(q_1) - t_1 \end{aligned}$$

25.B. Sean (q_1, t_1) y (q_2, t_2) dos contratos cualesquiera, y tales que

$$\theta_1 v\,(q_1) - t_1 \geq 0.$$

Si se satisface la restricción de incentivos de θ_2,

$$\begin{aligned} \theta_2 v\,(q_2) - t_2 &\geq \theta_2 v\,(q_1) - t_1 \\ &\geq \theta_1 v\,(q_1) - t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Para cualquier $q \in (0, 1]$ la segunda desigualdad es estricta, y es fácil mostrar que $q > 1$ no es nunca óptimo (al individuo le resta utilidad).

25.C. Ponemos

$$\begin{aligned} \theta_1 v\,(q_1) - t_1 &= 0 \\ \theta_2 v\,(q_2) - t_2 &= \theta_2 v\,(q_1) - t_1 \end{aligned}$$

de la primera obtenemos

$$t_1 = \theta_1 v\,(q_1)$$

sustituyendo en la segunda,

$$\begin{aligned} \theta_2 v(q_2) - t_2 &= \theta_2 v(q_1) - \theta_1 v(q_1) \Leftrightarrow \\ t_2 &= \theta_2 v(q_2) - (\theta_2 - \theta_1) v(q_1) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la función objetivo queda el problema de elegir q_1 y q_2 para maximizar

$$p(\theta_1 v(q_1) - cq_1) + (1-p)(\theta_2 v(q_2) - (\theta_2 - \theta_1) v(q_1) - cq_2).$$

Derivando y despejando obtenemos:

$$\begin{aligned} q_2 &= 1 - \frac{c}{\theta_2} \\ q_1 &= 1 - \frac{c}{\theta_2 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{p}} \end{aligned}$$

Ejercicio 26.A. Si produce sólo computadoras C, puede fijar el precio en \$3000, en cuyo caso obtendría $\lambda(3000-1000) = 2000\lambda$, o puede fijarlo en \$2500 en cuyo caso obtendría $2500 - 1000 = 1500$.

26.B. Si produce ambos tipos, lo óptimo es ofrecer las C a 3000 y las N a 2000. Eso es así pues vender las C a menos de 3000 sólo cambia algo, si se ofrecen a 2500, pero en ese caso no le conviene producir las N. Con ese menú, los beneficios son $\lambda 2000 + (1-\lambda)1000 = 1000(1+\lambda)$.

Otra manera, más parecido a lo visto en clase, es la siguiente. Elegir p_R, p_N para maximizar

$$\begin{aligned} & \lambda(p_R - 1000) + (1-\lambda)(p_N - 1000) \\ \text{s.a } 3000 - p_R &\geq 2000 - p_N \text{ (incentivos } R) \\ 2000 - p_N &\geq 2500 - p_R \text{ (incentivos } N) \\ 3000 - p_R &\geq 0 \text{ (participación } R) \\ 2000 - p_N &\geq 0 \text{ (participación } N) \end{aligned}$$

Resolviendo sin la segunda y tercera restricciones y haciendo p_R y p_N lo más grande posibles obtenemos $p_N = 2000$ y de la primera restricción $p_R = 3000$.

26.C. La única forma en que los de la Parte A sean mayores que los de la B es que la firma ofrezca las computadoras a 2500. En ese caso, los beneficios son mayores si y sólo si $1500 > 1000(1+\lambda) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \lambda$. Si hay pocos individuos de tipo R no tiene sentido estropear las máquinas para tratar de venderles caro a unos pocos individuos.

Ejercicio 27.A. El autor debe elegir (w, n) para maximizar $40\sqrt{n} - w$ sujeto a $w - n\frac{1}{2}10 = 0 \Leftrightarrow w - 5n = 0$ si es un traductor rápido, o $w - n10 = 0$ si es lento. Las soluciones son $40\sqrt{n} - 5n \Rightarrow n_r^* = 16, w_r^* = 80$ y $40\sqrt{n} - 10n \Rightarrow n_l^* = 4$ y $w_l^* = 40$.

27.B. El autor debe elegir w_r, w_l, n_r, n_l para maximizar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(40\sqrt{n_r} - w_r) + \frac{1}{2}(40\sqrt{n_l} - w_l) \\ w_r - 5n_r &\geq 0 \\ w_l - 10n_l &\geq 0 \\ w_r - 5n_r &\geq w_l - 5n_l \\ w_l - 10n_l &\geq w_r - 10n_r \end{aligned}$$

Como siempre, ignoramos la de participación del rápido y la de incentivos del lento y verificamos que se cumplan en la solución. Queda $w_l = 10n_l$ y $w_r - 5n_r = w_l - 5n_l = 10n_l - 5n_l \Leftrightarrow w_r = 5n_l + 5n_r$ y la función objetivo es

$$\frac{1}{2}\left(40\sqrt{n_r} - 5n_l - 5n_r\right) + \frac{1}{2}\left(40\sqrt{n_l} - 10n_l\right).$$

Las condiciones de primer orden arrojan $n_r = 16$, como ya sabíamos, y $n_l = \frac{16}{9}$. Los salarios son $w_l = 10n_l = \frac{160}{9}$ y $w_r = \frac{800}{9}$. Vemos que se verifica de la participación del rápido: $w_r - 5n_r = \frac{800}{9} - 80 = \frac{80}{9} \geq 0$ y la de incentivos del bajo

$$w_l - 10n_l = \frac{160}{9} - \frac{160}{9} = 0 \geq -\frac{640}{9} = \frac{800}{9} - 160 = w_r - 10n_r.$$

También vemos que n_l es más bajo en el problema con información asimétrica: $n_l = \frac{16}{9} < 4 = n_l^*$.

Ejercicio 28.A,B. El monopolista debe elegir los contratos a ofrecer a cada tipo de consumidor, (z_a, p_a) y (z_b, p_b). De la restricción de participación del b tenemos $p_b = 10z_b$ y de la de incentivos de a,

$$20z_a - p_a = 20z_b - p_b = 20z_b - 10z_b \Leftrightarrow p_a = 20z_a - 10z_b.$$

Los beneficios de la firma son entonces

$$\pi = \lambda N p_a + (1-\lambda) N p_b = N\left(\lambda\left(20z_a - 10z_b\right) + (1-\lambda)\,10z_b\right) = N\left(20\lambda z_a + 10z_b\left(1-2\lambda\right)\right).$$

En cualquier caso, tendremos $z_a = 2$ (como sería el caso en información completa). Deducimos que si $\lambda < \frac{1}{2}$, conviene poner z_b lo más grande posible, $z_b = 2$, y $p_a = p_b = 20$.

Sin embargo, si $\lambda > \frac{1}{2}$ le convendrá fijar $z_b = 1$, si decide ofrecerle un contrato a los b, y en ese caso $p_b = 10$ y $p_a = 30$. Los beneficios serán $\pi = N\left(40\lambda + 10\left(1-2\lambda\right)\right) = N\left(10 + 20\lambda\right)$. Si decide no ofrecer cereal a los bajos, pierde un poco de beneficios en ese caso, pero relaja los incentivos de los altos. En ese caso puede fijar el precio en 40, y obtener beneficios de $N\lambda 40 > N\left(10 + 20\lambda\right)$.

Ejercicio 29.A. Las condiciones de primer orden con respecto a e_i son $\theta_i = f'\left(e_i\right)$ (utilidad marginal del esfuerzo igual a su costo marginal). Luego, como los impuestos entran en forma negativa en la función de utilidad del gobierno, la restricción presupuestal debe estar activa por lo que queda $t_L = -\frac{1-p}{p} t_H$ y por tanto la función objetivo es

$$pu\left(\theta_L e_L + \frac{1-p}{p} t_H - f\left(e_L\right)\right) + (1-p)\,u\left(\theta_H e_H - t_H - f\left(e_H\right)\right).$$

La condición de primer orden con respecto a t_H queda

$$u'_L \equiv u'\left(\theta_L e_L - t_L - f\left(e_L\right)\right) = u'\left(\theta_H e_H - t_H - f\left(e_H\right)\right) \equiv u'_H$$

(las transferencias se asignan para igualar las utilidades marginales: si el θ_H tiene mucho, le rinde menos utilidad cada peso).

Si las utilidades marginales son iguales, los argumentos deben ser iguales, y por tanto las utilidades son iguales:

$$\begin{aligned} u'\left(\theta_L e_L - t_L - f\left(e_L\right)\right) &= u'\left(\theta_H e_H - t_H - f\left(e_H\right)\right) \Rightarrow \theta_L e_L - t_L - f\left(e_L\right) = \theta_H e_H - t_H - f\left(e_H\right) \quad (4.22) \\ u\left(\theta_L e_L - t_L - f\left(e_L\right)\right) &= u\left(\theta_H e_H - t_H - f\left(e_H\right)\right) \end{aligned}$$

Para ver que hay redistribución, notamos que como f es convexa, $\theta_H = f'(e_H) > \theta_L = f'(e_L)$ impica que $e_H > e_L$. Luego, como f es convexa $f'(e) < f'(e_H)$ para todo $e < e_H$, por lo que usando $f'(e_H) = \theta_H$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(e_H) &= f(e_L) + \int_{e_L}^{e_H} f'(e)\,de < f(e_L) + \int_{e_L}^{e_H} f'(e_H)\,de = f(e_L) + f'(e_H)(e_H - e_L) \\ &= f(e_L) + \theta_H(e_H - e_L) < f(e_L) + \theta_H e_H - \theta_L e_L. \end{aligned}$$

De la igualdad de los argumentos en (4.22) obtenemos entonces

$$\theta_L e_L - t_L - f(e_L) = \theta_H e_H - t_H - f(e_H) \Leftrightarrow t_H = t_L + \theta_H e_H - f(e_H) - \theta_L e_L + f(e_L) > t_L.$$

Además, como tienen signos opuestos por $t_L = -\frac{1-p}{p} t_H$, tenemos $t_H > 0 > t_L$.

29.B. Si el tipo θ_L quiere acogerse al contrato (t_H, e_H) debe producir un ingreso $\theta_H e_H$, que le requerirá un esfuerzo e tal que $\theta_L e = \theta_H e_H \Leftrightarrow e = \frac{\theta_H e_H}{\theta_L}$. De la misma manera, el esfuerzo que debe realizar el alto H para agarrar el contrato del L es $e = \frac{\theta_L e_L}{\theta_H}$.

29.C. Igual que antes, el gobierno debe elegir (t_L, e_L) y (t_H, e_H) para maximizar (4.12) sujeto a $pt_L + (1-p)t_H \geq 0$ y las restricciones de incentivos

$$\begin{aligned} \theta_H e_H - t_H - f(e_H) &\geq \theta_L e_L - t_L - f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right) \\ \theta_L e_L - t_L - f(\theta_L) &\geq \theta_H e_H - t_H - f\left(\frac{\theta_H e_H}{\theta_L}\right) \end{aligned}$$

29.D. Haciéndolo "sin pensar" podemos poner activa la restricción presupuestal y la de incentivos de H y resolver y chequear que se cumple la de incentivos de L. De todas maneras, la razón por la que en este caso eso funciona es sencilla: como en el óptimo con información completa tenemos $\theta_L e_L - t_L - f(e_L) = \theta_H e_H - t_H - f(e_H)$, vemos que se violaría la de incentivos de H :

$$\theta_L e_L - t_L - f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right) > \theta_L e_L - t_L - f(e_L) = \theta_H e_H - t_H - f(e_H).$$

Por lo tanto probamos con esa restricción activa e ignoramos la de L.

De la restricción presupuestal $t_L = -\frac{1-p}{p} t_H$ en la de incentivos de H obtenemos

$$\theta_H e_H - t_H - f(e_H) = \theta_L e_L + \frac{1-p}{p} t_H - f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right) \Leftrightarrow t_H = p\left(\theta_H e_H - f(e_H) - \theta_L e_L + f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\right)$$

y en la función objetivo queda

$$\begin{aligned} &pu\left(\theta_L e_L + (1-p)\left(\theta_H e_H - f(e_H) - \theta_L e_L + f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\right) - f(e_L)\right) \\ &+ (1-p)\,u\left(\theta_H e_H - p\left(\theta_H e_H - f(e_H) - \theta_L e_L + f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\right) - f(e_H)\right) \end{aligned}$$

y simplificando algo

$$pu\left(p\theta_L e_L + (1-p)\left(\theta_H e_H - f(e_H) + f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\right) - f(e_L)\right) + (1-p)\,u\left(p\theta_L e_L + (1-p)\,\theta_H e_H - pf\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right) - (1-p)\,f(\right.$$

Las condiciones de primer orden con respecto a e_H es

$$pu'(...)(1-p)(\theta_H - f'(e_H)) + (1-p)\,u'(...)(1-p)(\theta_H - f'(e_H)) = 0 \Leftrightarrow \theta_H = f'(e_H).$$

Con respecto a e_L, derivamos y queda

$$pu'\left(p\theta_L e_L+(1-p)\left(\theta_H e_H-f(e_H)+f\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\right)-f(e_L)\right)\left(p\theta_L+(1-p)f'\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}-f'(e_L)\right)$$
$$+(1-p)u'\left(p\theta_L e_L+(1-p)\theta_H e_H-pf\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)-(1-p)f(e_H)\right)\left(p\theta_L-pf\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}\right)$$

si llamamos u'_L a la primera derivada y u'_H a la segunda, cuando igualamos a 0 queda

$$u'_L\left(p\theta_L+(1-p)f'\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}-f'(e_L)\right)+(1-p)u'_H\left(\theta_L-f'\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}\right)=0$$

y luego de varias cuentas

$$f'(e_L)=\theta_L-(1-p)\frac{u'_L-u'_H}{pu'_L+(1-p)u'_H}\left[f'(e_L)-f'\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}\right].$$

Las condiciones de primer orden muestran las cosas de siempre: $\theta_H=f'(e_H)$ quiere decir que no hay distorsión para el tipo H, y esta última quiere decir que $f'(e_L)<\theta_L$ (se distorsiona hacia abajo el esfuerzo del L), ya que $f'(e_L)>f'\left(\frac{\theta_L e_L}{\theta_H}\right)\frac{\theta_L}{\theta_H}$.

La solución $\theta_H=f'(e_H)$ es fácil. Si sustituimos $e_H=2$, y asumimos $p=\frac{1}{3}$ y $u(w)=\sqrt{w}$ la derivada de la utilidad del gobierno queda

$$\frac{d\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}e-\frac{5}{12}e^2+\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}e-\frac{1}{24}e^2+\frac{4}{3}}\right)}{de}=0\Leftrightarrow e=0.944$$

que es menor que 1 como debería.

Ejercicio 30.A. La firma maximiza beneficios

$$\frac{2}{3}(t_1-cq_1)+\frac{1}{3}(t_2-cq_2)$$

sujeto a las siguientes restricciones (IR de θ_1 y Compatibilidad de incentivos de θ_2):

$$\left.\begin{array}{c}\theta_1\sqrt{q_1}-t_1=0\\ \theta_2\sqrt{q_2}-t_2=\theta_2\sqrt{q_1}-t_1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}t_1=\theta_1\sqrt{q_1}\\ t_2=\theta_2\sqrt{q_2}-\theta_2\sqrt{q_1}+\theta_1\sqrt{q_1}\end{array}\right.$$

El problema es entonces el de elegir q_1 y q_2 para maximizar:

$$\frac{2}{3}(\theta_1\sqrt{q_1}-cq_1)+\frac{1}{3}(\theta_2\sqrt{q_2}-\theta_2\sqrt{q_1}+\theta_1\sqrt{q_1}-cq_2)$$

y las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\theta_2}{2\sqrt{q_2}}=1\\ \frac{2}{3}\left(\frac{\theta_1}{2\sqrt{q_1}}-1\right)+\frac{1}{3}\frac{\theta_1-\theta_2}{2\sqrt{q_1}}=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}q_2=4\\ q_1=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Es fácil verificar que se cumplen las dos restricciones ignoradas.

30.B. Dada una tarifa $A+pq$ un consumidor de tipo θ_i elige q para maximizar $\theta_i\sqrt{q}-A-pq$, lo que da $q_i=\left(\frac{\theta_i}{2p}\right)^2$ (o no participar). Las utilidades de los agentes son

$$V(A,p;\theta_i)=\theta_i\sqrt{q^*}-A-pq^*=\theta_i\sqrt{\left(\frac{\theta_i}{2p}\right)^2}-A-p\left(\frac{\theta_i}{2p}\right)^2=\frac{\theta_i^2}{2p}-A-\frac{\theta_i^2}{4p}=\frac{\theta_i^2}{4p}-A.$$

30.C. Si la firma elegirá que ambos participen, debe cumplirse que A sea tal que ambos reciban una utilidad positiva. Como las utilidades son $\frac{1}{p}-A$ y $\frac{4}{p}-A$, si la firma quiere que ambos consumidores participen, deberá elegir p y A de tal forma que $1 \geq pA$. En este caso, la firma sabe que no le conviene elegir A estrictamente menor que $1/p$, pues le estaría regalando dinero (que está dispuesto a gastar) al consumidor. Fijará entonces $A = 1/p$. Recordando las demandas calculadas en la parte anterior, la firma elige p para maximizar

$$A + (p-1)\left[\frac{2}{3}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{p^2}\right] = \frac{1}{p} + \frac{2(p-1)}{p^2}.$$

La condición de primer orden para el problema es

$$-\frac{1}{p^2} + \frac{2p^2 - 4p(p-1)}{p^4} = 0 \Leftrightarrow p = 4(p-1) \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}.$$

Sustituyendo en los beneficios de la firma, vemos que las ganancias son

$$A + \frac{2(p-1)}{p^2} = \frac{3}{4} + \frac{2\left(\frac{4}{3}-1\right)}{16/9} = \frac{9}{8}.$$

30.D. Cuando solo el alto participa, la firma elige $4 = pA$, y los beneficios son

$$\frac{1}{3}\left(A + (p-1)\frac{4}{p^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{p} + (p-1)\frac{4}{p^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{p} - \frac{4}{p^2}\right).$$

La condición de primer orden es

$$-\frac{8}{p^2} + \frac{8}{p^3} = 0 \Leftrightarrow p = 1.$$

Los beneficios son entonces $\frac{1}{3}\left(\frac{8}{p} - \frac{4}{p^2}\right) = 4/3$.

En la Parte C eran 9/8, que es menor que 4/3 : con la tarifa en dos partes conviene excluir a los consumidores bajos. Aún así, vemos que los beneficios de la tarifa en dos partes, 4/3, son menores que los beneficios de los contratos óptimos de la Parte A, que eran 3/2.

Ejercicio 31.A. Una persona con utilidad u_i debe elegir e para maximizar $w - ie^2$ sujeto a $w = ae + b$. Sustituyendo w, debe elegir e para maximizar $ae+b-ie^2$ cuya condición de primer orden es $a = 2ie \Leftrightarrow e_i^* = \frac{a}{2i}$.
31.B. Si el principal elige que participen todos debe fijar b de tal forma que el tipo 3 elija participar: lo deja indiferente entre participar y no $(a\frac{a}{6} + b - 3\left(\frac{a}{6}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{12}a^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e_1 - w_1) + \frac{1}{4}(e_2 - w_2) + \frac{1}{4}(e_3 - w_3) &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} - b\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{4} - a\frac{a}{4} - b\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{6} - a\frac{a}{6} - b\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} + \frac{1}{12}a^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{4} - a\frac{a}{4} + \frac{1}{12}a^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{6} - a\frac{a}{6} + \frac{1}{12}a^2\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

cuyo máximo es $\frac{289}{2496} = 0.1158$ en $a = \frac{17}{26}$. Tenemos entonces $b = -\frac{1}{12}a^2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{17}{26}\right)^2 = -\frac{289}{8112}$.

Otra alternativa (incorrecta) era maximizar (4.23) sin sustituir por el b que deja al 3 indiferente. Eso da un máximo en $a = \frac{1}{2}$ (y unos beneficios de $\frac{17}{192} - b$); luego, el b que deja al tipo 3 indiferente es tal que $a\frac{a}{6} + b - 3\left(\frac{a}{6}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{12}a^2 = -\frac{1}{48}$ y los beneficios son

$$\pi = \frac{17}{192} - b = \frac{17}{192} + \frac{1}{48} = \frac{7}{64} = 0.1094.$$

Si participan sólo los altos y los medios, el b se fija para que los medios participen: $a\frac{a}{4} + b - 2\frac{a^2}{16} = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{8}a^2$, y los beneficios son

$$\frac{1}{2}(e_1 - w_1) + \frac{1}{4}(e_2 - w_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} - b\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{4} - a\frac{a}{4} - b\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} + \frac{1}{8}a^2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{4} - a\frac{a}{4} + \frac{1}{8}a^2\right)$$

que se maximizan en $a = \frac{5}{7}$ con unos beneficios de $\pi = \frac{25}{224} = 0.1116$ y $b = -\frac{1}{8}\frac{25}{49} = -\frac{25}{392}$.

Finalmente, si participan sólo los altos, los beneficios son

$$\frac{1}{2}(e_1 - w_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} - b\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\frac{a}{2} + \frac{1}{4}a^2\right)$$

que se maximizan en $a = 1$ y son $\pi = \frac{1}{8}$.

Lo mejor es entonces que participen sólo los altos.

31.C. Le tiene que ir mejor, pues siempre puede ofrecer los contratos que elegirían los agentes en la parte B.

31.D. El principal debe elegir (w_1, e_1) y (w_2, e_2) para maximizar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(e_1 - w_1) + \frac{1}{2}(e_2 - w_2) \\ \text{sujeto a } w_1 - e_1^2 &\geq 0 \\ w_2 - 2e_2^2 &\geq 0 \\ w_1 - e_1^2 &\geq w_2 - e_2^2 \\ w_2 - 2e_2^2 &\geq w_1 - 2e_1^2. \end{aligned}$$

Como siempre, ponemos activa la de participación del bajo y la de incentivos del alto para obtener la función objetivo

$$\frac{1}{2}\left(e_1 - \left(e_1^2 + 2e_2^2 - e_2^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(e_2 - 2e_2^2\right)$$

que se maximiza con $e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = \frac{1}{6}$. Los salarios son entonces $w_2 = 2e_2^2 = 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$ y $w_1 = e_1^2 + e_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$. Estos números verifican las restricciones ignoradas.

Ejercicio 32.A. El monopolista elegirá $z = 2$, ya que si eligiera cualquier $z < 2$, podría cobrar más caro si produjera $z = 2$ y le cobrara a los consumidores un poco más caro. Por lo tanto, elegirá $z = 2$ y cobrará 40 a los consumidores con valoración $20z$ y 20 a los consumidores con valuación $10z$.

32.B. El problema del monopolista es el de elegir p_a, z_a, p_b y z_b para maximizar $\lambda p_a + (1-\lambda) p_b$ sujeto a

$$\begin{aligned} 20z_a - p_a &\geq 0 \\ 10z_b - p_b &\geq 0 \\ 20z_a - p_a &\geq 20z_b - p_b \\ 10z_b - p_b &\geq 10z_a - p_a \end{aligned}$$

Como siempre, ponemos la de participación del "bajo" activa y la de incentivos del alto activa: $p_b = 10z_b$, y

$$p_a = 20z_a + 10z_b - 20z_b = 20z_a - 10z_b.$$

Los beneficios son entonces

$$\lambda p_a + (1-\lambda) p_b = \lambda(20z_a - 10z_b) + (1-\lambda) 10z_b = 10z_b + 20\lambda(z_a - z_b).$$

Como son una función creciente de z_a, elegimos $z_a = 2$ (esto es, una vez más, la expresión típica de "no introducir distorsiones para el tipo más alto, con respecto a la solución de información perfecta") y el z_b óptimo depende de λ : si $\lambda < \frac{1}{2}$, se elige el z_b lo más grande posible, $z_b = 2$, y cobra a todos $p = p_a = p_b = 20$; si $\lambda > \frac{1}{2}$, la expresión de los beneficios es decreciente en z_b y el monopolista elige $z_b = 1$, $p_b = 10$ y $p_a = 30$.

Los beneficios de ofrecer ambos productos son $10z_b + 20\lambda(z_a - z_b) = 10 + 20\lambda$.

32.C. Si el monopolista ofreciera sólo el producto de calidad alta, para los altos, a un precio de 40, obtendría 40λ. Estos beneficios son mayores que $10 + 20\lambda$ (de la Parte B) si y sólo si $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la estrategia óptima para el monopolista es: si $\lambda < \frac{1}{2}$, vende una sola calidad $z = 2$, y cobra $p = 20$; si en cambio $\lambda \geq \frac{1}{2}$, vende una sola calidad, $z = 2$, pero a un precio de 40 (y no atiende a los θ_b).

Ejercicio 33.A. Los θ que compran son aquellos para los cuales $\theta v_j - p_j \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq p_j/v_j$. Por lo tanto, la cantidad de gente que compra es

$$D(p_j) = N\left[1 - F\left(\frac{p_j}{v_j}\right)\right] = N\left[1 - \frac{\frac{p_j}{v_j} - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}\right] = \overline{\theta} - \frac{p_j}{v_j}$$

para $p_j \leq v_j\overline{\theta}$, o 0 si $p_j \geq v_j\overline{\theta}$ o 1 si $p_j \leq v_j\underline{\theta}$. Los beneficios son $(p_j - c_j)D(p_j)$ y se maximizan para $p_j = \frac{\overline{\theta}v_j + c_j}{2}$. Hay que revisar dos condiciones de borde: que $p_j \leq v_j\overline{\theta}$, que se cumple siempre, ya que $\overline{\theta}v_j + c_j \leq 2v_j\overline{\theta} \Leftrightarrow c_j \leq v_j\overline{\theta}$, que asumimos que se cumple; que $p_j \geq v_j\underline{\theta}$, que se cumple sí y sólo si $c_j \geq v_j\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$. Esto define si todo el mercado está cubierto, o no.

Mercado cubierto completamente: $c_j < v_j\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$. En este caso la firma fija un precio de $p_j = v_j\underline{\theta}$ y vende a todos los individuos; las cantidades son N y los beneficios son $\pi_j^c = (v_j\underline{\theta} - c_j)N$.

Mercado no cubierto completamente: $c_j \geq v_j\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$. El precio es $p_j = \frac{\overline{\theta}v_j + c_j}{2}$, $D(p_j) = \frac{\overline{\theta}v_j - c_j}{2v_j}$ y $\pi_j^n = \frac{\left(c_j - \overline{\theta}v_j\right)^2}{4v_j}$.

33.B. Habrá tres tipos de consumidores: los que no compren, los que compran H y los que compran L. Los tipos más altos comprarán H, mientras que los intermedios L y los bajos nada. El tipo crítico (entre H y L) es aquél para el cual

$$\theta^c v_H - p_H = \theta^c v_L - p_L \Leftrightarrow \theta^c = \frac{p_H - p_L}{v_H - v_L}.$$

En forma similar, el tipo crítico entre comprar L y no comprar es

$$\theta_c v_L - p_L = 0 \Leftrightarrow \theta_c = \frac{p_L}{v_L}.$$

La empresa debe elegir p_L y p_H para maximizar

$$N\left(P(\theta \leq \theta_c)\,0 + P(\theta_c < \theta \leq \theta^c)(p_L - c_L) + P(\theta^c < \theta)(p_H - c_H)\right).$$

Asumimos **primero** que al más bajo no vale la pena venderle. En ese caso, la cuenta anterior se transforma en

$$(\theta^c - \theta_c)(p_L - c_L) + \left(\overline{\theta} - \theta^c\right)(p_H - c_H) = \left(\frac{p_H - p_L}{v_H - v_L} - \frac{p_L}{v_L}\right)(p_L - c_L) + \left(\overline{\theta} - \frac{p_H - p_L}{v_H - v_L}\right)(p_H - c_H)$$

Tomando condiciones de primer orden con respecto a p_H y p_L obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2p_Lv_H - 2p_Hv_L + c_Hv_L - c_Lv_H = 0 \\ 2p_L - 2p_H + c_H - c_L + \overline{\theta}v_H - \overline{\theta}v_L = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} p_L = \frac{c_L + \overline{\theta}v_L}{2} \\ p_H = \frac{c_H + \overline{\theta}v_H}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} q_L = \frac{c_Hv_L - c_Lv_H}{2v_L(v_H - v_L)} \\ q_H = \frac{\overline{\theta}}{2} - \frac{c_H - c_L}{2(v_H - v_L)} \end{array}$$

Para que sea cierto que al más bajo no vale la pena venderle, se debe cumplir que $p_L > v_L\underline{\theta} \Leftrightarrow c_L + \overline{\theta}v_L > 2v_L\underline{\theta} \Leftrightarrow c_L > v_L\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$. Si se viola esa condición, y tenemos $c_L \leq v_L\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$, y el **segundo** caso es cuando el mercado está cubierto: se fija $p_L = v_L\underline{\theta}$, y los beneficios son entonces

$$(\theta^c - \underline{\theta})(v_L\underline{\theta} - c_L) + \left(\overline{\theta} - \theta^c\right)(p_H - c_H) = \left(\frac{p_H - v_L\underline{\theta}}{v_H - v_L} - \underline{\theta}\right)(v_L\underline{\theta} - c_L) + \left(\overline{\theta} - \frac{p_H - v_L\underline{\theta}}{v_H - v_L}\right)(p_H - c_H).$$

La condición de primer orden con respecto a p_H es

$$\frac{\left(c_H - 2p_H - c_L + \overline{\theta}\left(v_H - v_L\right) + 2\underline{\theta}v_L\right)}{v_H - v_L} = 0 \Leftrightarrow p_H = v_L\underline{\theta} + \frac{c_H - c_L + \overline{\theta}\left(v_H - v_L\right)}{2}. \tag{4.24}$$

Las cantidades de equilibrio son entonces

$$q_L = \frac{c_H - c_L}{2\left(v_H - v_L\right)} + \frac{\overline{\theta} - 2\underline{\theta}}{2} \text{ y } q_H = \frac{\overline{\theta}}{2} - \frac{c_H - c_L}{2\left(v_H - v_L\right)}.$$

Debemos verificar que las cantidades sean razonables: que $q_L, q_H \geq 0$, que sean menores que N, etc. Anticipándonos a la Parte C, notamos que si $c_L = c_H = 0$, y el mercado está cubierto, $0 = c_L \leq v_L\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$ (por mercado cubierto), tendremos $q_L = \frac{\overline{\theta} - 2\underline{\theta}}{2} \leq 0$, que es un absurdo. La razón es que en $q_L = \frac{p_H - v_L\underline{\theta}}{v_H - v_L} - \underline{\theta}$, el p_H es demasiado chico. Para que $q_L \geq 0$, debemos tener $p_H \geq \underline{\theta}v_H$, pero con estos costos $p_H = v_L\underline{\theta} + \frac{\overline{\theta}\left(v_H - v_L\right)}{2} \geq \underline{\theta}v_H \Leftrightarrow \overline{\theta} \geq 2\underline{\theta}$, que es imposible.

33.C. La gracia de esta parte del ejercicio es ver si en este contexto puede haber bienes dañados: con igual costo, las firmas igual eligen ofrecer el bien de peor calidad, además del de buena calidad, como forma de segmentar el mercado.

Supongamos primero $2\underline{\theta} > \overline{\theta}$. En este caso, $c_L < v_L\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$. Si la firma ofrece un solo producto, vende a todos, obtiene (de la Parte A) $\pi_j^c = v_j\underline{\theta}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)$ por lo que le conviene vender sólo H. Si la firma ofrece los dos productos, el p_H óptimo es $p_H = \underline{\theta}v_H$ (el p_H de la fórmula (4.24) es demasiado chico y obtendríamos $q_L < 0$; en el óptimo, p_H es lo más chico posible que haga que $q_L \geq 0$, que es $p_H = \underline{\theta}v_H$). Los beneficios son los mismos que los de ofrecer sólo H.

Supongamos en cambio $2\underline{\theta} \leq \overline{\theta}$. En este caso, $c_j > v_j\left(2\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$ por lo que no se cubre todo el mercado. Los beneficios de ofrecer un solo bien son $\pi_j^n = \frac{\overline{\theta}^2 v_j}{4}$, por lo que ofrece sólo H. Si en cambio pensara en ofrecer los dos bienes, obtendría que el mercado no está cubierto, pero que $q_L = 0$, y otra vez, los beneficios de ofrecer los dos bienes son iguales a los de ofrecer sólo H.

Ejercicio 37.A. Con información completa, el principal debe elegir (w_h, e_h) y (w_t, e_t) para maximizar

$$\frac{1}{2}\left(e_h - w_h\right) + \frac{1}{2}\left(e_t - w_t\right)$$

sujeto a las dos restricciones de participación

$$w_h - 2e_h^2 = 0 \quad y \quad w_t - e_t^2 = 0.$$

Los contratos óptimos se encuentran sustituyendo w de las dos restricciones en la función objetivo y derivando:

$$\frac{1}{2}\left(e_h - 2e_h^2\right) + \frac{1}{2}\left(e_t - e_t^2\right) \Rightarrow e_t = \frac{1}{2}, e_h = \frac{1}{4}, w_t = \frac{1}{4}, w_h = \frac{1}{8}, \pi = \frac{3}{16}.$$

Con información asimétrica, eliminamos dos restricciones, resolvemos, y verificamos que las restricciones no estaban activas. El empresario debe elegir (w_h, e_h) y (w_t, e_t) para maximizar

$$\frac{1}{2}\left(e_h - w_h\right) + \frac{1}{2}\left(e_t - w_t\right)$$

sujeto a la participación del haragán y la de incentivos del trabajador

$$w_h - 2e_h^2 = 0 \quad y \quad w_t - e_t^2 = w_h - e_h^2.$$

Sustituyendo los salarios, $w_h = 2e_h^2$ y $w_t = e_h^2 + e_t^2$, en la función objetivo obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(e_h - 2e_h^2\right) + \frac{1}{2}\left(e_t - e_h^2 - e_t^2\right) \Rightarrow e_t = \frac{1}{2}, e_h = \frac{1}{6}, w_t = \frac{5}{18}, w_h = \frac{1}{18}, \pi = \frac{1}{6}.$$

Como siempre, distorsionamos el esfuerzo del mal tipo, y como siempre, el bueno (trabajador) obtiene una renta (más utilidad que la de reserva).

Ejercicio 37.B. El principal debe elegir (w, e) para maximizar $(e - w)/2$ sujeto a $w - e^2 \geq 0$ (en cualquier contrato, el haragán obtendrá utilidad negativa; y como no hay contratos para el haragán, desaparece la restricción de incentivos). En cualquier solución estará activa la restricción, por lo que sustituimos $w = e^2$ en la función objetivo y obtenemos $\left(e - e^2\right)/2$, que arroja $e = \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{4}$, y los beneficios $\pi = \frac{1}{8}$ (no es sorpresa, es el mismo problema que en la Parte A). Los beneficios en este caso tenían que ser menores que 1/6, pues le agregamos una restricción al principal (sólo contratar buenos). Otra forma de verlo, es que el principal, en el problema de la Parte A, podría ofrecer este contrato para el trabajador, y $(0, 0)$ para el haragán.

Ejercicio 38.A. Con información completa, el empresario debe elegir (w_a, e_a) y (w_b, e_b) para maximizar

$$\frac{1}{2}(e_a - w_a) + \frac{1}{2}(e_b - w_b)$$

sujeto a

$$w_a - ke_a - 2e_a^2 = 0 \quad y \quad w_b - ke_b - e_b^2 = 0.$$

Para $k \geq 1$, la solución es con $e_a = e_b = 0$. Para los otros k, la solución es

$$e_a = \frac{1-k}{4}, w_a = \frac{1-k^2}{8} \quad y \quad e_b = \frac{1-k}{2}, w_b = \frac{1-k^2}{4}.$$

38.B. Si $k \geq 1$, siguen siendo óptimos los contratos de la Parte A, ya que agregar las restricciones no cambia nada (teníamos la solución al problema con dos restricciones, y le agregamos dos restricciones que se cumplen con la solución vieja; por lo tanto, la solución vieja, al problema con menos restricciones, sigue siendo la nueva solución).

Para los otros valores de k, el empresario debe elegir (w_a, e_a) y (w_b, e_b) para maximizar

$$\frac{1}{2}(e_a - w_a) + \frac{1}{2}(e_b - w_b)$$

sujeto a las 4 restricciones habituales. Aunque no se aplica literalmente todo lo desarrollado en clase, podemos probar de eliminar dos restricciones, y verificar que se cumplen cuando tengamos la solución. También, sabemos que las dos restricciones que dejemos podemos ponerlas con igualdad, ya que si no estuvieran activas, podríamos bajar ambos sueldos para obtener una contradicción. Probamos con la de participación del que tiene costos altos, y la de incentivos del trabajador con costos bajos

$$w_a - ke_a - 2e_a^2 = 0 \quad y \quad w_b - ke_b - e_b^2 = w_a - ke_a - e_a^2.$$

Sustituyendo en la función objetivo obtenemos $e_a = \frac{1-k}{6}$, $w_a = -\frac{1}{9}(k-1)\left(k + \frac{1}{2}\right)$ y $e_b = \frac{1-k}{2}$, $w_b = -\frac{2}{9}(k-1)\left(k + \frac{5}{4}\right)$ que es similar a los resultados de clase (por ejemplo e_b se mantiene igual que en el caso de información completa). Es fácil ver que la de participación del de costos bajos se cumple, así que verificaremos sólo que se cumple la de incentivos del de costos altos:

$$0 \geq w_a - ke_a - 2e_a^2 \geq w_b - ke_b - 2e_b^2 = -\frac{2}{9}(k-1)^2.$$

Ejercicio 39.A. Para el alto, el contrato de arrendamiento óptimo resuelve: elegir R para maximizar R sujeto a $Q_a - R \geq \overline{u}$, y obtenemos $R^a = Q_a - \overline{u}$. Para el bajo, la solución es $R^b = Q_b - \overline{u}$.

39.B. Encontramos primero el contrato de arrendamiento de pooling óptimo. El estanciero debe elegir R para maximizar $2R$ sujeto a $Q_i - R \geq \overline{u}$ para $i = a, b$. Como Q_a es mayor que Q_b, la solución es con $R^p = Q_b - \overline{u}$. Este contrato le da un beneficio de $2R^p = 2(Q_b - \overline{u})$ al estanciero.

Para encontrar el contrato de medianería de pooling óptimo, el estanciero debe elegir α para maximizar $(1-\alpha)[Q_a + Q_b]$ sujeto a $\alpha Q_i \geq \overline{u}$ para $i = a, b$. Otra vez, la solución es poniendo activa la de participación del bajo, que arroja $\alpha^p = \overline{u}/Q_b$. Este contrato le da al estanciero un beneficio de

$$(1-\alpha^p)(Q_a + Q_b) = \left(1 - \frac{\overline{u}}{Q_b}\right)(Q_a + Q_b) > \left(1 - \frac{\overline{u}}{Q_b}\right) 2Q_b = 2(Q_b - \overline{u}) = 2R^p$$

por lo que el contrato de medianería es mejor que recibir $2R^p = 2(Q_b - \overline{u})$. La idea es que con el contrato de arrendamiento el alto se queda con *toda* la ganancia en Q_a sobre Q_b, mientras que en el de medianería debe aportar una parte de esa ganancia. El contrato óptimo es por tanto el de medianería. Aunque no se pide explícitamente, el contrato de pooling óptimo, es para una situación de información asimétrica, ya que no incluimos las restricciones de incentivos, pero sólo porque no se precisan (¡el estanciero ofrece sólo un contrato!).

39.C. En screening deben elegir contratos distintos. Como estamos con información completa, y la letra pide los contratos en los cuales se ofrece medianería al bajo y arrendamiento al alto, el estanciero elige α y R para maximizar

$$R + (1-\alpha) Q_b$$

sujeto a $\alpha Q_b \geq \overline{u}$ y $Q_a - R \geq \overline{u}$. La solución es con $R^a = Q_a - \overline{u}$ y $\alpha^b = \frac{\overline{u}}{Q_b}$.

39.D. El estanciero elige α y R para maximizar

$$(1-\alpha) Q_a + R$$

sujeto a $\alpha Q_a \geq \overline{u}$ y $Q_b - R \geq \overline{u}$. La solución es con $R^b = Q_b - \overline{u}$ y $\alpha^a = \frac{\overline{u}}{Q_a}$.

39.E. Probamos ahora screening, con información asimétrica, y donde no obligamos a los tipos a elegir esos contratos, sino que tenemos que incentivarlos. El problema es el de elegir α y R para maximizar

$$\begin{array}{ll} R + (1-\alpha) Q_b & \\ \text{sujeto a} \quad \alpha Q_b \geq \overline{u} & Q_a - R \geq \overline{u} \\ \quad\quad \alpha Q_b \geq Q_b - R & Q_a - R \geq \alpha Q_a \end{array}$$

Probamos con participación de b e incentivos de a activas: $\alpha^b = \frac{\overline{u}}{Q_b}$ y $Q_a - R^a = \alpha^b Q_a = \overline{u}\frac{Q_a}{Q_b} \Leftrightarrow R^a = Q_a - \overline{u}\frac{Q_a}{Q_b}$. Tenemos entonces que se cumple la restricción de participación de a, pues $Q_a - R \geq \overline{u} \Leftrightarrow \overline{u}\frac{Q_a}{Q_b} \geq \overline{u}$. También se cumple la de incentivos de b, pues

$$\alpha Q_b \geq Q_b - R \Leftrightarrow \overline{u} \geq Q_b - Q_a + \overline{u}\frac{Q_a}{Q_b} \Leftrightarrow (Q_b - \overline{u})(Q_a - Q_b) \geq 0$$

39.F. El problema es el de elegir α y R para maximizar

$$\begin{array}{ll} (1-\alpha) Q_a + R & \\ \text{sujeto a} \quad \alpha Q_a \geq \overline{u} & Q_b - R \geq \overline{u} \\ \quad\quad \alpha Q_a \geq Q_a - R & Q_b - R \geq \alpha Q_b \end{array}$$

De la de incentivos del a obtenemos $\alpha \geq 1 - \frac{R}{Q_a}$ y sustituyendo en la de incentivos de b obtenemos $Q_b - R \geq \alpha Q_b \geq Q_b - R\frac{Q_b}{Q_a}$ que se cumple solamente si $R = 0$. Luego, $\alpha \geq 1 - \frac{R}{Q_a}$ arroja $\alpha = 1$. La idea es

sencilla: el alto siempre paga más con la medianería que el bajo; si el bajo prefiere el arrendamiento, el alto lo preferirá siempre.

39.G. Los beneficios de la Parte B son $\left(1-\frac{\overline{u}}{Q_b}\right)(Q_a+Q_b)$. En la Parte E, teníamos $\alpha^b=\frac{\overline{u}}{Q_b}$ y $R^a=Q_a-\overline{u}\frac{Q_a}{Q_b}$, por lo que los beneficios son

$$R+(1-\alpha)Q_b=Q_a-\overline{u}\frac{Q_a}{Q_b}+\left(1-\frac{\overline{u}}{Q_b}\right)Q_b=\frac{(Q_a+Q_b)(Q_b-\overline{u})}{Q_b}.$$

En la Parte F los beneficios son 0. Los contratos óptimos son los de las Partes B y E; en el óptimo, siempre hay medianería.

Ejercicio 40.A. Con información completa, en el caso de θ_A elegirá s_5 y s_{10} para maximizar $\frac{1}{4}(5-s_5)+\frac{3}{4}(10-s_{10})$ sujeto a $\frac{1}{4}\sqrt{s_5}+\frac{3}{4}\sqrt{s_{10}}\geq\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{10}}{4}$, que ya sabemos que es con sueldos constantes, pero igual lo mostramos. De la restricción de participación obtenemos $u_5=\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3u_{10}$ que en la función objetivo queda

$$\frac{1}{4}\left(5-\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3u_{10}\right)^2\right)+\frac{3}{4}\left(10-u_{10}^2\right)\Rightarrow u_{10}=\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}=u_5$$

y los sueldos son $s_5^A=s_{10}^A=\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)^2=8.5892$.

En forma similar, para el θ_B tenemos que el principal maximiza

$$\frac{1}{2}\left(5-\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-u_{10}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(10-u_{10}^2\right)\Rightarrow u_{10}=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=u_5$$

con sueldos $s_5^B=s_{10}^B=\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2=7.2855$.

40.B. Como cambió la de participación de A, probamos con las dos típicas, más esta última activas, y vemos si se cumple la de incentivos ignorada. Las dos restricciones de participación dan $u_5^A=\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3u_{10}^A$ y $u_5^B=\sqrt{5}+\sqrt{10}-u_{10}^B$, mientras que la de incentivos de θ_A es

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}u_5^A+\frac{3}{4}u_{10}^A &= \frac{1}{4}u_5^B+\frac{3}{4}u_{10}^B\Rightarrow\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3u_{10}^A\right)+\frac{3}{4}u_{10}^A=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-u_{10}^B\right)+\frac{3}{4}u_{10}^B\Leftrightarrow u_{10}^B=\sqrt{10}\\ &\Rightarrow u_5^B=\sqrt{5}\end{aligned}$$

Luego nos queda elegir u_{10}^A para maximizar los beneficios; pero es lo mismo que el problema de la Parte A: los sueldos de θ_B ya han sido elegidos, y hay que maximizar utilizando sólo la de participación de θ_A; $s_5^A=s_{10}^A=\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)^2$. El problema es que no se cumplirá la de incentivos de θ_B : tanto este contrato como el que tenía en la Parte A le dan la utilidad de reserva, pero el contrato de θ_A (aquí y en la Parte A) le daban mayor utilidad

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)=2.9307>\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=2.6992.$$

Probamos entonces con las dos de participación, y la de incentivos de θ_B activas para obtener

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_5^B+\frac{1}{2}u_{10}^B &= \frac{1}{2}u_5^A+\frac{1}{2}u_{10}^A\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-u_{10}^B\right)+\frac{1}{2}u_{10}^B=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3u_{10}^A\right)+\frac{1}{2}u_{10}^A\\ &\Leftrightarrow u_{10}^A=\sqrt{10}\Rightarrow u_5^A=\sqrt{5}\end{aligned}$$

y una vez más queda el mismo problema que en la Parte A, pero para el problema de elegir el contrato de θ_B. El resultado es $u_{10}^B=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=u_5^B$.

Verificamos ahora si se cumple la de incentivos de θ_A :

$$\frac{1}{4}u_5^A + \frac{3}{4}u_{10}^A \geq \frac{1}{4}u_5^B + \frac{3}{4}u_{10}^B \text{ que se cumple pues } \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{10} > \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Ejercicio 41.A. El regulador debe elegir (p_a, T_a) y (p_b, T_b) para maximizar

$$\begin{aligned} & (1-\varphi)\left[S_a\left(p_a,T_a\right)+\alpha R_a\left(p_a,T_a\right)\right]+\varphi\left[S_b\left(p_b,T_b\right)+\alpha R_b\left(p_b,T_b\right)\right] \\ = \quad & (1-\varphi)\left[v_a\left(p_a\right)-T_a+\alpha\left(\pi_a\left(p_a\right)+T_a\right)\right]+\varphi\left[v_b\left(p_b\right)-T_b+\alpha\left(\pi_b\left(p_b\right)+T_b\right)\right] \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \pi_i\left(p_i\right)+T_i &\geq 0 \text{ para } i=a,b \\ \pi_a\left(p_a\right)+T_a &\geq \pi_a\left(p_b\right)+T_b \\ \pi_b\left(p_b\right)+T_b &\geq \pi_b\left(p_a\right)+T_a \end{aligned}$$

41.B. Para cada esquema regulatorio (p_a, T_a) y (p_b, T_b) definimos un nuevo esquema regulatorio (p_a, R_a) y (p_b, R_b) mediante $R_i = \pi_i(p_i) + T_i$. Sustituyendo $T_i = R_i - \pi_i(p_i)$ en la función objetivo, y en las restricciones obtenemos el problema en su nueva versión. Elegir (p_a, R_a) y (p_b, R_b) para maximizar

$$\begin{aligned} & (1-\varphi)\left[v_a\left(p_a\right)-R_a+\pi_a\left(p_a\right)+\alpha\left(\pi_a\left(p_a\right)+R_a-\pi_a\left(p_a\right)\right)\right]+\varphi\left[v_b\left(p_b\right)-R_b+\pi_b\left(p_b\right)+\alpha\left(\pi_b\left(p_b\right)+R_b-\pi_b\left(p_b\right)\right)\right] \\ = \quad & (1-\varphi)\left[v_a\left(p_a\right)+\pi_a\left(p_a\right)-(1-\alpha)R_a\right]+\varphi\left[v_b\left(p_b\right)+\pi_b\left(p_b\right)-(1-\alpha)R_b\right] \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \pi_i\left(p_i\right)+T_i &= R_i \geq 0 \text{ para } i=a,b \\ \pi_a\left(p_a\right)+T_a &= R_a \geq \pi_a\left(p_b\right)+T_b = \pi_a\left(p_b\right)+R_b-\pi_b\left(p_b\right) \Leftrightarrow R_a \geq \pi_a\left(p_b\right)+R_b-\pi_b\left(p_b\right) \\ \pi_b\left(p_b\right)+T_b &= R_b \geq \pi_b\left(p_a\right)+T_a = \pi_b\left(p_a\right)+R_a-\pi_a\left(p_a\right) \Leftrightarrow R_b \geq \pi_b\left(p_a\right)+R_a-\pi_a\left(p_a\right) \end{aligned}$$

41.C. De la Parte B, el problema del principal es el de elegir (p_a, R_a) y (p_b, R_b) para maximizar

$$\begin{aligned} & (1-\varphi)\left[v_a\left(p_a\right)+\pi_a\left(p_a\right)-(1-\alpha)R_a\right]+\varphi\left[v_b\left(p_b\right)+\pi_b\left(p_b\right)-(1-\alpha)R_b\right] \\ = \quad & (1-\varphi)\left[w_a\left(p_a\right)-(1-\alpha)R_a\right]+\varphi\left[w_b\left(p_b\right)-(1-\alpha)R_b\right] \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

41.D. De la Parte C, tenemos

$$\begin{aligned} R_i &\geq 0 \text{ para } i=a,b \\ R_a &\geq \Delta^\pi\left(p_b\right)+R_b \\ R_b &\geq R_a-\Delta^\pi\left(p_a\right) \end{aligned}$$

41.E. El regulador debe elegir, para cada estado i, p_i y R_i para maximizar

$$w_i\left(p_i\right)-(1-\alpha)R_i$$

sujeto a $R_i \geq 0$ (no hay probabilidades, ni restricción de incentivos, porque estamos en información completa). Como $R_i > 0$ no puede ser óptimo (le resta a la función objetivo), ponemos $R_i = 0$, y el problema se transforma en uno de elegir p_i para maximizar $w_i(p_i)$. La solución de ese problema es p_i^*. Por lo tanto, con información completa el regulador elegirá $(p_i, R_i) = (p_i^*, 0)$.

41.F. Las restricciones de incentivos de la Parte D se pueden reescribir en forma compacta como

$$\left.\begin{array}{l} R_a - R_b \geq \Delta^\pi(p_b) \\ \Delta^\pi(p_a) \geq R_a - R_b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta^\pi(p_a) \geq R_a - R_b \geq \Delta^\pi(p_b).$$

Por lo tanto, vemos que si $\Delta^\pi(p_a^*) \geq 0 \geq \Delta^\pi(p_b^*)$ se cumple, entonces se cumplen las restricciones de incentivos, en los contratos de información completa (y por tanto se pueden implementar). Nos resta entonces mostrar que si se pueden implementar, entonces se cumple $\Delta^\pi(p_a^*) \geq 0 \geq \Delta^\pi(p_b^*)$. Asumamos que no se cumple la ecuación y veremos que no se pueden implementar.

Supongamos, por ejemplo, que $0 > \Delta^\pi(p_a^*)$. En ese caso, si el regulador ofrece los contratos $(p_a^*, 0)$ y $(p_b^*, 0)$, en el estado b el agente querrá anunciar que el estado es a, pues

$$R_a - \Delta^\pi(p_a) = -\Delta^\pi(p_a) > 0 = R_b$$

y se violará su restricción de incentivos. Entonces los contratos de información completa no se pueden implementar.

41.G. Asumamos que se cumple $\Delta^\pi(p_a) \geq \Delta^\pi(p_b)$. Mostraremos que existe un par de rentas R_a y R_b que cumplen las cuatro restricciones. Si se cumple $\Delta^\pi(p_a) \geq \Delta^\pi(p_b)$, existe un d tal que $\Delta^\pi(p_a) \geq d \geq \Delta^\pi(p_b)$, y para ese d, siempre se puede elegir $R_a \geq 0$ y $R_b \geq 0$ tal que $R_a - R_b = d$. Por lo tanto tendremos

$$\begin{array}{rcl} R_i & \geq & 0 \text{ para } i = a, b \\ \Delta^\pi(p_a) & \geq & d \geq \Delta^\pi(p_b) \Leftrightarrow \Delta^\pi(p_a) \geq R_a - R_b \geq \Delta^\pi(p_b) \end{array}$$

lo que asegura que se cumplen las 4 restricciones, y por tanto el par p_a, p_b es implementable.

Demostramos ahora el converso: si un par p_a, p_b es implementable, entonces debemos tener $\Delta^\pi(p_a) \geq \Delta^\pi(p_b)$. Si el par es implementable, existen R_a y R_b tales que (por las restricciones de incentivos, y usando la Parte F) $\Delta^\pi(p_a) \geq R_a - R_b \geq \Delta^\pi(p_b)$, por lo que se debe cumplir $\Delta^\pi(p_a) \geq \Delta^\pi(p_b)$.

Ejercicio 42.A. De la Parte F del Ejercicio **??** sabemos que los contratos de información completa se pueden implementar si y sólo si

$$\Delta^\pi(p_a^*) \geq 0 \geq \Delta^\pi(p_b^*) \Leftrightarrow \pi_a(p_a^*) - \pi_b(p_a^*) \geq 0 \geq \pi_a(p_b^*) - \pi_b(p_b^*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi_a(p_a^*) \geq \pi_b(p_a^*) \\ \pi_b(p_b^*) \geq \pi_a(p_b^*) \end{array}\right.$$

como queríamos demostrar.

42.B. Una forma gráfica fácil de ver por qué es cierto es ver que la aproximación lineal de c, por q_1 (tomando q_2 como variable) es

$$f(q_2) = c(q_1) + c'(q_1)(q_2 - q_1)$$

y como c es convexa, $c(q_2) \geq f(q_2)$. Haga el gráfico para comprobarlo. Pero hay que hacerlo más formal.

Supongamos que $q_2 \geq q_1$. Entonces como c es convexa, c' es creciente, y por tanto $c'(q) \geq c'(q_1)$ para todo $q \geq q_1$ y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} c(q_2) & = & c(q_1) + \int_{q_1}^{q_2} c'(q)\,dq \geq c(q_1) + \int_{q_1}^{q_2} c'(q_1)\,dq = c(q_1) + c'(q_1)\int_{q_1}^{q_2} 1 dq \\ & = & c(q_1) + c'(q_1)(q_2 - q_1). \end{array}$$

En forma similar, si $q_1 \geq q_2$, debemos usar $\int_{q_2}^{q_1} c'(q)\,dq = -\int_{q_1}^{q_2} c'(q)\,dq$ y $c'(q) \leq c'(q_1)$ para todo $q \leq q_1$ para obtener

$$\begin{array}{rcl} c(q_2) & = & c(q_1) + \int_{q_1}^{q_2} c'(q)\,dq = c(q_1) - \int_{q_2}^{q_1} c'(q)\,dq \\ & \geq & c(q_1) - \int_{q_2}^{q_1} c'(q_1)\,dq = c(q_1) + c'(q_1)(q_2 - q_1) \end{array}$$

como queríamos demostrar.

42.C. Tenemos que p_i^* maximiza

$$w_i = v_i(p) + \pi_i(p) = \int_p^\infty Q_i(s)\,ds + [pQ_i(p) - c(Q_i(p))] = \int_p^\infty Q_i(s)\,ds + pQ_i(p) - c(Q_i(p)),$$

por lo que la CPO es

$$w_i' = 0 \Leftrightarrow -Q_i(p) + Q_i(p) + pQ_i'(p) - c'(Q_i(p))\,Q_i'(p) = 0 \Leftrightarrow p = c'(Q_i(p)).$$

Otra forma equivalente es, para $P_i(q) = Q_i^{-1}(q)$, la función inversa de la demanda (la disposición a pagar por la unidad q), y para $q_i^* = Q_i(p_i^*)$, w_i se puede reescribir de la siguiente manera

$$\int_0^{q_i^*} P_i(q)\,dq - c(q_i^*)$$

por lo que si el regulador elige q para maximizar esta ecuación, obtenemos

$$P_i(q_i^*) = c'(q_i^*) \Leftrightarrow P_i(Q_i(p_i^*)) = c'(q_i^*) \Leftrightarrow p_i^* = c'(q_i^*) = c'(Q_i(p_i^*)).$$

Esto es la condición típica de precio igual costo marginal; no como condición de equilibrio en un mercado competitivo, sino la contracara, que dice que el mercado competitivo es eficiente (en el mercado competitivo, precio igual costo marginal; y como eso es lo eficiente como demuestran estos cálculos, el mercado competitivo es eficiente). La razón por la que esto es eficiente es que si p fuera mayor que el costo marginal, habría unidades que los consumidores valorarían más que lo que costaría su producción, que no se estarían produciendo.

42.D. Tomemos $\pi_a(p_a^*) - \pi_b(p_a^*) \geq 0$ y $q_2 = Q_b(p_a^*)$ y $q_1 = Q_a(p_a^*)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\pi_b(p_a^*) &= p_a^* Q_b(p_a^*) - c(Q_b(p_a^*)) \leq p_a^* Q_b(p_a^*) - [c(Q_a(p_a^*)) + c'(Q_a(p_a^*))(Q_b(p_a^*) - Q_a(p_a^*))] \\
&= p_a^* Q_b(p_a^*) - c(Q_a(p_a^*)) - p_a^*(Q_b(p_a^*) - Q_a(p_a^*)) = p_a^* Q_a(p_a^*) - c(Q_a(p_a^*)) = \pi_a(p_a^*)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. La otra restricción de incentivos es similar y la omitimos.

Ejercicio 43.A. Si puede observar el tipo del agente, deberá elegir (para cada tipo) s y e para minimizar $s + t - e$, sujeto a $s = \frac{e^2}{2}$. El resultado es que $e_i^* = 1$ para $i = a, b$.

43.B. Tenemos $e_{ba} = t_b - c_a = t_b - (t_a - e_{aa}) = e_{aa} - \Delta t$. En forma similar, $e_{ab} = t_a - c_b = t_a - (t_b - e_{bb}) = e_{bb} + \Delta t$.

43.C. Las cuatro restricciones son

$$\begin{aligned}
s_a - \frac{e_{aa}^2}{2} &\geq 0 \\
s_b - \frac{e_{bb}^2}{2} &\geq 0 \\
s_a - \frac{e_{aa}^2}{2} &\geq s_b + c_b - t_a + e_{ab} - \frac{e_{ab}^2}{2} = s_b + t_b - e_{bb} - t_a + e_{ab} - \frac{e_{ab}^2}{2} \\
&= s_b - \frac{e_{ab}^2}{2} = s_b - \frac{(e_{bb} + \Delta t)^2}{2} \\
s_b - \frac{e_{bb}^2}{2} &\geq s_a - \frac{e_{ba}^2}{2} = s_a - \frac{(e_{aa} - \Delta t)^2}{2}
\end{aligned}$$

43.D. Ponemos participación de a e incentivos de b activos:

$$s_b - \frac{e_{bb}^2}{2} = s_a - \frac{(e_{aa} - \Delta t)^2}{2} = \frac{e_{aa}^2}{2} - \frac{(e_{aa} - \Delta t)^2}{2} \Leftrightarrow s_b = \frac{e_{bb}^2}{2} + \frac{e_{aa}^2}{2} - \frac{(e_{aa} - \Delta t)^2}{2}.$$

El regulador debe elegir entonces e_{aa} y e_{bb} para minimizar

$$\beta(s_b + c_b) + (1-\beta)(s_a + c_a) = \beta\left(\frac{e_{bb}^2}{2} + \frac{e_{aa}^2}{2} - \frac{(e_{aa} - \Delta t)^2}{2} + t_b - e_{bb}\right) + (1-\beta)\left(\frac{e_{aa}^2}{2} + t_a - e_{aa}\right)$$

por lo que la condición de primer orden con respecto a e_{bb} (como siempre, es la misma que en el problema con información completa) es $e_{bb} = 1$ y con respecto a e_{aa} es $\beta\left(e_{aa} - e_{aa} + \Delta t\right) + (1-\beta)\left(e_{aa} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow e_{aa} = 1 - \frac{\beta}{1-\beta}\Delta t$ (el típico resultado que el esfuerzo del malo se distorsiona hacia abajo).

Ejercicio 44 A. Para el A, el empresario maximiza beneficios $x - w$, sujeto a que $w - 3e^2 \geq \overline{u} = 0$; simplificando, maximiza $24e - 3e^2$, que da un contrato $(w_A, e_A) = (48, 4)$. Para el B el empresario maximiza $24e - 2e^2$ que da como óptimo $(w_B, e_B) = (72, 6)$.

44 B. Con información asimétrica, ponemos activas la restricción de participación de A y la de incentivos de B, para obtener $w_A = 3e_A^2$ y

$$\begin{aligned} w_B - 2e_B^2 &= w_A - 2e_A^2 = 3e_A^2 - 2e_A^2 \Leftrightarrow w_B = 2e_B^2 + e_A^2 \Rightarrow \\ \pi &= q\left(24e_A - 3e_A^2\right) + (1-q)\left(24e_B - 2e_B^2 - e_A^2\right). \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden con respecto a e_B dan (como siempre) $e_B = 6$, y con respecto a e_A queda $e_A = 12\frac{q}{2q+1}$, por lo que los contratos óptimos son $(w_A, e_A) = \left(3\left(\frac{12q}{2q+1}\right)^2, \frac{12q}{2q+1}\right)$ y $(w_B, e_B) = \left(72 + \left(\frac{12q}{2q+1}\right)^2, 6\right)$.

Se verifican también las restricciones ignoradas.

Lo que es interesante de estos contratos es que a medida que aumenta la proporción de tipos A se vuelve más importante extraer esfuerzo de ellos y por tanto crece e_A. Pero al extraerles más esfuerzo, hay que pagarles más, y eso hace que haya que pagarle más al agente tipo B.

44 C. Los empresarios compiten hasta maximizar la utilidad de A, sujeto a beneficio 0 : la utilidad a maximizar es entonces $24e - 3e^2$, que da como contrato óptimo $(w_A, e_A) = (96, 4)$. En este caso es fácil ver que si se le ofrece al B cualquier contrato distinto a aquél que maximiza su utilidad sujeto a beneficio 0, que es $(w_B, e_B) = (144, 6)$, una firma podría ganar dinero ofreciendo un contrato "por debajo" de la línea $w = 24e$, y por encima de la curva de indiferencia del B en el contrato. Por lo tanto el contrato original no podría ser de equilibrio.

En este caso los contratos de equilibrio con información completa son los mismos que los de información incompleta, pues cada agente prefiere el contrato diseñado para él.

Ejercicio 45. La utilidad que obtiene el A sin la compañía es 7, por lo que la empresa le ofrecerá $(49, 49)$ al A : si le ofrece menos utilidad que 7, el agente no toma el seguro; si le ofrece un contrato (w_b, w_a) con más utilidad que 7, podría ganar más dinero ofreciendo $(w_b - \varepsilon, w_a - \varepsilon)$. Si le ofrece 7 de utilidad, pero con riesgo, sabemos que es más barato ofrecer $(7, 7)$ que cualquier otro contrato. Similarmente, la empresa ofrecerá al B el contrato $(42.25, 42.25)$ que da una utilidad de $\frac{13}{2}$.

45.B. Ponemos activa la de participación de B y la de incentivos de A. Supongamos que la proporción de buenos es λ. Las restricciones, escritas en términos de utilidades, no de riqueza, nos dan $u_b^B = \frac{26}{3} - \frac{1}{3}u_a^B$ y

$$\frac{1}{2}u_b^A + \frac{1}{2}u_a^A = \frac{1}{2}u_b^B + \frac{1}{2}u_a^B \Leftrightarrow u_b^A = \frac{2}{3}u_a^B - u_a^A + \frac{26}{3}.$$

En la función objetivo

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\left(36 - u_b^{A2}\right) + \frac{1}{2}\left(64 - u_a^{A2}\right)\right) + (1-\lambda)\left(\frac{3}{4}\left(36 - u_b^{B2}\right) + \frac{1}{4}\left(64 - u_a^{B2}\right)\right)$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\left(36 - \left(\frac{2}{3}u_a^B - u_a^A + \frac{26}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(64 - u_a^{A2}\right)\right) + (1-\lambda)\left(\frac{3}{4}\left(36 - \left(\frac{26}{3} - \frac{1}{3}u_a^B\right)^2\right) + \frac{1}{4}\left(64 - u_a^{B2}\right)\right)$$

La condición de primer orden con respecto a u_a^A queda

$$\begin{aligned}\lambda\left(-\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{2}{3}u_a^B-u_a^A+\frac{26}{3}\right)(-1)\right)-\frac{1}{2}2u_a^A\right) &= 0\Leftrightarrow\left(\text{ uso } u_b^A=\frac{2}{3}u_a^B-u_a^A+\frac{26}{3}\right) \qquad (4.25)\\ \left(u_b^A\right)(-1)+u_a^A &= 0\Leftrightarrow u_a^A=u_b^A\end{aligned}$$

(no se distorsiona la elección, de A, como siempre). Por otro lado, la condición de primer orden con respecto a u_a^B queda

$$-\lambda\left(\frac{2}{3}u_a^B-u_a^A+\frac{26}{3}\right)\frac{2}{3}+(1-\lambda)\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{26}{3}-\frac{1}{3}u_a^B\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}u_a^B\right)=0.$$

que junto con (4.25) arroja $u_a^A=39\frac{1-\lambda}{6-4\lambda}, u_a^B=\frac{39-65\lambda}{6-4\lambda}$.

Por ejemplo, con $\lambda=\frac{1}{2}$ queda $u_a^A=u_b^A=\frac{39}{8}$ y $u_a^B=\frac{13}{8}$, $u_b^B=\frac{65}{8}$.

45 C. Con competencia, las compañías maximizan la utilidad de B sujeto a beneficio 0, y le ofrecen un contrato $\frac{3}{4}36+\frac{1}{4}64=43$ en los dos estados. Luego, al A le ofrecerían el mejor contrato (que B no toma) que arroja beneficio $0:\frac{1}{2}w_b+\frac{1}{2}*w_a=\frac{1}{2}36+\frac{1}{2}64=50\Leftrightarrow w_a=100-w_b$, y $\frac{3}{4}w_b^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\left(100-w_b\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{43}$, que arroja $w_b\leq 37.2$ y $w_a=62.8$.

Esto podría no ser un equilibrio, si hubiera suficientes tipos A en el mercado, pero no tenemos información suficiente para determinar si es un equilibrio o no con los datos proporcionados.

Ejercicio 46. Cada agente debe elegir e para maximizar

$$w-je^2=ae+b-je^2\Rightarrow e_j^*=\frac{a}{2j}.$$

Para el más haragán, el b que lo deja con utilidad 0 es

$$u_3=ae+b-3e^2=a\frac{a}{6}+b-3\left(\frac{a}{6}\right)^2=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{12}a^2$$

Con ese b participan todos (verifíquelo, pero la idea es que todos podrían elegir el esfuerzo del tipo $j=3$, y como les cuesta menos el esfuerzo, obtendrían más que ese tipo de persona).

Por lo tanto, para cada a y b, los beneficios del principal son

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-a\frac{a}{2}-b\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{4}-a\frac{a}{4}-b\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{6}-a\frac{a}{6}-b\right)=-\frac{17}{48}a^2+\frac{17}{48}a-b\\ &= -\frac{17}{48}a^2+\frac{17}{48}a+\frac{1}{12}a^2\Rightarrow a^*=\frac{17}{26},\pi^*=\frac{289}{2496}=0.116,b^*=-\frac{289}{8112}\end{aligned}$$

Si en cambio sólo participan los $j=1,2$, el b que deja a $j=2$ con utilidad 0 es

$$u_2=ae+b-2e^2=a\frac{a}{4}+b-2\left(\frac{a}{4}\right)^2\Leftrightarrow b=-\frac{1}{8}a^2$$

y los beneficios son

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-a\frac{a}{2}-b\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{4}-a\frac{a}{4}-b\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-a\frac{a}{2}+\frac{a^2}{8}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{4}-a\frac{a}{4}+\frac{a^2}{8}\right)\Rightarrow\\ a^* &= \frac{5}{7},\pi^*=\frac{25}{224}=0.112\end{aligned}$$

Finalmente, si sólo participan los tipo 1, el b óptimo es $u_1=a\frac{a}{2}+b-2\left(\frac{a}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow b=0$, y los beneficios son

$$\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-a\frac{a}{2}\right)\Rightarrow a^*=\frac{1}{2},\pi^*=\frac{1}{16}=0.063.$$

El principal elegirá que participen todos.

Ejercicio 47.A. En el caso del Bajo, el dueño elige w_5, w_{10} para maximizar $\frac{1}{2}(5-w_5)+\frac{1}{2}(10-w_{10})$ sujeto a $\frac{1}{2}\sqrt{w_5}+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$. Despejando de la restricción con igualdad y sustituyendo en los beneficios, la condición de primer orden es

$$\frac{1}{2}(5-w_5)+\frac{1}{2}\left(10-\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_5}\right)^2\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-2\sqrt{w_5}}{2\sqrt{w_5}}=0 \Leftrightarrow w_5=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=w_{10}.$$

Como es habitual, se le ofrece seguro total al trabajador averso, con $w_5^B=w_{10}^B=\overline{u}_B=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=7.2856$. En forma similar, el contrato del Alto maximiza $\frac{1}{4}(5-w_5)+\frac{3}{4}(10-w_{10})$ sujeto a $\frac{1}{4}\sqrt{w_5}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}} \geq \frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}$, que arroja $w_5^A=w_{10}^A=\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)^2=8.589$.

47.B. El problema del dueño es el de elegir $\left(w_5^A, w_{10}^A\right)$ y $\left(w_5^B, w_{10}^B\right)$ para maximizar

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(5-w_5^B\right)+\frac{1}{2}\left(10-w_{10}^B\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(5-w_5^A\right)+\frac{3}{4}\left(10-w_{10}^A\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a } \frac{1}{2}\sqrt{w_5^B}+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}^B} &\geq \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10}\\
\frac{1}{4}\sqrt{w_5^A}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^A} &\geq \frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\\
\frac{1}{2}\sqrt{w_5^B}+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}^B} &\geq \frac{1}{2}\sqrt{w_5^A}+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}^A}\\
\frac{1}{4}\sqrt{w_5^A}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^A} &\geq \frac{1}{4}\sqrt{w_5^B}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^B}
\end{aligned}$$

La solución "típica" de poner activas participación de B $w_5^B=\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)^2$ e incentivos de A

$$\frac{1}{4}\sqrt{w_5^A}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^A}=\frac{1}{4}\sqrt{w_5^B}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^B} \Rightarrow w_5^A=\left(\sqrt{w_5^B}+3\sqrt{w_{10}^B}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)^2=\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}+2\sqrt{w_{10}^B}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)^2$$

nos da una función objetivo

$$\frac{65}{8}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)^2-\frac{3}{8}w_{10}^A-\frac{1}{4}w_{10}^B-\frac{1}{8}\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}+2\sqrt{w_{10}^B}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)^2\right)$$

que se maximiza en $w_{10}^A=\frac{8}{25}\sqrt{5}\sqrt{10}+\frac{12}{5}, w_{10}^B=\frac{9}{50}\sqrt{5}\sqrt{10}+\frac{27}{20}$, que sin embargo viola la restricción de participación de A: $2.1593<\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}=2.9$.

Poniendo las dos participaciones activas, w_5^B como antes y $w_5^A=\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)^2$, en la de incentivos de A activa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sqrt{w_5^A}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^A} &= \frac{1}{4}\sqrt{w_5^B}+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^B} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^A}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)+\frac{3}{4}\sqrt{w_{10}^B} \Leftrightarrow\\
\sqrt{5}+3\sqrt{10} &= \sqrt{5}+\sqrt{10}+2\sqrt{w_{10}^B} \Leftrightarrow w_{10}^B=10 \Rightarrow w_5^B=5.
\end{aligned}$$

La función objetivo es entonces

$$\frac{65}{8}-\frac{1}{4}w_5^B-\frac{3}{8}w_{10}^A-\frac{1}{4}w_{10}^B-\frac{1}{8}w_5^A=\frac{65}{8}-\frac{5}{4}-\frac{3}{8}w_{10}^A-\frac{10}{4}-\frac{1}{8}w_5^A$$

que es "la misma" que la de información completa y por tanto se maximiza en $w_5^A=w_{10}^A=\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)^2$. Pero eso viola incentivos de B: el A tiene sueldos constantes y más altos en promedio. La solución debe

ser entonces con las participaciones y la de incentivos de B activa: $w_5^B = \left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)^2$, $w_5^A = \left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)^2$ y

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}^B}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3\sqrt{w_{10}^A}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{w_{10}^A}.$$

Sabemos que el lado izquierdo es sencillamente $\overline{u}_B$ (pues es el lado izquierdo de la de participación de B). Eso hace que desaparezcan los salarios de B: nos queda entonces $w_{10}^A = 10$. Poniendo esto y $w_5^A = \left(\sqrt{5}+3\sqrt{10}-3\sqrt{10}\right)^2 = 5$ en la función objetivo, nos queda la solución del problema de información completa de B,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(5-w_5^B\right)+\frac{1}{2}\left(10-w_{10}^B\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(5-5\right)+\frac{3}{4}\left(10-10\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(5-\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{w_{10}^B}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(10-w_{10}^B\right)\right)$$

que por supuesto tiene la misma solución que en la Parte A: $w_5^B = w_{10}^B = \overline{u}_B = 7.2856$.

Verificamos que se cumple la de incentivos de A: A obtiene su utilidad de reserva $\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10} = 2.9307$ que es mayor que recibir 7.2856 seguro ya que sabemos que $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10} = 2.6992$

$$2.699 = \sqrt{7.2856} = \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{10} < \frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{10} = 2.9307.$$

5 Teorema de la Envolvente

En este capítulo presentamos una versión sencilla de un resultado muy útil que se llama el Teorema de la Envolvente.

Teorema de la Envolvente (sin restricciones). Suponga que para cada x la función $g(x,\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es derivable y que alcanza un máximo en un único $y(x)$ que es una función derivable de x. Entonces, la función

$$f(x)=\max_y g(x,y)$$

es derivable y tenemos que

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}.$$

Demostración. Como $g(x,\cdot)$ es derivable y alcanza un máximo, debemos tener que en el $y(x)$ que maximiza $g(x,\cdot)$ se cumple que

$$\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y(x))}=0. \tag{5.1}$$

Como por definición $f(x)=g(x,y(x))$, tenemos que por la regla de la cadena y usando la ecuación (5.1),

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}+\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y(x))}\frac{dy(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}+0\frac{dy(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}$$

como queríamos demostrar. ■

Veremos ahora un ejemplo de cómo funciona el Teorema de la Envolvente.

Ejemplo. Sea $g(x,y)=-y(y-x)$. El y óptimo para cada x es $y(x)=x/2$. Por lo tanto, $f(x)=x^2/4$. Vemos entonces que

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{x}{2}.$$

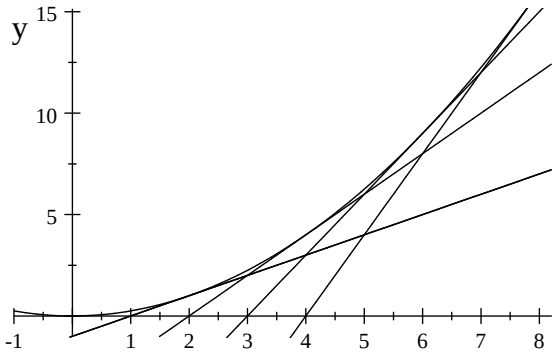
Usando el Teorema de la Envolvente y $\partial g/\partial x=y$ obtenemos

$$\frac{df(x)}{dx}=\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y(x))}=y|_{(x,y(x))}=\frac{x}{2}$$

que es lo mismo que hacer el cálculo directamente.

En este ejemplo es útil y fácil hacer dos gráficos. En el primero, ponemos y en las abcisas. Para cada x la función g es una parábola con un máximo en $x/2$ y raíces 0 y x. Eso ilustra por qué $y(x)=x/2$.

El segundo gráfico es más interesante, e ilustra por qué se llama Teorema de la Envolvente. Graficamos $g(x,y)$ para $y=1,2,3$ y 4. La curva que "envuelve" a todas esas rectas "por encima" es $x^2/4$, es decir, la función $f(x)$. Esta función es la que elige, para cada x el y que hace que la función $g(x,y)$ sea la más alta.



Así por ejemplo, tenemos que para $x = 2$, la recta más alta es la que corresponde a $y = 1$, que está graficada. Para esa recta, la pendiente es 1. No es casualidad que la pendiente de $f(x) = x^2/4$ en $x = 2$ es 1. ■

En términos "intuitivos" o "económicos" el Teorema de la Envolvente nos dice que cuando cambia x, el valor máximo de f cambia por dos motivos. Primero, cambia por el cambio directo sobre g. Pero f también cambia por el cambio en g provocado por el cambio en el y óptimo. Pero como y había sido elegido en una porción en que g era "chata" con respecto a y ($\partial g/\partial y = 0$ en el y óptimo) este segundo cambio no afecta el valor de f y sólo debemos preocuparnos por el cambio directo en g provocado por el cambio en x.

Ilustramos esto ahora con un problema de maximización de beneficios de una firma. La función de beneficios de una firma, como función de los salarios es

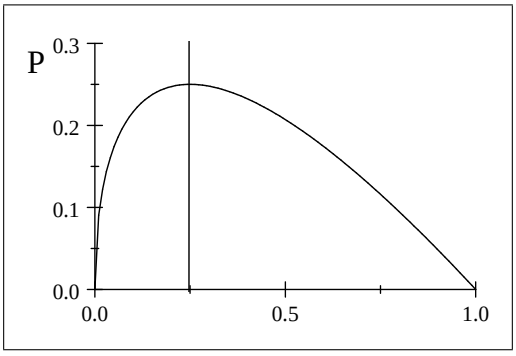
$$P(w) = \max_l [f(l) - wl].$$

Para hacerlo más concreto, supongamos que $f(l) = \sqrt{l}$. Tenemos entonces que

$$l(w) = \frac{1}{4w^2} \quad \text{y} \quad P(w) = \frac{1}{4w}.$$

Cuando, por ejemplo, suben los salarios, P cae porque tenemos una cierta cantidad de gente contratada. Es más, por cada suba de \$1 en los salarios, los beneficios caen en l (eso es la derivada directa de $f(l) - wl$ con respecto a w) pues hay que pagarle \$1 adicionales a cada trabajador, y eso da $\$l$. Pero a este efecto se suma el hecho que la cantidad óptima de trabajadores cambia al subir el salario, y este cambio en la cantidad de gente contratada también afecta los beneficios. El Teorema de la Envolvente nos dice que este segundo efecto no es relevante. Entonces, el cambio en los beneficios es $-l$ evaluado en el óptimo, $1/4w^2$. Si derivamos $P(w)$ con respecto a w vemos que eso es correcto.

Para hacerlo aún más concreto, imaginemos que originalmente los sueldos son \$1. Entonces, los beneficios son $\sqrt{l} - l$



Cuando los salarios cambian un poco,

- la firma tiene que pagarle un poco más a cada uno de sus trabajadores (1/4 en este caso)
- cambiará un poco el número óptimo de trabajadores, cambiando (en principio) los beneficios.

Pero como los beneficios son chatos en $l = 1/4$, este segundo efecto desaparece. Por lo tanto, el cambio total en los beneficios es sólo el primer efecto, y eso es lo que nos dice el Teorema de la Envolvente. En términos de la demostración, aplicado a este caso,

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \underbrace{\frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x}}_{\text{Efecto Directo}} + \underbrace{\frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial y}}_{\text{Cambio en beneficios de cambiar "}l\text{"}} \frac{dy^*(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x} + 0\frac{dy^*(x)}{dx} = \frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Presentamos ahora una versión sólo un poco más general del Teorema de la Envolvente.

Teorema de la Envolvente (con restricciones). Sea $f(x)$ la función de valor en el problema de maximizar $g(x,y)$ en y, sujeto a $h(x,y)=c$. Es decir, $f(x)=\max_{y:h(x,y)=c} g(x,y)$. Si f es diferenciable en un cierto x, y λ es el multiplicador de Lagrange asociado al y óptimo en x, $y(x)$, entonces

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_s}=\frac{\partial g(x,y(x))}{\partial x_s}-\lambda\frac{\partial h(x,y(x))}{\partial x_s}$$

La demostración es sencilla y queda a cargo del lector (que también la puede buscar en el apéndice matemático del Mas-Colell, Whinston y Green). Una aplicación "entretenida" de esta versión del Teorema de la Envolvente es la siguiente.

Aplicación. Los multiplicadores de Lagrange como "Precios Sombra". En general se le llama al multiplicador de Lagrange de una restricción el "precio sombra" de "relajar" esa restricción. Para ver por qué, tomemos el problema de maximizar $u(x)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ sujeto a $px=w$. El Lagrangeano de este problema es

$$L=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}+\lambda(px-w)$$

que arroja como solución

$$x(p,w)=\left(\frac{\alpha w}{p_1},\frac{(1-\alpha)w}{p_2}\right).$$

De la condición de primer orden obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \lambda p_1 \Leftrightarrow \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}\frac{1}{p_1}=\lambda \Leftrightarrow\\ \lambda &= \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

y la utilidad máxima alcanzable por el individuo es

$$v(p,w)=w\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha}.$$

Lo que el individuo estaría dispuesto a pagar (en términos de "útiles" o unidades de utilidad) por aumentar un poquito la riqueza es entonces

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}=\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)}{p_2}\right)^{1-\alpha}=\lambda.$$

A eso se le llama el precio "sombra" (o subjetivo, o no observable) de la riqueza (de aumentar la riqueza y relajar o aflojar la restricción presupuestal).

Una manera más sencilla de ver la conexión entre la utilidad marginal de aumentar w y λ se obtiene con el Teorema de la Envolvente: como $v(p,w)=\max_{x:px-w=0}u(x)$, tenemos que

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}=\frac{\partial u(x)}{\partial w}-\lambda\frac{\partial(px-w)}{\partial w}=\lambda$$

que era justamente lo que queríamos mostrar. ■

Ejercicio 65 Un granjero tiene un terreno de h hectáreas, y un tractor que puede usar por t horas. Con cada hora de tractor, planta una hectárea, que produce 1 tonelada de soja. El precio de la soja es \$1 por tonelada. No tiene costos de usar la tierra, o el tractor y cualquier recurso ocioso no produce nada (no puede alquilarlo a un vecino). Para cada uno de las tres posibilidades (h más chico que t, igual, o mayor), determine cuánto está dispuesto a pagar el granjero por agrandar "un poquito" su terreno.

Envolvente: Soluciones

Ejercicio 65. Consideramos primero el caso en que $h < t$. Es obvio que el granjero utilizará todas sus hectáreas, y que por tanto sus beneficios serán $\pi = h$. Tenemos entonces que $d\pi/dh = 1$. Esa es la respuesta. Pero para hacerlo más largo y técnico, tenemos que el granjero debe elegir H, T para maximizar

$$\begin{aligned} & & \min\{H, T\} \\ \text{sujeto a } H & \leq & h \\ T & \leq & t \end{aligned}$$

El Lagrangiano de este problema es

$$L = \min\{H, T\} - \lambda(H - h) - \mu(T - t).$$

Como h es menor que t, queda $L = H - \lambda(H - h)$, por lo que la condición de primer orden es $\lambda = 1$ y $H = h$ (esto sale de Kuhn-Tucker). Por supuesto, los beneficios son $\pi = h$ (como ya sabíamos). Si queremos hacer $d\pi/dh$, podemos hacerlo directamente, o con el Teorema de la Envolvente: como $\pi(h) = \max_H L(H, h)$, tenemos

$$\frac{d\pi}{dh} = \frac{\partial L}{\partial h} = \lambda = 1.$$

Siguiendo razonamientos parecidos a este, obtenemos que en los otros casos el granjero está dispuesto a pagar 0 por ampliar su terreno. El único caso "curioso" es cuando $h = t$, en cuyo caso las dos restricciones están activas, pero el granjero no está dispuesto a pagar nada por relajarlas.

6 Algebra Lineal y Optimización.

Empezar con un breve repaso de dimensión de un subespacio para Lagrange.

Un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^N$ es **convexo** si para todo $x, y \in X$, y $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha) y \in X$.

Teorema 1 ***Separación de Convexos.*** *Sea $X \subseteq \mathbf{R}^N$ un conjunto convexo y cerrado con la propiedad que si $x \in X$, entonces $\lambda x \in X$ para todo $\lambda \geq 0$. Si $y \notin X$, entonces existe $p \in \mathbf{R}^N$ tal que $p.y > 0 \geq p.x$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Tomemos cualquier plano que intersecte a y y a X, y llamemos X' a la intersección de X con el plano (si no existe, el teorema ya queda demostrado). Es fácil ver que X' es convexo, y que un convexo en un plano se puede separar por una recta de un y que no está en X'. Una demostración sencilla de esto es la siguiente. De los cursos básicos de álgebra lineal en el liceo sabemos que cualquier plano en $\mathbf{R}^N$ es "equivalente" al plano $\mathbf{R}^2$ (existe una función lineal que nos lleva del plano a $\mathbf{R}^2$ y vuelta), así que asumimos sin pérdida de generalidad que el plano que nos quedó es de hecho $\mathbf{R}^2$, y también que $y = 0$. Tenemos que mostrar entonces que hay una recta que pasa por 0, y no por X'. Luego, definimos para cada $x \in \mathbf{R}^2$, la longitud de x como $r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, y la función $f(x) = x/r$. Con esta función, el conjunto X' se mapea a un pedazo de la circunferencia, que es estrictamente más chico que la mitad (si hubiera dos puntos opuestos de la imagen de X' sobre la circunferencia, como X' era convexo, una combinación de esos puntos nos daría que el 0 pertenecía a X', que es falso). Por lo tanto, podemos pasar una línea por 0 que no intersecta a la imagen de X' en la circunferencia. Por construcción, tampoco intersecta a X'.

Hecho esto, "dividimos" el espacio $\mathbf{R}^N$ usando la recta: identificaremos a todos los puntos $v, w \in \mathbf{R}^N$ tales que $v - w = u - z$ para algunos u y z en la recta (es como que "aplastamos" a $\mathbf{R}^N$ en la dirección de la recta). Por ejemplo, si en $\mathbf{R}^3$ la recta elegida fuera perpendicular al plano $\{x : x_1 = 0\}$, (es decir, la recta sería, para algún a y b, el conjunto $\{x : x_2 = a, x_3 = b\}$) el proceso de "dividir" al conjunto X sería el proceso de proyectar el conjunto X sobre el plano $\{x : x_1 = 0\}$.

Luego de la división, repetimos lo hecho hasta ahora: tomamos un plano que intersecte a y y al conjunto X (que ahora ya no es un conjunto de $\mathbf{R}^N$, sino de $\mathbf{R}^{N-1}$), encontramos una recta que los separe, y repetimos el proceso. Continuamos de esa manera $N-1$ veces, hasta que y es un punto en una recta, y X es un intervalo cerrado en esa misma recta. Luego, elegimos un punto que los separa; ese punto era una recta la última vez que dividimos el espacio; esa recta era un plano la pen-última vez que dividimos el espacio, etc. Sucede entonces que el punto elegido es un "hiperplano" en $\mathbf{R}^N$: un subespacio afin ("lineal") de dimensión $N-1$, que no intersecta ni a y ni a X. Todo hiperplano en $\mathbf{R}^N$ se puede expresar como $\{z : pz = c\}$ para algún $p \in \mathbf{R}^N$ y $c \in \mathbf{R}$, con los elementos de un lado del hiperplano cumpliendo $p.y > c$ y los del otro, $c > p.x$. Como X quedó a un lado del hiperplano y y del otro, obtenemos $p.y > c > p.x$ para todo $x \in X$. Si c fuera tal que $0 > c$, obtendríamos una contradicción, pues podríamos poner $x = 0 \in X$, para que quedara $0 > c > p.x = 0$. Por lo tanto sabemos que para algún $c \geq 0$, $p.y > c > p.x$ para todo $x \in X$. Pero si sucediera que $p.x > 0$ para algún x, tendríamos que para λ suficientemente grande, $p.\lambda x > c$, lo que sería una contradicción con $\lambda x \in X$. Deducimos entonces que para algún c, $p.y > c \geq 0 \geq p.x$ para todo $x \in X$, como queríamos demostrar. ■

La demostración anterior es la que más me gusta, y se puede usar en casos más generales que $\mathbf{R}^N$. El Mas-Colell et al. tiene otra que también está buena, pero que requiere usar maximización y otras cosas que veremos más adelante (más otras cosas, como que una función continua en un cerrado y acotado tiene un máximo, demostrar que la distancia $d(x, y)$ para un y fijo es una función continua, etc).

Ejercicio 2 Hay tres premios posibles, \$1, \$2 y \$3. El individuo tiene preferencias (completas y transitivas) sobre las loterías sobre esos premios: sus preferencias están definidas sobre $\Delta = \left\{p \in \mathbf{R}^3_+ : p_1 + p_2 + p_3 = 1\right\}$. Sabemos que el individuo es indiferente entre recibir \$2 seguro y una lotería que da \$3 con probabilidad 3/4, y \$1 con probabilidad 1/4 : $(0,1,0) \sim \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$. Sabemos también que p es preferido a q si y sólo si para todo $\alpha \in (0,1)$, $\alpha p + (1-\alpha) r \succeq \alpha q + (1-\alpha) r$ y que $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$.

Parte A. Defina una preferencia $\trianglerighteq$ sobre $\mathbf{R}^3$ mediante $x \trianglerighteq y$ si y sólo si existen $p, q \in \Delta$ y $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tales que $p \succeq q$ y $x - y = \lambda (p - q)$. Sea X el conjunto de todos los x tales que $\sum x_i = 0$ y $x \trianglerighteq 0$. Muestre que si $x \trianglerighteq y$, entonces $x - y \trianglerighteq 0$ y muestre también que si $x - y \trianglerighteq 0$ (es decir $x - y \in X$) entonces $\lambda (x - y) \trianglerighteq 0$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}_+$ (es decir, $\lambda (x - y) \in X$).

Parte B. Encuentre un $u \in \mathbf{R}^3$ tal que para x con $\sum x_i = 0$, $ux \geq 0$ si y sólo si $x \in X$.

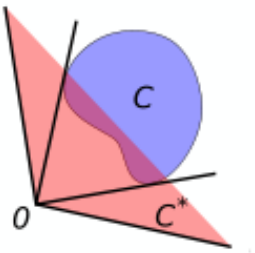
Parte B. Hay dos formas de hacer esta parte.
Parte B.I. Por un lado, de $(0,1,0) \sim \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ y $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$ podemos encontrar $u \in \mathbf{R}^3$ tal que $p \succeq q \Leftrightarrow u.p \geq u.q$: $u_2 = \frac{1}{4} u_1 + \frac{3}{4} u_3$ (y podemos normalizar si queremos $u_1 = 0$ y $u_3 = 1$ para obtener $u = \left(0, \frac{3}{4}, 1\right)$. Luego,

$$x \in X \Leftrightarrow x \trianglerighteq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0, p \succeq q : x = \lambda (p - q) \Leftrightarrow u.x = u.\lambda (p - q) = \lambda (u.p - u.q) \geq 0,$$

como queríamos demostrar.
Parte B.II. La segunda forma es la siguiente. X es un cono (como establecimos en la Parte A), y es relativamente fácil ver que es cerrado y convexo (en este caso alcanza con saber que hay una indiferencia, pero para hacerlo en $\mathbf{R}^n$ se precisa que las preferencias sean continuas). Entonces, tomemos cualquier $y \notin X$ y por el Teorema de Separación de Convexos, existe $u = -p$ tal que $(-p) y < 0 \leq (-p) x \Leftrightarrow uy < 0 \leq ux$ para todo $x \in X$. Falta mostrar que si $ux \geq 0$ entonces $x \in X$. Supongamos que $x \notin X$. En tal caso, para algún α pequeño, sabemos que para $m = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, no se cumple que $m + ax \succeq m$, pues de lo contrario tendríamos $x = \frac{1}{a}(m + ax - m)$ que implicaría $x \in X$. Deducimos (por completitud) que $m \succ m + ax$; más aún, $m \succ m + ay$ para todo y cercano a x (existe un ε tal que para todo y con $\|x - y\| < \varepsilon$, $m \succ m + ay$. Como $m \succ m + ax$, tenemos que $\frac{1}{a}(m - m - ax) = -x \in X$ y por tanto $u(-x) \geq 0 \Leftrightarrow ux \leq 0$, y lo mismo, $uy \leq 0$, para todo y cercano a x. Si tuviéramos $ux = 0$, habría algún y cercano a x con $uy > 0$, que sería contradictorio con $uy \leq 0$.

Parte C. Muestre que $p \succeq q$ si y sólo si $up \geq uq$, o lo que es lo mismo, $\sum u_i p_i \geq \sum u_i q_i$

Dado un conjunto C en $\mathbf{R}^N$, el **cono dual** de C es $C^* = \{y : y.x \geq 0, \forall x \in C\}$. Es decir, para ver si y está en el cono dual de C, debo ver si cada vez que lo multiplico por un x en C, me da positivo el producto (es decir, si x e y están "en la misma dirección").



Para el enunciado del siguiente resultado, recordamos que para cualquier matriz (o vector) $A_{N\times m}$, A^T es la matriz traspuesta de A, una matriz de $m \times N$ cuyas filas son las columnas de A.

Lema 3 ***Farkas***. *Dada una matriz A de $N \times m$, y un vector $b \in \mathbf{R}^N$, se cumple exactamente una de las siguientes alternativas:*
- $A^T y \geq 0$ *para algún* y *con* $b^T y < 0$
- $Ax = b$ *para algún* $x \geq 0$.

En palabras: o b es una combinación lineal positiva de los vectores de la matriz A (esa es la segunda alternativa), o hay algún y "apuntando en la dirección opuesta de b", que "apunta en la misma dirección que todos los vectores de A." Una vez que sabemos el teorema de separación de convexos, el lema de Farkas es obvio: o b está adentro del cono de A (todas las combinaciones positivas de vectores en A; esa es la segunda alternativa), o está afuera y en ese caso se pueden separar con un hiperplano que tiene como vector normal a y.

Demostración. Definimos

$$K = \left\{y : A^T y \geq 0\right\},\ K^* \equiv \left\{b : b^T y \geq 0, \forall y \in K\right\} \quad \text{y también} \quad \widetilde{K} = \left\{Ax : x \geq 0\right\}.$$

Mostraremos primero que $\widetilde{K}$ es el cono dual de K : es decir, $\widetilde{K} = K^*$ (muchos matemáticos piensan que eso no necesita demostración: como K es el dual de $\widetilde{K}$, y K^* el dual de K, y los conos cerrados C tienen la propiedad que $C = C^{**}$, ya estaría demostrado poniendo $C = \widetilde{K}$. Tendríamos que $\left(\widetilde{K}\right)^* = K$ implica, tomando duales en ambos lados $\widetilde{K} = \left(\widetilde{K}\right)^{**} = K^*$). Para ver eso, mostraremos primero que $\widetilde{K} \subset K^*$ y luego que $K^* \subset \widetilde{K}$. Tomemos algún $b = Ax$ en $\widetilde{K}$, y para mostrar que $b \in K^*$, mostraremos que $b^T y = x^T A^T y \geq 0$ para cualquier $y \in K$. Como $y \in K$, tenemos $A^T y \geq 0$, y como $b = Ax$ está en $\widetilde{K}$, tenemos $x \geq 0$. Por lo tanto, $b^T y = x^T A^T y \geq 0$ (por ser el producto de dos vectores positivos).

Para mostrar que $K^* \subset \widetilde{K}$, tomemos algún b tal que $b^T y \geq 0, \forall y \in K$, y mostremos que $b = Ax$ para algún $x \geq 0$. Si no existiera $x \geq 0$ tal que $b = Ax$, habría un z tal que $b^T z > 0 \geq x^T A^T z$ para todo $x \geq 0$ (por el Teorema 1 de separación de convexos). Entonces, para $\widetilde{y} = -z$ tendríamos $b^T \widetilde{y} < 0 \leq x^T A^T \widetilde{y}$ para todo $x \geq 0$. Concluimos que: $x^T A^T \widetilde{y} \geq 0$ para todo $x \geq 0$, lo que implica $A^T \widetilde{y} \geq 0$ (si este vector tuviese la i-ésima coordenada negativa, podríamos poner $x_j = 0$ para todo j, y $x_i = 1$), es decir $\widetilde{y} \in K$; y teníamos además $b^T \widetilde{y} < 0$. Eso es una contradicción, ya que habíamos asumido $b^T y \geq 0, \forall y \in K$ (habíamos empezado con $b \in K^*$).

De la discusión anterior deducimos

$$\widetilde{K} = \left\{Ax : x \geq 0\right\} = K^* = \left\{b : b^T y \geq 0, \forall y \in K\right\}.$$

Por supuesto, se cumple una y sólo una de las siguientes alternativas: $b \in K^*$ o $b \notin K^*$. Si $b \in K^*$, tenemos que $b \in \widetilde{K}$ y se cumple la segunda alternativa de la letra del lema. Si $b \notin K^*$, quiere decir que existe $y \in K$ tal que $b^T y < 0$, o lo que es lo mismo, existe y con $A^T y \geq 0$ tal que $b^T y < 0$ (que es lo que queríamos demostrar). ■

Ejercicio 4 Aplicación de Farkas. Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, b^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \ y \ \ b^4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

encontrar en cada caso el $x \geq 0$ tal que $Ax = b$, o el y tal que $b^T y < 0$ y $A^T y \geq 0$.

Para ver cómo usaremos el Lema de Farkas, en optimización en general y en Kuhn-Tucker en particular, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Optimización y Farkas. Debemos elegir x_1, x_2 para maximizar $f(x) = x_1 + x_2$ sujeto a $x_1, x_2 \geq 0$ y

$$\begin{aligned} h^1(x) &\equiv x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1 \\ h^2(x) &\equiv 2x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Si graficamos la región admisible, es la intersección de dos elipses (centradas en $(0,0)$) con el cuadrante positivo. Como las curvas de nivel de $x_1 + x_2$ son rectas paralelas con pendiente -1, el óptimo se encuentra en la intersección de los bordes de las elipses. Como es un punto simétrico, es en el punto (x, x) con $x^2 + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{3}$. En el punto $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, los gradientes de f, h^1, y h^2 son

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h^1(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \nabla h^2(x) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Vemos también que con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2\sqrt{3}$ tenemos que

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla h^1(x) + \lambda_2 \nabla h^2(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Para ver qué es lo que está sucediendo, dibuje: las elipses, la curva de nivel que pasa por x y los 3 gradientes empezando en el punto x –no en $(0,0)$.

Lo que dice Farkas, con $A = \left[\nabla h^1(x), \nabla h^2(x)\right]$ y $b = \nabla f(x)$, es que si no pudiésemos escribir $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla h^1(x) + \lambda_2 \nabla h^2(x)$ para $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T \geq 0$ (λ hace las veces de x en Farkas) entonces existiría algún y tal que para $z = -y$ tendríamos $A^T z \leq 0$ y $b^T z > 0$. Eso nos dice que moviéndonos en la dirección de z, aumentamos el valor de f, y las restricciones siguen inactivas, pues $\nabla h^1(x).z \leq 0$, $\nabla h^2(x).z \leq 0$ y $\nabla f(x).z > 0$.

Si por el contrario, intentáramos escribir $\nabla f(w) = A\lambda$, para $\lambda \geq 0$ en $w = \left(1/\sqrt{2}, 0\right)^T$ que es un punto dentro de la región factible, tendríamos que los gradientes serían

$$\nabla f(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h^1(w) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla h^2(w) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como no podemos escribir $\nabla f(w) = \lambda_1 \nabla h^1(w) + \lambda_2 \nabla h^2(w)$ para ningún $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (es decir, no es cierto que $b = \nabla f(w) = A\lambda$ para $A = \left[\nabla h^1(w), \nabla h^2(w)\right]$) el Lema de Farkas nos dice que existe un $z = -y$ tal que $A^T z \leq 0$ para algún z con $b^T z > 0$. En este ejemplo, ese z puede ser $z = x - w$ (para el x óptimo)

$$z = x - w = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^T z = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \quad \text{y} \quad A^T z = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Es decir, como w no se puede escribir como una combinación de los gradientes de h^1 y h^2, pudimos encontrar un z tal que si nos movemos en la dirección de z, aumenta el valor de la función (en este caso al máximo) y las restricciones se siguen cumpliendo. Una "sutileza" de este ejemplo, es que el hecho que $A^T z$ tenga sus dos componentes menores estrictos que 0 sugiere, y es correcto, que si nos movemos en la dirección de z el valor de h^2 debería caer estrictamente cuando de w nos movemos un poco en la dirección de z. Lo "raro" de esto es que en x, h^2 tiene el mismo valor que en w, por lo que deducimos que h^2 primero cae y luego vuelve a subir (al movernos en la dirección de z). ■

Optimización

Algunas cosas interesantes antes de comenzar con optimización son las siguientes. Ayudarán con la interpretación de los resultados, y de los gráficos.

Si vamos a movernos ε (chico) en la dirección de algún vector u, el cambio en el valor de la función es

$$\left.\frac{df\left(x+\varepsilon u_1, y+\varepsilon u_2\right)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}u_2 = \bigtriangledown f u.$$

Eso es la "derivada direccional". Un caso particular es cuando u es alguno de los vectores canónicos e_i. En ese caso, la $i-$ésima derivada parcial de f es $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \bigtriangledown f e_i$.

Entonces, si nos dicen "te podés mover en cualquier dirección que quieras, para aumentar lo más que puedas el valor de f, pero tenés que moverte poquito", nos tienen que restringir el valor de u. De lo contrario, elegimos u gigante, y la f cambia "todo lo que querramos". ¿Cuál es el u de tamaño 1, $\|u\| = 1$, que maximiza lo que aumenta f? Es decir, debemos elegir u, sujeto a $\|u\| = 1$, para maximizar $\bigtriangledown f u$. Es decir, debemos elegir a para maximizar

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}a + \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\sqrt{1-a^2} \Rightarrow \frac{d\left(f_1 a + f_2\sqrt{1-a^2}\right)}{da} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(f_1\sqrt{1-a^2} - af_2\right) = 0 \tag{6.1}$$

si ponemos $a = kf_1$ y $\sqrt{1-a^2} = kf_2$ obtenemos $f_1 kf_2 - kf_1 f_2 = 0$ (para cualquier k; eligiendo k apropiado $k\bigtriangledown f$ nos queda con norma 1) por lo que la solución es elegir $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ colineal con $\bigtriangledown f$. De todas maneras, resolviendo si queremos la ecuación (6.1), tenemos $f_1\sqrt{1-a^2} = af_2 \Leftrightarrow a = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$ y el vector queda

$$\left(a, 1-a\right) = \left(\frac{f_1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}, \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}} \bigtriangledown f.$$

Otra forma de ver lo anterior es recordar que $u.v = \|u\|\|v\|\cos\theta$ donde θ es el ángulo formado por u y v. En ese caso, si queremos maximizar $\bigtriangledown f u$, debemos maximizar $\|\bigtriangledown f\|\|u\|\cos\theta$, pero como $\bigtriangledown f$ y $\|u\|$ están fijos, con $\|u\| = 1$, sólo podemos elegir θ. Como $\cos\theta$ está entre -1 y 1, alcanzará con elegir aquél θ para el que el coseno es 1 : el grado entre ambos vectores debe ser 0.

La interpretación de esto es "fácil" si dibujamos una flecha de un largo fijo partiendo de un punto en una curva de indiferencia: si nos movemos en la dirección de la curva, no subimos de nivel; lo mejor es moverte perpendicular a la curva de indiferencia; y eso es el gradiente. Calcular gradiente para $f = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ en $(x,y) = (1,2)$ y dibujar (el gradiente partiendo del punto $(1,2)$, no de 0). El gradiente siempre es perpendicular a la curva de nivel.

Comenzamos con optimización sin restricciones. Sea $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$. Un vector $\overline{x} \in \mathbf{R}^N$ es un **máximo local** de f si existe un abierto $A \subset \mathbf{R}^N$ que contiene a $\overline{x}$ tal que $f\left(\overline{x}\right) \geq f\left(x\right)$ para todo x en A. Si $f\left(\overline{x}\right) \geq f\left(x\right)$ para todo x en $\mathbf{R}^N$, decimos que $\overline{x}$ es un **máximo global**. Si f es diferenciable, al vector de las derivadas parciales de f lo llamamos gradiente de f, y escribimos

$$\bigtriangledown f\left(x\right) = \left(\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2}..., \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_N}\right).$$

Teorema 6 ***(MJ.1 del Mas-Colell).*** *Asuma que $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ es diferenciable y que $\overline{x}$ es un máximo local de f. Entonces $\bigtriangledown f\left(\overline{x}\right) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{x}$ es un máximo local, pero que $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} \neq 0$ para algún i. Asumamos, sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = c > 0$. Por definición de la derivada parcial, sabemos que para e^i el i-ésimo vector canónico ($e^i_i = 1$ y $e^i_j = 0$ para $j \neq i$),

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\overline{x} + \varepsilon e^i\right) - f(\overline{x})}{\varepsilon} = c > 0$$

y eso quiere decir que para todo ε suficientemente pequeño, $\frac{f\left(\overline{x}+\varepsilon e^i\right)-f(\overline{x})}{\varepsilon} \geq \frac{c}{2}$, y en particular, que $f\left(\overline{x} + \varepsilon e^i\right) > f(\overline{x})$, lo que contradice que $\overline{x}$ fuera un máximo local (ya que $\overline{x} + \varepsilon e^i$ pertenece al abierto A para ε suficientemente pequeño). ■

Definimos ahora la matriz de derivadas segundas de f :

$$D^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}.$$

Teorema 7 ***(MJ.2 del Mas-Colell).*** *Asuma que $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ es dos veces continuamente diferenciable. Entonces, si $\overline{x}$ es un máximo local de f, $D^2 f(\overline{x})$ es semidefinida negativa (para todo x, $x' D^2 f(\overline{x}) x \leq 0$) y si $D^2 f(\overline{x})$ es definida negativa (para todo $x \neq 0$, $x' D^2 f(\overline{x}) x < 0$) entonces $\overline{x}$ es un máximo local.*

Demostración. Si $\overline{x}$ es un máximo local, sabemos que en cualquier dirección x que nos movamos un poco, $f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x}) \leq 0$, o lo que es lo mismo,

$$\frac{f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x})}{\varepsilon^2} \leq 0.$$

Si tomamos la función $g(\varepsilon) = f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x})$ y hacemos la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de $\varepsilon = 0$ obtenemos (siendo x' el transpuesto de x),

$$f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x}) = \varepsilon \bigtriangledown f(\overline{x}) x + \frac{\varepsilon^2}{2} x' D^2 f(\overline{x}) x + \text{Resto}$$

(donde el resto "se va a 0 más rápido que ε^2," o $\lim_{\varepsilon \to 0} \text{Resto}/\varepsilon^2 = 0$). Por lo tanto, si para algún x tuviésemos $x' D^2 f(\overline{x}) x > 0$, tendríamos que para ε suficientemente pequeño, y usando $\bigtriangledown f(\overline{x}) = 0$,

$$\frac{1}{2} x' D^2 f(\overline{x}) x + \frac{\text{Resto}}{\varepsilon^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon \bigtriangledown f(\overline{x}) x + \frac{\varepsilon^2}{2} x' D^2 f(\overline{x}) x + \text{Resto}}{\varepsilon^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x})}{\varepsilon^2} > 0$$

lo que constituye una contradicción.

A su vez, si $x' D^2 f(\overline{x}) x < 0$ para todo $x \neq 0$, tendríamos que para ε pequeño, $f(\overline{x} + \varepsilon x) - f(\overline{x}) < 0$, asegurando que $\overline{x}$ es un máximo local. ■

Una función $f : X \to \mathbf{R}$, para $X \subset \mathbf{R}^N$ un conjunto convexo, es **cóncava** si para todo $x, x' \in X$ y $\alpha \in [0, 1]$ se cumple que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) x') \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(x').$$

(utilidad marginal decreciente, aversión al riesgo).

Teorema 8 ***(MC.1 del Mas-Colell).*** *La función continuamente diferenciable $f : X \to \mathbf{R}$, para $X \subset \mathbf{R}^N$ convexo, es cóncava si y sólo si,*

$$f(x+z) \leq f(x) + \nabla f(x)\, z \tag{6.2}$$

para todo $x \in X$, $z \in \mathbf{R}^N$ con $x + z \in X$.

Demostración. Suponga que f es cóncava y note que como $f(\alpha y + (1-\alpha)x) \geq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x)$ se cumple para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in (0,1]$, eso implica que para $z = y - x$ tenemos

$$f(x+\alpha z) \geq \alpha f(x+z) + (1-\alpha) f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha} + f(x) \geq f(x+z). \tag{6.3}$$

Debemos pasar ahora de esta última ecuación a la ecuación (6.2). Para ello definimos $g(\alpha) = f(x+\alpha z)$ y notamos que la derivada de g en $\alpha = 0$ es

$$g'(0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha}.$$

De esta última línea, y de la ecuación (6.3) obtenemos

$$\frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha} + f(x) \geq f(x+z) \Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha} + f(x) \geq f(x+z) \Leftrightarrow g'(0) + f(x) \geq f(x+z). \tag{6.4}$$

Usando la regla de la cadena en $g(\alpha) = f(x_1 + \alpha z_1, ..., x_N + \alpha z_N)$ obtenemos

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{\partial f(x_1 + \alpha z_1, ..., x_N + \alpha z_N)}{\partial x_1} z_1 + ... + \frac{\partial f(x_1 + \alpha z_1, ..., x_N + \alpha z_N)}{\partial x_N} z_N \Rightarrow \\ g'(0) &= \frac{\partial f(x_1, ..., x_N)}{\partial x_1} z_1 + ... + \frac{\partial f(x_1, ..., x_N)}{\partial x_N} z_N \Leftrightarrow g'(0) = \nabla f(x)\, z \end{aligned}$$

y juntando esto con la ecuación (6.4) nos queda

$$g'(0) + f(x) \geq f(x+z) \Leftrightarrow \nabla f(x)\, z + f(x) \geq f(x+z)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Falta demostrar que si se cumple la ecuación (6.2) para todo $x \in X$, $z \in \mathbf{R}^N$ con $x + z \in X$, entonces la función es cóncava. ■

Una aplicación sencilla del Teorema 8 es la "famosa" desigualdad de Jensen: para f cóncava, y una variable aleatoria $\widetilde{X}$, $Ef\left(\widetilde{X}\right) \leq f\left(E\widetilde{X}\right)$. Para ver por qué, en la ecuación (6.2) pongamos $x = E\widetilde{X}$ y $z = \widetilde{X} - E\widetilde{X}$. La ecuación queda entonces

$$f\left(\widetilde{X}\right) \leq f\left(E\widetilde{X}\right) + \nabla f\left(E\widetilde{X}\right)\left(\widetilde{X} - E\widetilde{X}\right)$$

y tomando esperanzas en ambos lados obtenemos $Ef\left(\widetilde{X}\right) \leq Ef\left(E\widetilde{X}\right) + \nabla f\left(E\widetilde{X}\right) E\left(\widetilde{X} - E\widetilde{X}\right) = f\left(E\widetilde{X}\right)$, como queríamos demostrar.

Las funciones cóncavas son importantes, porque sus puntos críticos son máximos globales.

Teorema 9 ***(MJ.3 del Mas-Colell).*** *Si f es cóncava, continuamente diferenciable y $\nabla f(x^*) = 0$, entonces x^* es un máximo global.*

Demostración. El Teorema 8 asegura que para cualquier x', si ponemos $x = x^*$ y $z = x' - x^*$ tenemos $f(x^* + x' - x^*) \leq f(x^*) + \nabla f(x^*)(x' - x^*)$. Como $\nabla f(x^*) = 0$, obtenemos $f(x') \leq f(x^*)$ para todo x', como queríamos demostrar. ■

Habitualmente es difícil verificar directamente, con la definición, si una función es cóncava. Por eso, es útil el siguiente resultado.

Teorema 10 ***(MC.2 del Mas-Colell).*** *La función doblemente continuamente diferenciable $f : X \to \mathbf{R}$, para $X \subset \mathbf{R}^N$, es cóncava si y sólo si $D^2(x)$ es semidefinida negativa para todo $x \in X$.*

Demostración. Demostraremos sólo que si f es cóncava entonces $D^2 f$ debe ser semidefinida negativa. Tomemos cualquier $x \in X$ y cualquier z. Tomando la expansión de Taylor de $g(\alpha) = f(x + \alpha z)$ alrededor de $\alpha = 0$, obtenemos que para algún $\beta \leq \alpha$,

$$f(x + \alpha z) = f(x) + \nabla f(x) \alpha z + \frac{\alpha^2}{2} z' D^2 f(x + \beta z) z.$$

Como por el Teorema 8, $f(x + \alpha z) \leq f(x) + \nabla f(x) \alpha z$ para todo α, debemos tener $\frac{\alpha^2}{2} z' D^2 f(x + \beta z) z \leq 0$ también para todo α y $\beta \leq \alpha$. Si tuviésemos $z' D^2 f(x) z > 0$ para algún z, tendríamos que para β pequeño también sería cierto que $z' D^2 f(x + \beta z) z > 0$, y eso sería una contradicción (ahí usamos que $D^2 f(x)$ cambia continuamente en x). ■

Optimización con restricciones

Queremos elegir $x \in \mathbf{R}^N$ para maximizar $f(x)$ sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= b_1 \\ &\vdots \\ g_M(x) &= b_M \end{aligned}$$

Asumiremos que $N \geq M$ (de lo contrario típicamente no habría solución). Definimos $C = \{x : g_i(x) = b_i, i = 1, ..., M\}$, el conjunto de x admisibles. El punto x^* es un **máximo local con restricciones** si existe un abierto $A \subset \mathbf{R}^N$ tal que $x^* \in A$, y $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in A \cap C$; el punto x^* es un **máximo global con restricciones** si $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in C$.

Teorema 11 ***(MK.1 del Mas-Colell). Lagrange.*** *Suponga que f y g_i son diferenciables para todo i, y que x^* es un máximo local con restricciones. Asuma también que la matriz de $M \times N$ de derivadas parciales de las g_i,*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_N} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial g_N(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_N(x^*)}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

tiene rango M. Entonces, para cada $m = 1, ..., M$ existe $\lambda_m \in \mathbf{R}_+$ tal que para todo $i = 1, ..., N$

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_i}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \nabla f(x^*) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \nabla g_m(x^*).$$

Antes de proceder a la demostración, dos precisiones. Primero, los λ se llaman multiplicadores de Lagrange. Segundo, a la limitación que se impone sobre las restricciones en la ecuación (6.5) se la llama (en inglés) constraint qualification, y en español, limitación de restricciones.

Demostración. Si se cumple la limitación de restricciones, x^* también es una solución local al problema original linealizado: elegir x para maximizar $f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*)$ sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(x^*) + \nabla g_1(x^*)(x - x^*) &= 0 \\ &\vdots \\ g_M(x^*) + \nabla g_M(x^*)(x - x^*) &= 0 \end{aligned}$$

Para ilustrar el resto de la demostración, interpretamos a $z = x - x^*$ como una dirección de desplazamiento posible (estamos en x^* y queremos desviarnos hacia x para tratar de incrementar el valor de f). La limitación de restricciones asegura que como x^* también es solución del problema linealizado, si z es tal que $\nabla g_m(x^*) z = 0$ (movernos en la dirección de z no cambia el valor de la restricción) para todo m, entonces z debe ser tal que $\nabla f = 0$ (de lo contrario podríamos incrementar el valor de f moviéndonos en la dirección de z o de $-z$). Tenemos entonces que los z tales que $\nabla g_m(x^*) z = 0$ para todo m también cumplen $\nabla f(x^*) z = 0$. Eso asegura que para la matriz $E = [\nabla f(x^*), \nabla g_1(x^*), ..., \nabla g_M(x^*)]$, se cumple la siguiente igualdad de subespacios (para z^T el transpuesto de z):

$$\{z : \nabla g_m(x^*) z = 0 \text{ para todo } m\} = \{z : z^T E = 0\}.$$

Como por la limitación de restricciones el subespacio de la izquierda tiene dimensión M, también tiene dimensión M el de la derecha, y eso implica que una de las columnas de E (que tiene $M + 1$ columnas) se puede escribir como combinación lineal de las otras, que es la conclusión del teorema. ■

En la demostración se sustituye el problema original por el linealizado. Para que el óptimo al problema original sea solución del linealizdo, se debe cumplir que la "información" contenida en las restricciones siga estando en las restricciones linealizadas: si alguna de las restricciones desapareciera, habría mayor libertad en el problema linealizado. Justamente para que la solución al problema original sea solución del linealizado es que se asume la limitación de restricciones: si no se cumpliera la limitación de restricciones, la "información" contenida en una de las restricciones, tipo "no podés moverte en tal dirección, porque te lo impide la restricción $g_m = b_m$" desaparecería, pues la versión lineal de la restricción sería una combinación de las versiones lineales de las otras restricciones (al ser la matriz de rango menor que M). Otra forma de ver esto: si, por ejemplo, hay dos restricciones en un problema en $\mathbf{R}^3$, las desviaciones admisibles son a lo largo de una linea (no necesariamente recta); si al sustituir por la versión linealizada un gradiente es colineal con otro, el conjunto de desviaciones posibles es ahora un plano (el conjunto de puntos tales que multiplicados por el gradiente nos dan 0). Por supuesto, en el plano puede haber desviaciones que son "rentables" que no estaban disponibles en la linea que era la restricción del problema original: en ese caso la solución del problema original no será la solución del problema linealizado.

Para ilustrar este problema, considere el siguiente ejemplo. Debemos elegir $x \in \mathbf{R}^2$ para maximizar x_1 sujeto a que $g_1(x) = x_2 - x_1^2 = 0$ y $g_2(x) = -x_2 - x_1^2 = 0$. En este caso, el único punto admisible es $(0, 0)$ (haga el dibujo para verlo). Los gradientes en el óptimo son

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(dibújelos también). Vemos entonces que: ∇g_1 y ∇g_2 no son linealmente independientes, por lo que falla la limitación de restricciones; más aún, el gradiente de f no puede escribirse como una combinación lineal de ∇g_1 y ∇g_2 (por lo que falla también la conclusión del Teorema). A su vez, la razón por la que falla la conclusión del Teorema es que en este caso la versión linealizada del problema es: elegir x para maximizar x_1 sujeto a $x_2 = 0$ (y la otra restricción es también $x_2 = 0$); por supuesto la solución de este problema no es $(0, 0)$.

Ilustraremos ahora "intuitivamente" por qué es cierto el Teorema de Lagrange, de dos maneras. Supongamos que en $\mathbf{R}^2$ queremos maximizar f sujeto a $g(x) = c$.

En la primera manera, notamos que si x^* es óptimo, cualquier cambio pequeño y admisible debe cumplir dos condiciones:

- para ser admisible, el cambio no puede afectar el valor de $g(x^*)$, por lo que el diferencial total de g debe ser 0, $g_1(x^*)\,dx_1 + g_2(x^*)\,dx_2 = 0$, o equivalentemente, $dx_1 = -g_2(x^*)\,dx_2/g_1(x^*)$.
- como x^* es óptimo, cualquier cambio admisible dx debe ser tal que no cambie el valor de $f(x^* + dx)$ (si lo subiera, x^* no sería óptimo, y si lo bajara, podríamos tomar el cambio $-dx$, y f subiría), por lo que el diferencial total de f debe también ser 0, $f_1(x^*)\,dx_1 + f_2(x^*)\,dx_2 = 0$.

Sustituyendo dx_1 de la primera condición en esta segunda ecuación obtenemos

$$f_1(x^*)\left(-\frac{g_2(x^*)\,dx_2}{g_1(x^*)}\right) + f_2(x^*)\,dx_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{f_1(x^*)}{g_1(x^*)} = \frac{f_2(x^*)}{g_2(x^*)}. \tag{6.6}$$

Si a los dos términos en la última igualdad los llamamos λ, obtenemos

$$\frac{f_1(x^*)}{g_1(x^*)} = \frac{f_2(x^*)}{g_2(x^*)} \equiv \lambda \Rightarrow [f_1(x^*) = \lambda g_1(x^*) \quad \text{y también} \quad f_2(x^*) = \lambda g_2(x^*)]$$

que es la conclusión del Teorema de Lagrange. Para ver por qué está la limitación de restricciones, observamos que la única forma en que la misma se viola es si $\nabla g(x^*) = (0, 0)$: si el subespacio generado por $\nabla g(x^*)$ es de dimensión menor que 1, es de dimensión 0, y eso sólo ocurre si el vector es $(0, 0)$. Por supuesto, si g_1 o g_2 son 0, el ratio correspondiente en la ecuación (6.6) no está bien definido. Pero si uno solo de ellos es 0, eso no presenta un problema, pues si $g_1(x^*) = 0$, eso implica que x_1 se puede mover "libremente" sin afectar el valor de g; por lo tanto, si x^* es óptimo, quiere decir que no queremos mover x_1, y entonces, deducimos que $f_1(x^*) = 0$. El ratio, en este caso es f_1/g_1, y como es $0/0$, podemos definir el ratio como queramos, en particular, podemos decir que es igual a f_2/g_2. Por supuesto, no podemos hacer esto si $g_1 = g_2 = 0$.

La segunda manera de ver por qué es cierta la conclusión del Teorema de Lagrange es utilizando los clásicos argumentos de "tangencia". Si x^* es óptimo, la curva de indiferencia de $f(x) = f(x^*)$ debe ser tangente a la curva de $g(x) = c$. La pendiente de la restricción $g(x) = c$ en x^* viene dada por

$$g_1(x^*)\,dx_1 + g_2(x^*)\,dx_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_1(x^*)}{g_2(x^*)}.$$

En forma similar, sobre la curva de indiferencia $f(x) = f(x^*)$, la pendiente en x^* viene dada por $dx_2/dx_1 = -f_1(x^*)/f_2(x^*)$. La igualdad de esta pendiente con la correspondiente a g implica que

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{g(x)=c} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{f(x)=f(x^*)} \Leftrightarrow -\frac{g_1(x^*)}{g_2(x^*)} = -\frac{f_1(x^*)}{f_2(x^*)}$$

que es lo mismo que la ecuación (6.6), que ya vimos que implica la conclusión del Teorema de Lagrange.

Ejercicio 12 Resuelva, mediante el método de Lagrange, el siguiente problema de un consumidor. Elegir x_1, x_2 para maximizar $a \log x_1 + (1-a) \log x_2$ sujeto a $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$.

Un par de aclaraciones sobre este ejercicio. Como cualquier transformación monótona de una función de utilidad representa a las mismas preferencias, la utilidad $u(x) = a \log x_1 + (1-a) \log x_2$ es equivalente a la más conocida $v(x) = x_1^a x_2^{1-a}$. También, resulta mucho más fácil despejar x_2 de la restricción presupuestal y sustituirlo en la función de utilidad, para obtener un problema de una ecuación con una incógnita.

Ejercicio 13 Una empresa tiene 100 unidades de trabajo para producir los bienes 1 y 2. Producir una unidad del bien $i = 1, 2$ requiere x_i^2 unidades de trabajo, y el precio del bien i es p_i. Resuelva el problema de la firma utilizando el método de Lagrange.

Ejercicio 14 Dados dos niveles "mínimos" de consumo x_1^* y x_2^*, un consumidor debe elegir x_1 y x_2 para maximizar $a \log(x_1 - x_1^*) + (1-a) \log(x_2 - x_2^*)$ sujeto a $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$. Asumimos que $I > p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$. Utilizando el método de Lagrange, muestre que en el óptimo

$$\begin{aligned} p_1 x_1 &= aI + (1-a) p_1 x_1^* - a p_2 x_2^* \\ p_2 x_2 &= (1-a) I - (1-a) p_1 x_1^* + a p_2 x_2^*. \end{aligned}$$

Ejercicio 15 Una firma alquila capital k a un precio r, y trabajo l a un precio w. El producto viene dado por $q = \sqrt{k} + \sqrt{l}$.

Parte A. Encuentre la demanda de factores si la empresa desea producir una cantidad q al menor costo posible.

Parte B. Encuentre el valor del multiplicador de Lagrange (en función de las variables exógenas w, r y q) e interprételo.

Parte C. Suponga ahora que el precio del bien que produce la firma es p, y que la firma desea maximizar sus beneficios. Encuentre la cantidad óptima, y relacione su resultado con la interpretación del multiplicador de la Parte B.

Por supuesto, en muchos problemas de interés las restricciones son con desigualdad. En ese caso, necesitamos usar el Teorema de Kuhn-Tucker. Damos primero la versión "a lo bestia" del Teorema, y luego presentamos los resultados con más cuidado. Supongamos que queremos elegir $x \in \mathbf{R}^2$ para maximizar $f(x)$ sujeto a $g(x) \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Para resolver este problema, introducimos tres variables a, b y c "inventadas" o "auxiliares", y cambiamos las restricciones por

$$\begin{aligned} g(x) - a^2 &= 0 \\ x_1 - b^2 &= 0 \\ x_2 - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vemos que si encontramos un x y a, b, c tal que se mazimiza f, se cumplirán las restricciones originales (piénselo un minuto...). Si ahora hacemos el Lagrangiano $L = f(x) - \lambda_1 \left(g(x) - a^2\right) - \lambda_2 \left(x_1 - b^2\right) - \lambda_3 \left(x_2 - c^2\right)$, tendremos ocho condiciones de primer orden en cualquier solución x^*, correspondientes a $\partial L / \partial z = 0$ (para las 5 variables de elección) y $\partial L / \partial \lambda_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$:

x	a, b, c	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \lambda_1 \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_1} + \lambda_2$	$2\lambda_1 a = 0$	$g(x) = a^2$
$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} = \lambda_1 \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_2} + \lambda_3$	$2\lambda_2 b = 0$	$x_1 = b^2$
	$2\lambda_3 c = 0$	$x_2 = c^2$

Las condiciones "interesantes" son las de la segunda columna. Debemos tener, por ejemplo que a o λ_1 deben ser 0 pues $\lambda_1 a = 0$: si $a > 0$, $g(x) < 0$, lo que implica que la restricción tiene "holgura" en el óptimo (es decir, no es restrictiva, no está activa), y debemos tener $\lambda_1 = 0$; eso se interpreta habitualmente diciendo que el "precio sombra" de relajar la primera restricción es 0, pues como hay holgura, el individuo que está maximizando no "debería" pagar nada por relajar la restricción. Por otro lado, si λ_1 es mayor que 0, significa que $a = 0$, y que la restricción se cumple con igualdad: está activa, y al que maximiza le iría mejor si pudiera relajar la restricción.

Pasamos ahora a la formulación más "en serio" del Teorema de Kuhn-Tucker. El problema que nos interesa es el de elegir x para maximizar $f(x)$ sujeto a

$$\begin{aligned} g^i(x) &= 0 \quad i = 1, ..., M \\ h^k(x) &\leq 0 \quad k = 1, ..., K \end{aligned}$$

Como antes, definimos el conjunto C como el de todos los x que satisfacen todas las restricciones. Diremos ahora que la limitación de restricciones se satisface en x^* si los gradientes de las restricciones que se satisfacen con igualdad son linealmente independientes: los vectores en $\left\{\nabla g^i(x^*) : i = 1, ..., M\right\} \cup \left\{\nabla h^k(x^*) : h^k(x^*) = 0\right\}$ son linealmente independientes.

Teorema 16 ***(M.K.2 del Mas-Colell). Kuhn-Tucker.*** *Suponga que x^* es un máximo local con restricciones y que se cumple la limitación de restricciones. Entonces existen $\lambda_i^g \in \mathbf{R}$ para $i = 1, ..., M$ y $\lambda_i^h \in \mathbf{R}_+$ para $k = 1, ..., K$ tales que*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) &= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^g \nabla g^i(x^*) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^h \nabla h^k(x^*) \\ \lambda^k h^k(x^*) &= 0, \forall k = 1, ..., K \end{aligned}$$

Demostración. Ilustramos la demostración para el caso en que sólo hay restricciones con desigualdad, $M = 0$. Como en la demostración del Teorema de Lagrange, la limitación de restricciones asegura que si x^* es un máximo local para el problema original, también es un máximo local para el problema linealizado: no existe z, tal que $\nabla h^k(x^*) z \leq 0$ para todo k, y $\nabla f(x^*) z > 0$, o lo que es lo mismo, no existe y (igual a $-z$) tal que $\nabla h^k(x^*) y \geq 0$ para todo k, y $\nabla f(x^*) y < 0$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que todas las restricciones $h^k(x^*)$ están activas (si, por ejemplo, la restricción k no lo está, ponemos $\lambda_k^h = 0$ y podemos ignorarla en las conclusiones del Teorema). Entonces, si ponemos

$$A = \left[\nabla h^1(x^*), \nabla h^2(x^*), ..., \nabla h^K(x^*)\right],$$

el Lema de Farkas nos dice que como no existe y tal que $\nabla h^k(x^*) y \geq 0$ para todo k, y $\nabla f(x^*) y < 0$, debemos tener $A\lambda^h = \nabla f(x^*)$ para algún $\lambda^h = \left(\lambda_1^h, ..., \lambda_K^h\right) \geq 0$, como queríamos demostrar. ■

Por supuesto, la forma "típica" de recordar estas condiciones es definir el Lagrangiano

$$L = f(x) - \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^g g^i(x^*) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^h h^k(x^*)$$

(restando las restricciones, y las restricciones en formato $h \leq 0$ negativas), y hacer el gradiente del Lagrangiano con respecto a x igual a 0 ("maximizar" el Lagrangiano con respecto a x). A eso hay que agregarle que para cada restricción con desigualdad, o se cumple con igualdad (está activa) o el multiplicador es 0 (el "precio sombra" de la restricción es 0 : la función objetivo no cambia si se elimina esa restricción, o el que maximiza no está dispuesto a pagar nada, en términos de su función objetivo, para eliminar la restricción).

Ejercicio 17 Un consumidor debe elegir x_1, x_2 para maximizar $x_1 + x_2$ sujeto a $p_1x_1 + p_2x_2 = I$.

Parte A. Resuelva por el método de Lagrange (en el Ejercicio 12, la utilidad marginal de x_i es infinito en $x_i = 0$, por eso siempre da interior la solución).

Parte B. Resuelva por el método de Kuhn-Tucker, agregando las restricciones obvias $x_1, x_2 \geq 0$.

En la solución de la Parte A, si uno asume que hay un máximo local con restricciones, obtiene $p_1 = p_2$: la conclusión es que para $p_1 \neq p_2$, no hay un máximo local. Por lo tanto, la utilidad de Lagrange se acaba ahi (para ese problema). Por supuesto, el ejercicio es fácil de resolver (aún sin usar Lagrange), pero pretende mostrar que en situaciones en las cuales Lagrange no funciona, Kuhn-Tucker si. Y en este caso, esa situación se da "genéricamente", para todo $p_1 \neq p_2$.

Ejemplo 18 De "Optimization in Economic Theory" de A. Dixit. Preferencias quasi-lineales. Suponga que el individuo debe maximizar $U(x_1, x_2) = x_2 + a \log x_1$ sujeto a $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$ (para algunos $p_1, p_2, I > 0$) y $x_1, x_2 \geq 0$. Formando el Lagrangiano,

$$L = x_2 + a \log x_1 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I) + \alpha x_1 + \beta x_2$$

el Teorema de Kuhn-Tucker nos dice que si x^* es óptimo, para algunos $\lambda, \alpha, \beta \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{x_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p_1 - \alpha \\ \lambda p_2 - \beta \end{pmatrix} \qquad y \qquad \alpha x_1 = \beta x_2 = \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0.$$

Otra forma de escribir estas condiciones es que para algún $\lambda \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{x_1} \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix}, \text{ con igualdad en el } i-\text{ésimo renglón si } x_i > 0, \text{ y } \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0.$$

Hay 8 combinaciones posibles de "igual a 0" "distinto de 0" en las 3 restricciones. Ahora repasaremos cada uno de los 8 casos, y veremos que se puede reducir mucho el trabajo (no hay que analizar todos los casos).

Para empezar, hay 4 casos que se pueden descartar fácilmente: aquellos en los cuales $\lambda = 0$, o la restricción presupuestal no está activa. Por supuesto, si en algún candidato a óptimo x^* "sobrara plata", podríamos comprar un poco más de alguno de los bienes, y se seguirían cumpliendo todas las restricciones (mostrando que x^* no era óptimo). Formalmente, si $\lambda = 0$, tendríamos $a/x_1 \leq 0$, que es imposible (o más claro aún, $1 \leq 0$).

Otros 4 casos que se pueden descartar (dos ya los descartamos en el párrafo anterior, dos son nuevos) son aquellos con $x_1 = 0$: la razón es que la utilidad marginal de x_1 cuando $x_1 = 0$ es infinita, y en el

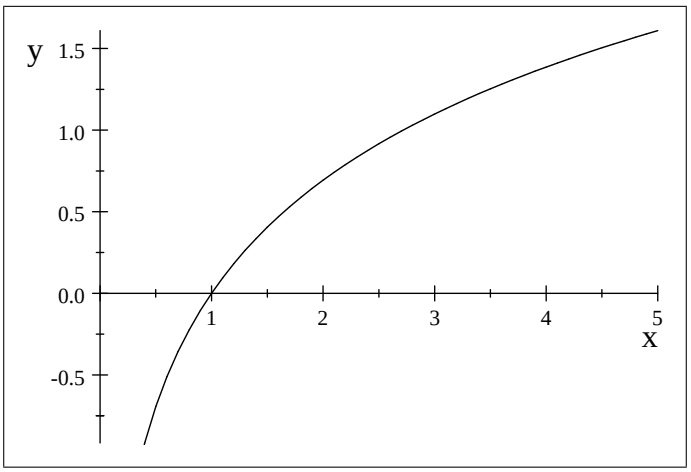
óptimo, la persona siempre consumirá algo de x_1. Formalmente, a/x_1 no está definido. O más claro aún, si $x_1 = 0$, el individuo se gasta todo en x_2, o $x_2 = I/p_2$, en cuyo caso obtenemos $\beta = 0$ y $1 = \lambda p_2$, que arroja $\infty = a/x_1 = p_1/p_2$ que es falso.

Hemos descartado 6 de los casos, por lo que nos quedan 2: x_1 y x_2 positivos, y el caso $x_2 = 0$, x_1 positivo. El caso de $x_2 = 0$, implica que todo se gasta en x_1 o $x_1 = I/p_1$ y $\alpha = 0$, por lo que despejando de la CPO con respecto a x_1 obtenemos $\lambda = a/p_1 x_1 = a/I$. Poniendo esto en la CPO con respecto a x_2 obtenemos $1 \leq ap_2/I$, o $I \leq ap_2$. Esto es un candidato a óptimo: si $I \leq ap_2$, entonces el óptimo se da cuando $x_2 = 0$ y se gasta todo en x_1 (la idea es que el ingreso no es suficiente para "saciar" la necesidad de x_1).

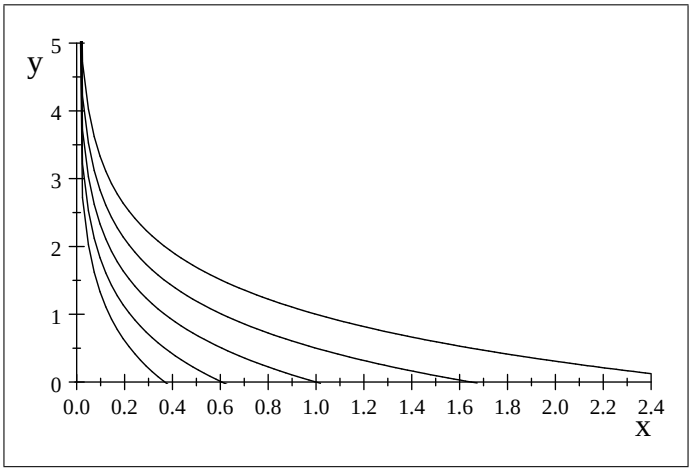
Cuando x_1 y x_2 son positivos, tenemos $\alpha = \beta = 0$, y las condiciones de primer orden implican $\lambda = 1/p_2 \Rightarrow x_1 = ap_2/p_1$ y en la restricción presupuestal, $x_2 = I/p_2 - a$. Para que esta última ecuación tenga sentido (sea consistente con $x_2 > 0$) debemos tener $I > ap_2$. Esta condición es el "complemento" del caso anterior, $I \leq ap_2$. Entonces, dependiendo de la relación entre I y ap_2, el óptimo se dará en este caso con $x_1, x_2 > 0$, o en el anterior, con $x_2 = 0$ y $x_1 > 0$.

Intuitivamente, x_1 es como un bien "necesario": el primer ingreso se gasta en x_1; una vez que saciamos nuestra necesidad de x_1 (en $x_1 = ap_2/p_1$) todo el ingreso restante se gasta en x_2. La razón es que la utilidad marginal de x_1 es infinita al principio, y luego decae (hasta prácticamente) 0; mientras la utilidad marginal es mayor que 1 (que es la utilidad marginal de x_2) el individuo consume x_1; cuando la utilidad marginal llega a 1, pasa a consumir sólo x_2.

Una forma buena de hacer todo este análisis y estar "seguro" (que al final no murió en la guerra) que está bien, es graficando. La gráfica de logaritmo de x_1 es



por lo que la gráfica de $k - \log x_1$ para varios k distintos es



Esas son las curvas de indiferencia del individuo. Por lo tanto, cuando la restricción presupuestal es muy "chata" (p_2 es grande), el individuo maximizará comprando $x_2 = 0$ (y eso es lo que dice la condición $I \leq ap_2$). A medida que I crece, la pendiente de la curva de indiferencia, en el corte con $x_2 = 0$ se hace más chata, hasta que eventualmente, se vuelve más chata que la pendiente de la restricción presupuestal. En ese momento, x_2 comienza a crecer, y (como las curvas de indiferencia son traslaciones paralelas verticales una de otra) la tangencia de la curva de indiferencia con la restricción presupuestal se da siempre en el mismo x_1 (y eso es lo que dice la condición $x_1 = ap_2/p_1$). ■

Ejemplo 66 Ejemplo con Cobb-Douglas $x_1^a x_2^{1-a}$ y $(1,2)\, x \leq 30$ y $(2,1)\, x \leq 30$. Sabemos que para a grande la solución estará sobre la restricción $(2,1)\, x \leq 30$. Resolvemos usando las fórmulas $x = \left(a\frac{30}{2}, (1-a)\,\frac{30}{1}\right)$. Esto nos dará un $x_1 \geq 10$ (que es donde se intersectan las dos restricciones si y sólo si $x_1 = a15 \geq 10 \Leftrightarrow a \geq \frac{2}{3}$. En forma simétrica, estaremos sobre la otra restricción si y sólo si $a \leq \frac{1}{3}$. Para a intermedio estaremos en la intersección de ambas restricciones.

Sabiendo eso, veamos cómo se usa KT. Tenemos que ver en forma sistemática cuándo cada combinación de restricciones activas nos arroja un óptimo. Tomemos entonces el caso en que la restricción activa es $(2,1)\, x \leq 30$. De la fórmula de KT, con $f = x_1^a x_2^{1-a}$ $g^1 = (1,2)\, x - 30$ y $g^2 = (2,1)\, x - 30$ obtenemos

$$\bigtriangledown f = \begin{pmatrix} a x_1^{a-1} x_2^{1-a} \\ (1-a)\, x_1^a x_2^{-a} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación obtenemos un valor de $\lambda = (1-a)\, x_1^a x_2^{-a}$ que sustituido en la primera nos da

$$a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = 2\left((1-a)\, x_1^a x_2^{-a}\right) \Leftrightarrow a\frac{x_2}{x_1} = 2\,(1-a)\,.$$

(no es importante, pero esta ecuación nos dice el ratio de x_2 a x_1 como función de a; luego para encontrar el x óptimo, sólo hay que sustituir x_2 como función de x_1 en la restricción presupuestal para encontrar el "nivel" de los x). Como estamos buscando soluciones en que el gradiente de f es colineal con el gradiente de la segunda restricción, sabemos que el ratio x_2/x_1 debe ser menor que 1, por lo que tenemos $\frac{x_2}{x_1} = 2\frac{1-a}{a} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{2}{3}$, como ya sabíamos.

Si en cambio queremos buscar los óptimos cuando las dos restricciones están activas, sabemos que $x_1 = x_2 = 10$. En ese caso, la fórmula de KT nos dice

$$\bigtriangledown f = \begin{pmatrix} a x_1^{a-1} x_2^{1-a} \\ (1-a)\, x_1^a x_2^{-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la primera, $a = \lambda_1 + 2\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = a - 2\lambda_2$ y en la segunda $1 - a = 2(a - 2\lambda_2) + \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = a - \frac{1}{3}$ (de aquí deducimos que para que $\lambda_2 \geq 0$ debemos tener $a \geq \frac{1}{3}$, como ya sabíamos). Sustituyendo en $\lambda_1 = a - 2\lambda_2$ obtenemos $\lambda_1 = a - 2\left(a - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - a$ que es positivo sí y sólo si $a \geq \frac{2}{3}$, como ya sabíamos.

En términos gráficos, cuando a es menor que $\frac{2}{3}$, pero cercano a ese valor, el gradiente de f se explica mayormente por el gradiente de g^2 (eso se ve en la expresión de los λ, y en particular del hecho que $\lambda_1 = \frac{2}{3} - a$ es cercano a 0 mientras $\lambda_2 = a - \frac{1}{3}$ es cercano a $\frac{1}{3}$. A medida que a cae, el gradiente de f se explica cada vez más por el gradiente de g^1. ■

Ejercicio 19 Suponga que una economía tiene 300 unidades de trabajo, y 450 de tierra, que se pueden usar en la producción de trigo, t, y carne, c. Cada unidad de trigo requiere 2 unidades de trabajo y una de tierra, mientras que la producción de 1 unidad de carne requiere 1 de trabajo y 2 de tierra. El gobierno desea maximizar la utilidad del agente representativo, $U(t, c) = \alpha \log t + (1 - \alpha) \log c$.

Parte A. Escriba el problema que debe resolver el gobierno. Ignore las restricciones $t, c \geq 0$, pues como las utilidades marginales son infinitas para $t = 0$ y $c = 0$, siempre se producirán cantidades positivas de ambos.

Parte B. Grafique las restricciones y resuelva el problema utilizando el Teorema de Kuhn-Tucker. La solución quedará dependiendo de α.

Ejercicio 20 Este ejercicio es sobre la interpretación de los multiplicadores de Kuhn-Tucker y Lagrange como precios sombra.

Parte A. En el Ejercicio 17 calcule la utilidad (máxima) del individuo, como función de p_1, p_2 e I (eso se llama la función de utilidad indirecta). Calcule la derivada con respecto a I. Compárela con el valor del multiplicador de Kuhn-Tucker asociado a la restricción presupuestal encontrado en la Parte B de ese ejercicio.

Parte B. Repita la Parte A para el Ejemplo 18 (deberá considerar dos casos, dependiendo de si $x_2 = 0$, o no).

Parte C. En el Ejercicio 19, suponga que la cantidad de tierra es T (en el ejercicio era $T = 450$), resuelva el ejercicio, y repita la Parte A (tome la derivada de la utilidad indirecta, que en este caso se llama la función de beneficios y compárela con el valor del multiplicador asociado a esa restricción).

Parte D. Utilice el Teorema de la Envolvente para ilustrar por qué el multiplicador es el incremento en la función objetivo, cuando se "afloja" la restricción.

Ejercicio 21 El gobierno ha decidido que nadie puede consumir más de $t > 0$ unidades del bien 2. En esa economía, un individuo tiene un ingreso $I > 0$; los precios de los bienes 1 y 2 son p_1 y p_2 respectivamente, con $p_1, p_2 > 0$. La utilidad del individuo de consumir $x = (x_1, x_2)$ es $x_1 x_2$.

Parte A. Encuentre la solución al problema del consumidor como función de p_1, p_2, I y t.

Parte B. ¿Cuántos "utiles" está dispuesto a pagar el indivduo porque gane en la próxima elección un gobierno que relaje levemente el tope t? Conteste de dos formas distintas.

Ejercicio 22 Resuelva por Kuhn-Tucker. Elegir x, y para maximizar xy sujeto a $g(x, y) = x + y \leq 1$, $h(x, y) = y \leq k$. Interprete el cambio en los multiplicadores cuando cambia k.

Algebra Lineal y Optimización: Soluciones

Ejercicio 19.A. El gobierno debe elegir t y c para maximizar $U(t,c) = \alpha \log t + (1-\alpha)\log c$ sujeto a que el doble de las unidades de t, más las unidades de c sean menores que 300, y que las unidades de t más el doble de las unidades de c sean menores que 450 :

$$\begin{aligned} 2t + c - 300 &\leq 0 \\ t + 2c - 450 &\leq 0. \end{aligned}$$

19.B. El Lagrangiano es

$$L = \alpha \log t + (1-\alpha)\log c - \lambda(2t + c - 300) - \beta(t + 2c - 450).$$

Si un (t,c) es óptimo se cumple que

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\alpha}{t} = 2\lambda + \beta \\ \frac{1-\alpha}{c} = \lambda + 2\beta \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \lambda(2t + c - 300) = \beta(t + 2c - 450) = 0$$

Hay, en principio 4 configuraciones (con cada una de las dos restricciones en activa o no). En este caso, la única que podemos descartar es que las dos estén inactivas: si lo estuvieran, podríamos aumentar la producción de t y de c, aumentando el valor de la función objetivo. Formalmente, si $\lambda = \beta = 0$, obtendríamos $t = c = \infty$, que es imposible. Las otras 3 configuraciones son posibles.

- α pequeño, $\alpha \leq \frac{1}{9}$. Si $\lambda = 0$ y $\beta > 0$, tenemos $\beta = \frac{\alpha}{t}$ y como $\frac{1-\alpha}{c} = 2\beta$, obtenemos $\frac{1-\alpha}{c} = 2\frac{\alpha}{t} \Leftrightarrow t = \frac{2\alpha}{1-\alpha}c$. Sustituyendo en la restricción activa, $t + 2c - 450 = 0$, obtenemos $c = 225(1-\alpha)$ y luego $t = 450\alpha$. No hay que ser un genio para darse cuenta que esta es la fórmula para una demanda salida de una utilidad Cobb-Douglas (la demanda del bien 1 es el ingreso por el exponente correspondiente en la utilidad, dividido el precio del bien 1). Para que estos valores cumplan con la restricción ignorada, debemos tener
$$2t + c \leq 300 \Leftrightarrow 900\alpha + 225(1-\alpha) \leq 300 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{9}.$$
Aún sin saber cuál era el límite superior de α, era "fácil" darse cuenta que $\lambda = 0$ y $\beta > 0$ correspondía al caso de α pequeño, pues con α pequeño queremos hacer c lo más grande posible, y en ese caso la restricción que se iba a poner activa era la segunda.

- α intermedio, $\frac{1}{3} \geq \alpha \geq \frac{1}{9}$. Si $\lambda, \beta > 0$, las dos restricciones están activas y resolvemos el sistema lineal de 2×2, que arroja $c = 200, t = 50$. Aunque esto que viene no es necesario hacerlo (porque saldría al final como complemento de los α encontrados en el primer y tercer items), igual lo ponemos para que quede completo. Sustituyendo estos valores en las condiciones de primer orden y resolviendo para λ y β obtenemos $\beta = \frac{1}{300} - \frac{1}{100}\alpha$ y $\lambda = \frac{3}{200}\alpha - \frac{1}{600}$, que son positivos si y sólo si $\frac{1}{3} \geq \alpha \geq \frac{1}{9}$.

- α grande, $\frac{1}{3} \leq \alpha$. Si $\lambda > 0$ y $\beta = 0$ tenemos $\frac{1-\alpha}{c} = \lambda$ que en la primera CPO arroja $\frac{\alpha}{t} = 2\frac{1-\alpha}{c} \Leftrightarrow t = \frac{\alpha c}{2(1-\alpha)}$. En la restricción activa esto nos da $2\frac{\alpha c}{2(1-\alpha)} + c - 300 = 0 \Leftrightarrow c = 300(1-\alpha)$ (otra vez la fórmula de la Cobb-Douglas: el "ingreso" 300, por el exponente de c en la utlidad, $1-\alpha$). Tenemos entonces $t = 150\alpha$, y para que se cumpla la restricción ignorada debemos tener $t + 2c \leq 450 \Leftrightarrow 150\alpha + 600(1-\alpha) \leq 450$, o como ya sabíamos $\alpha \geq \frac{1}{3}$.

Ejercicio 21.A. El individuo debe maximizar x_1x_2 sujeto a que $p_1x_1+p_2x_2 \leq I$ y que $x_2 \leq t$. No incluimos las restricciones $x_1, x_2 \geq 0$, porque el individuo siempre consumirá cantidades positivas de ambos bienes (si consume 0 de alguno, su utilidad es 0). El Lagrangiano es

$$x_1x_2 - \lambda\left(p_1x_1 + p_2x_2 - I\right) - \mu\left(x_2 - t\right)$$

y la solución debe cumplir $x_2 = \lambda p_1$, $x_1 = \lambda p_2 + \mu$, con $\lambda\left(p_1x_1 + p_2x_2 - I\right) = \mu\left(x_2 - t\right) = 0$. Como la utilidad es creciente en x_1 y x_2, el individuo se gastará todo el ingreso. Formalmente, si tuviésemos $\lambda = 0$ en un máximo local, tendríamos $x_2 = 0$ y $x_1 = \mu$, pero como $x_2 = 0 < t$, también tendríamos $\mu = 0$, y entonces $x_1 = 0$. Por supuesto, ese es el mínimo local. Por lo tanto, en el máximo local tenemos que la restricción presupuestal se satisface con igualdad. Nos queda entonces discutir según si $\mu = 0$ o no.

Si $\mu = 0$, tenemos (despejando λ y sustituyendo) $x_2 = x_1p_1/p_2$, que en la restricción presupuestal arroja

$$p_1x_1 + p_2x_1p_1/p_2 = I \Leftrightarrow 2p_1x_1 = 2p_2x_2 = I$$

(que ya sabíamos por el resultado típico de la Cobb-Douglas). Pero para que $\mu = 0$, y $x_2 \leq t$, debemos tener $I/2p_2 \leq t$ (pues $x_2 = I/2p_2$).

Si $\mu > 0$, $x_2 = t$ y eso en la restricción presupuestal arroja $x_1 = \left(I - p_2t\right)/p_1$. Para ver bajo que configuraciones de parámetros se da esta situación, notamos que de $x_2 = \lambda p_1$ y $x_1 = \lambda p_2 + \mu$ obtenemos $x_1 = x_2p_2/p_1 + \mu$, y sustituyendo $x_2 = t$ queda $x_1 = tp_2/p_1 + \mu$. Para que quede $\mu > 0$, se debe cumplir $x_1 - tp_2/p_1 > 0$ y como $x_1 = \left(I - p_2t\right)/p_1$, eso es equivalente a $\left(I - p_2t\right)/p_1 - tp_2/p_1 > 0 \Leftrightarrow I > 2p_2t$ (como era obvio!)

La solución es obvia: para ingresos chicos, o precios del bien 2 grandes, la solución de x_2 óptima es menor que t. Cuando el ingreso crece, o baja p_2, la restricción se vuelve activa.

21.B. Cuando $I \leq 2p_2t$, el individuo no está dispuesto a pagar nada. Cuando se da la situación contraria, de las ecuaciones $x_2 = t = \lambda p_1$ y $x_1 = \left(I - p_2t\right)/p_1 = \lambda p_2 + \mu$ despejamos μ y λ como función de los parámetros exógenos p, I y t :

$$\lambda = \frac{t}{p_1} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{I - 2p_2t}{p_1}.$$

Por lo tanto, el individuo está dispuesto a pagar μ útiles para elegir a tal gobernante.

En forma análoga, sustituyendo los valores óptimos de x en la función de utilidad obtenemos

$$v\left(p, I; t\right) = x_1^*x_2^* = \frac{I - p_2t}{p_1}t \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{p_2}{p_1}t + \frac{I - p_2t}{p_1} = \frac{I - 2tp_2}{p_1}$$

22 El Lagrangiano es

$$L = xy - \lambda\left(x + y - 1\right) - \mu\left(y - k\right)$$

y las condiciones de optimalidad son

$$y = \lambda \quad x = \lambda + \mu \quad \lambda\left(x + y - 1\right) = 0 \quad \mu\left(y - k\right) = 0$$

Como maximizar xy sujeto a $x + y \leq 1$ arroja la solución simétrica $x = y = \frac{1}{2}$, sabemos que si $k \geq \frac{1}{2}$ la segunda restricción no está activa, y queda $x = y = \lambda = \frac{1}{2}$. En ese caso, tenemos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \nabla f\left(x^*\right) = \lambda\nabla g\left(x^*\right) = \frac{1}{2}\left(1, 1\right)$.

Si $k < \frac{1}{2}$, tendremos $y = k$, que deja $x = 1 - k$, y por $y = \lambda$, también $\lambda = k$, y por $x = \lambda + \mu$, queda $\mu = 1 - 2k$.

No hay otras soluciones, ya que la de $x + y \leq 1$ estará siempre activa, y las únicas dos posibilidades son que la de $y \leq k$ esté activa, o no, y esos casos ya los analizamos.

A medida que k se achica, el precio sombra de esa restricción aumenta, y cae el de la otra. La idea es que por la forma de la función, queremos estar lo más cerca posible de $x = y$; a medida que cae k nos alejamos de esa solución; aumentar el "1" de $x + k \leq 1$ no cambiaría demasiado el valor de xy (porque sólo podría aumentar x, que tiene una utilidad marginal baja si k es chico), sin embargo, aumentar k aumentaría "mucho" el valor de xy, porque nos permitiría acercarnos a xy.

7 Estática Comparativa o Comparada

A menudo en economía nos interesa saber cómo cambian un conjunto de variables endógenas ante un cambio en variables exógenas. A ese tipo de estudio, se le llama de estática comparada. Por ejemplo, nos interesa saber cómo cambia la cantidad de trabajo demandada por una firma cuando suben los salarios. En estas notas nos dedicaremos a ver los métodos más tradicionales de estática comparada, y un método mejor y más sencillo que funciona a menudo. El ejemplo que guiará la presentación es el de la demanda de trabajo por parte de la firma. ¿Cómo podemos demostrar que la demanda de trabajo tiene pendiente negativa? ¿Qué se precisa para obtener el resultado?

Hay una firma que posee una tecnología que transforma trabajo, l, en un producto, mediante una tecnología f. El precio del bien producido es p, y el precio del trabajo es w. La pregunta que nos interesa contestar es: ¿Cómo cambia la demanda de trabajo cuando cambia w? Para contestar esa pregunta hay por lo menos tres métodos, cada uno con diferentes características.

Métodos 1 y 2: Derivando.

En general, el camino que adoptan los economistas es el de asumir que f es tal que $f' > 0$ y $f'' < 0$. Con esos supuestos, el problema del empresario es el de elegir l para maximizar

$$v(l, w) = pf(l) - wl$$

y la condición de primer orden

$$f'(l^*) = \frac{w}{p} \tag{7.1}$$

es necesaria y suficiente para que l^* sea óptima para $\frac{w}{p}$. Ya a esta altura usamos que f es derivable dos veces, y que $f'' < 0$, para que la condición de primer orden sea también suficiente.

Como $f'' < 0$, para cada $W = w/p$, existe un único $l(W)$ que satisface la ecuación (7.1), por lo que se puede escribir

$$f'(l(W)) \equiv W. \tag{7.2}$$

Método 1. "Intuitivo" pero Incorrecto y Restrictivo.

Este método dice algo tipo:

> En la ecuación (7.2), como es una identidad, pues es la definición de $l(W)$, puedo ver cómo cambian ambos lados, ante cambios "chicos" en W. El cambio en el lado izquierdo es la derivada de f', por el cambio en l, mientras que el cambio en el lado derecho, será sólo el cambio en W. Si llamo dx a un cambio chico en x, para cualquier variable x, obtengo
>
> $$f''(l(W))\, dl(W) = dW$$
>
> y reacomodando términos,
>
> $$\frac{dl(W)}{dW} = \frac{1}{f''(l(W))}$$
>
> por lo que la pendiente de la demanda de trabajo es negativa.

Aunque el método es medianamente intuitivo, es incorrecto porque los cambios "infinitesimalmente pequeños" dW y dl, no existen como objetos matemáticos. Además, el método es restrictivo porque sigue usando que f'' existe y es negativa.

Método 2. "Técnico" pero Correcto y Restrictivo.

Este segundo método se basa en el Teorema de la función inversa, que en su versión más sencilla, y cortando grueso en los detalles dice así.

Teorema de la Función Inversa. Si $g : X \to \mathbf{R}$ para algún $X \subseteq \mathbf{R}$ es tal que

$$\begin{array}{rcll} g'(x) & > & 0 & \forall x \\ & & o & \\ g'(x) & < & 0 & \forall x \end{array}$$

entonces existe una función g^{-1} que llamamos la función inversa, que va de la imagen de g a X tal que $g\left(g^{-1}(y)\right) \equiv y$ para todo y en la imagen de g, y $g^{-1}(g(x)) \equiv x$ para todo x en X. Además,

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}. \tag{7.3}$$

Prueba. Que la función inversa existe es obvio pues como la g es estrictamente monótona (creciente o decreciente) a cada y de la imagen le corresponde un solo x en X : ese x es $g^{-1}(y)$. Para ver que la ecuación (7.3) es cierta, alcanza con ver que derivando en ambos lados de $g\left(g^{-1}(y)\right) = y$ con respecto a y se obtiene, por la regla de la cadena,

$$\frac{dg\left(g^{-1}(y)\right)}{dy} = 1 \Leftrightarrow g'\left(g^{-1}(y)\right)\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = 1 \Leftrightarrow \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}$$

como queríamos demostrar.■

Tenemos ahora que la función f' (que debemos pensar que es la g del teorema) mapea $\mathbf{R}_+$ a $\mathbf{R}$, y por tanto,

$$l = f'^{-1}(W) \quad \text{y} \quad \frac{dl}{dW} = \frac{df'^{-1}(W)}{dW} = \frac{1}{f''\left(f'^{-1}(W)\right)} = \frac{1}{f''(l)} < 0$$

como queríamos demostrar.

En general, si tenemos un parámetro x y una variable de elección y, tendremos una ecuación de la forma $\left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{x,y^*(x)} = 0$, y la condición de concavidad $\left.\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}\right|_{x,y^*(x)} \leq 0$. Luego, llamando g_2 a la derivada de g con respecto a y, en la identidad $g_2(x, y^*(x)) \equiv 0$ podremos derivar con respecto a x para obtener

$$\frac{\partial g_2(x, y^*(x))}{\partial x} + \frac{\partial g_2(x, y^*(x))}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial g_2(x, y^*(x))/\partial x}{\partial g_2(x, y^*(x))/\partial y} = -\frac{\frac{\partial^2 g(x,y^*(x))}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 g(x,y^*(x))}{\partial y^2}}.$$

Por lo tanto, el signo de dy/dx será el mismo que el de la derivada cruzada de g con respecto a x y y.

Vemos que para los dos métodos anteriores precisamos asumir que la función de producción es derivable (dos veces), y que el método nos lleva a concluir que $dl/dw \leq 0$ porque $f'' < 0$ (porque hay rendimientos marginales decrecientes del trabajo).

Método 3. General (pero algunas veces difícil de aplicar).

Supongamos que cuando el salario es w, l es óptimo, y que cuando es w', l' es óptimo. Eso quiere decir que

$$pf(l) - wl \geq pf(l') - wl' \text{ y que } pf(l) - w'l \leq pf(l') - w'l'.$$

Si restamos la segunda desigualdad de la primera (el lado izquierdo de la segunda del lado izquierdo de la primera, y lo mismo para el derecho) obtenemos

$$l(w' - w) \geq l'(w' - w) \Leftrightarrow (l' - l)(w' - w) \leq 0$$

que es justamente lo que queríamos demostrar. Ver que no se precisa asumir que f es derivable, o que hay rendimientos marginales decrecientes del trabajo; de hecho, la demada de trabajo tiene pendiente negativa, independientemente de la forma de f.

Método 4. Ver Milgrom y Shannon, "Monotone Comparative Statics," Econometrica 1994.

Aquí presento una versión sencilla del método. Sean X y T dos subconjuntos de $\mathbf{R}$. Interpretaremos X como el conjunto de acciones que puede tomar un individuo o una firma, y T como un conjunto de parámetros exógenos ($-\lambda$ en este caso). Para $f : X \times T \to \mathbf{R}$ decimos que satisface la propiedad del **cruce único** en $(x;t)$ si

$$\left.\begin{array}{c} x' > x \\ t' > t \\ f(x',t) > f(x,t) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x',t') \geq f(x,t')$$

La idea general es que si vale la pena usar la acción "alta" x' y no la "baja" x cuando el parámetro es el bajo, t, también vale la pena usar la acción alta x' y no la x cuando el parámetro sube a t'. La idea es que x y t son, de alguna forma, complementarios. Se llama la propiedad del cruce único porque, como función de t, $f(x',t) - f(x,t)$ cruza 0 una sola vez, y desde abajo. El siguiente es una versión super sencilla del Teorema 4 de Milgrom y Shannon en la Econometrica, para el caso que más van a usar en sus carreras: un parámetro y la variable de elección en $\mathbf{R}$.

Teorema. Para $X, T \subseteq \mathbf{R}$ y $f : X \times T \to \mathbf{R}$, si f satisface la propiedad del cruce único en (x,t) y

$$x(t) = \arg\max_{x \in X} f(x,t)$$

es una función, entonces $x(\cdot)$ es débilmente creciente.

Prueba. Debemos demostrar que si $t' > t$, entonces $x(t') \geq x(t)$. Supongamos $x(t) < x(t')$. Como $x(t)$ es el único x que maximiza $f(\cdot,t)$, tenemos que $f(x(t),t) > f(x(t'),t)$. Poniendo $x(t) = x'$ y $x(t') = x$ en la propiedad del cruce único, vemos que como se cumple $f(x',t) > f(x,t)$, se obtiene

$$f(x',t') \geq f(x,t') \Leftrightarrow f(x(t),t') \geq f(x(t'),t')$$

lo que contradice que $x(t')$ es el único que maximiza $f(\cdot,t')$. Obtenemos entonces $x(t') \geq x(t)$ como queríamos demostrar.■