

1 Teorema de la Envolvente

En este capítulo presentamos una versión sencilla de un resultado muy útil que se llama el Teorema de la Envolvente.

Teorema de la Envolvente (sin restricciones). Suponga que para cada x la función $g(x, \cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es derivable y que alcanza un máximo en un único $y(x)$ que es una función derivable de x . Entonces, la función

$$f(x) = \max_y g(x, y)$$

es derivable y tenemos que

$$\frac{df(x)}{dx} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x, y(x))}.$$

Demostración. Como $g(x, \cdot)$ es derivable y alcanza un máximo, debemos tener que en el $y(x)$ que maximiza $g(x, \cdot)$ se cumple que

$$\left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y(x))} = 0. \quad (1.1)$$

Como por definición $f(x) = g(x, y(x))$, tenemos que por la regla de la cadena y usando la ecuación (1.1),

$$\frac{df(x)}{dx} = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y(x))} + \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y(x))} \frac{dy(x)}{dx} = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y(x))} + 0 \frac{dy(x)}{dx} = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y(x))}$$

como queríamos demostrar. ■

Veremos ahora un ejemplo de cómo funciona el Teorema de la Envolvente.

Ejemplo. Sea $g(x, y) = -y(y - x)$. El y óptimo para cada x es $y(x) = x/2$. Por lo tanto, $f(x) = x^2/4$. Vemos entonces que

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{2}.$$

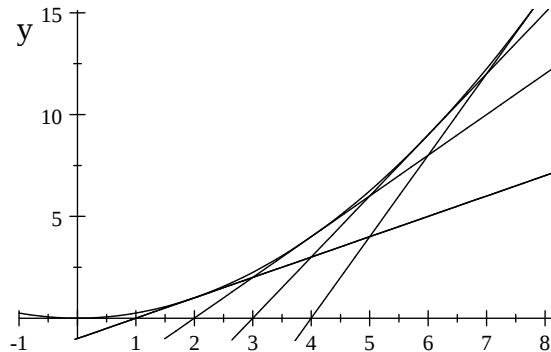
Usando el Teorema de la Envolvente y $\partial g / \partial x = y$ obtenemos

$$\frac{df(x)}{dx} = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y(x))} = y|_{(x, y(x))} = \frac{x}{2}$$

que es lo mismo que hacer el cálculo directamente.

En este ejemplo es útil y fácil hacer dos gráficos. En el primero, ponemos y en las abscisas. Para cada x la función g es una parábola con un máximo en $x/2$ y raíces 0 y x . Eso ilustra por qué $y(x) = x/2$.

El segundo gráfico es más interesante, e ilustra por qué se llama Teorema de la Envolvente. Graficamos $g(x, y)$ para $y = 1, 2, 3$ y 4. La curva que “envuelve” a todas esas rectas “por encima” es $x^2/4$, es decir, la función $f(x)$. Esta función es la que elige, para cada x el y que hace que la función $g(x, y)$ sea la más alta.



Así por ejemplo, tenemos que para $x = 2$, la recta más alta es la que corresponde a $y = 1$, que está graficada. Para esa recta, la pendiente es 1. No es casualidad que la pendiente de $f(x) = x^2/4$ en $x = 2$ es 1. ■

En términos “intuitivos” o “económicos” el Teorema de la Envolvente nos dice que cuando cambia x , el valor máximo de f cambia por dos motivos. Primero, cambia por el cambio directo sobre g . Pero f también cambia por el cambio en g provocado por el cambio en el y óptimo. Pero como y había sido elegido en una porción en que g era “chata” con respecto a y ($\partial g / \partial y = 0$ en el y óptimo) este segundo cambio no afecta el valor de f y sólo debemos preocuparnos por el cambio directo en g provocado por el cambio en x .

Ilustramos esto ahora con un problema de maximización de beneficios de una firma. La función de beneficios de una firma, como función de los salarios es

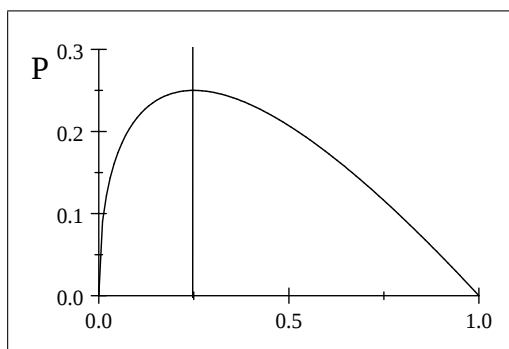
$$P(w) = \max_l [f(l) - wl].$$

Para hacerlo más concreto, supongamos que $f(l) = \sqrt{l}$. Tenemos entonces que

$$l(w) = \frac{1}{4w^2} \quad \text{y} \quad P(w) = \frac{1}{4w}.$$

Cuando, por ejemplo, suben los salarios, P cae porque tenemos una cierta cantidad de gente contratada. Es más, por cada suba de \$1 en los salarios, los beneficios caen en l (eso es la derivada directa de $f(l) - wl$ con respecto a w) pues hay que pagarle \$1 adicionales a cada trabajador, y eso da \$ l . Pero a este efecto se suma el hecho que la cantidad óptima de trabajadores cambia al subir el salario, y este cambio en la cantidad de gente contratada también afecta los beneficios. El Teorema de la Envolvente nos dice que este segundo efecto no es relevante. Entonces, el cambio en los beneficios es $-l$ evaluado en el óptimo, $1/4w^2$. Si derivamos $P(w)$ con respecto a w vemos que eso es correcto.

Para hacerlo aún más concreto, imaginemos que originalmente los sueldos son \$1. Entonces, los beneficios son $\sqrt{l} - l$



Cuando los salarios cambian un poco,

- la firma tiene que pagarle un poco más a cada uno de sus trabajadores (1/4 en este caso)
- cambiará un poco el número óptimo de trabajadores, cambiando (en principio) los beneficios.

Pero como los beneficios son chatos en $l = 1/4$, este segundo efecto desaparece. Por lo tanto, el cambio total en los beneficios es sólo el primer efecto, y eso es lo que nos dice el Teorema de la Envolvente. En términos de la demostración, aplicado a este caso,

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \underbrace{\frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x}}_{\text{Efecto Directo}} + \underbrace{\frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial y}}_{\text{Cambio en beneficios de cambiar "l"}} \frac{dy^*(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x} + 0 \frac{dy^*(x)}{dx} = \frac{\partial g(x, y^*(x))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Presentamos ahora una versión sólo un poco más general del Teorema de la Envolvente.

Teorema de la Envolvente (con restricciones). Sea $f(x)$ la función de valor en el problema de maximizar $g(x, y)$ en y , sujeto a $h(x, y) = c$. Es decir, $f(x) = \max_{y: h(x, y) = c} g(x, y)$. Si f es diferenciable en un cierto x , y λ es el multiplicador de Lagrange asociado al y óptimo en $x, y(x)$, entonces

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_s} = \frac{\partial g(x, y(x))}{\partial x_s} - \lambda \frac{\partial h(x, y(x))}{\partial x_s}$$

La demostración es sencilla y queda a cargo del lector (que también la puede buscar en el apéndice matemático del Mas-Colell, Whinston y Green). Una aplicación “entretenida” de esta versión del Teorema de la Envolvente es la siguiente.

Aplicación. Los multiplicadores de Lagrange como “Precios Sombra”. En general se le llama al multiplicador de Lagrange de una restricción el “precio sombra” de “relajar” esa restricción. Para ver por qué, tomemos el problema de maximizar $u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ sujeto a $px = w$. El Lagrangeano de este problema es

$$L = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + \lambda (px - w)$$

que arroja como solución

$$x(p, w) = \left(\frac{\alpha w}{p_1}, \frac{(1-\alpha)w}{p_2} \right).$$

De la condición de primer orden obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \lambda p_1 \Leftrightarrow \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \frac{1}{p_1} = \lambda \Leftrightarrow \\ \lambda &= \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)}{p_2} \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

y la utilidad máxima alcanzable por el individuo es

$$v(p, w) = w \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)}{p_2} \right)^{1-\alpha}.$$

Lo que el individuo estaría dispuesto a pagar (en términos de “útiles” o unidades de utilidad) por aumentar un poquito la riqueza es entonces

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \left(\frac{\alpha}{p_1} \right)^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)}{p_2} \right)^{1-\alpha} = \lambda.$$

A eso se le llama el precio “sombra” (o subjetivo, o no observable) de la riqueza (de aumentar la riqueza y relajar o aflojar la restricción presupuestal).

Una manera más sencilla de ver la conexión entre la utilidad marginal de aumentar w y λ se obtiene con el Teorema de la Envolvente: como $v(p, w) = \max_{x: px=w} u(x)$, tenemos que

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \frac{\partial u(x)}{\partial w} - \lambda \frac{\partial (px - w)}{\partial w} = \lambda$$

que era justamente lo que queríamos mostrar. ■

Ejercicio 1 Un granjero tiene un terreno de h hectáreas, y un tractor que puede usar por t horas. Con cada hora de tractor, planta una hectárea, que produce 1 tonelada de soja. El precio de la soja es \$1 por tonelada. No tiene costos de usar la tierra, o el tractor y cualquier recurso ocioso no produce nada (no puede alquilarlo a un vecino). Para cada uno de las tres posibilidades (h más chico que t , igual, o mayor), determine cuánto está dispuesto a pagar el granjero por agrandar “un poquito” su terreno.

Envolvente: Soluciones

Ejercicio 1. Consideramos primero el caso en que $h < t$. Es obvio que el granjero utilizará todas sus hectáreas, y que por tanto sus beneficios serán $\pi = h$. Tenemos entonces que $d\pi/dh = 1$. Esa es la respuesta. Pero para hacerlo más largo y técnico, tenemos que el granjero debe elegir H, T para maximizar

$$\begin{aligned} & \min \{H, T\} \\ \text{sujeto a } & H \leq h \\ & T \leq t \end{aligned}$$

El Lagrangiano de este problema es

$$L = \min \{H, T\} - \lambda (H - h) - \mu (T - t).$$

Como h es menor que t , queda $L = H - \lambda (H - h)$, por lo que la condición de primer orden es $\lambda = 1$ y $H = h$ (esto sale de Kuhn-Tucker). Por supuesto, los beneficios son $\pi = h$ (como ya sabíamos). Si queremos hacer $d\pi/dh$, podemos hacerlo directamente, o con el Teorema de la Envolvente: como $\pi(h) = \max_H L(H, h)$, tenemos

$$\frac{d\pi}{dh} = \frac{\partial L}{\partial h} = \lambda = 1.$$

Siguiendo razonamientos parecidos a este, obtenemos que en los otros casos el granjero está dispuesto a pagar 0 por ampliar su terreno. El único caso “curioso” es cuando $h = t$, en cuyo caso las dos restricciones están activas, pero el granjero no está dispuesto a pagar nada por relajarlas.