Preferencias

Sea X el espacio de los bienes de consumo, y sea $\succeq$ una relación de preferencia, es decir, $\succeq \subseteq X \times X$. Interpretaremos $(x, y) \in \succeq$ como x débilmente preferido a y, y escribiremos $x \succeq y$.

Ejemplo 1 (a) Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y $\succeq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$.

(b) Sea X el conjunto de todas las personas en el mundo, y $\succeq$ la relación "tienen al menos un nombre en común." Así, por ejemplo, tenemos que el par (Gabriel Omar Batistuta, Gabriel García Márquez) $\in \succeq$

(c) Sea $X = \mathbf{R}$, el conjunto de los números reales y $\succeq$ la relación "mayor o igual que", es decir $\succeq = \geq$.

(d) Sea $X = \mathbf{R}$, y $\succeq$ la relación: $x \succeq y$ si $|x - y| > 1$.

(e) Sea $X = \mathbf{R}$, y $\succeq$ la relación: $x \succeq y$ si $x - y$ es múltiplo de 2.

A partir de la relación de preferencia $\succeq$ definimos $\sim$ (indiferencia) como

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ y } y \succeq x$$

es decir, x es indiferente a y si, y sólo si, x es débilmente preferido a y y y es débilmente preferido a x. También definimos $\succ$ (estrictamente preferido) como

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ y no } y \succeq x$$

es decir, x es estrictamente preferido a y si, y sólo si, x es débilmente preferido a y y y no es débilmente preferido a x.

Decimos que la relación de preferencia $\succeq$ es:

reflexiva si, y sólo si, para todo $x \in X$, $x \succeq x$. Es decir, todos los elementos son comparables consigo mismos.

completa si, y sólo si, para todo $x, y \in X$

$$x \succeq y \text{ ó } y \succeq x$$

es decir, todos los elementos en el espacio de los bienes de consumo son comparables: dadas dos canastas x y y, x es mejor que y ó y es mejor que x. Para ver que las preferencias no tienen porqué ser completas, imaginemos a una persona que tiene que decidir entre dos trabajos con distintos sueldos, ambientes de trabajo, tipo de trabajo, etc, y a quien le resulta imposible decidir. Al final, la persona tomará una decisión (porque debe elegir) pero eso no quiere decir que la persona "prefiera" lo que eligió. A veces se confunde la completitud de las elecciones con completitud de las preferencias. Por ejemplo, si a mi me dan a elegir entre x e y, alguno voy a tener que elegir, pero no quiere decir que yo realmente "prefiera" el que elegí. Puede que x e y sean incomparables para mi. A veces los economistas dicen: "las preferencias *tienen* que ser completas. Si no lo fueran, a la gente le pasaría como al burro aquél que perdido en el desierto se encuentra con dos baldes de agua, e incapaz de elegir porque sus preferencias no eran completas, se muere de sed." Al burro pueden resultarle incomparables los dos baldes de agua, y aún así ser capaz de elegir. Que las elecciones sean completas no quiere decir que las preferencias lo sean.

Ejercicio 2 Mostrar que si $\succeq$ es completa, también es reflexiva.

Ejercicio 3 Sea $\succeq$ una relación binaria en X. Demuestre que si $\sim$ es completa, entonces no existen x e y en X tales que $x \succ y$. Demuestre también que si $\succeq$ es completa y no existen x e y tales que $x \succ y$, entonces $\sim$ es completa.

Decimos que una relación de preferencias es **transitiva** si, y sólo si, para todo $x, y, z \in X$

$$x \succeq y \text{ y } y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$$

es decir, si x es mejor que y y y es mejor que z, x es mejor que z. Por más que parece una propiedad "obvia" que deben satisfacer las preferencias de una persona razonable, aca van cuatro cuentos que pueden minar esa intuición.

Cuento A. Una persona es indiferente entre un café sin azúcar, y un café con un grano de azúcar; indiferente entre esto último y uno con dos granos de azúcar; etc, etc, pero que prefiere un café con una cucharadita de azúcar a uno sin azúcar. Estas preferencias no son transitivas.

Ejercicio 4 Mostrar porqué el ejemplo del azúcar viola transitividad.

Cuento B. Esto es de Kahneman y Tversky (1984). A cada uno de los individuos de un grupo se le dice:

> Estás por comprar un equipo de música por U$S 125 y una calculadora por U$S 15. El vendedor te dice que la calculadora está "on sale" a U$S 10 en la otra sucursal de la tienda, que queda a 20 minutos caminando. El equipo de música está al mismo precio. ¿Irías a la otra tienda?

Sucede que la fracción de individuos que responden que irían a la otra tienda es mucho mayor que la fracción que dice que iría cuando se cambia la pregunta de tal forma que el descuento de U$S 5 es en el equipo de música. Lo "raro" de eso es que la fracción "debería" ser la misma, pues el viaje y el ahorro en ambos casos son iguales. De hecho, uno espera que la respuesta a la siguiente pregunta sea indiferencia

> Se agotaron las calculadoras y los equipos de audio en esta tienda. Tenés que ir a la otra tienda a comprar ambas cosas, y recibirás un descuento de U$S 5 en alguno de los items. ¿Te importa en cuál?

La violación de transitividad queda clara si ponemos

$x \rightarrow$ Ir a la otra tienda y recibir el descuento en la calculadora

$y \rightarrow$ Ir a la otra tienda y recibir el descuento en el equipo de audio

$z \rightarrow$ Comprar las dos cosas en la primera tienda.

Las dos primeras elecciones de la gente demuestran que $x \succ z$ y $z \succ y$, pero la última demuestra que $x \sim y$. Eso viola transitividad, pues si las preferencias cumplieran transitividad, obtendríamos: de $x \succeq z$ y $z \succeq y$, que $x \succeq y$; luego, si tuviésemos $y \succeq x$, con $x \succeq z$ tendríamos $y \succeq z$, que contradice $z \succ y$, por lo que deducimos que $x \succ y$, y eso contradice $x \sim y$.

Cuento C: A una familia de tres personas se les pregunta: ¿Qué prefieren, ir al Cine o ir a una Parrillada? Dicen $C \succ P$. Les preguntamos ahora ¿Qué prefieren, ir a la Parrillada, o jugar al Nintendo? Dicen $P \succ N$. Finalmente les preguntamos ¿Qué prefieren, jugar al Nintendo, o ir al Cine? Dicen $N \succ C$. Parece que las preferencias son no transitivas, y por tanto "irracionales". Sin embargo, si las preferencias del padre, madre y niño son

$$\begin{aligned} P &\succ {}_pN \succ_p C \\ C &\succ {}_mP \succ_m N \\ N &\succ {}_nC \succ_n P \end{aligned}$$

y se decide por votación qué hacer, obtenemos las elecciones del principio. Este "problema" se llama la paradoja de Condorcet.

Cuento D: A veces podemos observar intransitividades en las elecciones, debido a un cambio en gustos. Para un potencial fumador, las preferencias sobre cantidades de cigarrillos diarios pueden ser

$$1 \succ 0 \succ 40$$

pero una vez que empieza a fumar uno por día (demostrando $1 \succ 40$), sus preferencias pueden cambiar a

$$40 \succ 1 \succ 0$$

y cuando empieza a fumar 40 por día, observaríamos $40 \succ 1$. Juntando ambas observaciones tenemos $40 \succ 1 \succ 40$.

Ejercicio 4. Deberes. En el Ejemplo 1 determinar si cada relación satisface cada una de las siguientes propiedades: completa, transitiva y reflexiva.

Ejercicio 5 Para este ejercicio dibuje, para cada relación de preferencias que se defina, el conjunto de los y que son mejores que un x particular (digamos $x = (1,1)$, por ejemplo). Le facilitará el trabajo.

Parte A. Una relación de preferencias $\succeq$ sobre $X = \mathbf{R}^2_+$ está definida por $x \succeq y \Leftrightarrow x_1x_2 \geq y_1y_2 + 1$. Determine si $\succeq$ es completa y transitiva.
Parte B. Definimos otra relación de preferencias $\succ^*$ sobre $X = \mathbf{R}^2_+$ mediante $x \succ^* y \Leftrightarrow x_1x_2 > y_1y_2 + 1$. Luego, definimos $x \succeq^* y$ si y sólo si no se cumple $y \succ^* x$; a partir de $\succeq^*$ definimos $x \sim^* y$ como es habitual ($x \succeq^* y$ & $y \succeq^* x$). Determine si $\succ^*$ es completa y transitiva. Determine si $\succeq^*$ es completa y transitiva. Determine si $\sim^*$ es completa y transitiva.

Ejercicio 5. Deberes. Una relación binaria $\succeq$ es:
negativamente transitiva si para todo $x, y, z \in X$, $(x,y) \notin \succeq$ y $(y,z) \notin \succeq$ implican que $(x,z) \notin \succeq$.
asimétrica si para todo $x, y \in X$, $x \succeq y$ implica que $(y,x) \notin \succeq$.
(a) Dar un ejemplo de una relación negativamente transitiva.
(b) Dar un ejemplo de una relación asimétrica.
(c) Dar un ejemplo de una relación negativamente transitiva que no sea asimétrica.
(d) Dar un ejemplo de una asimétrica que no sea negativamente transitiva.

Ejercicio 6: (del Mas-Colell et. al.) Una relación $R \subset X \times X$ para algún X es **simétrica** si xRy implica yRx para todo $x, y \in X$. Demostrar que si una relación de preferencias $\succeq$ es completa y transitiva, entonces
(i) $\succ$ es irreflexiva (es decir, para todo x, $(x,x) \notin \succ$) y transitiva
(ii) $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.
(iii) si $x \succ y \succeq z$, entonces $x \succ z$.

Una cosa importante del ejercicio anterior, que se va a repetir en muchos ejercicios más adelante, es la siguiente. Si les pido que demuestren que $\succ$ es transitiva, *tienen* que asumir que $x \succ y$ y también que $y \succ z$, para luego demostrar $x \succ z$. Es algo bastante obvio, pero no se puede demostrar que se cumple el axioma si no se asume que $x \succ y$ y también $y \succ z$. Como ejemplo adicionales de este principio básico ("si tengo que demostrar que un axioma de la forma $a \Rightarrow b$ se cumple, si se cumple el axioma tal, debo asumir que se cumple el axioma tal, y además asumir a. Luego debo demostrar que b se cumple.") tenemos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6 Preferencias sobre conjuntos. Sea X un conjunto finito y sea $\succeq$ una relación de preferencias sobre X. Sea P el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de X, y definimos en P una relación de preferencias $\succeq^*$ de la siguiente manera: para $A, B \in P$,

$$A \succeq^* B \Leftrightarrow \text{ para todo } y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } x \succeq y \text{ (el } x \text{ puede ser distinto para cada } y). \qquad (1)$$

Parte A. Muestre que si $\succeq$ es completa y transitiva, entonces $\succeq^*$ es completa y transitiva.
Parte B. Muestre que para $A, B \in P$, $A \succeq^* A \cup B$ si $A \succeq^* B$ y las preferencias $\succeq$ son reflexivas.
Parte C. Suponga que $X = \{churrasco, pasta, helado\}$ y que una persona tiene preferencias $\succeq'$ sobre P (los subconjuntos no vacíos de X) que satisfacen (1) $\{c\} \succ' \{p\} \succ' \{h\}$ (tiene hambre, y si va a comer sólo una cosa, que sea churrasco) y (2) $\{p\} \succ' \{c, h\} \succ' \{p, h\}$ (no quiere engordar, y si puede comprometerse a comer sólo pasta prefiere eso antes que churrasco y helado, o pasta y helado). ¿Pueden estas preferencias derivarse de unas preferencias $\succeq$ sobre X por el procedimiento en (1)? Demuestre que no, o de un ejemplo de $\succeq$ que genere $\succeq'$.

En el ejercicio que viene procedemos "al revés" que lo normal: nos dan una relación binaria que interpretamos como preferencia estricta, y a partir de ella definimos preferencia débil e indiferencia.

Ejercicio 7 Sea P una relación binaria en un conjunto X (es decir, $P \subseteq X \times X$). Definimos xRy si y sólo si no es cierto que yPx.
Parte A. Muestre que R es completa si y sólo si P es asimétrica.
Parte B. Muestre que R es transitiva si y sólo si P es negativamente transitiva.

Ejercicio 8 Demostrar que $\succeq$ es negativamente transitiva si y sólo si, para todo $x, y, z \in X$, $x \succeq z$ implica que para todo y, $x \succeq y$ ó $y \succeq z$.

Ejercicio 9 Sea $\succeq$ una relación de preferencias en $\mathbf{R}^2$ que no es completa, pero es transitiva y reflexiva. Supongamos que la extendemos a otra relación $\succeq^*$ para hacerla completa de la siguiente manera: $x \succeq^* y \Leftrightarrow x \succeq y$ o $[\neg x \succeq y \ \& \ \neg y \succeq x]$. Es decir, si $x \succeq y$, decimos $x \succeq^* y$, y si x no es comparable con y, los declaramos indiferentes, $x \sim^* y$. Demuestre o de un contraejemplo para la afirmación "$\succeq^*$ es transitiva".

Ejercicio 8. Presentamos ahora un falso teorema, con una demostración incorrecta. El ejercicio es encontrar un error en la demostración, y un contraejemplo al teorema.

Falso Teorema: Si una relación binaria $B \subseteq X \times X$ es simétrica y transitiva, entonces es reflexiva.

Demostración Incorrecta: Tomo $x \in X$ y cualquier $y \in X$ tal que xBy. Por simetría, obtengo yBx. Ahora, xBy y yBx implican, por transitividad, xBx, como queríamos demostrar.

Parte A: Encontrar el error en la demostración.

Parte B: Encontrar un contraejemplo al teorema. Es decir, encontrar o inventar una relación B tal que B es simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

Ejercicio 9. R es circular si para todo $x, y, z \in X$, xRy y yRz implican zRx para todo x, y, z. Demostrar que R es reflexiva y circular si y sólo si es reflexiva simétrica y transitiva.

Ejercicio 10. Sea X un conjunto cualquiera, sea $\succeq$ una relación binaria en X y sea $\sim$ la relación de indiferencia definida a partir de $\succeq$.

Parte A. Demuestre que si $\sim$ es completa entonces no existen $x, y \in X$ tales que $x \succ y$.

Parte B. Demuestre que si $\succeq$ es completa y no existen $x, y \in X$ tales que $x \succ y$, entonces $\sim$ es completa.

Ejercicio 11. Deberes. Sean X un conjunto arbitrario y R_1 y R_2 dos relaciones binarias en X.

Parte A. Demuestre o encuentre un contraejemplo: si R_1 y R_2 son completas, entonces $R = R_1 \cap R_2$ es completa.

Parte B. Demuestre o encuentre un contraejemplo: si R_1 y R_2 son transitivas, entonces $R = R_1 \cap R_2$ es transitiva.

Ejercicio 10 Deberes. Sea X un conjunto arbitrario y sea R cualquier subconjunto de $X \times X$. Se dice que otro subconjunto S de $X \times X$ es una **extensión** de R si $R \subseteq S$. Se define a la **extensión transitiva más chica de** R como la intersección de todas las extensiones transitivas de R. Es decir, si definimos $\mathcal{E}_R$ como el conjunto de todas las extensiones transitivas de R, $\mathcal{E}_R = \{S : S \text{ es una extensión transitiva de } R\}$, la extensión transitiva más chica de R es la relación binaria

$$R_T = \bigcap\nolimits_{S \in \mathcal{E}_R} S. \tag{2}$$

Parte A. Demuestre que si $\mathcal{E}$ es un conjunto arbitrario, no vacío, de relaciones binarias que son extensiones de R, entonces su intersección es una extensión de R.

Parte B. Demuestre que $X \times X$ es una extensión transitiva de R.

Parte C. Usando las Partes A y B, demuestre que R_T es una extensión transitiva de R.

Parte D. Demuestre que si S es cualquier extensión transitiva de R, entonces $R_T \subseteq S$.

Parte E. Demuestre que xR_Ty si y sólo si existen $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $x = x_1$, $y = x_n$ y $x_1Rx_2R...Rx_n$.

Dada una secuencia $\{x_n\}_1^\infty = \{x_1, x_2, ...\}$ en $\mathbf{R}^m$ decimos que $\{x_n\}_1^\infty$ **converge** a $x \in \mathbf{R}^m$, y escribimos $x_n \to x$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Ejercicio 11 Demuestre que la secuencia $\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$ converge a 0.

Una relación de preferencias $\succeq \subseteq X \times X$ para $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es:

continua si para todo $x \in \mathbf{R}^l$, los conjuntos $U_x = \{y : y \succeq x\}$ y $L_x = \{y : x \succeq y\}$ son cerrados (es decir, si $y_n \succeq x$ para todo n y $y_n \to y$ implican $y \succeq x$, y similarmente para $x \succeq y_n$).

monótona si $y \gg x$ (es decir $y_i > x_i$ para todo i) implica $y \succ x$.

estrictamente monótona si $y > x$ (es decir $y \geq x$ y $x \neq y$) implica $y \succ x$. Como siempre, $x \geq y$ quiere decir que para todo $i = 1, 2, ..., l$, $x_i \geq y_i$.
localmente no saciable si para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $y \in X$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$ y $y \succ x$.

Ejercicio 13. Deberes. Sea $X = \mathbf{R}^L_+$. Demuestre que si una relación de preferencias es monótona, entonces es localmente no saciable.

Ejemplo. Preferencias Lexicográficas. Sea $X = \mathbf{R}^2_+$. Definimos la relación de preferencias de la siguiente manera: $\forall x, y \in X$,

$$x \succeq_L y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 > y_1 \\ o \\ x_1 = y_1 \,\&\, x_2 \geq y_2 \end{array} \right\}.$$

Mostramos que no satisface continuidad. Tomamos $x = (1, 1)$, y

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right).$$

Para cada n, $y_n \succ x$, pero no es cierto que $y = \lim_{n \to \infty} y_n = (1, 0) \succeq x$.

Ejercicio 14. Deberes. Un conjunto $C \subset \mathbf{R}^L_+$ es convexo si para todo $x, y \in C$, y todo $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha x + (1 - \alpha) y \in C$. Una relación de preferencias $\succeq$ en $X = \mathbf{R}^L_+$ es **convexa** si el conjunto $U_x = \{y : y \succeq x\}$ es convexo para todo x y es **estrictamente convexa** si $y \neq z$, $y \succeq x$ y $z \succeq x$ implican que $\alpha y + (1 - \alpha) z \succ x$ para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha \in (0, 1)$.

Parte A. Demuestre que si una relación de preferencias es convexa, entonces para cualquier conjunto convexo C, el conjunto $\{x \in C : x \succeq y \text{ para todo } y \in C\}$ es convexo.

Parte B. Demuestre que si una relación de preferencias es **estrictamente convexa**, entonces para cualquier conjunto convexo C, el conjunto

$$\{x \in C : x \succeq y \text{ para todo } y \in C\}$$

tiene a lo sumo un elemento.

Ejercicio 12 Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Si $\succeq$ es transitiva y $R \subseteq \succeq$, liste tres pares (x, y) que no están en R, que tienen que estar necesariamente en $\succeq$.

Una relación de preferencias $\succeq$ en $X = \mathbf{R}^L_+$ es **homotética** si $x \sim y$ si y sólo si $\alpha x \sim \alpha y$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha > 0$.

Ejercicio 16. Determine cuáles de las siguientes preferencias son homotéticas para $X = \mathbf{R}^2_+$.

Parte A. $x \succeq y$ si y sólo si $x \geq y$ (como siempre, $x \geq y$ quiere decir que para $i = 1, 2$ tenemos $x_i \geq y_i$).

Parte B. $x \succeq y$ si y sólo si $x_1(1+x_2) \geq y_1(1+y_2)$.

Parte C. $x \succeq y$ si y sólo si $x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geq y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha}$.

Parte D. $x \succeq y$ si y sólo si $ax_1 + bx_2 \geq ay_1 + by_2$ para $a, b > 0$.

Parte E. $x \succeq y$ si y sólo si $ax_1 + bx_2 \geq cy_1 + dy_2$ para $a, b, c, d > 0$.

Ejercicio 13 Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times X$. La **inversa** de R, es la relación $R^{-1} = \{(x, y) : yRx\}$.

Parte A. Si R es antisimétrica (yRx y también xRy implican $x = y$), ¿R^{-1} también? Si R es transitiva, ¿R^{-1} también?

Parte B. Muestre que R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ejercicio 14 Si R_1 y R_2 son dos relaciones binarias en X, la **composición** de R_1 y R_2 es la relación

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, y) : \text{existe } z \in X \text{ tal que } xR_1z \;\&\; zR_2y\}$$

Muestre que R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

Ejercicio 15 Sea $X = \mathbf{R}_+^L$ para algún L. Una relación de preferencias $\succeq$ es: **divisible** si $x \succeq y$ implica $ax \succeq ay$ para todo $a \geq 0$, y para todo $x, y \in X$; **aditiva** si $x \succeq y$ y $w \succeq z$ implican $x + w \succeq y + z$, para todo $w, x, y, z \in X$. Demuestre que si una relación de preferencias $\succeq$ es Aditiva y Divisible, entonces es Convexa.

Ejercicio 16 Sea $D \subseteq X \times X$ una relación binaria dada por $D = \{(x, x) : x \in X\}$. Una relación binaria R es: un **orden parcial** si es transitiva, reflexiva y antisimétrica (xRz y zRx implican $x = z$); una **relación de equivalencia** si es transitiva, reflexiva y simétrica (xRy implica yRx).

Parte A. Muestre que D es un orden parcial y que también es una relación de equivalencia.

Parte B. Muestre que D es la única relación binaria que es un orden parcial y una relación de equivalencia.

Parte C. Muestre que $X \times X$ (que es una relación binaria) antisimétrica si X tiene un solo elemento, y que si X tiene más de un elemento, no puede ser antisimétrica.

Ejercicio 17 Determine cuáles de las siguientes preferencias son convexas. Si una preferencia es convexa, demuestre su respuesta. Si no lo es, proporcione un contraejemplo.

Parte A. $x \succeq y \Leftrightarrow \max\{x_1, x_2\} \geq \max\{y_1, y_2\}$

Parte B. $x \succeq y \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}$

Parte C. $x \succeq y \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq y_1^2 + y_2^2$

Parte D. Para $a > c$ y $b < d$

$$x \succeq y \Leftrightarrow \min\{ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2\} \geq \min\{ay_1 + by_2, cy_1 + dy_2\}.$$

Parte E. Para $a > c$ y $b < d$

$$x \succeq y \Leftrightarrow \max\{ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2\} \geq \max\{ay_1 + by_2, cy_1 + dy_2\}.$$

Ejercicio 18 Suponga que $X = \{I, C, D\}$, "naturalmente" ordenadas de izquierda a derecha con I más a la izquierda que C (centro) más a la izquierda que D (derecha). En la sociedad hay tres individuos:

- Karl, con preferencias (completas y transitivas) $\succeq_K$ dadas por $I \succ_K C \succ_K D$
- el Extremista, con $\succeq_E$ definidas mediante $D \succ_E I \succ_E C$
- el Moderado, con $\succeq_M$ dadas por $C \succ_M D \succ_M I$

Las preferencias del grupo se determinan por votación: si dos individuos prefieren una alternativa a otra, el grupo la declara preferida.

Parte A. Muestre que las preferencias del grupo no son transitivas (ya lo vimos en clase, es la paradoja de Condorcet).

Parte B (Median Voter Theorem. Este ejercicio muestra por qué muchas veces los candidatos políticos anuncian la plataforma que le gusta al votante medio, o mediano). Suponga ahora que $X = \mathbf{R}$, y que cada uno de $2n+1$ individuos tienen preferencias completas y transitivas que satisfacen la siguiente propiedad: para cada individuo i, existe un $x_i^* \in X$ tal que $x_i^* \succ_i x$ para todo $x \neq x_i^*$ y

$$\left.\begin{array}{c} x_i^* \leq x < y \\ \text{o} \\ y < x \leq x_i^* \end{array}\right\} \Rightarrow x \succ_i y.$$

Es decir: x_i^* es lo mejor, y cuanto más lejos de x_i^*, peor. Suponga que $x_1^* < x_2^* < ... < x_{2n+1}^*$. Muestre que x_{n+1}^* le gana a cualquier otra alternativa en una votación.

Ejercicio 19 (Basado en Mas Collel). Sea el espacio de consumo $X = \mathbb{R}^n_+$. Dado $A \subseteq X$, podemos tomar este conjunto como un nuevo espacio de consumo. Definimos las preferencias $\succsim_{|A}$ como las **preferencias $\succsim$ restringidas al conjunto** A de la siguiente manera: dados $x, y \in A$,

$$x \succsim_{|A} y \iff x \succsim y$$

O, de otra manera, si tomamos las preferencias como subconjunto del producto cartesiano $X \times X$, es decir, $\succsim \subseteq \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ definimos las preferencias restringidas a A como subconjunto $\succsim_{|A} \subseteq A \times A$:

$$\succsim_{|A} = \succsim \cap (A \times A)$$

Con estas definiciones, tomemos un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n_+$ compacto con las preferencias $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^n_+$ que son completas, transitivas, monótonas y continuas.

Parte A. Pruebe que existe $x^* \in Y$ tal que $x^* \succsim y$ para todo $y \in Y$. (Sugerencia: Utilice los teoremas de Wold y el teorema de Weierstrass, que dice que toda función continua en un compacto tiene máximo y mínimo absoluto).

Parte B. Usando la parte anterior, pruebe que las preferencias $\succsim_{|Y}$ sobre Y **no son** localmente no saciables, pero sin embargo son monótonas.

Parte C. Sea $B \subset Y \subset \mathbb{R}^n_+$ un conjunto abierto. Pruebe que las preferencias $\succsim_{|B}$ sobre B **son** localmente no saciables. (**Sugerencia:** utilice la definición de conjunto abierto que dice que A es abierto si para todo

$a \in A$ existe un radio $r > 0$ tal que la bola $B(a, r) \subseteq A$; combine eso con la monotonía de las preferencias sobre $\mathbb{R}_+^n$)

Parte D. ¿Encuentra algo extraño en las conclusiones de las Partes B y C? ¿Contradice algo de lo que se ha visto en clase? En caso contrario: ¿porque no?

Ejercicio 24. Sea el espacio de consumo $X = \mathbb{R}_+^2$ y preferencias $\succsim$ sobre X dadas por la siguiente definición:

$$(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \iff x_1 \geq y_1 \text{ ó } x_2 \geq y_2$$

Parte A. Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ caracterice y realice un bosquejo del conjunto de supranivel de x, definido como $A^x = \left\{y \in \mathbb{R}_+^2 : y \succsim x\right\}$

Parte B. Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ caracterice y realice un bosquejo del conjunto de infranivel de x, definido como $A_x = \left\{z \in \mathbb{R}_+^2 : x \succsim z\right\}$

Parte C. Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ caracterice y realice un bosquejo de la "curva de indiferencia que pasa por x" definida como $C_x = A_x \cap A^x$. Probar que $y \sim x \iff y \in C_x$. (Nota: Que se llame curva de indiferencia NO quiere decir que tenga forma de curva. Bien podría ser un conjunto cualquiera, una región no unidimensional de $\mathbb{R}_+^2$)

Parte D. En base al resultado anterior, argumente por qué la construcción que se hace en el teorema de Wold no podría hacerse en el caso de estas preferencias.

Parte E. ¿Son estas preferencias completas? ¿Transitivas?

Ejercicio 20 Sea X un espacio de consumo cualquiera, sobre el cual existen preferencias $\succsim \subset X \times X$.

Parte A. Pruebe que si las preferencias $\succsim$ son completas y transitivas, entonces son negativamente transitivas.

Parte B Muestre que si para una relación $\succeq$, se da que $\succ$ es negativamente transitiva, entonces $\succ$ es transitiva.

Ejercicio 21 Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (4, 5), (5, 4)\}$.

Parte A. ¿Es R completa? ¿Transitiva?
Parte B. Encuentre la extensión transitiva más chica de R.

Ejercicio 22 La relación $\geq$ se define mediante $(x, y) \in \;\geq\; \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{R}_+$. También, $>$ se define como la parte asimétrica o estricta de $\geq$: $(x, y) \in \;>\Leftrightarrow x \geq y$ pero no $y \geq x$. Recuerde que si R_1 y R_2 son dos relaciones binarias en X, la **composición** de R_1 y R_2 es la relación

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, y) : \text{existe } z \in X \text{ tal que } xR_1z \;\&\; zR_2y\}.$$

Encuentre $\geq \circ >$ y $> \circ \geq$.

Ejercicio 23 Para una relación binaria $\succeq'$ en un conjunto X, defina dos nuevas relaciones binarias $\succ'$y $\sim'$ a partir de $\succeq'$como $x \succ' y$ si $y \not\succeq' x$, y $x \sim' y$ si $x \succeq' y$ & $y \succeq' x$. Ahora defina $\succeq$ y $\sim$ a partir de $\succ'$como $x \succeq y$ si $y \not\succ' x$, y $x \sim y$ si $x \not\succ' y$ y también $y \not\succ' x$. Demuestre que $\succeq'$y $\succeq$ son equivalentes (son iguales: para todo x e y, $x \succeq y \Leftrightarrow x \succeq' y$) y demuestre que $\sim'$y $\sim$ también lo son.

Ejercicio 24 Para las preferencias en $X = \mathbf{R}_+^2$ definidas por $x \succeq y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \max\{x_1, x_2\} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ \max\{y_1, y_2\} \end{pmatrix}$ dibuje $U(1,1) = \{y : y \succeq x\}$. Determine si las preferencias son: convexas; monótonas; estrictamente monótonas; localmente no saciables; continuas; completas; transitivas. En cada caso provea una demostración o un contraejemplo.

Ejercicio 25 Sea $X = \{a, b, c\}$.

Parte A. ¿Cuál es la relación de preferencias reflexiva R más chica? (en el sentido que si hay otra relación $\succeq$ que es reflexiva, $R \subseteq\ \succeq$)
Parte B. Demuestre que la relación R que escribió en la Parte A de hecho es la más chica.
Parte C. Si para una relación binaria $B \subset X \times X$ tenemos $B = \{(a, b)\}$, encuentre la relación binaria transitiva más chica que contiene a B (llámela T).
Parte D. Para el T que encontró en la parte C, demuestre que T es la relación binaria transitiva más chica que contiene a B.

Ejercicio 26 Para

$$\begin{aligned} (x_1,\ x_2) &\succeq (y_1,\ y_2) \Leftrightarrow\ x_1 \geq y_1 - 2 \ o\ x_2 \geq y_2 + 1 \\ (x_1,\ x_2) &\succeq (y_1,\ y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}\ y\ \ \max\{x_1, x_2\} \geq \max\{y_1, y_2\} \end{aligned}$$

Dibujar $U(1,1) = \{(y_1, y_2) : (y_1, y_2) \succcurlyeq (1,1)\}$, $L(1,1) = \{(y_1, y_2) : (1,1) \succcurlyeq (y_1, y_2)\}$ y determinar si las preferencias son: convexas, monótonas, estrictamente monótonas, localmente no saciables, continuas, completas, transitivas. En cada caso provea una demostración o un contraejemplo.

Referencias: Parte de este material proviene de "Notes on the theory of choice," de David Kreps. También hay algo tomado de "Micoreconomic Theory," de Mas-Colell, Whinston y Green. La cita de Kahneman y Tversky es: "Choices Values and Frames," *American Psychologist* **39**, 341-50.

Soluciones

Ejercicio 2: Tomemos cualquier $x \in X$. Como $\succeq$ es completa, para todo $y \in X$

$$x \succeq y \text{ ó } y \succeq x.$$

Poniendo $y = x$ obtenemos $x \succeq x$.

Ejercicio 3. Si existen x e y tales que $x \succ y$, quiere decir que $x \succeq y$ pero no $y \succeq x$, que quiere decir que no se cumple que $x \sim y$; eso demuestra que existen x e y para los cuales no se cumple ni $x \sim y$ ni $y \sim x$, lo que establece que $\sim$ no es una relación completa.

Tomo x e y cualesquiera. Como $\succeq$ es completa, puedo suponer sin pérdida de generalidad que $x \succeq y$ (si $y \succeq x$ la demostración sería análoga). Si no sucediera que $y \succeq x$, obtendríamos $x \succ y$, que contradice que no existen x e y tales $x \succ y$; por lo tanto debemos tener $y \succeq x$, y por lo tanto $x \sim y$; eso establece que $\sim$ es completa.

Ejercicio 4: Para cada número natural i, sea x_i el café con i granos de azúcar. Tenemos que $x_0 \sim x_1 \sim ... \sim x_{5438}$ (donde 5438 es el número de granos en una cucharadita de azúcar: obviamente el número particular no importa). Por lo tanto, si tuviéramos transitividad, tendríamos $x_0 \succeq x_{5438}$. Por otro lado, tenemos que, como $x_{5438} \succ x_0$, x_0 no es débilmente preferido a x_{5438}, es decir, no es verdad que $x_0 \succeq x_{5438}$, una contradicción.

Ejercicio 4: Reflexivas: (a) no, porque $(2,2)$ no pertenece a la relación. (b) si, porque cada persona comparte al menos un nombre consigo misma. (c) si, porque es completa. (d) no, porque $|2-2| = 0$, y por lo tanto no pertenece a la relación. (e) si, porque para todo número x, $x - x = 0$ que es múltiplo de 2.

Completas: (a) no, porque no es reflexiva. (b) no, porque Juan Dubra no comparte ningún nombre con George Bush. (c) si, porque para dos números reales cualesquiera, x y z, ó x es mayor o igual que z, ó z es mayor o igual que x. (d) no, porque no es reflexiva. (e) no, $3-2$ no es múltiplo de 2, y $2-3$ no es múltiplo de 2, por lo que 3 y 2 no están relacionados.

Transitivas: (a) no, porque $3 \succeq 1 \succeq 2$ y sin embargo, $(3,2) \notin \succeq$. (b) no, porque Alberto Passarella comparte un nombre con Luis Alberto Lacalle, y este último comparte un nombre con Luis Viana. (c) si, obvio. (d) no, porque $2 \succeq 0 \succeq 2$, pero como ya vimos, $(2,2) \notin \succeq$. (e) tomo $x \succeq y$ e $y \succeq z$. Como $x \succeq y \Leftrightarrow x - y = 2k_1$ para un $k_1 \in \mathbf{N}$, e $y \succeq z \Leftrightarrow y - z = 2k_2$, tenemos que $x - z = x - y + y - z = 2k_1 + 2k_2$, por lo que $x - y$ es par.

5.A. No es reflexiva, por lo que no es completa: para $x = (1,1)$, tenemos que $1.1 < 1.1 + 1$, por lo que no se cumple $x \succeq x$.

Es transitiva porque $x \succeq y \succeq z$ implica $x_1x_2 \geq y_1y_2 + 1 \geq z_1z_2 + 2 \geq z_1z_2 + 1$, que asegura $x \succeq z$.

5.B. La relación $\succ^*$ no es completa, ya que no se cumple que $(1,1) \succ^* (1,1)$, pero sí es transitiva pues $x \succ^* y \succ^* z$ implica $x_1x_2 > y_1y_2 + 1 > z_1z_2 + 2 > z_1z_2 + 1$, que asegura $x \succ^* z$.

La relación $\succeq^*$ es completa, ya que para cualquier x e y, o se cumple $x_1x_2 \geq y_1y_2$ en cuyo caso no se cumple $y_1y_2 > x_1x_2 + 1$ que implica $x \succeq^* y$; o se cumple $y_1y_2 \geq x_1x_2$, en cuyo caso no se cumple $x_1x_2 > y_1y_2 + 1$, por lo que $y \succeq^* x$. Las preferencias $\succeq^*$ no son transitivas. Tenemos por ejemplo que

$$\begin{aligned} (0,0) \succeq^* (1,1) &\Leftrightarrow \neg\,(1.1 > 0.0 + 1) \\ (1,1) \succeq^* \left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4}\right) &\Leftrightarrow \neg\left(\tfrac{5}{4}\tfrac{5}{4} > 1.1 + 1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

y sin embargo no se cumple $(0,0) \succeq^* \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, ya que tenemos $\frac{5}{4}\frac{5}{4} > 0.1 + 1$.

La relación $\sim^*$ no es completa, pues $(4,4) \succ^* (1,1)$, por lo que no se cumple $(1,1) \succeq^* (4,4)$ y eso implica que no se cumple $(1,1) \sim^* (4,4)$. Tampoco es transitiva, ya que además de (3) tenemos $(1,1) \succeq^* (0,0)$ ya que no se cumple $0.0 > 1.1 + 1$ y también $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \succeq^* (1,1)$ ya que no se cumple $1.1 > \frac{5}{4}.\frac{5}{4} + 1$. Por lo tanto, $(0,0) \sim^* (1,1) \sim^* \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, pero sin embargo no se cumple $(0,0) \sim^* \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ pues no se cumple $(0,0) \succeq^* \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ pues $\frac{5}{4}\frac{5}{4} > 0.0 + 1$.

Ejercicio 5.a: X cualquiera y $\succeq = \emptyset$. También $\geq$ en $\mathbf{R}$.
5.b: $>$ en $\mathbf{R}$.
5.c: $\geq$ en $\mathbf{R}$.
5.d: X cualquiera y $\succeq = \{(x,z)\}$. Otra posible es con X el conjunto de todos los hombres del mundo, y xRy si y sólo si x es el padre de y. Es asimétrica porque si x es padre de y, y no es padre de x. No es negativamente transitiva porque Kirk Douglas no es el padre de Tom Cruise (no kRt) y Tom Cruise no es el padre de Michael Douglas (no tRm) y sin embargo, kRm.

Ejercicio 6: Para (iii): $x \succ y \succeq z$ implica $x \succ z$. Como $\succ$ implica $\succeq$, por transitividad sabemos que $x \succeq z$, entonces supongamos $z \succeq x$. En ese caso, por transitividad, y por $y \succeq z$, tendríamos $y \succeq x$, que sabemos que es falso. Otra forma de mostrarlo es usando que $\succeq$ es completa. Si no se cumpliera $x \succ z$, tendríamos $z \succeq x$, y llegaríamos a la misma contradicción.

Ejercicio 6.A. Para demostrar completitud tomo A y B en P. Debo demostrar que $A \succeq^* B$ o $B \succeq^* A$. Si no se cumple $A \succeq^* B$ quiere decir que hay algún $y \in B$ tal que para ningún $x \in A$, tenemos $x \succeq y$. Como $\succeq$ son completas, quiere decir que $y \succ x$ para todo $x \in A$, y eso implica que $B \succeq^* A$. Por lo tanto, se cumple $A \succeq^* B$, o si no se cumple, se cumple que $B \succeq^* A$.

Para demostrar transitividad, tomo $A \succeq^* B \succeq^* C$. Debo demostrar que $A \succeq^* C$. Tomo un z cualquiera en C. Como $B \succeq^* C$, sé que existe un $y \in B$ tal que $y \succeq z$. A su vez, como $A \succeq^* B$, sé que para ese y en B, existe un $x \in A$ tal que $x \succeq y$. Por transitividad de $\succeq$, obtengo que $x \succeq z$. Por lo tanto, para cada $z \in C$, existe un $x \in A$ tal que $x \succeq z$, y eso implica $A \succeq^* C$, como queríamos demostrar.
Ejercicio 6.B. Para cada $y \in A \cup B$, tengo que $y \in A$ o $y \in B$. Si $y \in A$, existe un $x\,(=y) \in A$ tal que $x \succeq y$; si $y \in B$, como $A \succeq^* B$, sé que existe un $x \in A$ tal que $x \succeq y$. En cualquiera de los dos casos, tengo un $x \in A$ tal que $x \succeq y$, por lo que $A \succeq^* A \cup B$.
Ejercicio 6.C. Como $\{p\} \succ' \{c,h\}$, tendríamos que tener $p \succeq c$, pero eso estaría en contradicción con $\{c\} \succ' \{p\}$ (ya que esto sucedería si $c \succeq p$ y no $p \succeq c$).
Ejercicio 7.A. Asumimos que R es completa y que xPy; debemos demostrar que no se cumple que yPx. Como xPy, no se cumple yRx; si se cumpliera yPx, tendríamos que tampoco se cumpliría xRy, y por tanto R no sería completa.

Mostraremos ahora que si P es asimétrica entonces R es completa. Supongamos que R no es completa, para obtener una contradicción. Eso quiere decir que existen x e y tales que no se cumple ni xRy (que quiere decir que yPx) ni yRx (que quiere decir que xPy). Tenemos entonces que P no puede ser asimétrica.
7.B. Asumimos que R es transitiva y que no xPy ni yPz, y debemos demostrar que no se cumple xPz. Que no se cumplan xPy ni yPz implica que tenemos yRx & zRy, por lo que transitividad de R implica zRx, y eso quiere decir que no se cumple xPz.

Mostraremos ahora que si si P es negativamente transitiva, entonces R es transitiva. Como siempre, debemos asumir que P es negativamente transitiva, xRy & yRz y debemos mostrar que xRz. En ese caso, $x, y, z \in X$, $(x,y) \notin \succeq$ y $(y,z) \notin \succeq$ implican que $(x,z) \notin \succeq$

$$\left.\begin{array}{c} xRy \\ yRz \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \neg yPx \\ \neg zPy \end{array}\right\} \overset{P \text{ neg tran}}{\Leftrightarrow} \neg zPx \Leftrightarrow xRz$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 8. Lo haremos de dos formas. Una "coqueta" y una "ilustrativa".

"Coqueta": Recordamos que

(1) $a \Rightarrow b$ es equivalente a $\urcorner b \Rightarrow \urcorner a$
(2) $\urcorner(c \text{ ó } d)$ es equivalente a $\urcorner c$ y $\urcorner d$.

Entonces $\forall x, y, z$

$$\begin{aligned} x &\succeq z \Rightarrow x \succeq y \text{ ó } y \succeq z \overset{\text{por (1)}}{\Leftrightarrow} \\ \urcorner(x \succeq y \text{ ó } y \succeq z) &\Rightarrow \urcorner(x \succeq z) \overset{\text{por (2)}}{\Leftrightarrow} \\ \urcorner(x \succeq y) \text{ y } \urcorner(y \succeq z) &\Rightarrow \urcorner(x \succeq z) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

"Ilustrativa": Asumimos primero que $\succeq$ es negativamente transitiva y tomamos $x \succeq z$. Si $\urcorner(x \succeq y)$ y $\urcorner(y \succeq z)$, como $\succeq$ es negativamente transitiva, $\urcorner(x \succeq z)$, lo que contradice $x \succeq z$. Por lo tanto debemos tener $x \succeq y$ ó $y \succeq z$, como queríamos demostrar.

Asumimos ahora que $x \succeq z \Rightarrow x \succeq y$ ó $y \succeq z$. La "hipótesis" de negativamente transitiva es que $\urcorner(x \succeq y)$ y $\urcorner(y \succeq z)$, por lo que se viola la "tesis" que acabamos de asumir, por lo que debemos obtener $\urcorner(x \succeq z)$ que era lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 9. No es cierto que $\succeq^*$ es transitiva. Como contraejemplo tomamos $\succeq \; = \; \geq$ en $\mathbf{R}^2$. En ese caso,

$$(2,-2) \sim^* (1,1) \succ^* (0,0) \sim^* (2,-2)$$

pero de la parte (iii) del Ejercicio 6 de Preferencias sabemos que si $x \succ y \succeq z$ y las preferencias son completas y transitivas, debemos tener $x \succ z$. Si tomamos $x = (1,1)$, $y = (0,0)$ y $z = (2,-2)$ vemos que deberíamos obtener $(1,1) \succ^* (2,-2)$, que no es cierto.

Otra variante sería tomar, con las mismas preferencias $x = (0,0) \sim^* y = (-2,2) \sim^* z = (1,1)$. En ese caso tenemos $z \succeq x$ y no $x \succeq z$, por lo que $z \succ^* x$.

En estos problemas de "verdadero o falso" si comienzan con la demostración y se trancan, deberían probar con un contraejemplo. Por ejemplo si empiezan con $x \succeq^* y \succeq^* z$ y asumen que eso es porque $x \succeq y \succeq z$, podrán usar la transitividad de $\succeq$ para concluir que $x \succeq z$. Sin embargo, en los otros casos ya no se cumple. Por ejemplo si x es incomparable a y, incomparable a z, no se deduce que x sea incomparable a z (y por tanto $x \succeq^* z$). Para ilustrar, continuando con el ejemplo de $\succeq \; = \; \geq$, $(-2,2)$ es incomparable con $(0,0)$ que es incomparable con $(-1,3)$. Sin embargo, $(-1,3) \succ (-2,2)$.

Ejercicio 8.A Puede no existir ningún y tal que xBy.

8.B Sean $X = \{x,y,z\}$ y $\succeq = \{(y,z),(z,y),(y,y),(z,z)\}$. O por ejemplo, $X = \{x,y\}$ con $\succeq = \{(y,y)\}$

Ejercicio 9. Asumo primero que R es reflexiva y circular para demostrar que es simétrica y transitiva.
Simétrica:

$$\left.\begin{array}{rr} & xRy \\ \text{(reflexiva)} & yRy \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ (circular con el segundo } y \text{ de abajo igual a } z\text{) } yRx$$

Transitiva: Asumo xRy e yRz, entonces por circularidad zRx, y como ya demostré simetría, xRz, como queríamos demostrar.

Ahora asumimos primero que R es reflexiva, simétrica y transitiva para demostrar circularidad. Tomo x, y, z tales que xRy e yRz, y por transitividad obtengo xRz. Como R es simétrica obtengo zRx, como quería demostrar.

Ejercicio 10.A. Si $\sim$ es completa, tenemos que para todo $x, y \in X$,

$$x \sim y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \succeq y \\ \& \\ y \succeq x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ no se cumple que } x \succ y.$$

10.B. Como $\succeq$ es completa, se cumple que para todo x e y, $x \succeq y$ o $y \succeq x$. Si se cumpliera una y no la otra, tendríamos que $x \succ y$ o $y \succ x$, y eso no podría ser. Por lo tanto, debemos tener $x \sim y$, y demostramos que $\sim$ es completa.

Ejercicio 11.A. Sean $X = \{a, b\}$, $R_1 = \{(a, b), (a, a), (b, b)\}$ y $R_2 = \{(b, a), (a, a), (b, b)\}$. Tenemos que R_1 y R_2 son completas y sin embargo $R = R_1 \cap R_2 = \{(a, a), (b, b)\}$ no es completa. Otro ejemplo es $X = \mathbf{R}$, $R_1 = \geq$ y $R_2 = \leq$. Tenemos que R_1 y R_2 son completas y sin embargo $R = \geq \cap \leq =$ "$=$" $= \{(a, a) : a \in \mathbf{R}\}$ que es incompleta.

11.B. Supongo que $xRyRz$ y debo demostrar que xRz. Tenemos que

$$\begin{array}{l} xRy \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} xR_1y & (1) \\ xR_2y & (2) \end{array} \right. \\ yRz \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} yR_1z & (3) \\ yR_2z & (4) \end{array} \right. \end{array}$$

De (1) y (3) y de la transitividad de R_1 deducimos que xR_1z. Similarmente, de (2) y (4) deducimos que xR_2z, por lo que xRz, como queríamos demostrar.

Ejercicio 12.A. Para todo $(x, y) \in R$, tenemos que $(x, y) \in S$, para todo $S \in \mathcal{E}$, por lo tanto, $(x, y) \in \bigcap_{S \in \mathcal{E}} S$.

12.B. Para todo $(x, y) \in R$, $(x, y) \in X \times X$, por lo que es una extensión de R. También, $X \times X$ es transitiva, porque cualquier par $(x, z) \in X \times X$ (no hay forma de falsar la transitividad).

12.C. Como $X \times X$ es una extensión transitiva de R, el conjunto $\mathcal{E}_R$ es no vacío, y por lo tanto, R_T es una extensión de R. Falta ahora demostrar que R_T es transitiva. Tomemos para eso $x, y, z \in R$ tales que

$$\begin{array}{rcl} xRyRz & \Leftrightarrow & (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, y), (y, z) \in S, \forall S \in \mathcal{E}_R \\ \overset{S \text{ transitiva}}{\Rightarrow} (x, z) & \in & S, \forall S \in \mathcal{E}_R \Rightarrow (x, z) \in R_T = \bigcap\limits_{S \in \mathcal{E}_R} S \end{array}$$

por lo que R_T es transitiva.

12.D. Para cualquier $(x, y) \in R_T$, se cumple (por definición de R_T) que $(x, y) \in S, \forall S \in \mathcal{E}_R$. Es decir, $(x, y) \in S$, siempre que S es una extensión transitiva de R, como queríamos demostrar.

12.E. Definimos B como la relación xBy si y sólo si existen $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $x = x_1, y = x_n$ y $x_1Rx_2R...Rx_n$. Debemos demostrar que $B = R_T$ y como siempre, demostraremos que uno está contenido en el otro y viceversa.

$B \subseteq R_T$) Si $(x, y) \in B$ quiere decir que existen $x_1, ..., x_n$ tales que

$$xRx_1R...Rx_nRy.$$

A su vez, xRx_1 implica que para cualquier $S \in \mathcal{E}_R$ tenemos xSx_1, y similarmente para x_1Rx_2 y todos los demás. Obtenemos por lo tanto

$$xSx_1S...Sx_nSy$$

y como S es transitiva, xSy. Hemos encontrado que: si $(x, y) \in B$ y $S \in \mathcal{E}_R$ (es cualquier relación de preferencias transitiva tal que $R \subseteq S$, entonces xSy, o lo que es lo mismo, $(x, y) \in S$. Deducimos que entonces que

$$\begin{aligned}(x,y) &\in B \Rightarrow (x,y) \in S, \forall S \in \mathcal{E}_R = \{S : S \text{ es transitiva y } R \subseteq S\} \Leftrightarrow \\ (x,y) &\in R_T = \bigcap_{S \in \mathcal{E}_R} S\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

$R_T \subseteq B$) Supongamos que $(x, y) \in R_T$ y debemos demostrar que $(x, y) \in B$. Si (x, y) pertenece a la intersección, pertenece a todas las S que son transitivas y contienen a R. Por lo tanto, para completar la demostración alcanzará con demostrar que B es transitiva y contiene a R. Supongamos que $xByBz$. Eso quiere decir que existen $x_1, x_2, ...x_n$ tales que

$$xRx_1R...Rx_mRyRx_{m+1}R...Rx_nRz$$

y por lo tanto, xBz, demostrando que B es transitiva. Que contiene a R es obvio y se omite su demostración.

Ejercicio 11. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que para $N > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$,

$$\left|\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - 0\right| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{N^2} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

por lo que $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ converge a 0. Alternativamente, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$ siempre que $n \geq 2$, por lo que si tomamos $N > \max\left\{2, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ tendremos

$$\left|\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - 0\right| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

siempre que $n \geq N$ ($N \geq 2$ asegura $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n}$ y $N > \frac{1}{\varepsilon}$ asegura $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

13. Debo demostrar que para todo x y $\varepsilon > 0$ existe un y tal que $\|x - y\| < \varepsilon$ y $y \succ x$. Por supuesto tendremos que usar monotonía. Para que la monotonía nos sirva, y debe estar al noreste de x, y también debe estar cerca. Cualquier y con esas propiedades nos servirá. En particular, para $e = (1, 1, ..., 1) \in \mathbf{R}^L$, tenemos que

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{L}}e \Rightarrow \begin{cases} \|x - y\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \\ y \gg x \overset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} y \succ x \end{cases}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 14.A. Tomo $x, z \in \{x \in C : x \succeq y \text{ para todo } y \in C\}$. Como C es convexo, $\alpha x + (1-\alpha) z \in C$ para todo $\alpha \in [0,1]$, y como $\succeq$ son convexas, $x \succeq y$ para todo y en C, y $z \succeq y$ para todo y en C, implican $\alpha x + (1-\alpha) z \succeq y$ para todo $y \in C$, como queríamos demostrar.

14.B. Supongo que existen x y z, con $x \neq z$ tales que $x, z \in \{x \in C : x \succeq y \text{ para todo } y \in C\}$. Como C es convexo, $\alpha x + (1-\alpha) z \in C$ para cualquier α en $(0,1)$, y como las preferencias son estrictamente convexas, tenemos que

$$\left.\begin{array}{c} x \succeq x \\ z \succeq x \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) z \succ x$$

contradice $x \in \{x \in C : x \succeq y \text{ para todo } y \in C\}$.

Ejercicio 12. Deben estar los pares $(1,3), (1,4)$ y $(2,4)$.

Ejercicio 16.A. Son homotéticas: $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ si y sólo si $\alpha x = \alpha y$ si y sólo si $\alpha x \sim \alpha y$.

16.B. No son homotéticas. Tomamos $x = (2,0)$ e $y = (1,1)$. En ese caso tenemos $x \sim y$ pero para $\alpha = 2$, tenemos que $2y = (2,2) \succ (4,0) = 2x$ pues no es cierto que $2x_1 (1 + 2x_2) = 4 \geq 6 = 2y_1 (1 + 2y_2)$.

16.C. Son homotéticas pues

$$x \sim y \Leftrightarrow x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha} \Leftrightarrow b x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = b y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha} \Leftrightarrow (bx_1)^{\alpha} (bx_2)^{1-\alpha} = (by_1)^{\alpha} (by_2)^{1-\alpha} \Leftrightarrow bx \sim by.$$

16.D. Es un caso particular de la Parte E.

16.E. Son homotéticas pues para todo $k > 0$, tenemos que $x \sim y$ si y sólo si $ax_1 + bx_2 = cy_1 + dy_2$ si y sólo si $akx_1 + bkx_2 = cky_1 + dky_2$ si y sólo si $kx \sim ky$.

Ejercicio 13.A. Es cierto que R antisimétrica implica que R^{-1} también es antisimétrica. Supongamos que R es antisimétrica pero R^{-1} no y llegaremos a una contradicción. Si R^{-1}no es antisimétrica $\Longrightarrow \exists\, x, y$ tales que $xR^{-1}y$ & $yR^{-1}x$ con $x \neq y$. Como $xR^{-1}y$, tenemos yRx y como $yR^{-1}x$ también tenemos xRy pero eso implica (como R es antisimétrica) que $x = y$, lo que contradice $x \neq y$.

Para demostrar que si R es transitiva R^{-1} también lo es, debemos demostrar que si existen x, y & z tales que $zR^{-1}y$ & $yR^{-1}x$ entonces tendremos $zR^{-1}x$. Si $\exists\, yR^{-1}x$ y $zR^{-1}y$ entonces se cumplen xRy e yRz; como R es transitiva, xRz y por lo tanto $zR^{-1}x$, como queríamos demostrar.

13.B. ($\Longrightarrow$) Asumimos que R es simétrica, y demostramos que $R = R^{-1}$. Que R sea simétrica quiere decir que xRy implica $yRx\ \forall\, x, y \in X$. Para demostrar que $R = R^{-1}$ tenemos que demostrar que $R \subseteq R^{-1}$ y que $R^{-1} \subseteq R$, es decir, tenemos que demostrar que cualquier elemento que esta en uno también esta en el otro.

Demostraremos primero que $R \subseteq R^{-1}$. Asumamos que xRy queremos demostrar que $xR^{-1}y$. Como R es simétrica $\Longrightarrow xRy$ implica $yRx \Longrightarrow$ por definición de R^{-1} tenemos que $xR^{-1}y \Longrightarrow R \subseteq R^{-1}$.

Demostraremos ahora que $R^{-1} \subseteq R$. Asumamos que $xR^{-1}y$. Por definición de R^{-1} tenemos que yRx y como R es simétrica tenemos que $xRy \Longrightarrow R^{-1} \subseteq R$. Hemos demostrado entonces que si R es simétrica, $R = R^{-1}$.

($\Longleftarrow$) Ahora demostraremos que si $R = R^{-1} \Longrightarrow R$ es simétrica. Si $R = R^{-1} \Longrightarrow \forall\, x, y \in X$ tal que xRy tenemos que tener que $xR^{-1}y \Longrightarrow$ si $xR^{-1}y$ por definición de R^{-1} tenemos que tener que yRx y esto confirma que R es simétrica. Por lo tanto, si $R = R^{-1}$, R es simétrica.

Ejercicio 14.($\Rightarrow$) Hay que demostrar que si R es transitiva entonces $R \circ R \subseteq R$. Asumamos que R es transitiva y tomemos $(x,y) \in R \circ R$ para demostrar que $(x,y) \in R$. Si $(x,y) \in R \circ R$ quiere decir que existe $z \in X$ tal que xRz y zRy. Como R es transitiva, obtenemos $(x,y) \in R$, como queríamos demostrar.

($\Longleftarrow$) Hay que demostrar que si $R \circ R \subseteq R \Longrightarrow R$ es transitiva. Tomemos x, y, z tales que xRy & yRz. Por definición de $R \circ R$, tenemos que $xR \circ Rz$, y como $R \circ R \subseteq R$, obtenemos $(x, z) \in R$, o lo que es lo mismo, xRz, como queríamos demostrar.

Ejercicio 15. Asumimos que $\succeq$ son Aditivas y Divisibles. Debemos demostrar que para todo x, el conjunto $U_x = \{y : y \succeq x\}$ es convexo; es decir debemos demostrar que si $y\&z$ pertenecen a U_x entonces cualquier combinación lineal también está en U_x. Es decir, debemos demostrar que para todo x, y, z y $\alpha \in [0, 1]$, $y \succsim x$ & $z \succsim x$ implican que $\alpha y + (1 - \alpha)z \succsim x$. Asumimos que $y \succeq x$ & $z \succeq x$; como $\succeq$ es divisible debemos tener que para todo $\alpha \in [0, 1]$ se cumple que $\alpha y \succsim \alpha x$ y $(1 - \alpha)z \succsim (1 - \alpha)x$. Como $\succeq$ es aditiva, tenemos que $\alpha y + (1 - \alpha)z \succeq \alpha x + (1 - \alpha)x = x$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 16.A. Para demostrar que D es reflexiva, tomamos un $x \in X$ y debemos demostrar que $(x, x) \in D$, que sabemos que se cumple por la definición de D.

Para demostrar que D es transitiva, tomamos $x, y, z \in X$ tales que xDy & yDz, y tenemos que demostrar que xDz. Por la definición de D, si xDy es porque $x = y$, y si yDz, es porque $y = z$. Por lo tanto, $x = z$, que implica xDz, como queríamos demostrar.

Para demostrar que D es antisimétrica mostramos que si xDz y zDx, entonces $x = z$. Como xDz implica $x = z$, obtenemos inmediatamente la conclusión.

Las propiedades anteriores muestran que D es un órden parcial. Mostramos ahora que también es una relación de equivalencia, porque es simétrica: supongo que $(x, y) \in D$, que sucede si y sólo si $x = y$, que implica yDx, como queríamos demostrar.

16.B. Tenemos que demostrar que si A es un órden parcial y una relación de equivalencia $\Longrightarrow A = D$, es decir, tenemos que probar que $A \subseteq D$ y $D \subseteq A$. Para demostrar que $D \subseteq A$ sabemos que si A es un órden parcial debe ser reflexiva $\Longrightarrow (x, x) \in A \Rightarrow D \subseteq A$.

Para demostrar que $A \subseteq D$ tenemos que demostrar que $(x, y) \in A$ implica $(x, y) \in D$. Supongamos, $(x, y) \in A$; como A es simétrica, $(y, x) \in A$; como es antisimétrica $x = y$; es decir, si $(x, y) \in A$, $x = y$ y por tanto $(x, y) \in D$.

16.C. Sea $x \in X$ el único elemento de X y sea $X \times X = \succsim = \{(x, x)\}$. Si $x \succeq y$, (y también $y \succeq x$, que es la otra parte de la hipótesis de antisimetría), entonces $y = x$ (porque $X \times X = \succsim = \{(x, x)\}$) como requiere antisimetría.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como (x, y) y $(y, x) \in X \times X$, la relación $X \times X$ no puede ser antisimétrica pues implicaría $x = y$.

Ejercicio 17.A. Contraejemplo: Sea $x = (0, 3)$, $y = (3, 0)$ y $z = (2, 2)$, tenemos que $x \succeq z$, $y \succeq z$ sin embargo con $\alpha = 0,5$ tenemos que $\alpha x + (1 - \alpha)y = (1,5; 1,5)$ por lo que tenemos que $z \succeq \alpha x + (1 - \alpha)y$ porque $2 > 1,5 \Longrightarrow \succeq$ no es convexa.

17.B. En este ejercicio hay una pequeña sutileza, que es que $\min\{a, b\} + \min\{c, d\} \leq \min\{a + c, b + d\}$ y también $\min\{a, b\} + \min\{c, d\} \leq \min\{a + d, b + c\}$. La idea es que en el lado izquierdo podemos elegir los mínimos por separado (tenemos más libertad para minimizar), mientras que en el derecho tenemos que elegir un solo mínimo para la suma entera. Para ver que esas desigualdades no son siempre con igualdad, notamos que

$$2 = \min\{1, 3\} + \min\{3, 1\} < \min\{1 + 3, 3 + 1\} = 4.$$

Sean x, y & z tales que $x \succeq z$ & $y \succeq z$. Tenemos que demostrar que $\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z$, es decir

$$\min\{\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2\} \geq \min\{z_1, z_2\}. \tag{4}$$

Usando $x \succeq z \iff \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{z_1, z_2\}$ & $y \succeq z \iff \min\{y_1, y_2\} \geq \min\{z_1, z_2\}$, obtenemos

$$\alpha \min\{x_1, x_2\} + (1-\alpha)\min\{y_1, y_2\} \geq \min\{z_1, z_2\} \Rightarrow \min\{\alpha x_1, \alpha x_2\} + \min\{(1-\alpha)y_1, (1-\alpha)y_2\} \geq \min\{z_1, z_2\}.$$

Si aplicamos la idea del inicio de esta parte, obtenemos la ecuación (4), como queríamos demostrar.

17.C. Contraejemplo: Sean $x = (7, 0)$, $y = (0, 7)$ y $z = (4, 4)$, tenemos que $x \succeq z$, $y \succeq z$ sin embargo con $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que $\alpha x + (1-\alpha)y = (\frac{7}{2}; \frac{7}{2})$ por lo que tenemos que $z \succ \alpha x + (1-\alpha)y$; concluimos que $\succeq$ no es convexa

17.D. Queremos demostrar que si $\min\{ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\}$ y $\min\{ay_1 + by_2, cy_1 + dy_2\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\} \Longrightarrow$

$\min\{a(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + b(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2), c(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + d(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2)\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\}$.

Sabemos que $\alpha \min\{ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2\} + (1-\alpha)\min\{ay_1 + by_2, cy_1 + dy_2\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\} \iff$

$\min\{\alpha(ax_1 + bx_2), \alpha(cx_1 + dx_2)\} + \min\{(1-\alpha)(ay_1 + by_2), (1-\alpha)(cy_1 + dy_2)\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\} \iff$

$\min\{\alpha(ax_1 + bx_2) + (1-\alpha)(ay_1 + by_2), \alpha(cx_1 + dx_2) + (1-\alpha)(cy_1 + dy_2)\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\} \iff$

$\min\{a(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + b(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2), c(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + d(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2)\} \geq \min\{az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2\}$

$\Longrightarrow \succeq$ convexa

17.E. Contraejemplo: Sean $x = (6, 0)$, $y = (0, 6)$, $z = (3,5; 3,5)$, $a = d = 2$ y $c = b = 1$.

$\max\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} = \max\{2y_1 + y_2, y_1 + 2y_2\} = 12$, mientras que $\max\{2z_1 + z_2, z_1 + 2z_2\} = 10,5$ por lo que $x \succeq z$ y $y \succeq z$ sin embargo con $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que $\alpha x + (1-\alpha)y = (3, 3)$ donde $\max\{2 \times 3 + 3, 3 + 2 \times 3\} = 9 < \frac{21}{2}$. Entonces $z \succ \alpha x + (1-\alpha)y$, por lo que $\succeq$ no es convexa.

Ejercicio 18.A. Como $I \succ_K C$, $I \succ_E C$ y $C \succ_M I$ el grupo elige I antes que C. Como $I \succ_K D$, $D \succ_E I$ y $D \succ_M I$, el grupo elige D antes que I, y como $C \succ_K D$, $D \succ_E C$ y $C \succ_M D$, sucede que el grupo elige C y no D. Por lo tanto, las preferencias del grupo no son transitivas (ya que si elige D antes que I, y a I antes que a C, debería elegir D y no C).

18.B. Tomamos cualquier $x > x^*_{n+1}$, y mostramos que x^*_{n+1} le gana en la votación a x, pues todos lo $i \leq n+1$ votan a x^*_{n+1} y no a x : para todo $i \leq n+1$, como $x^*_i \leq x^*_{n+1} < x$, obtenemos $x^*_{n+1} \succ x$. Eso muestra que en x^*_{n+1} obtiene al menos $n+1$ votos, y le gana a x. La demostración para la votación de x^*_{n+1} contra $y < x^*_{n+1}$ es análoga y se omite.

Ejercicio 19.A. Como $\succsim$ completas, transitivas, monótonas y continuas$\Longrightarrow$ por Teorema de Wold $\exists\, u : X \to R$ continua tal que $x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$.

Como $u(\cdot)$ es continua & Y es compacto, por el Teorema de Weierstrass $\exists\, x^* \diagup u(x^*) \geq u(y)\ \forall\, y \in Y \iff x^* \succsim y\ \forall\, y \in Y$.

19.B. Habíamos asumido que $\succeq$ es monótona: $y \gg x \Longrightarrow y \succ x$. si restringimos $\succsim$ a Y y suponiendo que $x, y \in Y \Longrightarrow y \gg x \Longrightarrow y \succ x$. Pero entonces, por definición de $\succ_{|Y}$ obtenemos también $y \succ_{|Y} x$.

Lo curioso es que aunque $\succeq_{|Y}$ es monótona, no es localmente no saciable, ya que el x^* de la parte anterior es lo mejor a lo que puede aspirar la persona. Es decir, no $\exists\, \varepsilon$ tal que para ese ε existe y tal que $\|y - x^*\| < \varepsilon$ y $y \succ_{|Y} x^*$ porque $x^* \succsim y\ \forall\, y \in Y$.

19.C. B es abierto para todo $x \in B$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq B$. Para demostrar que $\succeq_{|B}$ es localmente no saciable, tomamos un ε cualquiera, y debemos mostrar que existe $y \succ x$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Definimos

$t = \min\{r, \varepsilon\}$ y tomamos y definido por $y_i = x_i + \frac{t}{\sqrt{2n}}$ y vemos que $\|x - y\| = \frac{t}{2} < t \leq \varepsilon$, y como además $y \gg x$, obtenemos $y \succ x$ y por tanto $y \succ_{|B} x$.

19.D. Lo extraño de este ejercicio es que $\succeq_{|Y}$no es localmente no saciable, mientras que $\succeq_{|B}$ sí lo es. Lo que pasa es que cuando nos restringimos a un conjunto compacto va a existir un x que pertenezca a ese conjunto que maximice la utilidad pero si es abierto no será así.

Ejercicio 20.A. Hay que demostrar que $(x, y) \notin \succsim$ y $(y, z) \notin \succsim$ implican que $(x, z) \notin \succsim$. Asumamos por absurdo que $\succsim$ no es negativamente transitiva, es decir que $(x, y) \notin \succsim$ y $(y, z) \notin \succsim$ pero que $(x, z) \in \succsim$.

Por completitud sabemos que si $(x, y) \notin \succsim$ entonces $(y, x) \in \succsim$, y por transitividad de $\succsim$ tenemos que si $(y, x) \in \succsim$ & $(x, z) \in \succsim$ entonces $(y, z) \in \succsim$. Eso contradice $(y, z) \notin \succsim$, y por tanto demuestra que $\succsim$ es negativamente transitiva.

20.B. Asumimos $x \succ y$ & $y \succ z$. Sabemos por el Ejercicio 8, y porque $\succ$ es negativamente transitiva, que $x \succ y$ implica que se dan $x \succ z$ o $z \succ y$. Pero $z \succ y$ no puede ser, pues asumimos $y \succ z$ que lo contradice; concluimos que $x \succ z$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 21.A. R no es completa pues $(1, 1) \notin R$. Otros más obvios: ningún elemento de X se puede comparar con 3. Tampoco es transitiva: $1 \succeq 2 \succeq 1$ pero no es cierto que $1 \succeq 1$.

21.B. Es $R_T = \ \succeq\ = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (4,4), (5,5), (4,5), (5,4)\}$. Es así porque como $1R2R1$, debemos tener $(1, 1)$. Lo mismo con $(2, 2), (4, 4)$ y $(5, 5)$. Eso es por la caracterización de R_T en la Parte E del Ejercicio 10. Por otro lado, si S es una extensión transitiva de R, como $1R2$ y $2R1$, debemos tener $1S2$ y $2S1$; como S es transitiva, $1S1$. Por lo tanto $(1, 1)$ está en cualquier extensión transitiva de R, y eso implica que estará en la intersección de todas las extensiones transitivas de R (eso es usando la definición de extensión transitiva más chica, en la ecuación 2).

Por otro lado, sabemos que no puede haber ningún par que contenga a 3, como podría ser $(1, 3)$, pues $(1, 3) \notin \ \succeq$, y $\succeq$ es una extensión transitiva de R; entonces $(1, 3)$ no puede pertenecer a la intersección de todas las extensiones transitivas de R.

Ejercicio 24. No son convexas: $(1, 0) \succeq \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $(0, 1) \succeq \left(\frac{3}{4}, 0\right)$, pero $\frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ no es preferido a $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$. Son estrictamente monótonas, pues si $x > y$, tenemos $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$ y $\max\{x_1, x_2\} \geq \max\{y_1, y_2\}$ por lo que $x \succ y$. Son localmente no saciables, en particular, por ser estrictamente monótonas. También son continuas y transitivas, pero no completas.

Ejercicio 25.A.B. La relación más chica es $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Si $\succeq$ es otra relación binaria reflexiva, debemos tener $(a, a), (b, b), (c, c) \in \ \succeq$, por lo que $R \subseteq \ \succeq$.

Ejercicio 25.C.D. Tenemos $T = B = \{(a, b)\}$, pues B ya es transitiva. Si hubiera otra relación binaria transitiva que contuviera a B, llamémosla S, mostraremos que $T \subseteq S$ (y eso muestra que T es la más chica). Como $B \subseteq S$, debemos tener que $(a, b) \in S$, y por tanto $T \subseteq S$.

Ejercicio 26. Caso 1. El gráfico de lo que es mejor que $(1, 1)$ es todo $\mathbf{R}^2_+$, ya que $x \succeq (1, 1)$ es todos los x que tienen $x_1 \geq 1 - 2 = -1$; es decir todo $\mathbf{R}^2_+$. El gráfico de qué es peor que $(1, 1)$ es el conjunto de todos los x con $x_1 \leq 3$, unión el eje de las abcisas. Son completas (si se cumple $x_1 \geq y_1 - 2$, $x \succeq y$; si no se cumple, tenemos $y_1 > x_1 + 2 > x_1 - 2$ y por tanto $y \succeq x$), no son transitivas, no son monótonas (por ejemplo $(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon) \succeq (1, 1)$, pero también se cumple $(1, 1) \succeq (1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ y por lo tanto no tenemos $(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon) \succ (1, 1)$ que debería ser cierto), no son estrictamente monótonas, no son localmente no saciables, no son convexas y son continuas.

Caso 2. Las canastas mejores que $(1, 1)$ tienen que tener el mínimo mayor que 1 (la curva de indiferencia típica de complementos perfectos) y el máximo mayor que 1 (pero si ya tienen el mínimo mayor que 1, tienen el máximo) por lo que las preferidas a $(1, 1)$ son las que tienen $\min\{x_1, x_2\} \geq 1$. En forma similar, las canastas peores que $(1, 1)$ son las que tienen ambas componentes menores que 1. No son completas (por ejemplo, $(2,0)$ no es ni mejor ni peor que $(1,1)$, pues el máx es mayor, pero el min menor), no son convexas (tanto $(5,1)$ como $(1,5)$ son mejores que $(5,0)$, pero $(3,3) = \frac{1}{2}(5,1) + \frac{1}{2}(1,5)$ no lo es), son continuas, son transitivas, son monótonas, no son estrictamente monótonas (tomo un x cualquiera y le sumo algo a x_1, ya que si le sumara en las dos, sé que mejora el min y el max; si $x_1 < x_2$ aumenta el min y se mantiene o aumenta el max, por lo que la nueva canasta es estrictamente mejor; si $x_1 \geq x_2$, aumenta el max y se mantiene el min, por lo que la nueva canasta es estrictamente mejor), son localmente no saciables (si a cualquier canasta x le sumo $\varepsilon(1,1)$, mejora estrictamente).

Elección.

El enfoque adoptado en el primer capítulo, sobre Preferencias, era que las elecciones de la gente eran dictadas por sus preferencias. Un enfoque distinto, que es el que analizaremos en este capítulo es que las elecciones de la gente se derivan de una "estructura de elección". Según este enfoque, las elecciones adoptadas por la gente son lo más "primitivo" (no hay nada, en particular, no hay preferencias, que dicten las elecciones).

Una estructura de elección en un conjunto X es un par $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ en el cual:

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto de subconjuntos de X : cada $B \in \mathcal{B}$ es un subconjunto de X, $B \subseteq X$. A cada B lo llamaremos un conjunto presupuestal (no tiene porqué tener la estructura de una restricción presupuestal, el nombre es sólo para fijar ideas). El conjunto $\mathcal{B}$ debe ser pensado como la lista de todos los conjuntos posibles que el consumidor podría llegar a enfrentar en sus problemas de elección. En general, serán restricciones presupuestales, pero $\mathcal{B}$ podría incluir conjuntos más "raros", como por ejemplo el que enfrenta un consumidor al que subsidian con 30 flautas por mes (en un gráfico con flautas y "otros bienes" en los ejes, esto da una restricción presupuestal quebrada).

2. $C(\cdot)$ es una *regla de elección*: es una función que le asigna a cada B en $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío de B. Es decir, $C(B) \subseteq B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. En principio, $C(B)$ puede tener más de un elemento (piensen por ejemplo en alguien que tiene una función de utilidad $x_1 + x_2$ y los precios de ambos bienes son iguales: le da lo mismo cualquier canasta que gaste todo el ingreso). $C(B)$ son todas las canastas que el consumidor "podría" elegir.

Ejemplo 27 Sea $X = \{x, y, z\}$ y $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Una estructura de elección posible es $E_1 = (\mathcal{B}, C_1(\cdot))$ donde $C_1(\{x, y\}) = \{x\}$ y $C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}$. Otras dos estructuras de elección posible son $E_2 = (\mathcal{B}, C_2(\cdot))$ donde $C_2(\{x, y\}) = \{x\}$ y $C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$ y $E_3 = (\mathcal{B}, C_2(\cdot))$ donde $C_3(\{x, y\}) = \{x\}$ y $C_3(\{x, y, z\}) = \{z\}$.

Así como dijimos que completitud y transitividad eran propiedades razonables de las preferencias, cuando se trabaja con estructuras de elección, podemos pensar en qué tipo de propiedades son razonables. Una propiedad muy utilizada para estructuras de elección es el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

La estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el **Axioma Débil de la Preferencia Revelada** (ADPR) si se cumple que:

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in B \\ x \in C(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \left[\begin{array}{c} x, y \in B' \\ y \in C(B') \end{array} \right] \Rightarrow x \in C(B') \right\}$$

En palabras, el axioma nos dice que si alguna vez observamos que cuando x e y estaban disponibles, la persona eligió x, deberíamos esperar que en otros problemas, si están x e y disponibles, y se eligió y, también x debería ser elegido (o aceptable). En particular, imaginemos que $C(\{x, y\}) = \{x\}$, entonces no podemos tener $C(\{x, y, z\}) = \{y\}$.

El siguiente ejemplo, cortesía del profesor Vijay Krishna de Pennsylvania State University, ilustra para qué puede servir en términos prácticos.

Ejemplo 28 La siguiente tabla muestra los valores de la canasta de consumo elegida por cada persona promedio en una serie de países, en el 2009, en moneda local y de los otros países.

	Value of Bundles Bought in:					
At Prices in:	Japan	USA	Germany	Israel	Switz.	UK
Japan	¥1.7594	¥2.3642	¥2.1578	¥1.5049	¥2.2058	¥2.0234
USA	$30,782	$37,708	$35,609	$24,696	$36,414	$35,120
Germany	€32,756	€40,786	€38,769	€24,725	€39,164	€36,593
Israel	IS111,612	IS143,274	IS122,100	IS78,688	IS135,923	IS125,231
Switz.	SFr18,921	SFr24,168	SFr23,153	SFr16,484	SFr22,205	SFr21,494
UK	£14,227	£18,436	£16,340	£11,058	£17,431	£15,931

La tabla se puede leer así. La canasta de consumo elegida por un japonés promedio costó 1,7594 millones de yenes en Japón, mientras que esa misma canasta costó 30.782 dólares en Estados Unidos (la canasta japonesa, a precios de Estados Unidos; no es usando el tipo de cambio, son los bienes valuados en el otro país).

La pregunta que nos gustaría contestar es si se puede rechazar que los gustos de la gente en todo el mundo sean los mismos. Por ejemplo, si esto no fuera cierto, podría suceder que a iguales precios un suizo prefiriera una fondue y no una hamburguesa, mientras que un norteamericano prefiriera la hamburguesa antes que la fondue. ¿Se puede rechazar que las elecciones de todos estos países vengan de una misma estructura de gustos?

El siguiente ejercicio muestra el tipo de restricciones a las elecciones que impone el ADPR.

Ejercicio 29 Suponga que $C(\{x,y\}) = \{x\}$. Si C cumple el ADPR para algún $\mathcal{B}$ tal que $\{x,y\}, \{x,y,z\} \in \mathcal{B}$ ¿cuál de las siguientes es posible? Si alguna es imposible, demostrar: $C(\{x,y,z\}) =$: **A)** $\{y\}$; **B)** $\{x,y\}$; **C)** $\{z\}$; **D)** $\{x,z\}$;**E)** $\{x\}$.

Otra forma de plantear el ADPR es definiendo a partir de la estructura de elección una relación de preferencias que llmaremos la relación de preferencia revelada. Dada una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$, la **relación de preferencia revelada** $\succeq^E$ se define mediante

$$x \succeq^E y \Leftrightarrow \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x, y \in B \text{ y } x \in C(B).$$

En palabras, x *se reveló al menos tan bueno como* y de acuerdo a $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ si alguna vez estaban ambos disponibles, y el individuo eligió x. A veces también diremos que x *se reveló preferido* y si para algún B, $x \in C(B)$, pero $y \notin C(B)$ (vendría a ser como la preferencia estricta). La relación de preferencia revelada $\succeq^E$ no tiene porqué ser ni completa ni transitiva. En particular, para que sea completa se necesita que exista algún B tal que $x, y \in B$ y $x \in C(B)$ ó $y \in C(B)$.

Ejemplo 3. Este ejemplo presenta, para $X = \{x,y,z\}$, dos estructuras de elección que generan relaciones de preferencia revelada que no son completas.
Ejemplo 3.A. Para $\mathcal{B}_1 = \{\{x,z\}, \{x,y,z\}\}$ y $C_1(\{x,z\}) = C_1(\{x,y,z\}) = \{z\}$ y $E_1 = (\mathcal{B}_1, C_1(\cdot))$, tenemos que la persona nunca eligió x o y, y por lo tanto, no se cumple ni $x \succeq^{E_1} y$ ni $y \succeq^{E_1} x$.
Ejemplo 3.B. Para $\mathcal{B}_2 = \{\{x\}, \{x,z\}\}$, sea cual sea C_2, la relación de preferencia revelada nunca podrá ranquear a x e y.

Ahora sí, otra forma de plantear el ADPR es: La estructura $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR si siempre que x se revela al menos tan bueno como y, y no se revela preferido a x.

Ejemplo 4. En este ejemplo analizamos las estructuras de elección presentadas en el Ejemplo 1, y verificamos si satisfacen el axioma débil. Para E_1, tenemos que $x \succeq^{E_1} z$ y que $x \succeq^{E_1} y$. Para violar el ADPR, tendríamos que tener que z o y se revelen preferidos a x, y eso no se da nunca. En otras palabras, tendríamos que observar que alguna vez se eligió z y no x (o y, y no x), pero eso no sucede. Por lo tanto, E_1 satisface el ADPR.

La estructura E_2 viola el axioma débil. Para ver porqué notamos que como $C_2(\{x,y,z\}) = \{x,y\}$, tenemos $y \succeq^{E_2} x$. Pero como $C_2(\{x,y\}) = \{x\}$, x se reveló preferido a y, lo que contradice el ADPR.

La interpretación de $\mathcal{B}$ como las restricciones presupuestales a las que se enfrenta en individuo en una serie de problemas de elección, y de $C(B)$ como el conjunto (observable) de las canastas elegidas tiene problemas. El principal, es que en los problemas de elección, el individuo no dice "soy indiferente entre tales y cuales canastas, pero elijo esta porque sí". Sencillamente observamos su elección. Así, podría pasar que el conjunto de alternativas es un cierto $X = \{w,x,y,z\}$ y $\mathcal{B} = \{\{x,y\},\{w,z\}\}$. Suponga que cuando el individuo es indiferente entre dos alternativas, elige de acuerdo a la tirada de una moneda e imaginemos que en los días pares debe elegir en $\{x,y\}$ y en los impares en $\{w,z\}$. En este caso podría suceder que si el individuo es indiferente entre x e y, observemos que en el día 2, elija x, lo que nos llevaría a concluir $C(x,y) = x$, pero en el día 4 elija y, lo que nos llevaría a concluir que $C(x,y) = y$. Esto, por supuesto, es imposible, y va contra la noción de una función C bien definida. En la práctica estos problemas se resuelven de diversas formas. Una de ellas es decir que $C(x,y) = \{x,y\}$.

Ejercicio 5. El inconformista. Como siempre, sea $X = \{x,y,z\}$ un conjunto de canastas o alternativas, y sea $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ una estructura de elección. En cada uno de tres días consecutivos, vemos al tomador de decisiones elegir una sola canasta de $B_1 = \{x,y\}$, $B_2 = \{y,z\}$ y $B_3 = \{x,y,z\}$. Como esta persona es una inconformista, sabemos que si un día elige una canasta, no la elegirá en ningún día futuro.

Parte A. Demuestre que para cualquiera de los tres posibles tripletes de elecciones que haya hecho el individuo, se viola el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Parte B. Encuentre tres "restricciones presupuestales" B_i distintas a las de la letra, y una función C, con las cuales un inconformista igual cumpliría con el Axioma Débil.

Parte C. Demuestre su respuesta de la Parte B.

Ejercicio 6. Deberes. Sea $X = \mathbf{R}_+$.

Parte A. Para $\mathcal{B} = \{[a,b] : a,b \in \mathbf{R}_+, a < b\}$ y C definida mediante

$$C[a,b] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

determine si la estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Parte B. Para $\mathcal{B} = \{[a,b] : a,b \in \mathbf{R}_+, a < b\}$ y C definida mediante $C[a,b] = \{b\}$, determine si la estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Parte C. Para $\mathcal{B} = \{[a,b] : a,b \in \mathbf{R}_+, a < b\}$ y C definida mediante $C[a,b] = \{a,b\}$, determine si la estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Ejercicio 7. Deberes. Sean $X = \mathbf{R}_+$, $\mathcal{B} = \{[a,b] : a,b \in \mathbf{R}_+, a < b\}$ y C definida mediante $C[a,b] = \{b\}$.

Parte A. Demuestre que para la estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ la relación de prefrencia revelada $\succeq^E$ es completa y transitiva.

Parte B. Demuestre que $\succeq^E = \geq$. Una pista (para este ejercicio, y en general): para demostrar que dos conjuntos son iguales, hay que demostrar que están contenidos entre sí: $\succeq^E \subseteq \geq$ y que $\geq \subseteq \succeq^E$.

Ejercicio 8. Considere la estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ donde $\mathcal{B} = (\{x, y\}, \{x, y, z\})$ y $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Demuestre que si $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR, entonces debemos tener que $C(\{x, y, z\}) = \{x\}, = \{z\}$, o $= \{x, z\}$.

Ejercicio 9. Demuestre que el ADPR es equivalente a la siguiente propiedad: Suponga que $B, B' \in \mathcal{B}$, que $x, y \in B$, y que $x, y \in B'$. Entonces si $x \in C(B)$ y $y \in C(B')$, debemos tener que $\{x, y\} \subset C(B)$ y $\{x, y\} \subset C(B')$.

Ejercicio 30 Suponga que hay dos bienes, y un individuo enfrenta los precios p^k e ingresos I^k, y elige las canastas x^k, en los días $k = 1, 2, 3$ y 4 :

	p^k	I^k	x^k
1	$(1,2)$	5	$(3,1)$
2	$(2,1)$	5	$(1,3)$
3	$(1,3)$	6	$\left(1, \frac{5}{3}\right)$
4	$(1,1)$	4	(x_1, x_2)

Parte A. ¿En cuáles de los pares de días $(1,2)$, $(1,3)$ y $(2,3)$ las elecciones son consistentes con la racionalidad del individuo?
Parte B. Dibuje en un gráfico la región donde podrían estar (x_1, x_2) para que las elecciones 1, 2 y 4 sean consistentes con la racionalidad del individuo.

Ejercicio 31 Durante septiembre y octubre un individuo se gasta toda su riqueza en los siguientes dos bienes

	p_1	p_2	x_1	x_2
septiembre	\$3	\$4	4	3
octubre	\$8	\$6	3	4

Verifique si se cumple el ADPR (llame $p^s = (p_1^s, p_2^s)$ y $x^s = (x_1^s, x_2^s)$ a los precios y cantidades de septiembre, y similarmente p^o y x^o a los de octubre).

Ejercicio 32 Sea X un conjunto finito, $V : X \to \mathbf{R}$. Determine si las siguientes estructuras de elección satisfacen el Axioma Débil de la Preferencia Revelada:

1. $C(A) = \left\{x \in A : \#\{y \in A : V(x) \geq V(y)\} \geq \frac{\#X}{2}\right\}$ o, si este conjunto es vacío, $C(A) = A$.
2. $D(A) = \{x \in A : \#\{y \in A : V(x) \geq V(y)\}\} \geq \frac{\#A}{2}\}$.
3. $E(A) = \{x \in A : x \succeq_1 y, \forall y \in A$ o $x \succeq_2 y, \forall y \in A\}$, donde $\succeq_1$ y $\succeq_2$ son dos órdenes (relaciones competas, transitivas y asimétricas) sobre X.

Relación entre Preferencias y Elección

En el Capítulo 1 el enfoque era que las elecciones de la gente eran dictadas por sus preferencias. En el Capítulo 2, el se adoptó el enforque que las elecciones de la gente se derivan de una “estructura de elección”. En este capítulo veremos cuál es la relación entre ambos enfoques. En particular, contestaremos las siguientes dos preguntas

1. Si un tomador de decisiones tiene una relación de preferencias completa y transitiva $\succeq$, la regla de elección “C” que genera cuando se enfrenta a restricciones presupuestales en $\mathcal{B}$, ¿satisfacen el axioma débil?

2. Si las elecciones de un individuo en el conjunto de restricciones presupuestales $\mathcal{B}$ se puede capturar por una estructura de elección $E(\mathcal{B}, C(\cdot))$ que satisface el axioma débil, ¿existe necesariamente una relación de preferencias (completa y transitiva) que sea consistente con esas elecciones?

Primera Pregunta

La respuesta a la primera pregunta es corta y sencilla: si. Supongamos que un tomador de decisiones tiene una relación de preferencias completa y transitiva $\succeq$ en X. Si esta persona enfrenta un conjunto de alternativas no vacío $B \subseteq X$, su comportamiento óptimo consiste en elegir cualquier elemento en

$$C(B, \succeq) = \{x \in B : x \succeq y \text{ para todo } y \in B\}. \tag{5}$$

Los elementos de $C(B, \succeq)$ son las mejores alternativas.en B. En principio, $C(B, \succeq)$ podría ser el conjunto vacío para algún B, o para alguna relación de preferencias mal comportada. Si B es finito, esto nunca puede pasar. De todas maneras, asumiremos en lo que resta del capítulo que las preferencias y $\mathcal{B}$ son tales que $C(B, \succeq)$ siempre es no vacío. Para cualquier $\mathcal{B}$, diremos que la relación de preferencias $\succeq$ **genera** la estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot, \succeq))$.

Antes de responder a la primera pregunta, debemos investigar bajo qué condiciones $C(B, \succeq)$ está bien definido, o lo que es lo mismo, bajo qué condiciones es una regla de elección. El siguiente Ejercicio nos da un caso particular para el caso en que X es finito.

Ejercicio 0. Sea X un conjunto finito. Decimos que una relación binaria $\succeq$ en X es **acíclica** si $x_m \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$ implica $x_m \neq x_1$.

Parte A. Para una relación binaria $\succeq$ muestre que

$$D(B, \succeq) = \{x \in B : \text{no existe } y \text{ tal que } y \succ x\} \tag{6}$$

es no vacío para todo B si y sólo si $\succeq$ es acíclica.

Parte B. Encuentre un ejemplo en el cual X no sea finito, $\succeq$ sea acíclica, y $D(B, \succeq)$ sea vacío para algún B.

Parte C. Muestre que si $\succeq$ es transitiva, entonces es acíclica. Verifique que en $X = \{1, 2\}$ la relación

$$\succeq = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

es acíclica pero no transitiva.

Parte D. Muestre que si $\succeq$ es completa, entonces $D(B,\succeq) = C(B,\succeq)$ para todo B. Note que las Partes A y C muestran que si $\succeq$ es completa y transitiva, entonces $C(B,\succeq)$ es no vacío.

Parte E. Encuentre una relación binaria $\succeq$ tal que $D(B,\succeq) \neq C(B,\succeq)$ para algún B.

Parte F. Demuestre por inducción en el tamaño de X que si $\succeq$ es completa y transitiva, entonces $C(B,\succeq)$ es no vacío para todo B.

Ejercicio 33 Sea X un conjunto cualquiera y $\succeq$ definido en X. Demuestre que la relación binaria $\succeq$ es completa y acíclica si y sólo si $C_{\succeq}(A) \neq \emptyset$ para todo A finito. Recuerde que $C_{\succeq}(A) = \{x \in A : x \succeq y \text{ para todo } y \in A\}$.

Ejercicio 34 Asuma que $\succeq$ es completa y transitiva. Para $D(B,\succeq) = \{x \in B : \text{no existe } y \text{ tal que } y \succ x\}$ muestre que si $w, z \in A \cap B$, $w \in D(A,\succeq)$ y además $z \in D(B,\succeq)$, entonces $z \in D(A,\succeq)$ y además $w \in D(B,\succeq)$.

Ahora la respuesta a la pregunta (1).

Teorema 1: Si $\succeq$ es una relación de preferencias completa y transitiva en X, entonces la estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot,\succeq))$ generada por $\succeq$ satisface el Axioma Débil.

Prueba: Debemos demostrar que siempre que x se revele al menos tan bueno como y, usando $E = (\mathcal{B}, C(\cdot,\succeq))$, tendremos que si $y \in C(B',\succeq)$ y $x \in B'$, se cumplirá que $x \in C(B',\succeq)$. Recalcando, debemos mostrar que

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in B \\ x \in C(B,\succeq) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \left[\begin{array}{c} x, y \in B' \\ y \in C(B',\succeq) \end{array} \right] \Rightarrow x \in C(B',\succeq) \right\}$$

Supongamos entonces que $x, y \in B$ y que $x \in C(B,\succeq)$. Por definición de $C(B,\succeq)$ eso quiere decir que $x \succeq y$. Supongamos ahora que $x, y \in B'$ y que $y \in C(B',\succeq)$. Por definición de $C(B',\succeq)$ eso quiere decir que $y \succeq z$ para todo $z \in B'$. Tenemos entonces que $x \succeq y \succeq z$ para todo $z \in B'$. Como $\succeq$ es transitiva, tenemos $x \succeq z$ para todo $z \in B'$, y por tanto $x \in C(B',\succeq)$, como queríamos demostrar. ■

Segunda Pregunta

La respuesta a la segunda pregunta es más sutil. Comenzaremos con una definición. Dada una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$, diremos que la relación de preferencias (completa y transitiva) $\succeq$ **racionaliza** a $C(\cdot)$ relativo a $\mathcal{B}$ (o racionaliza a E) si

$$C(B) = C(B,\succeq) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

En palabras, $\succeq$ racionaliza a C si las elecciones óptimas generadas por $\succeq$, y capturadas por $C(\cdot,\succeq)$, son las mismas que C. Si $\succeq$ racionaliza a C, podemos pensar que el comportamiento de un agente que elige de acuerdo a C es como si estuviera dictado por la relación de preferencias $\succeq$.

En la definición de racionalización está la frase "relativo a $\mathcal{B}$" porque en la definición de C aparece el $\mathcal{B}$ para el cual está definido.

Ejercicio 2. Sea $X = \{x, y, z\}$ y suponga que $\succeq = \{(x, y), (y, z), (x, z), (x, x), (y, y), (z, z)\}$. De un ejemplo de una función C y dos conjuntos de restricciones $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ con $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ tales que $\succeq$ racionaliza a C relativo a $\mathcal{B}_1$ pero no a $\mathcal{B}_2$.

También, puede suceder que haya más de una relación de preferencias que racionalice a una C dada.

Ejercicio 3. **Deberes.** Encuentre un ejemplo de una estructura de elección E que pueda ser racionalizada por más de una relación de preferencias, y diga cuáles son las preferencias que la racionalizan. (Pista: si $\mathcal{B}$ incluye como restricciones presupuestales a todos los pares de X, entonces existe a lo sumo una relación de preferencias que racionaliza a E).

El próximo ejemplo demuestra que la respuesta a la segunda pregunta (si una estructura E satisface el ADPR, ¿siempre puede ser racionalizada por una relación de preferencias $\succeq$?) es no.

Ejemplo 4. Sean $X = \{x, y, z\}$ y $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$ y $C(\{x, z\}) = \{z\}$. La estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil pues no hay en $\mathcal{B}$ conjuntos distintos B y B' tales que ambos contengan a dos elementos v y w, y eso es una condición necesaria para violar el ADPR. A pesar de eso, no existe una relación de preferencias que racionalice a E. Supongamos que hubiera una $\succeq$ que racionalizara a C. Si así fuera, tendríamos

$$\begin{aligned} C(\{x, y\}) &= \{x\} \Rightarrow x \succ y \\ C(\{y, z\}) &= \{y\} \Rightarrow y \succ z \\ C(\{x, z\}) &= \{z\} \Rightarrow z \succ x \end{aligned}$$

lo que es imposible para una relación $\succeq$ transitiva.

Notamos que cuantas más restricciones presupuestales hay en $\mathcal{B}$, más restringe el axioma débil la forma que puede tomar C, pues con más restricciones, hay más posibilidades para que el comportamiento de C sea contradictorio. En el ejemplo anterior, $\{x, y, z\}$ no es un elemento de $\mathcal{B}$, y resulta que eso es muy importante. Ya lo veremos más adelante en estas mismas notas. Por ahora basta el adelanto que si $\mathcal{B}$ tiene suficientes subconjuntos de X, y la estructura $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil, entonces existe una relación de preferencias $\succeq$ que racionaliza a E.

Ahora estamos prontos para establecer las condiciones bajo las cuales la respuesta a la segunda pregunta es afirmativa.

Teorema 5: Si $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ es una estructura de elección tal que

(i) Se satisface el axioma débil

(ii) $\mathcal{B}$ incluye todos los suconjuntos de X de hasta tres elementos

entonces existe una única relación de preferencias (completa y transitiva) $\succeq$ que reacionaliza $C(\cdot)$ relativo a $\mathcal{B}$. Es decir, $C(B) = C(B, \succeq)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Prueba: La relación de preferencias que pide a gritos ser la candidata a racionalizar E es la relación de preferencia revelada $\succeq^E$. De hecho, demostraremos que $\succeq^E$ es completa y transitiva, y que además racionaliza a E. Finalmente, demostraremos unicidad.

(a) $\succeq^E$ es completa: para todo $x, y \in X$, $x \succeq^E y$ ó $y \succeq^E x$. Por (ii), para cualquier x e y tenemos que $\{x, y\} \in \mathcal{B}$, por lo que se debe cumplir que: o $x \in C(\{x, y\})$, en cuyo caso $x \succeq^E y$, o $y \in C(\{x, y\})$, en cuyo caso $y \succeq^E x$.

(b) $\succeq^E$ es transitiva: para todo $x, y, z \in X$, $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$ implican $x \succeq^E z$. Asumamos $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$, y analicemos qué sucede con el conjunto $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$. Alcanzará con probar que $x \in C(\{x, y, z\})$, ya que eso implica $x \succeq^E z$. Como $C(\{x, y, z\})$ es no vacío, debemos tener que o x o y o z pertenecen a $C(\{x, y, z\})$. Si x pertenece, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $y \in C(\{x, y, z\})$. En ese caso, como $x \succeq^E y$, y E satisface el ADPR, debemos tener $x \in C(\{x, y, z\})$. Si $z \in C(\{x, y, z\})$, $y \succeq^E z$ y el axioma débil implican que $y \in C(\{x, y, z\})$, usando otra vez $x \succeq^E y$ y el axioma débil obtenemos $x \in C(\{x, y, z\})$, como queríamos demostrar.

(c) $\succeq^E$ racionaliza a E : para todo $B \in \mathcal{B}$, $C(B) = C\left(B, \succeq^E\right)$ (la relación de preferencia revelada generada por C racionaliza a C). Para demostrar $C(B) = C\left(B, \succeq^E\right)$ debemos establecer que: (1) $C(B) \subseteq C\left(B, \succeq^E\right)$ y que (2) $C\left(B, \succeq^E\right) \subseteq C(B)$.
(1) Para cualquier $x \in C(B)$, tenemos que $x \succeq^E y$ para todo $y \in B$ (por definición de $\succeq^E$). Por lo tanto, $x \in C\left(B, \succeq^E\right)$.
(2) Para cualquier $x \in C\left(B, \succeq^E\right)$, tenemos que $x \succeq^E y$ para todo $y \in B$. Eso quiere decir que para cada y existe un $B_y \in \mathcal{B}$, tal que $x, y \in B_y$ y $x \in C(B_y)$. Por el axioma débil, para cualquier $y \in C(B)$, como x se reveló al menos tan bueno como y, debemos tener $x \in C(B)$, como queríamos demostrar.

(d) si $\succeq$ y R racionalizan a E, entonces $\succeq = R$. Otra vez, demostraremos (1) $\succeq \subseteq R$ y (2) $R \subseteq \succeq$.
(1) Supongamos que $(x, y) \in \succeq$. Como $\succeq$ racionaliza a E, quiere decir que $x \in C(\{x, y\}, \succeq) = C(\{x, y\})$, y como R también racionaliza a E, $x \in C(\{x, y\}) = C(\{x, y\}, R)$ por lo que debemos tener xRy.
(2) es igual a (1) y se omite. ■

El próximo ejercicio investiga las consecuencias del Axioma Débil, cuando los B en $\mathcal{B}$ son restricciones presupuestales a las que estamos acostumbrados.

Ejercicio 35 Sea $X = \mathbf{R}_+^2$ y sean $B_1 = \{x : (2,2)x \leq 20\}$, y $B_2 = \{x : (1,3)x \leq 20\}$. Definimos $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$.

Parte A. Si $C(B_1) = \{(8,2)\}$ y $C(B_2) = \{(8,4)\}$, ¿Se cumple el Axioma Débil? Ilustre gráficamente las restricciones presupuestales, y las elecciones.

Parte B. Si $C(B_1) = \{(8,2)\}$ y $C(B_2) = \{(2,6)\}$, ¿Se cumple el Axioma Débil? Ilustre gráficamente las restricciones presupuestales, y las elecciones.

Parte C. Si $C(B_1) = \{(2,8)\}$, ¿hay algún $C(B_2)$ para el cual no se cumpla el Axioma Débil? Demuestre su respuesta.

Ejercicio 36 Suponga que hay L bienes, y que a los precios $\mathbf{p} \in \mathbf{R}_+^L$ la persona elige (solo) la canasta x. Ahora sube el precio del bien 1 a p_1' y todos los demás precios se mantienen constantes, y el individuo incrementa su ingreso de tal manera que le alcanza justo para volver a comprar x : $I' = \mathbf{p}'x$. Sea z la (única) canasta demandada por el individuo a los precios $\mathbf{p}' = (p_1', p_2, ..., p_L)$. Muestre que si las elecciones del individuo satisfacen el ADPR entonces $z_1 \leq x_1$.

Ejercicio 37 Se tiene la siguiente información parcial sobre las compras de un consumidor. Solo consume dos bienes. En el Año 1 consume 100 del bien x_1 y otros 100 de x_2 cuando $p_1 = p_2 = 100$. En el año 2 consume 120 unidades de x_1 y X de x_2, cuando $p_1 = 100$ y $p_2 = 80$.

¿Para qué valores de X (cantidad de bien 2 consumida en el año 2) se puede concluir:
Parte A. Que el comportamiento del consumidor contradice el ADPR?
Parte B. Que la canasta del añ 1 se reveló preferida a la del año 2 (y se satisface el ADPR)?
Parte C. Que la canasta del año 2 se reveló preferida a la del año 1 (y se satisface el ADPR)?

La definición y teorema que siguen dan una caracterización completa de las estructuras de elección que pueden ser racionalizadas por una relación de preferencias $\succeq$. Dada la relación de preferencia revelada $\succeq^E$ asociada a una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$, definimos la relación $\succeq_I^E$, la **relación de preferencia revelada indirecta**, mediante

$$x \succeq_I^E y \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n \text{ tales que } x = x_1 \succeq^E x_2 \succeq^E ... \succeq^E x_n = y.$$

Es decir, decimos que x se **reveló indirectamente al menos tan bueno** como y, si x se reveló al menos tan bueno como x_2, x_2 al menos tan bueno como x_3, ..., x_{n-1} al menos tan bueno como y. Notamos que si $x \succeq^E y$, también se cumple $x \succeq_I^E y$. Decimos que una estrucutra de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el **Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada** (AFPR) si para todo $x, y \in X$ y $B \in \mathcal{B}$,

$$\left.\begin{array}{c} y \in C(B) \\ x \succeq_I^E y \\ x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in C(B)$$

El axioma fuerte nos dice que si x se reveló indirectamente al menos tan bueno como y, y se elige y en B, entonces se debería elegir x también en B.

Ejercicio 6. Demostrar que si una estructura E satisface el axioma fuerte, entonces satisface el axioma débil.
Ejercicio 7. Demostrar que para cualquier E, $\succeq_I^E$ es la más chica de las relaciones de preferencias transitivas y que contienen a $\succeq^E$. En general, mostrar que para cualquier relación binaria $R \subseteq X \times X$, la relación R_t definida mediante

$$xR_ty \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n \text{ tales que } x_1 = x,\ x_n = y \ \&\ x_1Rx_2R...Rx_n.$$

es la más chica de las relaciones de preferencias transitivas y que contienen a R. En este ejercicio, y en general, un conjunto (recordar que las relaciones de preferencias son conjuntos) es el más chico en una cierta clase (en este caso, en la clase de preferencias transitivas y que contienen a R) si está contenido en cualquier otro conjunto de la clase. Pista: se puede mostrar que hay al menos una relación transitiva que contiene a R, y luego verificar que R_t es la intersección de todas las relaciones transitivas que contienen a R.

Teorema 38 (Richter) *Una estructura de elección $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma fuerte si y sólo si existe una relación de preferencias $\succeq$ que la racionaliza.*

Ejercicio 39 Sea $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ y sea $\mathcal{B} = \{\{1,2\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,6\}\}$, con $C(1,2) = \{2\}$, $C(4,5) = \{5\}, C(5,6) = \{6\}$ y $C(4,6) = \{4\}$.

Parte A. ¿$E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR?
Parte B. ¿$E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el AFPR?
Parte C. ¿Si ponemos $C(1,2) = \{2\}, C(4,5) = \{4,5\}, C(5,6) = \{5,6\}$ y $C(4,6) = \{4,6\}$, se cumple el AFPR?
Parte D. Encuentre una relación de preferencias completa y transitiva que racionaliza a $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ de la Parte C.

Ejercicio 40 Hemos recogido datos sobre las compras de una persona, en tres días distintos, recogidos en la siguiente tabla:

Día 1	$p_1 = (1,2,3)$	$x_1 = (3,2,1)$
Día 2	$p_2 = (2,1,3)$	$x_2 = \left(\frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$
Día 3	$p = \left(2, \frac{9}{4}, 1\right)$	$x_3 = (2,3,1)$

Parte A. ¿Las elecciones son consistentes con el ADPR?
Parte B. ¿Existe alguna relación de preferencias que racionaliza a estas elecciones (si sabemos que eligió x_i en el día i, y no "eligió también" otro de los x_j; es decir, su elección fue única)?

Ejercicio 41 En tres días consecutivos, una persona enfrentó los siguientes precios, y eligió las siguientes canastas:

$$\begin{aligned} p^1 &= (1,1,2) \ x^1 = (5,19,9) \\ p^2 &= (1,1,1) \ x^2 = (12,12,12) \\ p^3 &= (1,2,1) \ x^3 = (27,11,1). \end{aligned}$$

Parte A. ¿Las elecciones son consistentes con el ADPR?
Parte B. ¿Cumple con el AFPR?
Parte C. ¿Existe alguna relación de preferencias que racionaliza a estas elecciones (si sabemos que eligió x_i en el día i, y no "eligió también" otro de los x_j; es decir, su elección fue única)?

Ejercicio 42 En tres días consecutivos, una persona enfrentó los siguientes precios, y eligió las siguientes canastas:

$$\begin{aligned} p^1 &= (1,1,2) \ x^1 = (5,19,9) \\ p^2 &= (1,1,1) \ x^2 = (12,12,12) \\ p^3 &= (1,2,1) \ x^3 = (27,11,1). \end{aligned}$$

Parte A. ¿Las elecciones son consistentes con el ADPR?
Parte B. ¿Existe alguna relación de preferencias que racionaliza a estas elecciones (si sabemos que eligió x_i en el día i, y no "eligió también" otro de los x_j; es decir, su elección fue única)?

Algunas veces, el axioma débil de la preferencia revelada se separa en dos partes, siguiendo la presentación de Amartya Sen, quien recibió el Premio Nobel de Economía en 1998. Se dice que la regla de elección C:

satisface el Axioma α de Sen si $x \in C(B)$ siempre que $x \in B \subseteq A$ y $x \in C(A)$. En palabras de Sen, si el club campeón mundial de cricket es paquistaní, ese club también es el campeón de cricket de Pakistán.

satisface el Axioma β de Sen si $x \in C(B)$ siempre que $A \subseteq B$, $y \in C(B)$ y $x, y \in C(A)$. En palabras de Sen, si el club campeón mundial de cricket es paquistaní, entonces todos los campeones paquistaníes son campeones mundiales.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si son verdaderas o falsas, demostrando su afirmación si es verdadera, o un contraejemplo si es falsa.

Parte A. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $D(\cdot, \succeq)$ definida en (6) satisface el Axioma α de Sen.

Parte B. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (5) satisface el Axioma α de Sen.

Parte C. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $D(\cdot, \succeq)$ definida en (6) satisface el Axioma β de Sen. En caso que esta afirmación sea falsa, encuentre una relación acíclica $\succeq$ tal que $D(\cdot, \succeq)$ viole el Axioma β de Sen.

Parte D. Para cualquier relación binaria $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (5) satisface el Axioma β de Sen.

Parte E. Para cualquier relación binaria transitiva $\succeq$, la regla de elección $C(\cdot, \succeq)$ definida en (5) satisface el Axioma β de Sen.

La demostración del teorema de Richter no es muy extensa ni difícil, pero requiere algo de trabajo. En ella se utiliza el Lema de Zorn.

El Lema de Zorn. Dado un conjunto X cualquiera y una relación binaria $R \subseteq X \times X$ que es reflexiva, transitiva y antisimétrica (xRy e yRx implican $x = y$), llamamos a R un orden parcial, y decimos que X está parcialmente ordentado por R. El ejemplo más obvio de un orden parcial es el $\geq$ en $\mathbf{R}^2$. Una cosa importante para notar es que un orden parcial R no tiene porqué ser completo. Una **cadena** C en X es un subconjunto C de X tal que para todo $x, y \in X$, tenemos xRy o yRx. Es decir, C en X es una cadena si R, restringido a C es completo. Una **cota superior** para un conjunto $C \subseteq X$ es un $x \in X$ tal que xRy para todo $y \in C$.

Lema 10. Lema de Zorn. Sea R un orden parcial en X. Si toda cadena C en X tiene una cota superior, entonces existe un $x_m \in X$ tal que $x_m R x$ para todo $x \in X$. El elemento x_m se llama un elemento maximal.

El Ejemplo 4 mostraba una estructura de elección E que no podía ser racionalizada por ninguna relación de preferencias. Dado el Teorema 8, sabemos que E debe violar el axioma fuerte. De hecho, vemos que como $x \succeq^E y$ e $y \succeq^E z$, tenemos que $x \succeq_I^E z$. El axioma fuerte nos dice entonces que como $z \in C(\{x, z\})$, deberíamos tener $x \in C(\{x, z\})$, lo cual no se cumple.

Ejercicio 11. **Deberes.** Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Si $\succeq$ es transitiva y $R \subseteq \succeq$, liste tres pares (x, y) que no están en R, que tienen que estar necesariamente en $\succeq$.

Ejercicio 12. Demuestre que si X es finito, entonces cualquier relación de preferencias completa y transitiva $\succeq$ genera un regla de elección no vacía; es decir, $C(B, \succeq) \neq \varnothing \ \forall \ B \subset X$ con $B \neq \varnothing$.

Ejercicio 43 Demuestre que para una estructura de elección $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ para la cual existe una relación de preferencias que la racionaliza se cumple la siguiente propiedad: $\forall$ par B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ y $C(B_1) \cup C(B_2) \in \mathcal{B}$ tenemos que $C(B_1 \cup B_2) = C(C(B_1) \cup C(B_2))$ es decir, el problema de elección puede ser subdividido sin cambiar el resultado del mismo.

Ejercicio 44 Sea $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ una estructura de elección en el conjunto X, donde $\mathcal{B}$ incluye todos los subconjuntos no vacíos de X. Es decir, para cualquier subconjunto B no vacío de X, $C(B)$ está definido, y $C(B) \neq \emptyset$. Decimos que la función C es *distributiva* si para dos sets cualesquiera B y B' tenemos

$$C(B) \cap C(B') \neq \emptyset \Rightarrow C(B) \cap C(B') = C(B \cap B').$$

Demostrar, o dar un contraejemplo para la afirmación "si C es distributiva, $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR"

Cuando el conjunto $\mathcal{B}$ de menúes (restricciones presupuestales) salen de la existencia de precios e ingresos, a menudo se utiliza el **Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (AGPR)** (General Axiom of Revealed Preference, GARP) que dice que dice que si x, z estaban disponibles en B, y el individuo eligió x (se reveló al menos tan bueno como z), no puede suceder que en algún otro B' (resultante de precios p'), tengamos que z se elija aún si $p'z > p'x$.

Soluciones

Ejercicio 29.A. Poniendo $B = \{x, y\}$ y $B' = \{x, y, z\}$, vemos que el ADPR implica que $x \in C(B')$, por lo que $C(\{x, y, z\}) = \{y\}$ es imposible.

29.B. Poniendo $B = \{x, y, z\}$ y $B' = \{x, y\}$, vemos que el ADPR implica que $y \in C(B')$, lo que es incorrecto.

29.C.D.E. $C(\{x, y, z\}) = \{z\}$ o, $C(\{x, y, z\}) = \{x, z\}$ o $C(\{x, y, z\}) = \{x\}$ son posibles.

Ejercicio 30.A. Las elecciones en los días 1 y 2 cumplen con el axioma débil, pues las canastas elegidas no podrían haberse comprado en el otro día. En los días 1 y 3 no se cumple el axioma débil: $x^1p^3 = 6 \leq I^3$ y $x^3p^1 = \frac{13}{3} < 5$. En los días 2 y 3, el individuo no podría haber comprado x^2 con los precios del tercer día, p^3, por lo que se cumple el axioma débil.

30.B. Debemos graficar las tres restricciones presupuestales, y vemos que el día 4 están disponibles tanto $(1, 3)$ como $(3, 1)$. Por eso, el individuo debe consumir algo que no esté dentro de las restricciones presupuestales de los días 1 y 2 (salvo que sean $(1, 3)$ o $(3, 1)$) si lo hiciera, se violaría el axioma débil.

Ejercicio 33. Asumimos ahora que $C_{\succeq}(A)$ es vacío para algún A, y mostraremos que en ese caso $\succeq$ no es acíclica o no es completa. La negación de "completa y acíclica" no es "no completa y no acíclica"; es "no completa o no acíclica". Para ver por qué el "o" pensemos lo siguiente: si alguien dice que un restaurante es caro y malo, ¿cuándo es falsa la aseveración? Cuando no es caro, o no es malo.

Tomamos un elemento cualquiera de A y le llamamos x_1. Como $x_1 \notin C_{\succeq}(A)$, existe algún elemento de A, que llamamos x_2 tal que $x_2 \succ x_1$ o no se cumple $x_1 \succeq x_2$ ni $x_2 \succeq x_1$. Si x_1 no es comparable con x_2, ya habremos demostrado el resultado, por lo tanto asumimos que $x_2 \succ x_1$ [una cosa importante aca, es que $a\&b$ implican c es equivalente a "no c" implica "no a O no b"]. A su vez, como $x_2 \notin C_{\succeq}(A)$, quiere decir que existe un x_3 tal que $x_3 \succ x_2$ (igual que antes descartamos que no sean comparables). Si $x_3 = x_1$, habremos encontrado un ciclo, por lo que $\succeq$ no es acíclica. Supongamos entonces $x_3 \neq x_1$. Como $x_3 \notin C_{\succeq}(A)$, quiere decir que para algún x_4, $x_4 \succ x_3$. Si $x_4 = x_2$ o $x_4 = x_1$, habremos encontrado un ciclo, por lo que asumimos que $x_4 \neq x_i$ para $i < 4$. Continuando de esta manera tantas veces como elementos haya en A, resultará que para el último elemento de A que nos quede, x_m, tendremos $x_i \succ x_m$ para algún $i < m$, y por lo tanto sucederá que $x_i \succ x_m \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_i$, por lo que $\succeq$ no es acíclica.

Si $\succeq$ no es completa, existen x_1 y x_2 que no son comparables, por lo que $C_{\succeq}(\{x_1, x_2\}) = \emptyset$. Asumimos por lo tanto que $\succeq$ es completa, pero no es acíclica y mostraremos que entonces existe un A para el que $C_{\succeq}(A) = \emptyset$ es vacío. Habremos establecido entonces que con $\succeq$ completa, si $C_{\succeq}(A)$ es no vacío para todo A entonces $\succeq$ es acíclica. Si $\succeq$ no es acíclica eso implica que existe un ciclo $x_1 \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$. Para $A = \{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$, $x_i \notin C_{\succeq}(A)$ pues $x_{i+1} \succ x_i$ para $i = 1, ..., m-2$, y $x_{m-1} \notin C_{\succeq}(A)$ pues $x_1 \succ x_{m-1}$. Por lo tanto, $C_{\succeq}(A)$ es vacío.

Ejercicio 34. Supongamos que $z \notin D(A, \succeq)$. Eso quiere decir que existe $y \in A$ tal que $y \succ z$ (no se elige z, porque hay un y mejor). Pero como $z \in D(B, \succeq)$, y $w \in B$, sabemos que no es cierto que $w \succ z$; como $\succeq$ es completa, debemos tener $z \succeq w$. Tenemos entonces que existe $y \in A$ tal que $y \succ z \succeq w$, que implica $y \succ w$. Eso contradice que $w \in D(A, \succeq)$; debemos tener entonces $z \in D(A, \succeq)$.

La demostración de $w \in D(B, \succeq)$ es igual, y se omite.

Otra forma de hacerlo, es usando el Teorema 1. Primero, notamos que cuando $\succeq$ es completa y transitiva, $C(A;\succeq) = D(A;\succeq)$ ya que

$$x \in C(A;\succeq) \Leftrightarrow x \succeq y, \forall y \in A \Leftrightarrow \nexists y \in A \mid y \succ x \Leftrightarrow x \in D(A;\succeq)$$

(notamos que en el $\Leftrightarrow$ del medio, $\nexists y \in A \mid y \succ x \Rightarrow x \succeq y, \forall y \in A$ porque $\succeq$ es completa; si $\succeq$ no fuera completa, podría suceder que todos los y fueran incomparables con x, y C sería vacío). Por lo tanto, $D(\cdot\,;\succeq)$ satisface el ADPR, por lo que

$$\left.\begin{array}{c} w, z \in B \\ w \in D(B;\succeq) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{c} w, z \in A \\ z \in D(A;\succeq) \end{array}\right] \Rightarrow w \in D(A;\succeq)\right\}$$

y en forma similar $z \in D(B;\succeq)$.

Ejercicio 5.A. Si elige y primero, debe elegir z después, por lo que el último día debe elegir x, que viola el axioma débil, pues elige x estando y el último día, e y estando x el primero. Similarmente, si elige x y luego y, deberá elegir z el último día, que irá contra su elección de y el segundo. Si elige x y luego z, deberá elegir y el último día, contradiciendo su elección de z el segundo.

5.B. $B_1 = \{x\}, B_2 = \{y\}, B_3 = \{z\}$.

5.C. Las hipótesis del Axioma Débil no se cumplen, por lo que se cumple trivialmente.

Ejercicio 6.A. La correspondencia de elección C no satisface el ADPR. Para $B_1 = [0,2]$ y $B_2 = [1,3]$, tenemos que $1, 2 \in B_1$ y $1 \in C(B_1) = [1,2]$, y sin embargo, $1, 2 \in B_2$ y $2 \in C(B_2) = [2,3]$ pero no se cumple que $1 \in C(B_2)$. La idea es sencilla: nos "gusta" 1 al menos tanto como 2 cuando estamos en B_1, pero cuando estamos en B_2 nos gusta estrictamente más 2.

6.B. La correspondencia C sí satisface el ADPR. Si $x, y \in B$ y además $x \in C(B)$, debemos tener que $x \geq y$. Si además $x, y \in B$' y además $y \in C(B')$ debemos tener $y \geq x$. Por lo tanto, $x = y$. Deducimos entonces que $x \in C(B')$.

6.C. No satisface el ADPR. Tomamos $B = [0,2]$, $B' = [0,3]$, $x = 2$ y $y = 0$. Vemos que $x, y \in B$ y $x \in C(B)$. También, $x, y \in B$' y $y \in C(B')$. Sin embargo, $x \notin C(B')$.

Ejercicio 7.A. Para demostrar que $\succeq^E$ es completa, tomamos x e y cualesquiera. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $x \geq y$. Para $B = [0,x] \in \mathcal{B}$ tenemos que $x \in C(B)$, y por lo tanto $x \succeq^E y$. Eso demuestra que $\succeq^E$ es completa. Lo de "sin pérdida de generalidad" es porque hubiera dado lo mismo hacerlo con $y \geq x$.

7.B. Supongamos que $x \succeq^E y \succeq^E z$. Debemos demostrar que $x \succeq^E z$. De $x \succeq^E y$ deducimos que existe un B tal que $x, y \in B$ y $x \in C(B)$. En particular, eso quiere decir que $x \geq y$. Similamente, tenemos que $y \geq z$ y por lo tanto, $x \geq z$. Tomemos ahora el conjunto $B' = [0,x]$. Tendremos entonces $x, z \in B$' y $x \in C(B')$, por lo que $x \succeq^E z$, como queríamos demostrar.

$x, y \in X$ y $B \in \mathcal{B}$,

$$\left.\begin{array}{c} y \in C(B) \\ x \succeq_I^E y \\ x \in B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in C(B)$$

Sea $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ y sea $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{4,5\},\{5,6\},\{4,6\}\}$, con $C(1,2) = \{2\}$, $C(4,5) = \{5\}$, $C(5,6) = \{6\}$ y $C(4,6) = \{4\}$.

Ejercicio 31. DEl individuo no puede comprar la canasta de octubre a precios de septiembre: $p^s x^s = 24 < 25 = p^s x^0$, así que ya sabemos que no se viola el Axioma Débil. Por completitud, chequeamos y resulta que $p^o x^o = 48 < 50 = p^o x^s$, así que tampoco podría comprar la canasta de septiembre a precios de octubre (sólo eso también alcanza para decir que no se viola el Axioma Débil).

Ejercicio 32. La correspondencia C no cumple con el Axioma Débil. Supongamos que $X = \{1,...,10\}$ y que $V(x) = x$. En ese caso, $C(1,...,5) = \{5\}$ y $C(4,5) = \{4,5\}$. Tenemos entonces que elige 4 en el segundo caso, y no lo elige en el primero.

La correspondencia D tampoco cumple con el Axioma Débil. Con el mismo X y V definidos anteriormente, tenemos $D(1,...,10) = \{5,6,...,10\}$, y $D(1,2,3,4,5) = \{3,4,5\}$, por lo que 4 estaba disponible en ambos casos, pero sólo se elige en el segundo.

Supongamos $b \succ_1 w \succ_1 z \succ_1 a$ y $a \succ_2 z \succ_2 w \succ_2 b$. En ese caso, $E(w,z,a) = \{w,a\}$ y $E(w,z,b) = \{z,b\}$ por lo que w, z están disponibles en ambos casos, y a veces elijo w y otras z.

Soluciones de Relación Preferencias-Elección

Ejercicio 0.A. Asumimos primero que $\succeq$ no es acíclica y mostraremos que entonces existe un B para el que $D(B,\succeq)$ es vacío, estableciendo que si $D(B,\succeq)$ es no vacío para todo B entonces $\succeq$ es acíclica. Si $\succeq$ no es acíclica eso implica que existe un ciclo $x_1 \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$. Para $B = \{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$, $x_i \notin D(B,\succeq)$ pues $x_{i+1} \succ x_i$ para $i = 1,...,m-2$, y $x_{m-1} \notin D(B,\succeq)$ pues $x_1 \succ x_{m-1}$. Por lo tanto, $D(B,\succeq)$ es vacío.

Asumimos ahora que $D(B,\succeq)$ es vacío para algún B, y mostraremos que en ese caso $\succeq$ no es acíclica. Tomamos un elemento cualquiera de B y le llamamos x_1. Como $x_1 \notin D(B,\succeq)$, existe algún elemento de B, que llamamos x_2 tal que $x_2 \succ x_1$. A su vez, como $x_2 \notin D(B,\succeq)$, quiere decir que existe un x_3 tal que $x_3 \succ x_2$. Si $x_3 = x_1$, habremos encontrado un ciclo, por lo que $\succeq$ no es acíclica. Supongamos entonces $x_3 \neq x_1$. Como $x_3 \notin D(B,\succeq)$, quiere decir que para algún x_4, $x_4 \succ x_3$. Si $x_4 = x_2$ o $x_4 = x_1$, habremos encontrado un ciclo, por lo que asumimos que $x_4 \neq x_i$ para $i < 4$. Continuando de esta manera tantas veces como elementos haya en B, resultará que para el último elemento de B que nos quede, x_m, tendremos $x_i \succ x_m$ para algún $i < m$, y por lo tanto sucederá que $x_i \succ x_m \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_i$, por lo que $\succeq$ no es acíclica.

0.B. Ponemos $X = \mathbf{R}$ y $\succeq = \geq$, que es acíclica (hay que verificarlo). En ese caso, $D((0,1),\succeq)$ es vacío.

0.C. Asumimos que $\succeq$ no es acíclica, de tal forma que $x_1 \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$, y mostraremos que en ese caso $\succeq$ no es transitiva. El ciclo $x_1 \succ x_{m-1} \succ ... \succ x_2 \succ x_1$ implica que $x_1 \succeq x_{m-1} \succeq ... \succeq x_2$ y si $\succeq$ fuera transitiva tendríamos $x_1 \succeq x_{m-2}$, que junto con $x_{m-2} \succeq x_{m-3}$ implicaría $x_1 \succeq x_{m-3}$. Continuando de esa manera obtendríamos $x_1 \succeq x_2$, lo que contradice $x_2 \succ x_1$.

La relación del ejemplo es acíclica porque no hay ningún x_i y x_j tales que $x_i \succ x_j$, por lo que, como no se cumple el antecedente de la propiedad acíclica, la misma se cumple automáticamente. La relación no es transitiva pues $1 \succeq 2 \succeq 1$ y sin embargo, no se cumple que $1 \succeq 1$. Otro ejemplo un poco menos tonto es con $X = \{1,2,3\}$ y

$$\succeq = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

0.D. Demostramos primero que $D(B,\succeq) \subseteq C(B,\succeq)$. Si $x \in D(B,\succeq)$, quiere decir que no existe $y \in B$ tal que $y \succ x$. Si $x \notin C(B,\succeq)$, es porque existe algún y para el cual no es cierto que $x \succeq y$, pero como $\succeq$ es completa, eso significa que $y \succeq x$, lo que combinado con que no se cumple que $x \succeq y$, arroja $y \succ x$, contradiciendo que $x \in D(B,\succeq)$.

Demostraremos ahora que $C(B,\succeq) \subseteq D(B,\succeq)$. Si $x \in C(B,\succeq)$ quiere decir que $x \succeq y$ para todo y en B, por lo que no existe ningún y tal que $y \succ x$, asegurando que $x \in D(B,\succeq)$.

0.E. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $\succeq = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. En ese caso, para cualquier B con al menos dos elementos, $C(B,\succeq)$ es vacío, mientras que $D(B,\succeq) = B$.

0.F. Supongamos primero que B tiene un solo elemento, de tal manera que $B = \{x\}$. Por completitud, $x \succeq x$, por lo que $x \in C(B,\succeq)$. Por lo tanto, para todos los conjuntos B con un solo elemento, $C(B,\succeq)$ es no vacío.

Como siguiente paso, asumimos que para todos los conjuntos B con exactamente n elementos, $C(B,\succeq)$ es no vacío. Sea A un conjunto con $n+1$ elementos, y sea x un elemento de A. En ese caso, definimos $B = A \setminus \{x\}$ (el conjunto A "menos" x). Como B tiene n elementos, $C(B,\succeq)$ es no vacío, y llamamos y a cualquier elemento de $C(B,\succeq)$. Si $x \succeq y$, tenemos $x \succeq y \succeq z$ para todo $z \in B$, por lo que por transitividad $x \succeq z$ para todo $z \in B$, y como además $x \succeq x$, tenemos $x \succeq z$ para todo $z \in A$, y por tanto $x \in C(A,\succeq)$. Si en cambio $y \succ x$ (que es la otra única alternativa pues las preferencias son completas), tendremos $y \in C(A,\succeq)$, lo que completa la demostración.

Ejercicio 2. Sean $B = \{x,y\}$ y $D = \{y,z\}$. Sea $C(B) = \{x\}$ y $C(D) = \{z\}$. Tenemos que $\succeq$ racionaliza a C relativo a $\mathcal{B}_1 = \{B\}$ pero no relativo a $\mathcal{B}_2 = \{B,D\}$.

Ejercicio 3. Sean $X = \{x,y,z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x,y\}\}$ y $C(\{x,y\}) = \{x\}$. Tenemos que

$$\succeq_1 = \{(x,y),(y,z),(x,z),(x,x),(y,y),(z,z)\}$$
$$\succeq_1 = \{(x,y),(z,x),(z,y),(x,x),(y,y),(z,z)\}$$

racionalizan a $E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$.

Ejercicio 35.A. Se cumple el ADPR, porque llamando $x = (8,2)$ e $y = (8,4)$, no existen B y B' en $\mathcal{B}$ tales que $x,y \in B$ y además $x,y \in B'$.

35.B. No se cumple el ADPR. Tenemos que para $x = (8,2)$ e $y = (2,6)$, se cumple que $x,y \in B_1$ y además $x,y \in B_2$, y que sin embargo $x = C(B_1)$ pero $x \notin C(B_2)$.

35.C. Para cualquier cosa que elija la persona en B_2, se cumplirá el ADPR. La razón es que como $x = (2,8) \notin B_2$, no hay forma de negar el axioma.

Ejercicio 36. Si $x = z$, no hay nada que demostrar, porque obtenemos $z_1 \leq x_1$. Supongamos entonces que $x \neq z$. Como a los precios $\mathbf{p}'$ eligió z y no x, para cumplir el ADPR tiene que suceder que $\mathbf{p}z > \mathbf{p}x$ (si no, ambas canastas estarían disponibles en ambos casos). Por otro lado, como el ingreso nuevo es $\mathbf{p}'x$, y compró z, sabemos que $\mathbf{p}'x \geq \mathbf{p}'z$. Restando esta última desigualdad de la anterior obtenemos

$$\mathbf{p}z - \mathbf{p}'z > \mathbf{p}x - \mathbf{p}'x \Leftrightarrow (\mathbf{p} - \mathbf{p}')(z - x) > 0$$

y como $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = (p_1 - p_1', 0, ..., 0)$, obtenemos $(\mathbf{p} - \mathbf{p}')(z - x) = (p_1 - p_1')(z_1 - x_1) > 0$. Por lo tanto, como $p_1' > p_1$, y $x \neq z$, debemos tener también $x_1 > z_1$.

Ejercicio 37. En primer lugar, calculamos:

$$\begin{aligned} p^1x^1 &= 20000 \\ p^2q^2 &= 12000 + 80q_2^2 \\ p^2q^1 &= 18000 \\ p^1q^2 &= 12000 + 100q_2^2 \end{aligned}$$

Para A, necesitamos que ambas canastas estén disponibles en los dos años, de forma tal que como elige q^1 el primer año y q^2 el segundo, se contradice el ADPR. Es decir, necesitamos $p^1q^2 \leq 20000$, $p^2q^2 \geq 18000$, de donde obtenemos $75 \leq q_2^2 \leq 80$. Para B, necesitamos que ambas canastas estén disponibles en el año 1, pero solo la del año 2 esté disponible en el año 2. Es decir, $p^1q^2 \leq 20000$, $p^2q^2 \leq 18000$, de donde obtenemos $q_2^2 \leq 75$. El caso C es análogo, y obtenemos $q_2^2 \geq 80$. De todo lo anterior, hay dos desigualdades que deben ser estrictas, ¿Cuáles son?

Ejercicio 6. Debemos asumir que se satisfacen las hipótesis del axioma débil,

$$\left\{ \begin{array}{c} x, y \in B \\ x \in C(B) \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{c} x, y \in B' \\ y \in C(B') \end{array} \right\}$$

y que se cumple el axioma fuerte, para demostrar que $x \in C(B')$. Vemos que lo que hemos asumido implica que $x \succeq_I^E y$, pues se eligió x en B cuando estaba y disponible, y por tanto tenemos

$$\begin{array}{c} y \in C(B') \\ x \succeq_I^E y \\ x \in B' \end{array}$$

por lo que el axioma fuerte implica $x \in C(B')$.

Ejercicio 7. Debemos demostrar que

$$\succeq_I^E = \cap \left\{ \succeq : \succeq \text{ es transitiva y } \succeq^E \subseteq \succeq \right\}$$

y como siempre, demostraremos que uno está contenido en el otro y viceversa.

$\succeq_I^E \subseteq \cap$) Si $(x, y) \in \succeq_I^E$ quiere decir que existen $x_1, ..., x_n$ tales que

$$x \succeq^E x_1 \succeq^E ... \succeq^E x_n \succeq^E y.$$

A su vez, $x \succeq^E x_1$ implica que para cualquier $\succeq$ tal que $\succeq^E \subseteq \succeq$, tenemos $x \succeq x_1$, y similarmente para $x_1 \succeq^E x_2$ y todos los demás. Obtenemos por lo tanto

$$x \succeq x_1 \succeq ... \succeq x_n \succeq y.$$

y como $\succeq$ es transitiva, $x \succeq y$. Hemos encontrado que: si $(x, y) \in \succeq_I^E$ y $\succeq$ es cualquier relación de preferencias transitiva tal que $\succeq^E \subseteq \succeq$, entonces $x \succeq y$, o lo que es lo mismo, $(x, y) \in \succeq$. Deducimos que entonces que

$$(x, y) \in \succeq_I^E \Rightarrow (x, y) \in \cap \left\{ \succeq : \succeq \text{ es transitiva y } \succeq^E \subseteq \succeq \right\}$$

como queríamos demostrar.

$\cap \subseteq \succeq_I^E$) Supongamos que $(x,y) \in \cap \left\{\succeq : \succeq \text{ es transitiva y } \succeq^E \subseteq \succeq\right\}$, y debemos demostrar que $(x,y) \in \succeq_I^E$. Si (x,y) pertenece a la intersección, pertenece a todas las $\succeq$ que son transitivas y contienen a $\succeq^E$. Por lo tanto, para completar la demostración alcanzará con demostrar que $\succeq_I^E$ es transitiva y contiene a $\succeq^E$. Supongamos que $x \succeq_I^E y \succeq_I^E z$. Eso quiere decir que existen $x_1, x_2, ...x_n$ tales que

$$x \succeq^E x_1 \succeq^E ... \succeq^E x_m \succeq^E y \succeq^E x_{m+1} \succeq^E ... \succeq^E x_n \succeq^E z$$

y por lo tanto, $x \succeq_I^E z$, demostrando que $\succeq_I^E$ es transitiva. Que contiene a $\succeq^E$ es obvio y se omite su demostración.

Ejercicio 39.A. ¿$E = (\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisface el ADPR? Si. No hay B y B' y x, y con $x \neq y$ tales que $x, y \in B \cap B'$.
39.B. No se cumple. Tenemos que $4 \succeq^E 6 \succeq^E 5$, por lo que $x \succeq_I^E y$. Pero poniendo $x = 4$ & $y = 5$ en el AFPR vemos que $y \in C(4,5)$, $x \succeq_I^E y$ y $x \in \{4,5\}$ pero $x \notin C(4,5)$.
39.C y D. Ponemos $6 \sim 5 \sim 4 \sim 3 \sim 2 \succ 1$. En ese caso $\succeq$ racionaliza a E, y por el Teorema de Richter, E satisface el ADPR.

Ejercicio 41.A.B.C. Cumple con el axioma débil, pero no el fuerte: cuando tomamos dos a dos, no se viola; sin embargo, como (llamando E a la estructura de elección)

$$p.x^T = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 12 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 19 & 12 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 12 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 42 & 48 & 40 \\ 33 & 36 & 39 \\ 52 & 48 & 50 \end{matrix}$$

tenemos que $x^3 \succeq_E x^2 \succeq_E x^1 \succeq_E x^3$, violando el axioma fuerte. No hay entonces ninguna relación de preferencias que racionalice a estas elecciones. Si la hubiera, violaría transitividad. Lo sabemos también por el Teorema de Richter.

Ejercicio 40. Calculamos el mínimo ingreso que una persona debía tener en cada día (sabiendo qué compró), y vemos si estaban disponibles las otras canastas:

$$\begin{array}{lcc} \text{Día 1} & I_1^{\min} = 3 + 4 + 3 = 10 & p_1 x_2 = 9; p_1 x_3 = 11 \\ \text{Día 2} & I_2^{\min} = \frac{21}{2} = 10.5 & p_2 x_1 = 11; p_2 x_3 = 10 \\ \text{Día 3} & I_3^{\min} = \frac{47}{4} = 11.75 & p_3 x_1 = \frac{23}{2} = 11.5; p_3 x_2 = 12 \end{array}.$$

En el primer día, x_1 se revela al menos tan bueno como x_2; en el segundo, x_2 al menos tan bueno como x_3, y en el tercero, x_3 se revela al menos tan bueno como x_1. El ADPR se satisface porque no hay ningún día en que se repitan las dos canastas que están disponibles.

Sin embargo, las elecciones no se pueden ser racionalizadas por una relación de preferencias, ya que tendríamos $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$. Otra forma de verlo es usando el Teorema de Richter: como las elecciones no satisfacen el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (ya que en los dos primeros días x_1 se reveló preferido indirectamente a x_3, y luego elegimos x_3 y no x_1), sabemos que las elecciones no pueden ser racionalizadas.

Ejercicio 9.A. Verdadero. Lo mostraremos por absurdo. Supongo que $x \in B \subseteq A$ y que $x \in D(A, \succeq)$ pero que $x \notin D(B, \succeq)$. Si $x \notin D(B, \succeq)$ quiere decir que existe $y \in B$ tal que $y \succ x$. Pero si $y \in B$, como $B \subseteq A$, debemos tener $y \in A$, y como $y \succ x$, no puede suceder que $x \in D(A, \succeq)$, y eso constituye una contradicción.

9.B. Verdadero. Lo mostraremos por absurdo. Supongo que $x \in B \subseteq A$ y que $x \in C(A, \succeq)$ pero que $x \notin C(B, \succeq)$. Si $x \notin D(B, \succeq)$ quiere decir que existe $y \in B$ tal que no es cierto que $x \succeq y$. Pero si $y \in B$, como $B \subseteq A$, debemos tener $y \in A$, y como no es cierto que $x \succeq y$, no puede suceder que $x \in C(A, \succeq)$, y eso constituye una contradicción.

9.C. Falso. Sea $X = \mathbf{R}^2$ y sea $\succeq = \geq$, es decir, $x \succeq y$ si y sólo si $x \geq y$. Es fácil comprobar que $\succeq$ es acíclica. Definimos $A = \left\{x \in \mathbf{R}^2_+ : x_1 + x_2 = 1\right\}$. El conjunto A es el segmento entre $(1,0)$ y $(0,1)$ en el plano. La regla de elección $D(\cdot, \succeq)$ elige a todos los elementos de cada conjunto tales que no hay ningún elemento en el conjunto que sea más grande de acuerdo a $\geq$. Como en A no hay ninguno que sea más grande que otro, tenemos que $D(A, \succeq) = A$, y por supuesto $(1,0)$ y $(0,1)$ están en $D(A, \succeq)$. Tomemos ahora el conjunto

$$B = A \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}.$$

Vemos (dibujelo en un papel) que

$$D(B, \succeq) = \left\{x \in \mathbf{R}^2_+ : x_1 + x_2 = 1 \text{ y } x_1 > \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

por lo que $(1,0) \in D(B, \succeq)$ pero $(0,1) \notin D(B, \succeq)$.

Un ejemplo más fácil y más corto es $X = B = \{x, y, z\}$, y $A = \{x, y\}$, con $\succeq = \{(z, x)\}$. Vemos que $\succeq$ es acíclica, y que $x, y \in D(A, \succeq)$ pero $x \notin D(B, \succeq)$ pues $z \succ x$.

9.D. Falso. Sean $X = \{x, y, z\}$ y $\succeq = \{(x,y), (y,x), (z,x), (y,z), (x,x), (y,y), (z,z)\}$. Es decir, $x \sim y$, pero también $y \succ z \succ x$ (puede sonar raro, porque las preferencias no son transitivas, pero así es como son las cosas). Tenemos entonces que para $A = \{x, y\}$, $C(A, \succeq) = A$ pues $x \succeq x$ y $x \succeq y$, y además $y \succeq x$ y también $y \succeq y$. También para $B = \{x, y, z\}$ se cumple que $C(B, \succeq) = \{y\}$ ya que $y \succeq x$, $y \succeq y$ y también $y \succeq z$ y además: z no está ya que no es cierto que $z \succeq y$; x no está ya que no es cierto que $x \succeq z$.

Ejercicio 43. Sea $\succeq$ la relación de preferencias que racionaliza a $(\mathcal{B}, C(\cdot))$, es decir para todo $B \in \mathcal{B}$, $C(B) = C(B, \succeq) = \{x : x \succeq y, \forall y \in B\}$.

Tomamos $x \in C(B_1 \cup B_2)$, y demostraremos que $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2))$. Como $x \in C(B_1 \cup B_2, \succeq)$, tenemos que $x \succeq y$ para todo $y \in B_1 \cup B_2$. Eso asegura:

a) que $x \in C(B_1)$ si $x \in B_1$ o $x \in C(B_2)$ si $x \in B_2$, por lo que $x \in C(B_1) \cup C(B_2)$

b) que $x \succeq y$ para todo $y \in C(B_1) \cup C(B_2)$, ya que $C(B_1) \subseteq B_1$ y $C(B_2) \subseteq B_2$.

Por lo tanto, $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2), \succeq)$, como queríamos demostrar.

Tomamos ahora $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2), \succeq)$ y demostraremos que $C(B_1 \cup B_2, \succeq)$. Como $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2) \succeq)$, debemos tener $x \succeq y$ para todo $y \in C(B_1) = C(B_1, \succeq)$ y $x \succeq z$ para todo $z \in C(B_2) = C(B_2, \succeq)$. Como $y \in C(B_1, \succeq)$, tenemos $y \succeq w$ para todo $w \in B_1$; por transitividad de $\succeq$, tenemos que $x \succeq y \succeq w$, por lo que $x \succeq w$ para todo $w \in B_1$. En forma similar, tenemos $z \succeq w$ para todo $w \in B_2$ y por tanto $x \succeq w$ para todo $w \in B_2$. Tenemos entonces que $x \succeq w$ para todo $w \in B_1 \cup B_2$, y por tanto $x \in C(B_1 \cup B_2, \succeq)$ como queríamos demostrar.

Otra forma de hacerlo es usando el teorema de Richter, y aplicando el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada.

Para demostrar $C(B_1 \cup B_2) \subseteq C(C(B_1) \cup C(B_2))$, tomamos $x \in C(B_1 \cup B_2)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in B_1$ y tomemos cualquier $z \in C(B_1)$; como $x \in C(B_1 \cup B_2)$ y $z \in B_1$, $x \succeq_I^E z$ y por el AFPR, $x \in C(B_1)$. Luego, tomamos cualquier $y \in C(C(B_1) \cup C(B_2))$. Como $y \in C(B_1) \cup C(B_2) \subseteq B_1 \cup B_2$, tenemos $x \succeq_I^E y$, por lo que $x \in C(B_1) \subseteq C(B_1) \cup C(B_2)$ y el AFPR aseguran que $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2))$.

Para demostrar $C(C(B_1) \cup C(B_2)) \subseteq C(B_1 \cup B_2)$, tomamos $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2))$. Tomemos ahora cualquier $w \in C(B_1 \cup B_2)$ y supongamos que $w \in B_1$. Para $z \in C(B_1)$, tenemos $z \succeq_I^E w$, y $z \in B_1 \cup B_2$

We say that C satisfies WA if whenever $x, y \in A \cap B$, $x \in C(A)$, and $y \in C(B)$, it is also true that $x \in C(B)$ (fig. 5.2).

The Weak Axiom trivially implies two properties: *Condition* α: If $a \in A \subset B$ and $a \in C(B)$, then $a \in C(A)$. *Condition* β: If $a, b \in A \subset B$, $a \in C(A)$, and $b \in C(B)$, then $a \in C(B)$.

Notice that if $C(A)$ contains all elements that are maximal according to some preference relation, then C satisfies WA. Also, verify that conditions α and β are equivalent to WA for any choice correspondence with a domain satisfying that if A and B are included in the domain, then so is their intersection. Note also that for the next proposition, we could make do with a weaker version of WA, which makes the same requirement only for any two sets $A \subset B$ where A is a set of two elements.

por lo que $z \in C(B_1 \cup B_2)$. Como $x \in C(C(B_1) \cup C(B_2))$ y $z \in C(B_1)$, tenemos $x \succeq_I^E z$; además, $z \in C(B_1 \cup B_2)$ y $x \in B_1 \cup B_2$, entonces $x \in C(B_1 \cup B_2)$.

Ejercicio ??. Tomamos $X = \{x, y, z\}$, $B = \{x, y\}$, $B' = \{x, y, z\}$, $C(B) = \{x\}$ y $C(B') = \{x, y\}$. Esta estructura de elección no satisface el ADPR. Construimos ahora el resto de la función C para que sea distributiva. En principio, hay que rellenar la tabla de abajo, pero eso es muy fácil. Tomamos por ejemplo $C(x, z) = x$ y $C(y, z) = z$. Fijémonos por ejemplo en la columna de $C(x, y) = x$: si se elige lo mismo que en el conjunto de la fila, estaremos bien porque en la intersección de $\{x, y\}$ con cualquiera de ellos se elige x, y por tanto es distributiva; si se elige algo distinto, también es distributiva (la intersección es vacía y por eso ponemos $\emptyset$). El caso de yz es aún más fácil, porque la intersección de las elecciones es vacía en casi todos los casos (salvo los triviales z e yz). Finalmente para xyz, se cumple trivialmente ya que la intersección de los conjuntos es siempre el conjunto más pequeño.

	x	y	z	$xy, C(x,y) = x$	$xz, C(x,z) = x$	$yz, C(y,z) = z$	$xyz, C(x,y,z) = \{x,y\}$
x	OK	$\emptyset$	$\emptyset$	OK	OK	$\emptyset$	OK
y		OK	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	OK
z			OK	$\emptyset$	$\emptyset$	OK	$\emptyset$
$xy, C(x,y) = x$				OK	OK	$\emptyset$	OK
$xz, C(x,z) = x$					OK	$\emptyset$	OK
$yz, C(y,z) = z$						OK	$\emptyset$
$xyz,, C(x,y,z) = \{x,y\}$							OK

**esto **

Utilidad.

Como siempre, X es el espacio de los bienes de consumo, y $\succeq$ es una relación de preferencias en X. Diremos que una función $u : X \to \mathbf{R}$ **representa** a la relación de preferencia $\succeq$ si, y sólo si, para todo $x, y \in X$,

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Ejercicio 45 Mostrar que si una función u representa a las preferencias $\succeq$ entonces $\succeq$ es completa y transitiva.

Ejercicio 46 Demostrar que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es estrictamente creciente, y $u : X \to \mathbf{R}$ representa a una relación de preferencias $\succeq$, entonces $v : X \to \mathbf{R}$, definida por $v(x) = f(u(x))$ también representa a $\succeq$.

Ejercicio 47 Sea $u : X \to \mathbf{R}$ una función de utilidad que representa a unas preferencias $\succeq$.

Parte A. Encuentre qué propiedad debe tener u para que $v(x) = u(x) + (u(x))^2$ represente a las mismas preferencias que u.
Parte B. Encuentre qué propiedad debe tener u para que $v(x) = -u(x)(u(x) - 2)$ represente a las mismas preferencias que u.

Ejercicio 48 (del Mas-Colell et. al.) Demostrar que si X es finito y $\succeq$ es una relación binaria completa y transitiva en X, entonces existe una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ que representa a $\succeq$. (Ayuda: primero considere el caso en el cual las preferencias son siempre estrictas, y construya una utilidad para ese caso. Luego extienda el argumento para el caso más general).

Ejercicio 49 Sea $\succeq$ una relación completa y transitiva en un conjunto finito X, sea $L(x) = \{y : x \succeq y\}$ el conjunto de los elementos de X que son peores que x, y sea $|L(x)|$ la "cardinalidad" del conjunto $L(x)$, el número de elementos que hay en $L(x)$. Demuestre que $u(x) = |L(x)|$ representa a $\succeq$.

Demostraremos ahora que una clase bastante general de preferencias en $\mathbf{R}^l$ se pueden representar con una función de utilidad. Recordamos que dada una secuencia $\{x_n\}_1^\infty = \{x_1, x_2, ...\}$ en $\mathbf{R}^m$ decimos que $\{x_n\}_1^\infty$ **converge** a $x \in \mathbf{R}^m$, y escribimos $x_n \to x$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Una relación de preferencias $\succeq \subseteq X \times X$ para $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es:

continua si para todo $x \in \mathbf{R}^l$, los conjuntos $U_x = \{y : y \succeq x\}$ y $L_x = \{y : x \succeq y\}$ son cerrados (es decir, si $y_n \succeq x$ para todo n y $y_n \to y$ implican $y \succeq x$, y similarmente para $x \succeq y_n$).

monótona si $y \gg x$ (es decir $y_i > x_i$ para todo i) implica $y \succ x$.

estrictamente monótona si $y > x$ (es decir $y \geq x$ y $x \neq y$) implica $y \succ x$. Como siempre, $x \geq y$ quiere decir que para todo $i = 1, 2, ..., l$, $x_i \geq y_i$.

Teorema 4 (Wold, 1943). Si la relación de preferencias $\succeq$ en $\mathbf{R}_+^l$ es completa, transitiva, continua y monótona entonces, existe $u : \mathbf{R}_+^l \to \mathbf{R}_+$ continua, tal que $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$, para todo $x, y \in \mathbf{R}_+^l$. Es decir, existe una función de utilidad u que representa a las preferencias $\succeq$.

Prueba: Sea $e = (1, 1, ..., 1)$. Por monotonía, para todo $x \gg 0$, $x \succeq 0$. Además, por continuidad, para todo $x > 0$ también debemos tener $x \succeq 0$. Por lo tanto, $A^- = \{\beta \in \mathbf{R}_+ : x \succeq \beta e\}$ es no vacío para todo

x. También, para todo β tal que $\beta e \gg x$, $\beta e \succ x$, por lo que $A^{+} = \{\beta \in \mathbf{R}_{+} : \beta e \succeq x\}$ es no vacío. Por continuidad A^{+} y A^{-} son cerrados (aquí hay algo que demostrar, intente hacerlo; la continuidad de las preferencias asegura que algún conjunto en $\mathbf{R}^{l}$ es cerrado; aquí estamos diciendo que un conjunto de $\mathbf{R}$ es cerrado). Como $\succeq$ es completa, $\mathbf{R}_{+} \subseteq A^{+} \cup A^{-}$. Demostraremos ahora que $A^{+} \cap A^{-} \neq \emptyset$. Para ver eso, mostraremos que $A^{+} = [a, \infty)$ para algún a, y $A^{-} = [0, b]$ para algún b, y por lo tanto, $A^{+} \cap A^{-} \neq \emptyset$. Comencemos con A^{+} : si $r \in A^{+}$, para todo $s > r$, $se \gg re$, y por monotonía, $se \succ re$. Luego, $re \succeq x$ y transitividad implican que $se \succeq x$. Por lo tanto, A^{+} sólo puede ser un intevalo. Como A^{+} es cerrado, obtenemos $A^{+} = [a, \infty)$ para algún a, como queríamos demostrar. La demostración para A^{-} es similar y se omite.

Como $A^{+} \cap A^{-} \neq \emptyset$, existe algún α tal que $\alpha e \sim x$, y como $\alpha_1 > \alpha_2$ implica $\alpha_1 e \succ \alpha_2 e$, ese α es único. La función de utilidad que representa a $\succeq$ es aquella que le asigna a cada x, el número α tal que $\alpha e \sim x$. Queda como ejercicio mostrar que esta función de utilidad representa a $\succeq$, y que es una función continua. ■

Ejercicio 5. En clase. Demostrar que la función de utilidad que le asigna a cada x el número α tal que $\alpha e \sim x$ representa a $\succeq$.

Es muy importante destacar, aunque suene a llover sobre mojado, que las hipótesis del Teorema de Wold son suficientes, pero no necesarias, para la existencia de una función de utilidad. Así por ejemplo, si se pide demostrar que ciertas preferencias no son representables por una función de utilidad, no alcanzará con mostrar que no son continuas. En el Ejercicio 16, por ejemplo, alguna gente ha tratado de demostrar que las preferencias no son representables mostrando que no son continuas. En esa línea hay dos errores: las preferencias son continuas, y aunque no lo fueran, podrían ser representables. Para mostrar que unas preferencias no se pueden representar, hay que mostrar que falla alguna condición necesaria, tipo transitividad o completitud. El Ejercicio 51 pretende mostrar que hay preferencias que aunque no son continuas, se pueden representar con una función de utilidad.

Ejercicio 50 Recordamos que una definición de continuidad de una función u es que para $X \subset \mathbf{R}^{L}$, una $u : X \to \mathbf{R}$ es continua si para toda secuencia $\{x_n\}_1^{\infty}$ tal que $x_n \to x$, tenemos $u(x_n) \to u(x)$. Muestre que si u es una función de utilidad continua que representa a unas preferencias $\succeq$, entonces $\succeq$ es continua.

Ejercicio 51 Sea $X = \mathbf{R}_{+}$ suponga que $0 \succ x$ para todo $x \neq 0$ y que para todo $x, y \in \mathbf{R}_{++}$ $x \succeq y$ si y sólo si $x \geq y$.

Parte A. Demuestre que estas preferencias no son continuas.

Parte B. Encuentre una función de utilidad que represente a estas preferencias.

Parte C. La función de utilidad de la Parte B, ¿podría ser continua?

El argumento utilizado para encontrar algún α tal que $\alpha e \sim x$ en la demostración del Teorema de Wold es bastante común, y se puede hacer más general. El siguiente ejercicio es un ejemplo de ello.

Ejercicio 52 Sea $\succeq$ una relación de preferencias completa y continua en $X \subset \mathbf{R}^{L}$ para algún L. Suponga que $x \succeq z$ y que todo el intervalo entre x y z pertenece a X. Muestre que para un y fijo, con $x \succeq y \succeq z$ existe algún m en el intervalo entre x y z tal que $y \sim m$. Pista: para una de las formas de demostrar este ejercicio, se debe usar el hecho que si A y B son dos conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos, no puede suceder que $[0, 1] = A \cup B$ (eso es lo mismo que decir que $[0, 1]$ es conexo).

Ejercicio 53 Sean $X = \mathbf{R}^2_+$ y $A = \mathbf{R}^3_+$ Una persona tiene preferencias definidas sobre $X \cup A$ que son completas, transitivas y continuas. Además, siempre que tomemos $x, y \in X$ o $a, b \in A$, las preferencias son monótonas: $x \gg y \Rightarrow x \succ y$ o $a \gg b \Rightarrow a \succ b$. Además, si $a \in A$ y $x \in X$, entonces $a \succ x$. Demuestre que existe una función de utilidad que representa a las preferencias $\succeq$.

Ejercicio 7. Parte A. Demuestre que si $\succeq$ es estrictamente monótona, entonces es monótona.

Parte B. Demuestre que si $\succeq$ es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona entonces, es representable por una función de utilidad.

Ejercicio 8. Suponga que $X = \mathbf{R}^2_+$ y que $x \succeq y \Leftrightarrow \lambda x \succeq \lambda y$ para todo $\lambda > 0$. Suponga también que u representa a $\succeq$ y que $u(s,s) = s$. Si $(1,3) \sim (2,2)$ ¿Cuánto es $u(2,6)$?

El Ejercicio 1 mostró que los supuestos de completitud y transitividad son necesarios si una relación de preferencias tiene una función de utilidad. Los supuestos de monotonía y continuidad en el Teorema 10 no son necesarios, pero daremos ahora un ejemplo de una relación de preferencias que satisface todos los supuestos del teorema, menos continuidad, y que no puede ser representada por una función de utilidad.

Ejemplo 9. Preferencias Lexicográficas. Sea $X = \mathbf{R}^2_+$. Definimos la relación de preferencias de la siguiente manera: $\forall x, y \in X$,

$$x \succeq_L y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 > y_1 \\ o \\ x_1 = y_1 \,\&\, x_2 \geq y_2 \end{array} \right\}.$$

Primero mostramos que no satisface continuidad. Tomamos $x = (1,1)$, y

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right).$$

Para cada n, $y_n \succ x$, pero no es cierto que $y = \lim_{n\to\infty} y_n = (1,0) \succeq x$.

Para ver que estas preferencias no tienen una función de utilidad que las represente, recordamos que no existe ninguna función inyectiva desde los reales positivos a los racionales (ver apéndice matemático a estas notas). Si existiera una función de utilidad, tendríamos que para cada par de reales $x_1 \neq x_1'$ existiría un par de racionales $r(x_1)$, $r(x_1')$ tal que

$$\begin{array}{rcl} u(x_1,0) & < & r(x_1) < u(x_1,1) < u(x_1',0) < r(x_1') < u(x_1',1) \ \ (\text{si } x_1' > x_1) \\ & & o \\ u(x_1',0) & < & r(x_1') < u(x_1',1) < u(x_1,0) < r(x_1) < u(x_1,1) \ \ (\text{si } x_1' < x_1) \end{array}$$

con lo que habríamos construido una función que le asigna a dos reales distintos, dos racionales distintos. Eso es una contradicción. ■

Ejemplo 10. Dado que las preferencias lexicográficas no se pueden representar con una función de utilidad, y dado que son completas, transitivas y monótonas, el Teorema de Wold nos dice que no pueden ser continuas. Mostraremos ahora que no son continuas. Sea $x = (1,1)$, y sea $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right)$. Tenemos que $x_n \succeq y$ para todo n y que $x_n \to x = (1,0)$. Si las preferencias lexicográficas fueran continuas, tendríamos $x \succeq y$, y sin embargo, $y \succ x$.

Ejercicio 54 Considere una persona con preferencias $\succeq$ en $\mathbf{R}^3_+$. Formalmente, el individuo prefiere (x_1, x_2, x_3) a (y_1, y_2, y_3) si y sólo si $[x_1 x_2 \geq y_1 y_2$ o $x_1 x_2 = y_1 y_2$ & $x_3 > y_3]$.

Parte A. Use el hecho de que las preferencias lexicográficas no se pueden representar por una función de utilidad para probar que las preferencias $\succeq$ tampoco tienen una representación posible (por absurdo, muestre que si $\succeq$ tuviera representación, las lexicográficas también tendrían, que no es cierto).
Parte B. Suponga que la persona tiene que elegir una canasta óptima según sus preferencias $\succeq$, dada una riqueza $w > 0$ y unos precios $p_1, p_2, p_3 > 0$. ¿Qué canasta elegiría?
Parte C. Suponga que un investigador observa las elecciones del individuo cuando se enfrenta a todas las restricciones presupuestales posibles con $w > 0$ y unos precios $p_1, p_2, p_3 > 0$, pero sin conocer sus preferencias. ¿Podría encontrar una función de utilidad que genere la misma demanda? Si la respuesta es afirmativa, proponga una; si no, explique por qué no.
Parte D. ¿Por qué sus respuestas A y C son similares/difieren?
Ejercicio 11. Sea $X = \mathbf{R}^2$. La relación de preferencias $\succeq$ está definida por

$$x \succeq y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 * x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1 * y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Determinar cuáles de las siguientes propiedades satisface esta relación de preferencias: completa; transitiva; continua. Para cada propiedad que se cumpla, de una demostración. Para las que no se cumplan, de un contraejemplo.

Ejercicio 12. Sea $\succeq$ mi relación de preferencias sobre el conjunto de todos los objetos del universo. Lo único que me importa sobre un objeto es su tamaño (en kilos) y cuán alto es (en centímetros), por lo que el espacio de los bienes es $X = \mathbf{R}_+^2$ (donde en (x_1, x_2), x_1 es el peso y x_2 la altura). Supongamos que mis preferencias son completas y transitivas y que si un objeto es al menos tan pesado y tan alto como otro, entonces me gusta más. Supongamos que los objetos $\left(1, 1 + \frac{1}{n}\right)$ son preferidos a $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ para todo n.

Parte A: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que asegure que existe una función de utilidad que representa a $\succeq$? (por ejemplo, $(1,1) \succeq \left(2, \frac{1}{2}\right)$ o $\left(2, \frac{1}{2}\right) \succ (1,1)$)

Parte B: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que sea necesaria para la existencia de una función de utilidad?

Parte C: ¿Hay alguna relación entre $(1,1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que sea necesaria para que el Teorema de Wold asegure la existencia de una función de utilidad?

Ejercicio 13. Deberes. Sean $\succeq$ unas preferencias definidas sobre $X \equiv \mathbf{R}_+^2$, con la propiedad que

$$(a, 0) \sim (0, 2a)$$

para todo $a > 0$, y tal que $(a, 0) \succ (b, 0)$ si y sólo si, $a > b$. También, asuma que son transitivas y que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \sim \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

Encuentre una función de utilidad para estas preferencias. Sugerencia: para cada x encuentre un número $u(x)$ tal que $u(x)(1,0) \sim x$.

Ejercicio 14. Lo que viene en el primer párrafo es un ejemplo para motivar el ejercicio, que empieza en el segundo párrafo. Sea $\Omega = [0,1]$ el conjunto de los "estados posibles de la naturaleza" respecto al retorno que puede tener una acción de Coca Cola. Cada $\omega \in \Omega$ corresponde a un retorno, en porentaje por año, de la acción. Así por ejemplo, si ocurre $\omega = 0,5$, quiere decir que el retorno anual de la acción será de 50%. El inversor puede comprar esa acción, o un bono que rinde 5% seguro y debe decidir cuál comprar. Obviamente, es muy valioso para el inversor saber lo más posible sobre cuál va a ser el ω que ocurrirá. Por ejemplo, una "estructura de información" posible es $\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$: si el individuo posee esa estructura de información se enterará de antemano si ω va a ser menor estricto que $\frac{1}{2}$ o mayor que $\frac{1}{2}$. En términos generales, una estructura de información es una "partición" de Ω. Una partición es un conjunto de subconjuntos de Ω, tales que la unión es Ω y que para dos subconjuntos cualesquiera, la intersección es vacía. En este ejemplo, la unión de $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$ es Ω, y su intersección es vacía. Otra estructura posible de información (mucho más útil que la anterior) es

$$x=\left\{\left[0,\frac{1}{20}\right],\left(\frac{1}{20},\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}.$$

En términos generales, las preferencias del individuo sobre estructuras de información deberían ser tales que si x e y son dos estructuras de información tales que para cada elemento de x existe un elemento de y que la contiene, entonces x es estrictamente mejor que y. La idea es que la partición x es más "fina" que y, pues posee más información.

Ejercicio. Sea X el conjunto de todas las estructuras de información sobre $\Omega=[0,1]$, es decir, el conjunto de todas las particiones de Ω. Un individuo tiene preferencias $\succeq$ (completas, transitivas) definidas sobre X, con la propiedad que si x es más fina que y, entonces $x\succ y$. Demostrar que no existe ninguna función de utilidad que represente a $\succeq$. Pista: la demostración es parecida a lo de las preferencias Lexicográficas. Utilice, para cada $\omega\in\Omega$, las siguientes particiones

$$\begin{aligned} x_\omega &= \{\{\alpha\}:\alpha<\omega\}\cup[\omega,1] \\ x^\omega &= \{\{\alpha\}:\alpha\leq\omega\}\cup(\omega,1]. \end{aligned}$$

La partición x^ω es más fina que x_ω: si ocurre algún α menor estricto que ω, x_ω me dice exactamente cuál, y si no, me dice sólo que α fue débilmente mayor que ω; si ocurre algún α débilmente menor que ω, x^ω me dice exactamente cuál, y si no, me dice sólo que α fue estrictamente mayor que ω.

Ejercicio 15. Deberes. Una relación de preferencias $\succeq$ en $X=\mathbf{R}_+^L$ es **homotética** si $x\sim y$ si y sólo si $ax\sim ay$ para todo $a>0$. Mostrar que si una relación de preferencias $\succeq$ es completa, transitiva, continua, monótona y homotética, entonces existe una función de utilidad u que representa a $\succeq$ y que es homogénea de grado $1: u(ax)=au(x)$ para todo $a\geq 0$ (pista: utilice la construcción en la demostración del Teorema de Wold).

Ejercicio 55 Suponga que $E(\mathcal{B},C(\cdot))$ es una estructura de elección en la cual C es generada por una relación de preferencias $\succeq$ que se puede representar por una función de utilidad u que mapea el espacio X (que contiene a todos los $B\in\mathcal{B}$) a $\mathbf{R}$. ¿Se puede asegurar que C satisface el Axioma Débil?

Ejercicio 16. Sea $X=\mathbf{R}_+^2$. Las preferencias $\succeq$ de un individuo se pueden describir de la siguiente manera. Dados x e y, si x_1 y y_1 son "similares" (la diferencia es menor que 1) y x_2 y y_2 son similares, el individuo elige la canasta con más unidades del bien 1 e ignora al bien 2. Así, si por ejemplo, $|x_1-y_1|\leq 1$, $|x_2-y_2|\leq 1$ y: $x_1>y_1$, tenemos $x\succ y$; si $x_1=y_1$, $x\sim y$. Si las canastas son similares en una dimensión y no en la otra, el individuo elige la que tiene más bienes en la dimensión que no es similar. Así si por ejemplo $|x_1-y_1|\leq 1$ y $y_2>x_2+1$, tenemos $y\succ x$. Si ninguna de las dos dimensiones son similares, pero en direcciones opuestas tenemos $x\sim y$ (si una canasta tiene más de los dos bienes, y las dimensiones no son similares, se prefiere la que tiene más). Demostrar que estas preferencias no se pueden representar con una función de utilidad.

Ejercicio 17. Suponga que el espacio X de consumo es un subconjunto de $\mathbf{R}^l$ y asuma que las preferencias del individuo se pueden representar por una función de utilidad continua.

Parte A. Demuestre que si X es cerrado y acotado, las preferencias no son localmente no saciables (o que son localmente saciables). Pista: una función continua en un conjunto cerrado y acotado tiene un máximo.

Parte B. Si $X = \mathbf{R}^2_+$ y $\succeq$ es tal que $x \succeq y$ si y sólo si $u(x) \geq u(y)$ para todo $x, y \in X$, para alguna función u continua. Demuestre que esta relación de preferencias es continua.

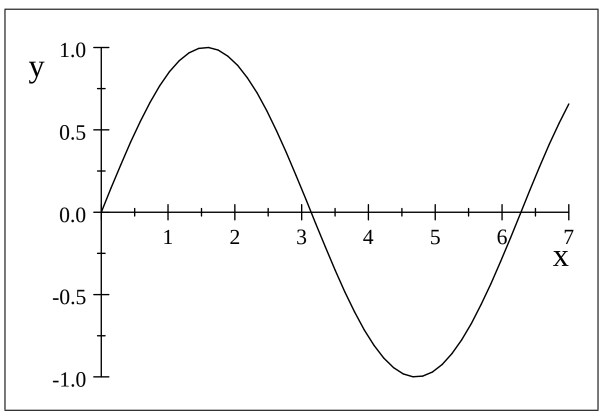
Ejercicio 18. Sea $X = \mathbf{R}^2_+$ y sea $\succeq_L$ la relación de preferencias lexicográfica.

Parte A. Dados $p_1, p_2, w > 0$ calcule la demanda Walrasiana (el conjunto de las mejores canastas, de acuerdo a $\succeq_L$, en la restricción $px \leq w$).

Parte B. Dada una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ dada por $u(x) = x_1$, calcule la demanda Walrasiana para $p_1, p_2, w > 0$.

Parte C. En no más de tres renglones (se anula toda la respuesta si contesta en más): explique si contradicen algo visto en clase las Partes A y B.

Ejercicio 19. Deberes. Sea $X = \mathbf{R}_+$ y sean $\succeq$ las preferencias en X definidas por $x \succeq y$ si y sólo si $seno(x) \geq seno(y)$. La siguiente gráfica muestra la función de utilidad $u(x) = seno(x)$.



Indique cuál de las siguientes funciones de utilidad representan a $\succeq$. En cada caso demuestre su respuesta.

Parte A. $s(x) = seno\left(x^2\right)$

Parte B. $t(x) = seno(ax + b)$ para $a > 0$.

Parte C. $v(x) = [seno(x)]^2$

Parte D. $w(x) = a \times seno(x) + b$ para $a > 0$.

Parte E. $f(x) = seno(x)(seno(x) - 1)$

Parte F. $g(x) = \sqrt{seno(x)}$.

Ejercicio 20. Deberes. Un individuo tiene una función de utilidad u sobre $\mathbf{R}_{+}^{2}$. Cuando los precios de los bienes son $(2,4)$ demanda solamente la canasta $(1,2)$ y cuando los precios son $(6,3)$ demanda solamente la canasta $(2,0)$. El individuo, ¿está maximizando su utilidad?

Ejercicio 21. Deberes. Sea $X=\mathbf{R}_{+}^{2}$ y sean unas preferencias $\succeq$ sobre X representadas por la función de utilidad $u(x)=x_1x_2^2$. Indique cuáles de las siguientes funciones de utilidad u_i también representan a $\succeq$. En cada caso indique por qué si, o proporcione un ejemplo que muestre que $x\succeq y$ pero $u_i(x)<u_i(y)$.

Parte A. $u_1(x)=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$

Parte B. $u_2(x)=\log x_1+2\log x_2$

Parte C. $u_3(x)=5\log x_1+10\log x_2$

Parte D. $u_4(x)=\log x_1+\log x_2$

Parte E. $u_5(x)=1-u(x)$.

Parte F. ¿Cómo cambian sus respuestas si $X=\mathbf{R}_{++}^{2}$?

Ejercicio 56 Suponga que la relación de preferencias $\succeq$ en $\mathbf{R}_{+}\times Y$ es completa y transitiva, y que existe un $\overline{y}\in Y$ tal que para todo $y\in Y$, $(0,y)\succeq(0,\overline{y})$. Suponga que

(i) El bien 1 es valioso: $(a',\overline{y})\succeq(a,\overline{y})\Leftrightarrow a'\geq a$.
(ii) Hay cantidades del bien 1 que compensan cualquier caída en el bien 2: para todo $y\in Y$ existe un $t\in\mathbf{R}_{+}$ tal que $(0,y)\sim(t,\overline{y})$.
(iii) Si el bien 1 se interpreta como dinero, asumimos que no hay efectos riqueza: para todo $a,a',t\in\mathbf{R}_{+}$ y todo $y,y'\in Y$, $(a,y)\succeq(a',y')\Leftrightarrow(a+t,y)\succeq(a'+t,y')$.
Parte A. ¿Demuestre que existe una función $v:Y\rightarrow\mathbf{R}$ tal que $(a,y)\succeq(a',y')\Leftrightarrow a+v(y)\geq a'+v(y')$.
Parte B. Demuestre que si existe una función $v:Y\rightarrow\mathbf{R}$ tal que $(a,y)\succeq(a',y')\Leftrightarrow a+v(y)\geq a'+v(y')$, entonces $\succeq$ satisface las propiedades i-iii.
Referencias: Parte de este material proviene de "Notes on the theory of choice," de David Kreps. También hay algo tomado de "Micoreconomic Theory," de Mas-Colell, Whinston y Green.

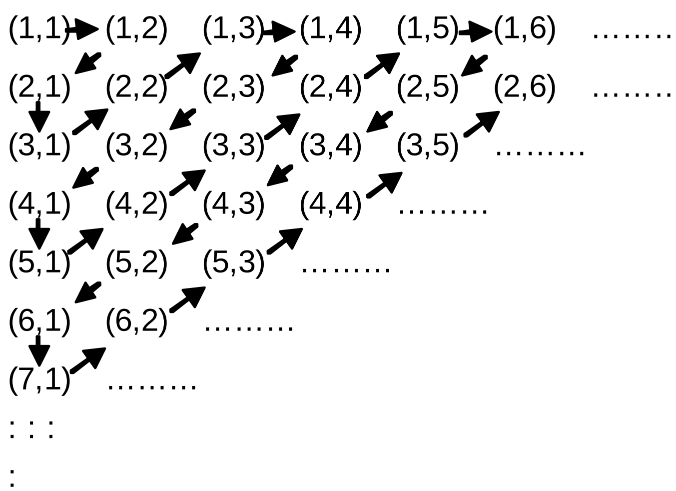
Recordamos que una función entre dos conjuntos X e Y es **inyectiva** si para todo $x, x' \in X$, $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$. Se dice que un conjunto X es **infinito numerable** si existe una función inyectiva $f : X \to \mathbf{N}$. Es decir, X es numerable si puedo “contar” o “numerar” sus elementos: a cada x le asigno un número natural. El conjunto X es **numerable** si es finito o infinito numerable.

Ejercicio 21. Mostrar que si existe una función inyectiva de A a B, y B es numerable, entonces A es numerable.

Ahora mostraremos que el conjunto $\mathbf{N}^2$ es numerable: el conjunto de todos los pares (i, j) tales que $i, j \in \mathbf{N}$ es numerable. Junto con el Ejercicio 21, este resultado nos permitirá demostrar fácilmente que una gran cantidad de conjuntos son numerables.

Teorema 22. El conjunto $\mathbf{N}^2$ es numerable.

Demostración. La demostración habitual consiste en ordenar los elementos de $\mathbf{N}^2$ en una matriz infinita, donde el elemento a_{ij} es precisamente (i, j), como en la figura. Luego, se comienzan a contar en el sentido de las flechas. Es fácil ver que siguiendo la flecha llegaremos a contar a todos los elementos de $\mathbf{N}^2$.



Una fórmula exacta para ver qué número le toca a cada elemento de $\mathbf{N}^2$ en este procedimiento es

$$n(i, j) = \begin{cases} \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i & \text{si } i + j \text{ es impar} \\ \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j & \text{si } i + j \text{ es par} \end{cases} .$$

Demostrar formalmente que esta fórmula es una inyección es más complicado que mostrar que la siguiente fórmula

$$m(i, j) = \frac{(i + j - 2)(i + j - 1) + 2i}{2}$$

(correspondiente a contar los elementos de $\mathbf{N}^2$ por las diagonales, comenzando siempre desde arriba) es una inyección. Para ver que esta fórmula es una inyección, notamos que si $(i, j) \neq (i', j')$, y:

- $i+j=i'+j'$, tendremos $(i+j-2)(i+j-1)=(i'+j'-2)(i'+j'-1)$, por lo que $i\neq i'$ implica $m(i,j)\neq m(i',j')$.

- $i+j\geq i'+j'+1$, tenemos

$$\begin{aligned} m(i,j) &= \frac{(i+j-2)(i+j-1)+2i}{2}\geq\frac{(i'+j'-1)(i'+j')+2i}{2} \\ &= \frac{(i'+j'-2)(i'+j'-1)+2(i'+j')-2+2i}{2}>\frac{(i'+j'-2)(i'+j'-2)+2i'}{2}=m(i',j') \end{aligned}$$

(la desigualdad estricta es porque $j'\geq 1$ implica $2j'-2\geq 0$ y $2i>0$).

Hemos encontrado entonces una biyección entre $\mathbf{N}^2$ y $\mathbf{N}$, completando la demostración. ■

Todas las demostraciones que siguen, que piden mostrar que algún conjunto es numerable, se pueden hacer igual que en la figura de la demostración del Teorema 22. Analíticamente, sin embargo, es más fácil encontrar una inyección del conjunto que se quiere mostrar que es numerable hacia $\mathbf{N}^2$, y usar el Ejercicio 21 para concluir que el conjunto es numerable.

Teorema 23. El conjunto $(0,1)$ no es numerable.

Ejercicio 24. Encuentre una función biyectiva entre $(0,1)$ y $[0,1]$.

El siguiente ejercicio establece algunos resultados básicos sobre operaciones con conjuntos numerables.

Ejercicio 25. Sea X_i un conjunto numerable, para $i=1,2,...$

Parte A. Demostrar que si para todo $i\neq j$, $X_i\cap X_j=\emptyset$, entonces

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$$

es numerable: la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Parte B. Demostrar que el X definido en la Parte A es numerable (aún si las intersecciones dos-a-dos no son vacías).

Parte C. Demostrar por inducción que para todo n, el conjunto

$$\prod_{i=1}^{n}X_i=X_1\times X_2\times...\times X_n$$

es numerable.

Parte D. Demostrar con un contraejemplo que

$$Y=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$$

no es numerable.

Teorema. El conjunto $\mathbf{Q}_{++}=\{m/n:m,n\in\mathbf{N}\}$ de los racionales estrictamente positivos es numerable.

Ejercicio 26. Demostrar el Teorema anterior.

Por la Parte C del Ejercicio 25 sabemos que el conjunto $\mathbf{Q}^l$ de todos los vectores de $\mathbf{R}^l$ cuyas componentes son racionales es numerable. Sea $\{q_n\}_1^\infty$ una de esas enumeraciones. El siguiente ejercicio es una generalización del teorema de Wold que no utiliza monotonía y que utiliza el hecho que en todo conjunto abierto (aquél cuyo complemento es cerrado) y no vacío en $\mathbf{R}^l$ hay al menos un vector con componentes racionales.

Ejercicio 27. Sea $X = \mathbf{R}^l_+$ y suponga que $\succeq\ \subseteq X \times X$ es completa, transitiva y continua. Muestre que $u : X \to \mathbf{R}$ definida mediante

$$u(x) = \sum_{\{n:x \succeq q_n\}} \frac{1}{2^n}$$

es tal que $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ (pista: la unión de dos cerrados es cerrado, y $\mathbf{R}^l_+$ no se puede escribir como la unión de dos cerrados disjuntos).

Un conjunto $Z \subseteq X$ es **denso para** $\succeq\ \subseteq X \times X$ si y sólo si cada vez que $x \succ y$, existe $z \in Z$ tal que $x \succeq z \succeq y$. Si Z es denso, quiere decir que está "por todos lados". Un conjunto X es **separable por** $\succeq$ si existe un Z numerable contenido en X que es denso para $\succeq$. A continuación presentamos el que para mí es el teorema más básico de la teoría de la decisión.

Teorema 28 (Birkhoff). Existe una función u que representa a $\succeq\ \subseteq X \times X$ si y sólo si $\succeq$ es completa, transitiva y separa a X (X es separable en $\succeq$).

El siguiente ejercicio pide la demostración de la existencia de una función de utilidad.

Ejercicio 29. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que no existen x e y que son indiferentes.

Parte A. Demuestre que el conjunto de $(a, b) \in\ \succeq$ tales que $a \succ b$ y no existe $x \in X$ tal que $a \succ x \succ b$ es a lo sumo numerable. A cada par de esa forma lo llamamos un **agujero** en X. (pistas: ¿Puede pasar que ni a ni b estén en el conjunto numerable Z que es denso para $\succeq$? Debe demostrar además que si (a, b) es un agujero, no existe otro agujero (c, b)).

Parte B. Sea C el conjunto que es la unión de: el conjunto numerable Z que es denso para $\succeq$; el conjunto de todos los a_i y b_i para los cuales (a_i, b_i) es un agujero en X. Demuestre que

$$u(x) = \sum_{c_n \in C : x \succeq c_n} \frac{1}{2^n}$$

representa a $\succeq$.

Más Ejercicios

Ejercicio 30. Sea $X = \mathbf{R}^2_+$. Las preferencias $\succeq$ en X son homotéticas, monótonas, y tales que para todo $x, y \in [0,1]$,

$$(x, 2-2x) \sim (y, 2-2y).$$

Parte A. Usando una construcción similar a la del teorema de Wold, encuentre una función de utilidad para $\succeq$ (en esta Parte sólo tiene que encontrarla).

Parte B. Demuestre que la función de utilidad encontrada en la Parte A representa a las preferencias $\succeq$.

Ejercicio 31. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y sean unas preferencias $\succeq$ sobre X tales que

$$\{(a,b), (b,c), (c,d)\} \subseteq \succeq$$

Parte A. Indique si cada una de las siguientes funciones de utilidad representa a $\succeq$, si es imposible saber si la utilidad representa a $\succeq$, o si no la representa. En cada caso, justifique su respuesta en (a lo sumo) dos renglones.

Parte A.i. $u_1(a) = u_1(b) = u_1(c) = u_1(d) = 4$.

Parte A.ii. $u_2(a) = 4, u_2(b) = 3, u_2(c) = 2, u_2(d) = 1$.

Parte A.iii. $u_2(a) = 1, u_2(b) = 2, u_2(c) = 3, u_2(d) = 4$.

Parte B. Si supiéramos que $\succeq$ se puede representar con una función de utilidad, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas, o si no hay suficiente información para decir si son verdaderas o falsas (justifique su respuesta):

Parte B.i. $a \succ c$.

Parte B.ii. $a \succeq c$.

Parte B.iii. $a \sim c$.

Parte B.iv. $c \succ a$.

Ejercicio 32. Sea el espacio de consumo $X = \mathbb{R}^n_+$ y un conjunto de funciones $\{u_1, u_2 ... u_k\}$ con $u_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2...k$ continuas, estrictamente crecientes y que cumplen con la siguiente propiedad: dados $i \neq j$ existen x_{ij} e y_{ij} en $\mathbb{R}^n_+$ tales que

$$u_i(x_{ij}) \geq u_i(y_{ij}) \quad \text{y también} \quad u_j(x_{ij}) < u_j(y_{ij})$$

En base a este conjunto de funciones de utilidad, definimos unas preferencias $\succsim \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ mediante:

$$x \succsim y \iff u_i(x) \geq u_i(y) \quad \text{para todo } i \in \{1, 2...k\}$$

Parte A. Interpretar estas preferencias cuando $n = k = 2$ y poner un ejemplo de dichas preferencias

Parte B. Interpretar estas preferencias para n y $k \in \mathbb{N}$ y poner un ejemplo

Parte C. Investigue si estas preferencias son transitivas, reflexivas, completas, monótonas y continuas. ¿Son estas preferencias representables por una función de utilidad $U:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$? (**Sugerencia:** utilice las condiciones **necesarias** para que una relación de preferencias sea representable por una función de utilidad)

Ejercicio 33. Sea $X=\mathbb{R}_+^2$ y dos funciones $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ diferenciables y monótonas crecientes con $\partial f(x_1,x_2)/\partial x_1>0$, $\partial f(x_1,x_2)/\partial x_2\geq 0$, $\partial g(x_1,x_2)/\partial x_1\geq 0$ y $\partial g(x_1,x_2)/\partial x_2>0$. En base a estas funciones, definimos la siguiente relación de preferencias sobre $X=\mathbb{R}_+^2$:

$$(x_1,x_2)\succsim(y_1,y_2) \iff \begin{pmatrix} f(x_1,x_2)\\ g(x_1,x_2)\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix} f(y_1,y_2)\\ g(y_1,y_2)\end{pmatrix}$$

Parte A. Sean $f(x_1,x_2)=x_1$ y $g(x_1,x_2)=x_2$. Interpretar dichas preferencias.

Parte B. Sea el conjunto $H=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2 : x_1+x_2\leq 1\right\}$ y preferencias $\succsim$ como las de la Parte A. Pruebe que la solución al problema del consumidor es elegir una canasta cualquiera $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}_+^2$ que cumpla que $y_2=1-y_1$. (Pista: encuentre los maximales de H según $\succsim$)

Parte C. Sea $f(x_1,x_2)=\varphi(x_1)$ y $g(x_1,x_2)=\psi(x_2)$ con $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ y $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ funciones estrictamente crecientes y derivables. Pruebe que las preferencias generadas por estas funciones son idénticas a las preferencias de la Parte A.

Parte D. Sea $f(x_1,x_2)=\log(x_1)$ y $g(x_1,x_2)=e^{x_2}+x_2$. Usando la parte anterior, encontrar los puntos maximales de H según $\succsim$.

Ejercicio 34. Un matrimonio debe elegir la canasta de L bienes a comprar con un vector de precios $p\in\mathbb{R}_{++}^L$ y un ingreso de $M>0$. Cada uno de ellos tiene preferencias $\succsim_H,\succsim_M\subset\mathbb{R}_+^L\times\mathbb{R}_+^L$ con $\succsim_H$ las preferencias del hombre y $\succsim_M$ las preferencias de la mujer. Se asume que las preferencias son completas, transitivas, continuas y monótonas. Dadas dos canastas cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}_+^L$, el matrimonio aplica la siguiente regla de decision:

- Si $x\succ_H y$ y $x\succsim_M y$ ó $x\succsim_H y$ y $x\succ_M y$, entonces se elige x antes que y
- Si $x\succsim_H y$ y $y\succ_M x$ ó $y\succ_H x$ y $x\succsim_M y$, entonces las canastas son indiferentes, y se elige cualquiera de ellas

Parte A. Interprete la regla de decisión anterior.

Parte B. Defina $\succsim_F$ como las preferencias derivadas de la elección del la familia. Es decir: $x\succ_F y \iff$ se elige x antes de que y; $x\sim_F y \iff$ si elige cualquiera de los dos aleatoriamente. Pruebe que dadas $x,y\in\mathbb{R}_+^L$, tenemos que

$$x\succsim_F y \iff x\succsim_H y \text{ ó } x\succsim_M y$$

Parte C. Pruebe que las preferencias $\succsim_F$son monótonas. ¿Son completas?

Parte D. Suponga que $L=2$ y que hay funciones de utilidades que representan las preferencias del hombre y de la mujer: específicamente

$$\begin{aligned} u_H(x,y) &= xy\\ u_M(x,y) &= xy^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Tome el punto $(1,1)$. Dibuje los conjuntos de supranivel, infranivel e indiferencia de las preferencias $\succsim_F$ (es decir, la interseccion de los conjuntos de supra e infranivel) derivadas de estas preferencias para el punto $(1,1)$

Parte E. En el punto anterior: ¿son las preferencias $\succsim_F$ transitivas? ¿existe función de utilidad que las represente?

Ejercicio 35. Un padre tiene $M > 0$ pesos para gastar en regalos de navidad para sus dos hijos, que llamaremos A y B. Hay L juguetes que puede comprarles, y cada hijo tiene preferencias sobre el espacio de juguetes, que supondremos $X = \mathbb{R}_+^L$ dadas por:

$$x \succsim_A y \Longleftrightarrow u_A(x) \geq u_A(y)$$
$$x \succsim_B y \Longleftrightarrow u_B(x) \geq u_B(y)$$

Con $\succsim_A$ las preferencias del hijo A y $\succsim_B$ las preferencias del hijo B. Las funciones de utilidad para cada uno de los hijos, $u_A : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ y $u_B : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ son ambas 2 veces diferenciables, estrictamente crecientes en cada uno de sus argumentos, y estrictamente cóncavas. El padre debe elegir un par de canastas (x_A, x_B) con $x_A \in \mathbb{R}_+^L$ y $x_B \in \mathbb{R}_+^L$ por lo que $(x_A, x_B) \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$. Es decir, debe elegir que regalos comprar para su hijo A y que regalos comprar para el hijo B. A este par de canastas la llamaremos **asignación de regalos.** Decimos que el hijo A **envidia al hijo** B en la asignacion de regalos (x_A, x_B) si $x_B \succ_A x_A$. Similarmente, decimos que el hijo B **envidia al hijo** A en la asignación de regalos (x_A, x_B) si $x_A \succ_B x_B$.Decimos que una asignación de regalos (x_A, x_B) es **libre de envidia** si A no envidia a B y tampoco sucede que B envidie a A: esto es, $x_A \succsim_A x_B$ y $x_B \succsim_B x_A$.

Hay un vector de precios de juguetes, dado por $p \in \mathbb{R}_{++}^L$. El padre conoce las funciones de utilidad de sus hijos, y elige asignaciones de regalos **maximales**, en el sentido siguiente: si elige una asignacion de regalos (x_A, x_B) con $p(x_A + x_B) \leq M$, no existe ninguna otra asignación de regalos $(\overline{x}_A, \overline{x}_B)$ con $p(\overline{x}_A, \overline{x}_B) \leq M$ y tal que $\overline{x}_A \succ_A x_A$ y $\overline{x_B} \succsim_B x_B$. o $\overline{x_A} \succsim_A x_A$ y $\overline{x}_B \succ_B x_B$. Puede probarse que si elije asignaciones de regalo maximales, debemos tener que $p(x_A + x_B) = M$. Por lo tanto, asumiremos de aqui en mas que el padre gasta M en ambas asignaciones de regalos.

Parte A. Suponga que el padre hace lo siguiente: divide el dinero M de manera equitativa ente ambos y compra lo que ellos eligirian comprar con ese dinero. Esto genera una asignación de regalos (x_A, x_B). Pruebe que esta asignación es única, que es maximal y que es libre de envidia. (**Sugerencia:** Para probar que es maximal, recuerde que como las preferencias son monótonas, si x_A es el máximo de $u(x_A)$ en el conjunto $\{px \leq K\}$ y $u(\overline{x}_A) \geq u(x_A)$ debemos tener que $p\overline{x}_A \geq K$)

Parte B. Suponga que $L = 2$: es decir, hay dos juguetes: el juguete x y el juguete y. Suponga ademas, que $u_A(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)$ y que $u_B(x,y) = \frac{3}{4}\ln(x) + \frac{1}{4}\ln(y)$. La cantidad de dinero con la que cuenta el padre es $M = 40$ y ambos juguetes tienen precios $p_x = p_y = 1$. Encuentre la asignación de regalos libre de envidia como se la define en la Parte A.

Parte C. Suponga ahora que $u_A = u_B$, es decir, los hijos tienen gustos idénticos. Suponga ahora que el padre decide hacer lo mismo que en la Parte A, pero gastanto M_A en los regalos para el hijo A, y M_B en los regalos para el hijo B, con $M_A + M_B = M$ y $M_A \neq M_B$. Llame a esta asignación de regalos (x_A^*, x_B^*). Pruebe que esta asignación no es libre de envidia. (**Sugerencia:** Pruebe que si $M_A > M_B$ entonces tenemos que B envidia a A). Argumente que, entonces, la canasta libre de envidia para el caso de preferencias identicas para ambos hijos es única en este esquema.

Ejercicio 57 Sea $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbf{R}^{n+1}_{++}$. Denotamos a los miembros de X de la forma (a, α), $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}^n_{++}$. Es decir, escribimos a los vectores x pertenecientes a X como $x = (a, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde $a > 0$, $\alpha_i > 0 \ \forall \ i = 1, ..., n$. Sea una relación de preferencias $\succeq \subseteq X \times X$, de la cual sabemos que es completa y transitiva y además cumple:

i) $(a, \alpha) \succ (b, \alpha) \iff a > b, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}^n_{++}$.
ii) $(a, \alpha) \sim (a, \alpha')$ siempre que α' sea una permutación de α (los mismos números, cambiados de lugar).
iii) $(a, \alpha) \succ (a, \beta)$ siempre que $\beta > \alpha \ \left(\beta_i \geq \alpha_i \forall i, \beta \neq \alpha\right), \forall \ a > 0$.
Parte A. Argumente por qué no se puede aplicar el Teorema de Wold con estas preferencias.
Parte B. Decimos que una preferencia $\succeq$ cumple la propiedad de **aditividad** si $(a, \alpha) \succeq (b, \beta) \Leftrightarrow (a + c, \alpha + \delta) \succeq (b + c, \beta + \delta) \ \forall \ (c, \delta) \in \mathbf{R}^{n+1}_{+}$ tal que $(a + c, \alpha + \delta), (b + c, \beta + \delta) \in X$. Muestre que hay preferencias continuas y aditivas (como las descritas más arriba) que no se pueden representar con la función de utilidad $U(a, \alpha) = a - \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
Parte C. Probar que $\succeq$ es continua y cumple la propiedad de aditividad si y solo si la función

$$U(a, \alpha) = a - C \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \tag{7}$$

representa a $\succeq$, para algún B.

Ejercicio 47.A. La función $f(y) = y+y^2$ es estrictamente creciente cuando $f' \geq 0 \Leftrightarrow 1+2y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$. Entonces, si $u(x) \geq -\frac{1}{2}$ para todo x, $v(x) = f(u(x))$ será una transformación monótona de $u(x)$, y representará a las mismas preferencias. Sabiendo eso, otra forma de hacerlo es ver que con $u(x) \geq u(y)$

$$v(x) = u(x)+u^2(x) \geq u(y)+u^2(y) = v(y) \Leftrightarrow u(x)-u(y) \geq -(u(x)-u(y))(u(x)+u(y)) \Leftrightarrow 1 \geq -(u(x)+u(y))$$

que se cumple siempre que $u(z) \geq -\frac{1}{2}$ para todo z.
Parte B. La función $g(y) = -y(y-2)$ tiene derivada $g'(y) = 2-y-y = 2-2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$. Por lo tanto, $w(x) = g(u(x))$ será una transformación monótona de $u(x)$, y representará a las mismas preferencias is y sólo si $u(x) \leq 1$ para todo x. Igual que antes, otra forma de llegar a lo mismo es ver que con $u(x) \geq u(y)$

$$\begin{aligned} w(x) &= -u(x)(u(x)-2) \geq -u(y)(u(y)-2) = w(y) \Leftrightarrow u^2(y)-u^2(x)+2(u(x)-u(y)) \geq 0 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq (u(y)-u(x))(u(y)+u(x))+2(u(x)-u(y)) \Leftrightarrow 0 \leq (u(x)-u(y))(2-(u(y)+u(x))) \end{aligned}$$

por lo que $w(x) \geq w(y)$ si y sólo si $2 \geq u(y)+u(x)$ que se cumple si $u(z) \leq 1$ para todo z.

Ejercicio 1: Para mostrar que $\succeq$ es completa, notemos que para x e y cualesquiera, como $u(x)$ y $u(y)$ son números reales,

$$u(x) \geq u(y) \text{ ó } u(y) \geq u(x)$$

por lo tanto, como u representa a $\succeq$ tenemos que

$$x \succeq y \text{ ó } y \succeq x$$

lo que completa la demostración.

Otra forma de hacer la misma demostración es suponer que para algún x e y, no tenemos ni $x \succeq y$, ni $y \succeq x$. Como u representa a $\succeq$, eso implica que no tenemos ni $u(x) \geq u(y)$, ni $u(y) \geq u(x)$, lo que es absurdo.

Para mostrar que $\succeq$ es transitiva, tomemos x, y y z tales que $x \succeq y$ e $y \succeq z$. Como u representa a $\succeq$ obtenemos que

$$u(x) \geq u(y) \text{ y } u(y) \geq u(z)$$

por lo cual $u(x) \geq u(z)$, y como u representa a $\succeq$, obtenemos $x \succeq z$.

Ejercicio 2: Tomemos $x \in X$, $y \in X$. Como $u(\cdot)$ representa a $\succeq$ se cumple:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Luego, como $f(\cdot)$ es estrictamente creciente, también se cumple:

$$u(x) \geq u(y) \Longleftrightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$$

con lo cual tenemos que:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$$

y por lo tanto la función $v(x) = f(u(x))$ también representa a $\succeq$.

Una cosa que hay que hacer con cuidado es ver dónde se usa f estrictamente creciente. Para cualquier f creciente tendremos $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \Rightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$. Pero si f no es estrictamente creciente no tendremos $f(u(x)) \geq f(u(y)) \Rightarrow u(x) \geq u(y)$. Por ejemplo, podría suceder que $y \succ x$, pero $f(z) = 0$, con lo cual tendremos $0 = f(u(x)) \geq f(u(y)) = 0$, pero no $u(x) \geq u(y)$.

Por lo tanto, una forma más cuidadosa de obtener $f(u(x)) \geq f(u(y)) \Rightarrow u(x) \geq u(y)$ es decir que para $f(u(x)) > f(u(y))$ obtenemos $u(x) > u(y)$ (aún si f es débilmente creciente), y que $f(u(x)) = f(u(y))$ implica $u(x) = u(y)$ pues f es estrictamente creciente.

Ejercicio 48: Haciendo caso a la ayuda, empezaremos suponiendo que las preferencias son siempre estrictas. Sea N el número de elementos de X. Para demostrar que sin importar el valor de N siempre podemos representar a $\succeq$ mediante una función de utilidad utilizaremos el método inductivo. El método inductivo me dice que para probar que una propiedad vale para todo $n \in \mathbb{N}$, debo proceder probando primero que vale para $n = 1$, y luego probar que vale para n si asumo que la propiedad se cumple para $n - 1$.

En nuestro caso, si $N = 1$ la demostración es trivial Supongamos en cambio que el conjunto X tiene $N - 1$ elementos y que la relaciòn $\succeq$ puede representarse por una función de utilidad. Como hemos asumido preferencia estricta, podemos escribir ello como que $u(x_1) > u(x_2) > ... > u(x_{N-1})$ Si añadimos un elemento a X de manera que ahora el número de elementos es igual a N, podemos caer en alguno de los tres casos siguientes:

a) $x_N \succ x_i$ para todo $i \leq N - 1$
b) $x_i \succ x_N$ para todo $i \leq N - 1$,
c) $x_i \succ x_N \succ x_{i+1}$ para algún $i \leq N - 1$

En el primer caso basta con tomar $u(x_N)$ mayor que $u(x_1)$. En el segundo caso basta con tomar $u(x_N)$ menor que $u(x_{N-1})$. En el tercer caso basta con tomar $u(x_N) \in (u(x_{i+1}), u(x_i))$.

Ahora extendamos el argumento permitiendo indiferencia. Tomamos un conjunto $\widetilde{X} = \{x_1, x_2, ..., x_N\} \subseteq X$ que cumpla que para todo $i \neq j$, x_i no es indiferente a x_j, y para todo $x \notin \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, existe i tal que $x \sim x_i$. Es decir, tomamos un conjunto de x tal que no hay dos indiferentes, y para cada x en X y no en este conjunto, existe algún x_i que es indiferente a x. Una forma de encontrar este conjunto es tomar un elemento cualquiera en X y llamarlo x_1. Tomamos otro elemento de X. Si $x \sim x_1$, lo dejo. Si no son indiferentes, lo llamo x_2. Continuamos de esa manera hasta agotar los elementos de X.

Definamos los conjuntos $X_n = \{y \in X : y \sim x_n\}$. Como las preferencias son completas, y por lo tanto reflexivas, se cumple que

$$X = \bigcup_{n=1}^{N} X_n.$$

Por transitividad de las preferencias se cumple que si $X_n \neq X_m$ para $n \in N$, $m \in N$, entonces $X_n \cap X_m = \varnothing$. Vemos que la parte anterior del ejercicio implica que existe $u : \widetilde{X} \to \mathbf{R}$ tal que $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Ahora extendemos u de $\widetilde{X}$ a X, asignándole a cada $z \in X$, el número $u(x_i)$ tal que $z \sim x_i$ para algún $x_i \in \widetilde{X}$. Es fácil comprobar que $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a $\succeq$.

Ejercicio 49. Debemos demostrar que $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.

Supongamos $x \succeq y$. En ese caso, si $z \in L(y)$, tenemos $y \succeq z$, y por transitividad, $x \succeq y \succeq z$ implica $x \succeq z$, por lo que $z \in L(x)$. Obtenemos entonces $u(x) = |L(x)| \geq |L(y)| = u(y)$, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora $|L(x)| \geq |L(y)|$, para demostrar $x \succeq y$. Si tuviésemos $y \succ x$ (lo contrario de $x \succeq y$ dado que las preferencias son completas) tendríamos que:
a) para cada $z \in L(x)$, $y \succ x \succeq z$, que implica $z \in L(y)$;

b) $y \in L(y)$ (porque por completas, $y \succeq y$), pero $y \notin L(x)$;

y por lo tanto $|L(y)| > |L(x)|$, una contradicción.

Ejercicio 5: Supongamos que $x \succeq y$ y sean α y β tales que $\alpha e \sim x$ y $\beta e \sim y$. Debemos mostrar que $\alpha \geq \beta$. Si $\beta > \alpha$, tenemos por monotonía que $y \sim \beta e \succ \alpha e \sim x$, lo cual contradice $x \succeq y$. Concluimos que $\alpha \geq \beta$, como queríamos mostrar.

Supongamos ahora que α y β son tales que tales que $\alpha \geq \beta$, $\alpha e \sim x$ y $\beta e \sim y$. Debemos mostrar que $x \succeq y$. Si $\alpha = \beta$, tenemos que $x \succeq \alpha e \succeq y$, y por transitiva $x \succeq y$. Si $\alpha > \beta$, $\alpha e > \beta e$, y por monotonía, $\alpha e \succ \beta e$. Por tanto, $x \succeq \alpha e \succ \beta e \succeq y$ por transitiva $x \succeq y$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 50. Tomo $x_n \to x$ y $x_n \succeq y$ para todo n. Debo demostrar $x \succeq y$, o lo que es lo mismo, que $u(x) \geq u(y)$. De las hipótesis obtengo $u(x_n) \geq u(y)$ para todo n, y $u(x_n) \to u(x)$. Si tuviéramos $u(y) > u(x)$, contrariamente a lo que queremos demostrar, como $u(x_n) \to u(x)$, para $\varepsilon = \frac{u(y)-u(x)}{2}$ habría un N tal que para todo $n \geq N$

$$|u(x_n) - u(x)| < \varepsilon = \frac{u(y) - u(x)}{2} \Rightarrow u(x_n) < \frac{u(y) + u(x)}{2} < u(y)$$

lo que es una contradicción.

Ejercicio 6.A. Recordemos que para que las preferencias sean continuas, los conjuntos $U_x = \{z : z \succeq x\}$ y $L_x = \{z : x \succeq z\}$ deben ser cerrados. Tomemos la secuencia $x_n = \frac{1}{n}$, e $y = 1$. En este caso se cumple que $y \in \mathbb{R}_{++}$ y $x_n \in \mathbb{R}_{++}$ y además $y \geq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica, por condición del ejercicio que $y \succeq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado la secuencia $x_n = 1/n$ converge a 0. Si las preferencias son continuas, se debe cumplir que $0 = \lim_{n\to\infty} x_n \succeq y$ pues ello aseguraría que L_x sea un conjunto cerrado. Sin embargo, por condición del problema, ello no ocurre.

6.B. La función de utilidad

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

representa a $\succeq$.

6.C. No. Si u fuera continua, tendríamos que siempre que $y \succeq x_n$, $u(y) \geq u(x_n)$ y tomando límites y usando continuidad de u, obtendríamos $u(y) \geq u(\lim x_n)$, por lo que $y \succeq \lim x_n$, y las preferencias serían continuas.

Ejercicio 52. Sea $A = \{a \in [0,1] : ax + (1-a)z \succeq y\}$ y sea $B = \{b \in [0,1] : y \succeq bx + (1-b)z \succeq y\}$.

Paso 1. Para toda secuencia $\{a_n\}_1^\infty$ tal que $a_n \in A$ para todo n y $a_n \to a$, mostraremos que $a \in A$, estableciendo que A es cerrado. Para eso debemos demostrar primero que $a_n \to a$ implica $a_n x + (1-a_n)z \to ax + (1-a)z$. Para eso debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para todo $n \geq N$, $\|a_n x + (1-a_n)z - ax - (1-a)z\| < \varepsilon$. Como $a_n \to a$, tenemos que para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|x\|+\|z\|}$ existe un N_a tal que para todo $n \geq N_a$, $|a - a_n| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|x\|+\|z\|}$, y eso nos asegura que, dado ε, podemos tomar $N = N_a$ tal que para todo $n \geq N = N_a$,

$$\begin{aligned} \|a_n x + (1-a_n)z - ax + (1-a)z\| &= \|(a_n - a)x + (a - a_n)z\| \leq |a - a_n|\,\|x\| + |a - a_n|\,\|z\| \\ &= |a - a_n|(\|x\| + \|z\|) < \varepsilon'(\|x\| + \|z\|) = \frac{\varepsilon}{\|x\| + \|z\|}(\|x\| + \|z\|) = \varepsilon \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Un argumento igual establece que B es cerrado.

Paso 2. Como A y B son cerrados y no vacíos (ya que $1 \in A$ y $0 \in B$), y cada $c \in [0,1]$ debe estar en A o en B (ya que las preferencias son completas, y $cx + (1-c)z$ debe ser comparable con y), debemos tener que A y B no pueden ser disjuntos. Es decir, existe $c \in A \cap B$. Para ese c tenemos

$$m \equiv cx + (1-c)z \succeq y \succeq cx + (1-c)z \Rightarrow cx + (1-c)z \sim y$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 53. Usando el Teorema de Wold, encontramos $u : X \to \mathbf{R}_+$ tal que para todo $x, y \in X$, $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Luego, aplicando nuevamente el Teorema de Wold, encontramos $v : A \to \mathbf{R}_+$ tal que para todo $a, b \in A$, $a \succeq b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $u(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Si no lo fueran, podríamos definir $v'(a) = v(a) - v(0)$ y tendríamos que $v'(0) = 0$. Más aún, por monotonía (y continuidad), $v(a) \geq 0$ para todo a (lo mismo para u).

Luego, la idea es tener una función de utilidad w que respete a las preferencias, construida usando u y v. Tiene que suceder que $w(a) \geq w(x)$ para todo a en A y x en X. Lo que hacemos entonces es que w crezca tanto con u como con v, y que $w(a) \geq 0 > w(x)$ para todo a y x. Por ejemplo, definimos

$$w(z) = \begin{cases} -\frac{1}{u(z)+1} & z \in X \\ v(z) & z \in A \end{cases}$$

y es fácil verificar que w representa a las preferencias $\succeq$.

Ejercicio 7.A: La relación $\succeq$ definida sobre $X = \mathbb{R}^l$ es estrictamente monótona si y sólo si $x > y$ implica $x \succ y$.

Si se cumple $x \gg y$ ($x_i > y_i$ para todo $i = 1, ..., l$) se cumple $x > y$ y entonces por monotonía estricta se cumple $x \succ y$. Por lo tanto $x \gg y$ implica $x \succ y$. y las preferencias son monótonas.

7.B: Por lo demostrado en la Parte A, si $\succeq$ es estrictamente monótona, entonces es monótona. Por lo tanto, se cumplen las condiciones del Teorema de Wold y la relación es representable por una función de utilidad.

Ejercicio 8. Como $(1,3) \sim (2,2)$, tenemos que

$$(2,6) = 2(1,3) \sim 2(2,2) = (4,4)$$

y por lo tanto, $u(2,6) = 4$.

Ejercicio 54.A. Supongamos que la función de utilidad que representa a $\succeq$ es $u : \mathbf{R}^3_+ \to \mathbf{R}$. En ese caso, si definimos $v : \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$ como $v(x_1, x_2) = u(x_1, 1, x_2)$ tendremos que para $x, y \in \mathbf{R}^2_+$,

$$x \succeq_L y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 > y_1 \Leftrightarrow x_1 1 > y_1 1 \Leftrightarrow (x_1, 1, x_2) \succ (y_1, 1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, 1, x_2) > u(y_1, 1, y_2) \\ o \\ x_1 = y_1 \& x_2 > y_2 \Leftrightarrow (x_1, 1, x_2) \succ (y_1, 1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, 1, x_2) > u(y_1, 1, y_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow v(x_1, x_2) > v(y_1, y_2)$$

y eso querría decir que v representa a las preferencias lexicográficas.

54.B. Como la persona elegirá gastar todo su ingreso en los bienes 1 y 2, podemos ignorar x_3 y maximizar $x_1 x_2$. En ese caso, la demanda de bienes será como en una Cobb-Douglas común y corriente: $x = \left(\frac{w}{2p_1}, \frac{w}{2p_2}, 0\right)$.

54.C. Por supuesto una función de utilidad que genera esa misma demanda es la Cobb Douglas x_1x_2.
54.D. El comportamiento de un Cobb-Douglas x_1x_2 y un individuo con preferencias $\succeq$ es idéntico en el mercado. El hecho que $\succeq$ no se puedan representar no impide que en el contexto de elegir entre canastas, con restricciones presupuestales, no haya alguien con una función de utilidad que se comporte de la misma manera.
Ejercicio 11 (por Manuel Macera). Para demostrar que no son completas basta con un contraejemplo. Tomamos $x = (0, 3)$, $y = (1, 1)$ y se cumple que ni $x \succeq y$ ni $y \succeq x$.

Para demostrar que si son transitivas tomamos $x \succeq y \succeq z$, lo cual implica

$$\begin{bmatrix} x_1 * x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} y_1 * y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} z_1 * z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

Luego obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 * x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} z_1 * z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

lo cual implica $x \succeq z$.

Para demostrar que son continuas basta notar que $f_1(x) = x_1 * x_2$ y $f_2(x) = x_1 + x_2$ son funciones continuas. Por lo tanto, dados $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^n \succeq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x^n \to x$, entonces se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x^n) \geq f_1(y) \\ \& \\ f_2(x^n) \geq f_2(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \lim f_1(x^n) \geq f_1(y) \\ \& \\ \lim f_2(x^n) \geq f_2(y) \end{array}\right\} \overset{f_i \text{ continua}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} f_1(\lim x^n) = f_1(x) \geq f_1(y) \\ \& \\ f_2(\lim x^n) = f_2(x) \geq f_2(y) \end{array}\right\} \Rightarrow x \succeq y$$

como se quería demostrar.

Otra forma de demostrar continuidad es la siguiente. Tomamos $x_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N$ tal que $\forall n \geq N$ tenemos que $\|x_n - x\| < \varepsilon \Leftrightarrow (x_{1n} - x_1)^2 + (x_{2n} - x_2)^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \forall n \geq N$, $|x_{1n} - x_1| < \varepsilon$ y $|x_{2n} - x_2| < \varepsilon \Longrightarrow x_{1n} < x_1 + \varepsilon$ y $x_{2n} < x_2 + \varepsilon \Longrightarrow x_{1n} + x_{2n} < x_1 + x_2 + 2\varepsilon$

Asumimos $x_n \succeq y \Longrightarrow$ tenemos que demostrar que $x \succeq y$ tenemos que $\forall n \ x_{n1}x_{n2} \geq y_1y_2$ y que $x_{n1}+x_{n2} \geq y_1 + y_2$. Tenemos que demostrar que no puede pasar que $y_1y_2 > x_1x_2$ y que tampoco $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$

Supongamos que $y_1 + y_2 > x_1+ x_2$, como tenemos que $x_n \to x$, tomemos un ε tal que

$$y_1 + y_2 > (x_1 + \varepsilon) + (x_2 + \varepsilon) = x_1 + x_2 + 2\varepsilon > x_{n1} + x_{n2}$$

(por definición de convergencia) lo que es absurdo porque $x_{n1} + x_{n2} \geq y_1 + y_2 \Longrightarrow$ tenemos que tener que $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$

Un argumento similar establece que $x_1x_2 \geq y_1y_2$ y concluimos que $\succeq$ es continua.

Ejercicio 12.A No. Para cualquier relación entre $(1, 1)$ y $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ que se elija, se puede hacer que las preferencias se parezcan a las lexicográficas, de tal forma que no tengan una función de utilidad.

12.B No. La candidata obvia para condición necesaria, es que $(1, 1) \succeq \left(2, \frac{1}{2}\right)$. Sin embargo, las siguientes preferencias tienen $\left(2, \frac{1}{2}\right) \succ (1, 1)$ (y son monónotonas) y tienen una función de utilidad:

$$u(x) = \begin{cases} 10x_1x_2 & \text{si } x \neq (1, 1) \text{ y } x_1x_2 \geq 1 \\ x_1x_2 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

12.C Para la aplicación del teorema de Wold, se precisa que $(1,1) \succeq \left(2, \frac{1}{2}\right)$, pues si ello no fuera cierto, las preferencias no serían continuas.

Ejercicio 13. Para cada $x = (x_1, x_2)$, tenemos que

$$z = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}, 0\right) \sim (0, 2x_1 + x_2) = w$$

por lo que para $\lambda = \frac{x_1}{x_1 + \frac{x_2}{2}} \in [0,1]$ tenemos que

$$z \sim \lambda z + (1-\lambda) w = \frac{x_1}{x_1 + \frac{x_2}{2}} \left(x_1 + \frac{x_2}{2}, 0\right) + \left(1 - \frac{x_1}{x_1 + \frac{x_2}{2}}\right)(0, 2x_1 + x_2) = x$$

Por lo tanto, vemos que $u(x) = x_1 + \frac{x_2}{2}$, pues $x \sim \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)(1,0)$. Para demostrar que de hecho u representa a $\succeq$, vemos que por transitividad

$$\begin{aligned} x &\succeq y \overset{\substack{\text{como} \\ x \sim \left(x_1 + \frac{x_2}{2}, 0\right) \\ y \sim \left(y_1 + \frac{y_2}{2}, 0\right)}}{\Leftrightarrow} \left(x_1 + \frac{x_2}{2}, 0\right) \succeq \left(y_1 + \frac{y_2}{2}, 0\right) \Leftrightarrow \\ x_1 + \frac{x_2}{2} &\geq y_1 + \frac{y_2}{2} \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \end{aligned}$$

Ejercicio 14 (por Manuel Macera. También se puede encontrar en el artículo "Monotone Preferences over Information" que pueden encontrar en mi página web). Para cada $\omega \in \Omega$ definamos las siguientes estructuras de información:

$$\overline{x}(\omega) = \{\{\alpha : \alpha < \omega\} \cup [\omega, 1]\}$$

$$\underline{x}(\omega) = \{\{\alpha : \alpha \leq \omega\} \cup (\omega, 1]\}$$

Notemos que la estructura $\underline{x}(\omega)$ es más fina que $\overline{x}(\omega)$. Para darnos cuenta de ello supongamos que la realización del estado es ω. En ese caso, bajo$\underline{x}(\omega)$ podremos saber exactamente lo que sucedió mientras que bajo $\overline{x}(\omega)$ sólo sabremos que el estado pertenece al intervalo $[\omega, 1]$. Para cualquier otra realización del estado, ambas estructuras nos dan la misma información.

Al ser $\underline{x}(\omega)$ más fina que $\overline{x}(\omega)$, se cumple $\underline{x}(\omega) \succ \overline{x}(\omega)$ y por lo tanto, de existir una función de utilidad deberá cumplirse que $u(\underline{x}(\omega) > u(\overline{x}(\omega))$. Supongamos que dicha función existe.y tomemos ω_1, ω_2, tales que $\omega_1 > \omega_2$. Utilizando el mismo argumento del párrafo anterior se cumpliría que:

$$\underline{x}(\omega_1) \succ \overline{x}(\omega_1) \succ \underline{x}(\omega_2) \succ \overline{x}(\omega_2)$$

y por lo tanto deberíamos tener $u(\underline{x}(\omega_1)) > u(\overline{x}(\omega_1)) > u(\underline{x}(\omega_2)) > u(\overline{x}(\omega_2))$. Dado que siempre podemos introducir un número racional entre dos números reales, es posible definir a la función $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ como aquella función que asigna a cada elemento de Ω un racional tal que $u(\underline{x}(\omega)) > r(\omega) > u(\overline{x}(\omega))$. Luego se debe cumplir que

$$u(\underline{x}(\omega_1)) > r(\omega_1) > u(\overline{x}(\omega_1)) > u(\underline{x}(\omega_2)) > r(\omega_2) > u(\overline{x}(\omega_2))$$

$$\Longleftrightarrow r(\omega_1) > r(\omega_2)$$

Como la desigualdad es estricta, lo obtenido implica que $r(\cdot)$ debe ser una función inyectiva de Ω a $\mathbb{Q}$. Esto constituye una imposibilidad matemática pues $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable mientras que Ω no lo es. Por lo tanto, no es posible encontrar una función de utilidad que represente las preferencias sobre las estructuras de información.

Ejercicio 15: La utilidad de una canasta x en la construcción del Teorema de Wold era el número $u(x)$ tal que $x \sim u(x)(1,1,...,1)$: la utilidad es el número tal que multiplicado por el vector $(1,1,...,1)$ da indiferente a x. Como $\succeq$ es homotética, tenemos que $ax \sim au(x)(1,1,...,1)$ y por tanto, $u(ax) = au(x)$.

Ejercicio 55. Satisface el ADPR, porque como $\succeq$ se representa por u, es completa y transitiva, y el teorema nos dice que entonces C satisface el Axioma.

Ejercicio 16. En el Ejercicio 1 probamos que si una relación se puede representar por una función de utilidad, entonces es completa y transitiva. Por lo tanto, si dicha relación no es transitiva o no es completa, no podemos representarla mediante una función de utilidad. En el presente ejemplo bastará con demostrar que la relación no satisface la condición de transitividad. Tomemos

$$x = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

Luego, se cumple $x \succ y \succ z$, y $z \succ x$, lo cual viola transitividad.

Ejercicio 17. El Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que toda función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado alcanza al menos un máximo. En este caso, supongamos que la función de utilidad definida sobre X cerrado y acotado alcanza el máximo en x^*. Por lo tanto $u(x^*) \geq u(x)$ para todo $x \in X$. Como $u(\cdot)$ representa a las preferencias, ello implica $x^* \succeq x$ para todo $x \in X$. Esto quiere decir que para x^* no existe $x \in X$ tal que $x \succ x^*$ con lo cual no se cumple no saciabilidad local.

17.B. Debemos tener que si $y_n \to y$ y $y_n \succeq x$ para todo n, entonces $y \succeq x$. Pero $y_n \succeq x \Leftrightarrow u(y_n) \geq u(x)$, y como u es continua, eso asegura $u(y) \geq u(x)$.

Ejercicio 18.A (por Manuel Macera). Asumiendo que nos importa más la cantidad del bien 1 que la del bien 2, la demanda por el bien 2 es cero y la demanda por el bien 1 es $x_1 = \frac{w}{p_1}$.

18.B: La demanda por el bien 2 es cero y la demanda por el bien 1 es $x_1 = \frac{w}{p_1}$.

18.C: No hay ninguna contradicción. Quizás uno se siente tentado a concluir que el ejemplo ilustra un caso en el cual las preferencias lexicográficas pueden ser representadas por una función de utilidad pero eso es un error pues no hay relación entre ambos casos.

Ejercicio 19.A. No representa: como $sen2 > sen0$, tenemos $2 \succ 0$, pero

$$s(2) = sen4 = sen2^2 < sen0^2 = sen0 = s(0).$$

19.B. No. Ponemos $a = 1$ y $b = \pi/2$. Vemos que $\pi/2 \succ 0$, pero que

$$t(0) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 = sen(\pi) = t\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

19.C. No. Tenemos que $0 \succ 3\pi/2$, pero $v(0) = [sen0]^2 < [sen3\pi/2]^2 = v(3\pi/2)$.

19.D. Si, pues $x \succeq y \Leftrightarrow senx \geq seny \Leftrightarrow asenx \geq aseny \Leftrightarrow asenx + b \geq aseny + b$.

19.E. No, pues $\pi/2 \succ 0$ pero $f(0) = 0 = f(\pi/2)$.

19.F. No, pues $g(x)$ no existe en algunos casos.

Ejercicio 20. No está maximizando su utilidad. Como a los precios $(2,4)$ ambas canastas se pueden comprar y sólo eligió $(1,2)$, quiere decir que $u(1,2) > u(2,0)$. En forma similar, como a los precios $(6,3)$ demanda sólo $(2,0)$ cuando ambas canastas se pueden comprar, obtenemos $u(1,2) < u(2,0)$, que es una contradicción.

Otra forma un poco más rebuscada de contestar a este ejercicio es diciendo: la función de utilidad representa a unas ciertas preferencias completas y transitivas en X. Sabemos que si la relación de preferencias es completa y transitiva, entonces la estructura de elección que genera debe satisfacer el Axioma Débil de la Preferencia Revelada. Pero es fácil verificar que los datos presentados violan el Axioma Débil.

Ejercicio 21. A si, B, C, D, E no. F, A, B, C Si, D y E no.
Ejercicio 21. Si B es numerable existe una inyección $\beta : B \to \mathbf{N}$. Si $\alpha : A \to B$ es una inyección, entonces $\beta \circ \alpha : A \to \mathbf{N}$ (la compuesta) definida por $\beta \circ \alpha(a) = \beta(\alpha(a))$ para todo $a \in A$ es inyectiva, pues $a \neq a' \Rightarrow \alpha(a) \neq \alpha(a') \Rightarrow \beta(\alpha(a')) \neq \beta(\alpha(a'))$

Ejercicio A.i. Información insuficiente, pues podríamos tener $a \succ b$.

Parte A.ii. Insuficiente, podríamos tener $a \sim b$.

Parte A.iii. No representa, pues tendríamos $b \succ a$, que necesita que $a \succeq b$ no sea posible.

Parte B.i. No hay suficiente información.

Parte B.ii. Verdadero, pues si $\succeq$ se puede representar por una función de utilidad es transitiva. Como tenemos $a \succeq b$ y $b \succeq c$, deducimos $a \succeq c$.

Parte B.iii. No hay suficiente información.

Parte B.iv. Falso, pues si pudiéramos representar a $\succeq$, tendríamos $a \succeq c$, que es inconsistente con $c \succ a$.

Ejercicio 56. Solo hacemos la suficiencia de i-iii para la representación. Por la propiedad (ii), para cada y existe un número $v(y)$ tal que $(0,y) \sim (v(y), \overline{y})$. Sumando a de los dos lados obtenemos por la propiedad (iii) $(a,y) \sim (a + v(y), \overline{y})$, y en forma similar $(a',y') \sim (a' + v(y'), \overline{y})$. Por transitividad obtenemos que $(a,y) \succeq (a',y') \Leftrightarrow (a + v(y), \overline{y}) \succeq (a' + v(y'), \overline{y}) \Leftrightarrow a + v(y) \geq a' + v(y')$ (por la propiedad i).
Ejercicio 24. Sea $\{r_n\}_1^\infty$ una enumeración de los racionales en $(0,1)$. Una biyección entre $[0,1]$ y $(0,1)$ es

$$f(x) = \begin{cases} r_1 & x = 0 \\ r_2 & x = 1 \\ r_{n+2} & \text{si } x = r_n \text{ para algún } n \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 25.A. Cada X_i se puede escribir como $X_i = \{x_i^1, x_i^2, ...\}$. A cada x_i^k en $\cup X_i$ le asignamos el vector (i,k) de $\mathbf{N}^2$. Esta función de X a $\mathbf{N}^2$ está bien definida (a cada x en X le toca un elemento de $\mathbf{N}^2$ y sólo uno) porque como los conjuntos X_i no tienen elementos en común, para cada x en X existe un único i tal que $x \in X_i$ y a su vez, existe un único k para el cual $x = x_i^k$. El Ejercicio 21 nos dice entonces que X es numerable.

25.B. Para $B \subseteq X$, $B^c = \{x \in X : x \notin B\}$ es el complemento de B. Recordamos la definición de resta de conjuntos: para dos conjuntos A y B en X, $A \setminus B = A \cap B^c = \{x : x \in A, x \notin B\}$ es el conjunto de elementos de A que no están en B. Sea $\widetilde{X}_1 = X_1$, y para $i > 1$, nos definimos

$$\widetilde{X}_i = X_i \setminus \bigcup_1^{i-1} X_j,$$

es decir, $\widetilde{X}_i$ es el conjunto de elementos de X_i que no están en los X_j con $j < i$.

Vemos que por la Parte A, $\cup \widetilde{X}_i$ es numerable, y como $\cup \widetilde{X}_i = \cup X_i = X$, tenemos que X es numerable.

25.C. Primero mostramos que la aseveración es cierta para $n = 2$. Para verlo, notamos que la función que le asigna a cada $\left(x_1^i, x_2^j\right)$ el elemento (i, j) de $\mathbf{N}^2$ es una inyección.

Luego, asumimos que hemos demostrado que $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es numerable para $n \leq N$, y mostraremos que $Y_{N+1} = \prod_{i=1}^{N+1} X_i$ es numerable. Como $Y_{N+1} = Y_N \times X_{N+1}$ y tanto Y_N como X_{N+1} son numerables, la función $f : Y_{N+1} \to \mathbf{N}^2$ definida por

$$f\left(y_N^i, x_{N+1}^j\right) = (i, j)$$

es una inyección.

25.D. Si tomamos para todo i, $X_i = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ vemos que el conjunto Y es más grande que el conjunto de todos los números reales en $(0, 1)$, pues al número $0,945721...$ le hacemos corresponder el $945721..... \in Y$. Por lo tanto, Y no es numerable.

Ejercicio 26. El Teorema es un corolario del Ejercicio 25.B, pues con $X_i = \left\{\frac{m}{i} : m \in \mathbf{N}\right\}$, cada X_i es numerable, y

$$\mathbf{Q}_{++} = \bigcup_1^{\infty} X_i$$

Ejercicio 27. Asumimos primero que $x \succeq y$ para demostrar $u(x) \geq u(y)$. Tenemos entonces que $x \succeq y \succeq q_n$ implica $x \succeq q_n$ para todo n, por lo que cualquier n que esté en la sumatoria

$$u(y) = \sum_{\{n : y \succeq q_n\}} \frac{1}{2^n}$$

estará en la sumatoria de x, por lo que $u(x) \geq u(y)$.

Asumimos ahora que $u(x) \geq u(y)$ para demostrar que $x \succeq y$. Para proceder por absurdo, asumimos que $y \succ x$. Como los conjuntos

$$L_x = \{w : x \succeq w\} \quad \text{y} \quad U_y = \{z : z \succeq y\}$$

son cerrados, el conjunto

$$M = \{z : y \succ z \succ x\} = R_+^l \setminus [L_x \cup U_y]$$

es abierto y no vacío, por lo que existe algún N para el cual $q_N \in M$.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{\{n : y \succeq q_n\}} \frac{1}{2^n} = \sum_{\{n : y \succeq q_n \succ x\}} \frac{1}{2^n} + \sum_{\{n : x \succeq q_n\}} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{\{n : y \succeq q_n \succ x\}} \frac{1}{2^n} + u(x) \geq \frac{1}{2^N} + u(x) > u(x) \end{aligned}$$

y eso contradice $u(x) \geq u(y)$.

29.A. Sea (a,b) un agujero. Como debe existir un z en Z tal que $a \succeq z \succeq b$, debe suceder que $z \sim a$ ó $z \sim b$. Pero como no hay indiferencia, debe ser cierto que $a = z$ ó $b = z$. Es decir, ó a está en Z ó b está en Z. Más aún, (c,b) no puede ser otro agujero con $c \neq a$, pues: si $c \succ a$, (c,b) no sería un agujero; y si $a \succ c$, (a,b) no sería un agujero. Por lo tanto, el conjunto de agujeros se puede dividir en 2: los (a,b) tales que $b \in Z$ (que es un conjunto numerable, pues a cada agujero de este tipo le asignamos un z distinto y Z es numerable); los (a,b) tales que $a \in Z$ (también es un conjunto numerable, por los mismos argumentos). Como el conjunto de agujeros es la unión de estos dos conjuntos numerables (no me importa que se repita algún agujero que esté en los dos conjuntos) es un conjunto numerable.

29.B. Sea $C = Z \cup \{a : (a,b) \text{ es un agujero}\} \cup \{b : (a,b) \text{ es un agujero}\}$, que hemos visto que es numerable. Formalmente, la forma como definí C en el enunciado fue $C = Z \cup \{\{a,b\} : (a,b) \text{ es un agujero}\}$. Si $x \succeq y$, tenemos que $y \succeq c_n$ implica por transitividad, $x \succeq c_n$, por lo que $u(x) \geq u(y)$. Supongamos ahora que $u(x) \geq u(y)$ pero $y \succ x$. En ese caso, si (y,x) es un agujero, $y \in C$, y obtenemos $u(y) > u(x)$. Si (y,x) no es un agujero, existe w tal que $y \succ w \succ x$, y por tanto, existe $z \in Z$ tal que $y \succeq z \succeq w \succ x$, y por tanto $z \in C$, y $u(y) > u(x)$.

Ejercicio 30.A. Una utilidad que funciona es $u(x) = 2x_1 + x_2$. Como en esta parte sólo había que encontrarla, con poner eso alcanzaba. La forma de encontrar la función de utilidad es trazando la curva de indiferencia dada por $x, y \in [0,1]$,

$$(x, 2-2x) \sim (y, 2-2y).$$

Esa curva de indiferencia corresponde a la recta $2 - 2x_1$, y vemos que esa curva de indiferencia también corresponde a la función de utilidad $2x_1 + x_2$.

Más formalmente, vamos a encontrar el z tal que $(z,z) \sim (x, 2-2x) \sim (y, 2-2y)$. Poniendo $x = 2-2x$, encontramos $z = 2/3$. Tenemos entonces que para todo $x \in [0,1]$,

$$(x, 2-2x) \sim \frac{2}{3}(1,1). \tag{8}$$

Encontraremos ahora, para cada $(a,b) \in \mathbf{R}^2_+$ el número $v(a,b)$ tal que $(a,b) \sim u(a,b)(1,1)$. Para cualquier punto $(a,b) \in \mathbf{R}^2_+$, tenemos que

$$k^{(a,b)} \equiv \frac{2}{2a+b} \Rightarrow k^{(a,b)}(a,b) = \frac{2}{2a+b}(a,b) = \left(\frac{2a}{2a+b}, \frac{2b}{2a+b}\right) = \left(\frac{2a}{2a+b}, 2 - 2\frac{2a}{2a+b}\right)$$

por lo que $k^{(a,b)}(a,b)$ tiene la forma $(x, 2-2x)$ para $x = \frac{2a}{2a+b} \in [0,1]$. Por la ecuación (8) obtenemos entonces que

$$k^{(a,b)}(a,b) \sim \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Entonces, como las preferencias son homotéticas,

$$\begin{aligned} k^{(a,b)}(a,b) &= \left(\frac{2a}{2a+b}, 2 - 2\frac{2a}{2a+b}\right) \sim \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{k^{(a,b)}} k^{(a,b)}(a,b) \sim \frac{1}{k^{(a,b)}}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow (a,b) \sim \frac{2a+b}{2}\frac{2}{3}(1,1) = \frac{2a+b}{3}(1,1) \equiv \frac{1}{I^{(a,b)}}(1,1) \\ &\Leftrightarrow I^{(a,b)}(a,b) = \frac{3}{2a+b}(a,b) \sim (1,1) \end{aligned} \tag{9}$$

Vemos entonces que $v\,(a,b)=\frac{2a+b}{3}$ o, en forma equivalente (multiplicando la utilidad por 3, $u=3v$)

$$u\,(x)=2x_1+x_2.$$

30.B. Hasta ahora no hemos utilizado la monotonía, pero la usaremos para demostrar que $x\succeq y$ si y sólo si $u\,(x)\geq u\,(y)$. Asumamos $x\succeq y$ pero $2x_1+x_2<2y_1+y_2$. Por la ecuación (9) tenemos que $I^x x\sim(1,1)\sim I^y y$ que implica (por homotéticas)

$$\frac{I^x}{I^y}x\sim y.$$

Luego, como $2x_1+x_2<2y_1+y_2$, tenemos $I^x>I^y$ y por lo tanto $I^x/I^y>1$ y eso implica, por monotonía, que

$$y\sim\frac{I^x}{I^y}x\succ x$$

lo que constituye una contradicción.

Para mostrar que $2x_1+x_2\geq 2y_1+y_2$ implica $x\succeq y$ se siguen los pasos inversos que en el párrafo anterior.

Ejercicio 57.A. Aunque parezca imposible, las preferencias pueden ser monótonas. Tomemos por ejemplo $n=1$, y definamos las siguientes preferencias parecidas a las lexicográficas (pero al revés, menos de la segunda componente es mejor; sería como alguien que sólo le gusta ganar oros, y piensa que perder finales y tener platas es un signo de debilidad)

$$(a,\alpha)\succeq(b,\beta)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} a>b \text{ ó} \\ a=b \text{ y } \beta\geq\alpha \end{array}\right. .$$

Si $(a,\alpha)\gg(b,\beta)$, como $a>b$, tenemos $(a,\alpha)\succ(b,\beta)$ por lo que se cumple monotonía. También se cumplen (i) y (iii) (la condición (ii) no se aplica).

Aún así, no se puede aplicar Wold. Si se pudiera, las preferencias también tendrían que ser continuas. Y en ese caso, por la condición (iii) las preferencias no son monótonas (si aumenta la segunda componente, el individuo está peor), por lo que no estamos en las hipótesis del Teorema. Concretamente, si tomo $\alpha\gg\beta$, tengo $\left(a+\frac{1}{n},\alpha\right)\gg(a,\beta)$ para todo n, y por monotonía tendría $\left(a+\frac{1}{n},\alpha\right)\succ(a,\beta)$ para todo n. Continuidad me aseguraría que $(a,\alpha)\succeq(a,\beta)$, pero la condición (iii) me dice que en realidad $(a,\beta)\succ(a,\alpha)$, por lo que las preferencias no son monótonas.

Otra forma de hacerlo es pensar lo siguiente. Si se puede aplicar Wold, cualquier preferencia que cumple (i)-(iii), cumple también monotonía. Pero la relación de preferencias en $\mathbf{R}^2_{++}$ definida por $(a,\alpha)\succeq(b,\beta)\Leftrightarrow a-\alpha\geq b-\beta$ no cumple monotonía, ya que $(2,4)\gg(1,1)$, pero $2-4<0=1-1$, por lo que $(1,1)\succ(2,4)$, violando monotonía.

57.B. Tomemos unas preferencias en $X=\mathbf{R}^2_{++}$ que se representan con $u\,(a,\alpha)=a-4\alpha$. Estas preferencias cumplen con las hipótesis, pero no son de la forma $a-\alpha$, como pide la letra. Más aún, $(6,1)\succeq(9,3)$, pero $6-1<9-3$, por lo que $a-\alpha$ no representa a las preferencias.

57.C. ($\Leftarrow$) Para probar continuidad, tomamos una sucesión $\{(a_k,\alpha_k)\}$ tal que $(a_k,\alpha_k)\succeq(a',\alpha')\ \forall\ k$, $(a_k,\alpha_k)\to(a,\alpha)$. Esto implica $a_k-\sum_{i=1}^n\alpha_{ki}\geq a'-\sum_{i=1}^n\alpha'_i$. Primero notamos (hay que demostrarlo) que si $(a_k,\alpha_k)\to(a,\alpha)$, entonces $a_k-\sum_{i=1}^n\alpha_{ki}\to a-\sum_{i=1}^n\alpha_i$. Si tuviéramos $a-\sum_{i=1}^n\alpha_i<a'-\sum_{i=1}^n\alpha'_i$, para $\varepsilon=\left(a'-\sum_{i=1}^n\alpha'_i-a+\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)/2$, existe N tal que para todo $n\geq N$

$$\begin{aligned}\left|a_k-\sum_{i=1}^n\alpha_{ki}-a+\sum_{i=1}^n\alpha_i\right| &< \varepsilon\Rightarrow a_k-\sum_{i=1}^n\alpha_{ki}<a-\sum_{i=1}^n\alpha_i+\varepsilon=a-\sum_{i=1}^n\alpha_i+\frac{a'-\sum_{i=1}^n\alpha'_i-a+\sum_{i=1}^n\alpha_i}{2}\\ &= \frac{a'-\sum_{i=1}^n\alpha'_i+a-\sum_{i=1}^n\alpha_i}{2}<a'-\textstyle\sum_{i=1}^n\alpha'_i\end{aligned}$$

que es una contradicción. Por lo tanto, $a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq a' - \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i$, o lo que es lo mismo, $(a, \alpha) \succeq (a', \alpha')$, como queríamos demostrar.

Para probar aditividad, sean (a, α), (b, β) tales que $(a, \alpha) \succeq (b, \beta)$, y sea (c, δ) como en la definición. $(a, \alpha) \succeq (b, \beta)$ implica $a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq b - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Sumando c y restando $\delta_i, i = 1, ..., n$ a ambos lados, obtenemos $(a + c) - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \delta_i) \geq (b + c) - \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \delta_i)$, que implica $(a + c, \alpha + \delta) \succeq (b + c, \beta + \delta)$, como queríamos demostrar.

($\Rightarrow$) **Paso 1.** Encontrar el C de la función de utilidad. Definimos $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbf{R}^n$. Fijamos un $v > 1$ cualquiera y encontramos $g > 1$ tal que $(1, \mathbf{1}) \succeq (g, v\mathbf{1})$. Tal g existe pues si tuviéramos $(g, v\mathbf{1}) \succ (1, \mathbf{1})$ para todo $g > 1$, en el límite obtendríamos $(1, v\mathbf{1}) \succeq (1, \mathbf{1})$, que es una contradicción, pues $v > 1$.

Por otro lado, existe $\gamma \leq v$ tal que $(g, \gamma\mathbf{1}) \sim (1, \mathbf{1})$. Eso es así pues con $z = 1$, $(g, z\mathbf{1}) \succ (1, \mathbf{1}) \succeq (g, v\mathbf{1})$ y por continuidad (si se quiere, haciendo algo parecido a la demostración de Wold, con $A^+ = \{z : (g, z\mathbf{1}) \succeq (1, \mathbf{1})\}$ y $A^- = \{w : (1, \mathbf{1}) \succeq (g, w\mathbf{1})\}$) obtenemos que para algún γ, $(g, \gamma\mathbf{1}) \sim (1, \mathbf{1})$. Definimos ahora C para que las utilidades candidatas de esas dos canastas sean iguales para $U(a, \alpha)$ definida como en (7), con el siguiente C :

$$U(1, \mathbf{1}) = 1 - Cn = g - Cn\gamma = U(g, \gamma\mathbf{1}) \Leftrightarrow C = \frac{1}{n} \frac{g - 1}{\gamma - 1}.$$

Paso 2. Para $a, b, c, d \in X$, y $c \sim d$, demostramos ahora que $a \sim b \Leftrightarrow a + c \sim b + d$. Tenemos $c \sim d \Leftrightarrow c + b \sim d + b$, y como $a \sim b \Leftrightarrow a + c \sim b + c \sim b + d$ por transitividad obtenemos lo que queríamos demostrar.
Paso 3. Para cualquier $t > 0$, $a \sim b \Leftrightarrow ta \sim tb$. Comenzamos con $m \in \mathbf{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow ma \sim mb$ (pues $a \sim b$ implica por el paso 2, con $c = a$ y $d = b$, $2a \sim 2b$, etc). También tenemos para $p \in \mathbf{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow \frac{1}{p}a \sim \frac{1}{p}b$, pues por el paso 2, $\frac{1}{p}a \sim \frac{1}{p}b \Leftrightarrow \frac{2}{p}a \sim \frac{2}{p}b \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{p}{p}a \sim \frac{p}{p}b$, y sabemos que esto último se cumple. Por lo tanto, para cualquier racional $\frac{m}{p}$, $a \sim b \Leftrightarrow \frac{1}{p}a \sim \frac{1}{p}b \Leftrightarrow \frac{m}{p}a \sim \frac{m}{p}b$. Luego, por continuidad, para cualquier $t > 0$, si es racional, ya está demostrado; si no lo es, tomamos una secuencia de t_k racionales con $t_k \to t$, y tendremos que $a \sim b \Leftrightarrow t_k a \sim t_k b$ y en el límite, por continuidad, $ta \sim tb$.[1]
Paso 4. Queremos demostrar ahora que para cualquier α y $\overline{\alpha} = \sum_1^n \frac{\alpha_i}{n}$, y cualquier a, $(a, \alpha) \sim (a, \overline{\alpha}(1, ..., 1))$. Para ello demostraremos que el individuo es indiferente cada vez que transformamos α pasándole una cantidad x de una componente a otra. Para cualquier a y $c < a$ y dos vectores canónicos cualesquiera e_i y e_j, y cualquier x, $(a - c, xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) \sim (a - c, xe_j + \varepsilon\mathbf{1})$ por ser $xe_i + \varepsilon\mathbf{1}$ y $xe_j + \varepsilon\mathbf{1}$ dos permutaciones entre sí. Por lo tanto, para cualquier α y ε con $0 < \varepsilon < \min_i \alpha_i$

$$\begin{aligned} (a - c, xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) &\sim (a - c, xe_j + \varepsilon\mathbf{1}) \Leftrightarrow (a - c, xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) + (c, \alpha - \varepsilon\mathbf{1}) \sim (a - c, xe_j + \varepsilon\mathbf{1}) + (c, \alpha - \varepsilon\mathbf{1}) \\ &\Leftrightarrow (a, \alpha + xe_i) \sim (a, \alpha + xe_j). \end{aligned} \tag{10}$$

Es decir que para cualquier α, me da lo mismo sumarle x en cualquier componente. Eso demostrará ahora que cualquier (p, π) es indiferente también a sacarle un poco a i y dárselo a j : para cualquier $x < \pi_i$, y $c < p$

$$\begin{aligned} (p, \pi) &\sim (p, \pi + x(e_j - e_i)) \Leftrightarrow \\ (p + c, \pi + xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) &= (p, \pi) + (c, xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) \sim (p, \pi + x(e_j - e_i)) + (c, xe_i + \varepsilon\mathbf{1}) = (p + c, \pi + xe_j + \varepsilon\mathbf{1}) \end{aligned}$$

que sabemos que se cumple por (10) (con $p + c$ en vez de a, y $\pi + \varepsilon\mathbf{1}$ en vez de α).

Por lo tanto, si α tiene al menos dos componentes distintas, podemos restarle al α_i máximo la cantidad $\alpha_i - \overline{\alpha}$ y pasársela al α_j mínimo y obtener un (a, α^1) indiferente al (a, α) original, pero con $\alpha_i^1 = \overline{\alpha}$. Repetimos

[1] En este contexto, la continuidad habitual de $[a_n \succeq b \& a_n \to a] \Rightarrow a \succeq b$ implica la noción que usé aquí $[a_n \succeq b_n \& (a_n, b_n) \to (a, b)] \Rightarrow a \succeq b$. Ver Dubra, Maccheroni y Ok (2004) en el Journal of Economic Theory. Otra forma de ver que es cierto es usar la continuidad habitual, y decir que hay una función de utilidad continua (como en las notas, antes), y eso asegura esta otra forma de continuidad.

este procedimiento con α^j para obtener α^{j+1} con $j+1$ elementos iguales a $\overline{\alpha}$. El procedimiento termina en $k \leq n-1$ pasos y habremos obtenido $\alpha^k = \overline{\alpha}(1,...,1)$ y $(a,\alpha) \sim (a, \overline{\alpha}(1,...,1))$.

Paso 5. $(a,\alpha) \succeq (b,\beta) \Leftrightarrow (1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta) \succeq (1,\mathbf{1})$ para algún t pequeño (que haga que $(1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta) \in X$). Por aditividad, aplicada primero sumando $t(b,\beta)$ y luego con $(1,\mathbf{1})$,

$$(1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta) \succeq (1,\mathbf{1}) \Leftrightarrow (1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta) + t(b,\beta) \succeq (1,\mathbf{1}) + t(b,\beta) \Leftrightarrow (a,\alpha) \succeq (b,\beta)$$

como queríamos demostrar (por el Paso 3).

Paso 6. Tenemos $(a,\alpha) \sim (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1})$. Sabemos que $(a,\alpha) \sim (a, \overline{\alpha}\mathbf{1})$, por lo que alcanzará mostrar que $(a,\overline{\alpha}\mathbf{1}) \sim (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1})$. Notamos primero que para $l > 0$ y $\lambda > \gamma - 1$, se cumple que (sumando $(l,\lambda) - (0,(\gamma-1)\mathbf{1})$ en ambos lados entre el primer y segundo renglón)

$$\begin{aligned}
(g,\gamma\mathbf{1}) &= (1,\mathbf{1}) + (g-1,0) + (0,(\gamma-1)\mathbf{1}) \sim (1,\mathbf{1}) \Leftrightarrow \\
(1,\mathbf{1}) + (g-1,0) + (l,\lambda) &\sim (1,\mathbf{1}) + (l,\lambda) - (0,(\gamma-1)\mathbf{1}) \Leftrightarrow \\
(l,\lambda) + (g-1,0) &\sim (l,\lambda) - (0,(\gamma-1)\mathbf{1})
\end{aligned}$$

Usando entonces el Paso 3, para cualquier k tenemos

$$\begin{aligned}
(a,\overline{\alpha}\mathbf{1}) &\sim (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1}) \Leftrightarrow \\
(a,\overline{\alpha}\mathbf{1}) + k(l,\lambda) + k(g-1,0) &\sim (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1}) + k(l,\lambda) - k(0,(\gamma-1)\mathbf{1}) \Leftrightarrow \\
(a,\overline{\alpha}\mathbf{1}) + k(g-1,0) &\sim (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1}) - k(0,(\gamma-1)\mathbf{1})
\end{aligned}$$

(siempre que el lado derecho en este último renglón esté en X, y eso depende de k; para k pequeño, lo estará). Veremos ahora que para $k = \frac{1-\overline{\alpha}}{g-1}Cn$ y $C = \frac{1}{n}\frac{g-1}{\gamma-1}$ (por lo que $k = \frac{1-\overline{\alpha}}{\gamma-1}$), esa indiferencia se cumple, pues ambas expresiones son iguales:

$$\begin{aligned}
(a,\overline{\alpha}\mathbf{1}) + k(g-1,0) &= (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \overline{\alpha}\mathbf{1}) = \left(a + (1-\overline{\alpha})Cn, \left(1 - \frac{1-\overline{\alpha}}{g-1}(\gamma-1)\frac{g-1}{\gamma-1}\right)\mathbf{1}\right) \\
&= \left(a + (1-\overline{\alpha})Cn, \left(1 - \frac{1-\overline{\alpha}}{g-1}(\gamma-1)Cn\right)\mathbf{1}\right) = (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1}) - k(0,(\gamma-1)\mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Paso 7. La utilidad funciona comparando (a,α) con $(1,\mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}
(a,\alpha) &\succeq (1,\mathbf{1}) \overset{6}{\Leftrightarrow} (a + (1-\overline{\alpha})Cn, \mathbf{1}) \succeq (1,\mathbf{1}) \overset{i}{\Leftrightarrow} a + (1-\overline{\alpha})Cn \geq 1 \Leftrightarrow \\
a - \overline{\alpha}Cn &\geq 1 - Cn \Leftrightarrow U(a,\alpha) \geq U(1,\mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Paso 8. Como U es lineal, para t pequeño,

$$\begin{aligned}
(a,\alpha) &\succeq (b,\beta) \Leftrightarrow (1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta) \succeq (1,\mathbf{1}) \overset{7}{\Leftrightarrow} \\
U((1,\mathbf{1}) + t(a,\alpha) - t(b,\beta)) &\geq U(1,\mathbf{1}) \Leftrightarrow U(a,\alpha) \geq U(b,\beta).
\end{aligned}$$

Utilidad Esperada

En estas notas nos interesaremos en la representación de preferencias cuando el conjunto de las posibles elecciones es el conjunto de todas las loterías (o distribuciones de probabilidad) sobre un cierto espacio finito X. La mayoría de las situaciones de interés en economía son de elecciones en condiciones de incertidumbre. Por eso es muy importante tener una teoría de la decisión que sea útil para estas situaciones. Eso es lo que trataremos de desarrollar en estas notas.

Sea X un conjunto finito, $x_1, ..., x_n$ interpretado como el conjunto de las posibles canastas de consumo. Sea P el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre X, interpretado como el conjunto de todas las loterías cuyos premios son canastas posibles de consumo. Formalmente,

$$P = \left\{ p \in \mathbf{R}^n : p_i \in [0,1] \text{ para todo } i, \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

Vemos que si $p, r \in P$, entonces para cualquier $\lambda \in (0,1)$, el punto $\lambda p + (1-\lambda)r$ de $\mathbf{R}^n$ también pertenece a P, pues

$$\lambda p + (1-\lambda)r = (\lambda p_1 + (1-\lambda)r_1, ..., \lambda p_n + (1-\lambda)r_n)$$

es tal que cada una de sus componentes es positiva, y además suman 1. Por lo tanto, si tomamos dos distribuciones de probabilidad p y q, y las "mezclamos" como hicimos recién, obtenemos otra distribución de probabilidad.

Decimos que una relación de preferencias satisface

Independencia si para todo $p, q, r \in P$ y todo $\lambda \in (0,1)$

$$p \succsim q \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda p + (1-\lambda)r \succsim \lambda q + (1-\lambda)r.$$

Continuidad si para todos los $p, q, t \in P$ tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, los conjuntos $\{\alpha : \alpha p + (1-\alpha)\, q \succeq t\}$ y $\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1-\alpha)\, q\}$ son cerrados.

Sobre Independencia se han dicho millones de cosas. A continuación presentamos algunas.

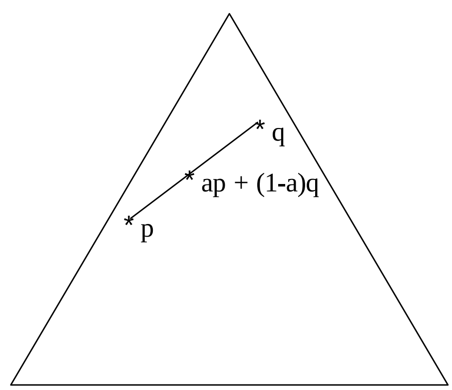
Defensa A. Argumentaremos ahora que es un axioma intuitivo. Para ver porqué, pensemos en lo siguiente. Supongamos que una persona, Inés por ejemplo, prefiere p a q, es decir $p \succeq q$. Ahora, a Inés se le pregunta cual de las siguientes dos loterías prefiere, si $\lambda p + (1-\lambda)r$ o $\lambda q + (1-\lambda)r$. La lotería $\lambda p + (1-\lambda)r$ se puede interpretar como una lotería en dos etapas. En la primera etapa, se tira una "moneda" que tiene probabilidad λ de caer en cara, y $1-\lambda$ de caer en número. Si cae en cara, Inés recibirá la lotería p, y si sale número recibirá r. Ahora, comparando $\lambda p + (1-\lambda)r$ con $\lambda q + (1-\lambda)r$, Inés piensa:

> "Cuando tiren la moneda, si sale número, me da exactamente lo mismo $\lambda p+(1-\lambda)r$ o $\lambda q+(1-\lambda)r$, porque en ambos casos recibiré r. Si sale cara, en un caso recibiré p y en el otro q, por lo que mi decisión entre $\lambda p + (1-\lambda)r$ y $\lambda q + (1-\lambda)r$ debería reducirse sólo a la comparación entre p y q. Como dije que prefería p a q, debo también preferir $\lambda p + (1-\lambda)r$ a $\lambda q + (1-\lambda)r$." ■

Defensa B. También se ha argumentado que el axioma se debe cumplir pues se puede diseñar un "truco" para que aquellos cuyas preferencias no satisfacen el axioma entreguen voluntariamente todo su dinero. Supongamos por ejemplo que hay tres loterías p, q y r tales que $p \succ q$ y $p \succ r$. En el Ejercicio 58 se le pide que demuestre que el axioma de Independencia implica que para todo $\lambda \in (0,1)$, $p \succ \lambda q + (1-\lambda) r$. Supongamos que un individuo tiene preferencias que violan el axioma de Independencia, de tal forma que $\lambda q + (1-\lambda) r \succ p$, y que la persona posee la lotería p. Como $\lambda q + (1-\lambda) r$ es preferido a p, el individuo estará dispuesto a pagar una pequeña suma de dinero por obtener $\lambda q + (1-\lambda) r$ y entregar p. Una vez que haya pagado ese dinero, se ejecuta la primera parte de la lotería (la que da q con probabilidad λ, y r con probabilidad $1-\lambda$). Ahora el individuo está en posesión de r o de q, y como $p \succ q$ y $p \succ r$, estará dispuesto a pagar una pequeña suma de dinero por cambiar q o r por p. Una vez que haya hecho el cambio, estará igual que al principio, poseyendo p, pero dos pequeñas sumas de dinero más pobre.■

Ejercicio 58 Demuestre que si $p \succ q$ y $p \succ r$ y $\lambda \in [0,1]$ y las preferencias son transitivas y cumplen el axioma de Independencia, entonces $p \succ \lambda q + (1-\lambda) r$.

Presentado así, con esas dos defensas, el axioma suena sumamente razonable. Uno empieza a sospechar que quizás no sea tan inocuo cuando se da cuenta que de todas las formas posibles que podrían tener las curvas de indiferencia sobre P, cuando hay sólo 3 premios posibles, el axioma de Independencia implica que son rectas paralelas. Veamos ahora porqué. Primero, P se puede representar por un triángulo equilátero: si dibujan P en $\mathbf{R}^3$, P es un triángulo equilátero, y no hace falta dibujar todo el resto de $\mathbf{R}^3$ para dibujar sólo un triángulo. Tomemos ahora dos loterías p y q en P tales que $p \sim q$, y tomemos otro punto cualquiera s entre medio de ellas. Eligiendo $a \in (0,1)$ apropiadamente, podemos hacer que $s = ap + (1-a)q$



Vamos a mostrar ahora que $p \sim s \sim q$, por lo que todas las curvas de indiferencia son rectas. Como $p \succeq q$, tomando $r = q$ en el axioma de Independencia obtenemos

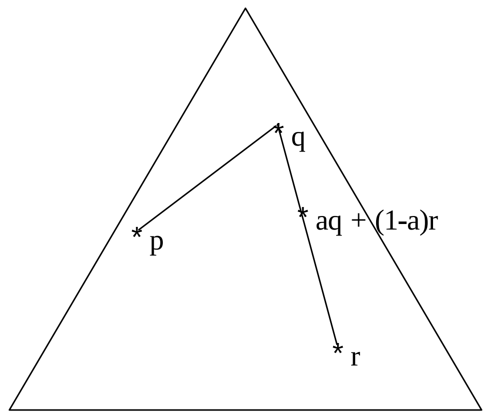
$$\begin{aligned} p &\succeq q \Rightarrow ap + (1-a) r \succeq aq + (1-a) r \Leftrightarrow \\ ap + (1-a) q &\succeq aq + (1-a) q \Leftrightarrow s \succeq q \end{aligned}$$

De forma similar, como $q \succeq p$ y tomando $r = q$ en el axioma de Independencia, obtenemos

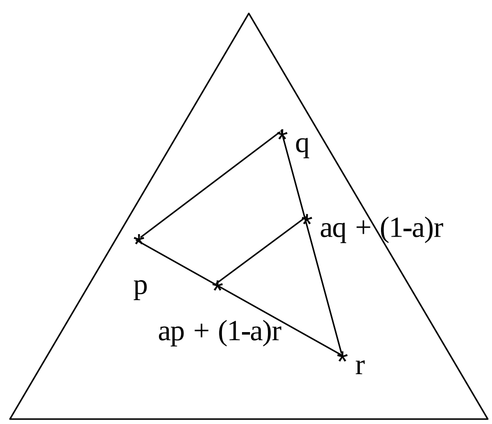
$$\begin{aligned} q &\succeq p \Rightarrow aq + (1-a) r \succeq ap + (1-a) r \Leftrightarrow \\ aq + (1-a) q &\succeq ap + (1-a) q \Leftrightarrow q \succeq s \end{aligned}$$

lo que termina de demostrar que $q \sim s$. Si hacemos lo mismo con p en vez de q, obtenemos también que $p \sim s$, como queríamos demostrar.

Falta mostrar ahora que además de ser rectas, las curvas de indiferencia son también paralelas. Para eso, tomamos cualquier s que no esté entre p y q, y encontramos un r tal que $s = aq + (1-a)\,r$, como en el dibujo.



Las curvas de indiferencia son paralelas si y sólo si $aq + (1-a)\,r \sim ap + (1-a)\,r$, pues el triángulo p, q, r es semejante al triángulo por $aq + (1-a)\,r, ap + (1-a)\,r$ y r :



En efecto, aplicando el axioma de Independencia directamente, vemos que

$$p \sim q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \succeq q \Rightarrow ap + (1-a)\,r \succeq aq + (1-a)\,r \\ q \succeq r \Rightarrow aq + (1-a)\,r \succeq ap + (1-a)\,r \end{array} \right\} \Rightarrow ap + (1-a)\,r \sim aq + (1-a)\,r$$

como queríamos demostrar.

Además de esta restricción tan seria sobre la forma de las curvas de indiferencia, se han propuesto muchísimas críticas tanto al axioma de Independencia directamente, como a sus consecuencias. Presentamos ahora la crítica más conocida al axioma: la paradoja de Allais.

Crítica A: La Paradoja de Allais (Econometrica 21, año 1953). En este experimento hay tres premios posibles: $x_{10} = 10.000.000$, $x_1 = 1.000.000$ y $x_0 = 0$, que vamos a interpretar como 10, 1 y 0 millones de dólares respectivamente. A Inés se le ofrecen primero dos loterías, $p = (p_{10}, p_1, p_0) = (0, 1, 0)$ y $q = \left(\frac{10}{100}, \frac{89}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Típicamente, la gente elige p, quizás porque da un millón de dólares seguro, y no tiene chance de salir 0, que sería horrible. En el segundo experimento de elección, se le ofrecen a Inés otras dos loterías, $r = \left(0, \frac{11}{100}, \frac{89}{100}\right)$ y $s = \left(\frac{10}{100}, 0, \frac{90}{100}\right)$. Típicamente, aca la gente elige s, quizás porque $\frac{11}{100}$ y $\frac{10}{100}$ son muy parecidos, pero 10 millones es mucho más que un millón. El problema es que la gente que elige de esa forma tiene preferencias que no satisfacen el axioma de Independencia. Se puede ver directamente usando el axioma, pero es más fácil usar una de sus consecuencias para ver que en efecto se viola. En el Teorema 7 veremos que si se satisface el axioma de Independencia, existe una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ tal que $p \succeq q$ si y sólo si $\sum_x u(x) p(x) \geq \sum_x u(x) q(x)$. Por lo tanto, la gente que elige p sobre q nos está diciendo que

$$u(1) > \frac{10}{100} u(10) + \frac{89}{100} u(1) + \frac{1}{100} u(0) \Leftrightarrow 11u(1) > 10u(10) + u(0).$$

Por otro lado, esa misma gente, al elegir s sobre r nos está diciendo que

$$\frac{10}{100} u(10) + \frac{90}{100} u(0) > \frac{11}{100} u(1) + \frac{89}{100} u(0) \Leftrightarrow 10u(10) + u(0) > 11u(1)$$

lo que contradice la ecuación anterior.■

Ejercicio 59 Dibuje las loterías p, q, r y s, y muestre que las curvas de Indiferencia de alguien que elige p sobre q y s sobre r no son paralelas. Muestre también que se viola el axioma de Independencia.

Crítica B: La Paradoja de Machina (Journal of Economic Perspectives 1, año 1987). Sea

$$X = \{\text{un viaje a Venecia, mirar una buena película sobre Venecia, quedarse en casa}\}$$

y sean v, p y q las loterías que dan el *v*iaje, la *p*elícula y *q*edarse con probabilidad 1 respectivamente. Supongamos también que la persona que va a elegir prefiere ir a Venecia, antes que mirar la película, y prefiere la película antes que quedarse en casa. Es decir $v \succ p \succ q$. A la persona en cuestión se le ofrecen dos loterías. En la primera la probabilidad del viaje a Venecia es 99,9% y la probabilidad de la película es 0,1%. Es decir, $l_1 = (l_v, l_p, l_q) = \left(\frac{999}{1000}, \frac{1}{1000}, 0\right)$. En la segunda, la probabilidad del viaje sigue siendo 99,9%, pero con probabilidad 0,1% sale quedarse en casa: $l_2 = \left(\frac{999}{100}, 0, \frac{1}{1000}\right)$. Como $p \succ q$, el axioma de independencia nos dice que

$$l_1 = \frac{1}{1000} p + \frac{999}{1000} v \succ \frac{1}{1000} q + \frac{999}{1000} v = l_2.$$

Sin embargo, sería sumamente razonable que la gente prefiriera l_2 a l_1 : si uno elige l_1, pero le toca la película, uno estará muy enojado, y preferirá quedarse en casa antes que ver una película sobre el lugar al que no pudo ir.■

Crítica C: La Paradoja de Ellsberg (Quarterly Journal of Economics 75, año 1961). Hay una urna con 200 pelotas: hay 50 Rojas y 50 Azules, y hay 100 que son algunas Verdes y otras Blancas, pero no se sabe en qué proporción. Al tomador de decisiones se le plantean dos problemas de decisión. En el primero, se sacará una bola, y debe elegir entre las loterías

p : \$1.000 si la bola es R o A y \$0 en los demás casos q : \$1.000 si la bola es R o V y \$0 en los demás casos

En el segundo problema de decisión, se saca una nueva bola, después de haber repuesto la anterior, y el individuo debe elegir entre las loterías

r : \$1.000 si la bola es V o B y \$0 en los demás casos s : \$1.000 si la bola es A o B y \$0 en los demás casos

Antes de seguir, piense qué elegiría. Típicamente la gente elige p y r. Esas elecciones son inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada y con el axioma de independencia. Para ver porqué, notamos que si se cumplieran todos los axiomas de la utilidad esperada, el individuo tendría una función de utilidad, y al elegir p sobre q, nos dice que

$$\begin{aligned}(p_R+p_A)\,u(1000)+(p_V+p_B)\,u(0) &> (p_R+p_V)\,u(1000)+(p_A+p_B)\,u(0)\Leftrightarrow\\ p_Au(1000)+p_Vu(0) &> p_Vu(1000)+p_Au(0)\Leftrightarrow p_A>p_V\end{aligned}$$

A su vez, al elegir r sobre s, nos dice que

$$\begin{aligned}(p_V+p_B)\,u(1000)+(p_R+p_A)\,u(0) &> (p_A+p_B)\,u(1000)+(p_R+p_V)\,u(0)\Leftrightarrow\\ p_Vu(1000)+p_Au(0) &> p_Au(1000)+p_Vu(0)\Leftrightarrow p_V>p_A\end{aligned}$$

lo cual contradice $p_A > p_V$. ■

Sin perjuicio de las críticas, el axioma de Independencia es muy útil, pues nos da el Teorema de la Utilidad Esperada:

Teorema 60 *La relación de preferencias $\succeq$ es completa, transitiva, continua y satisface independencia si y sólo si existe una función $u : X \to \mathbf{R}$ tal que*

$$p\succeq q \text{ si y sólo si } \sum_x u(x)\,p(x)\geq\sum_x u(x)\,q(x)\,. \tag{11}$$

Además, v también satisface (1) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$.

Prueba. Si para todo p, q en P, tenemos $p \sim q$, el teorema es trivial, por lo tanto asumimos que existen r y s tales que $r \succ s$. La prueba será una serie de muchos pasos.

Paso 1. Si $p \succ q$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $p \succ \alpha p + (1-\alpha)\,q \succ q$.

Por el "sólo si" de independencia tenemos que $p = \alpha p + (1-\alpha)\,p \succeq \alpha p + (1-\alpha)\,q$. También, si fuera el caso que $\alpha p + (1-\alpha)\,q \succeq \alpha p + (1-\alpha)\,p = p$, obtendríamos por el "si" de independencia que $q \succeq p$, lo cual no es cierto. Deducimos que $p \succ \alpha p + (1-\alpha)\,q$. El razonamiento para $\alpha p + (1-\alpha)\,q \succ q$ es similar y se omite.

Paso 2. Sean $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $p \succ q$. Entonces $\beta p + (1-\beta)\,q \succ \alpha p + (1-\alpha)\,q$ si y sólo si $\beta > \alpha$.

Supongamos $\beta p + (1-\beta)\,q \succ \alpha p + (1-\alpha)\,q$ para mostrar que $\beta > \alpha$. Si fuera el caso contrario y $\alpha \geq \beta$, tendríamos por independencia que

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta}\left(\beta p+(1-\beta)\,q\right)+\left(1-\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)p\succeq\frac{1-\alpha}{1-\beta}\left(\beta p+(1-\beta)\,q\right)+\left(1-\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)\left(\beta p+(1-\beta)\,q\right).$$

El lado izquierdo es igual a $\alpha p+(1-\alpha)\,q$ y el derecho a $\beta p+(1-\beta)\,q$, por lo que obtenemos una contradicción.

Supodremos ahora que $\beta > \alpha$ y demostraremos que $\beta p+(1-\beta)\,q \succ \alpha p+(1-\alpha)\,q$. Por el paso 1 sabemos que $\beta p + (1-\beta)\,q \succ q$, y aplicando el paso 1 nuevamente, vemos que

$$\beta p+(1-\beta)\,q\succ\frac{\alpha}{\beta}\left(\beta p+(1-\beta)\,q\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)q=\alpha p+(1-\alpha)\,q.$$

Paso 3. Para $p, q, t \in P$ cualesquiera tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, existe algún $\alpha^t_{pq} \in [0,1]$ tal que $\alpha^t_{pq}p + \left(1-\alpha^t_{pq}\right) q \sim t$. Por continuidad, sabemos que los conjuntos $A^+ = \{\alpha : \alpha p + (1-\alpha)\,q \succeq t\}$ y $A^- =$

$\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1-\alpha) q\}$ son cerrados, y son no vacíos. Como las preferencias son completas, sabemos que $[0,1] \subseteq A^+ \cup A^-$. Para demostrar que existe algún α_{pq}^t tal que $\alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q \sim t$ alcanzará entonces con mostrar que $A^+ = [a,1]$ para algún a, y $A^- = [0,b]$ para algún b (sólo lo demostraremos para A^+, pues la demostración para A^- es similar). Como sabemos que A^+ es cerrado, alcanzará con mostrar que es un intervalo. Por el paso 2 sabemos que si $\beta > \alpha$ y $p \succ q$, entonces $\beta p + (1-\beta) q \succ \alpha p + (1-\alpha) q$. Por lo tanto, si $\alpha \in A^+$ y $\beta > \alpha$, por transitividad obtenemos que $\beta p + (1-\beta) q \succeq t$ por lo que $\beta \in A^+$

Paso 4. Para $p, q, t \in P$ cualesquiera tales que $p \succ q$ y $p \succeq t \succeq q$, existe un único $\alpha_{pq}^t \in [0,1]$ tal que $\alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q \sim t$. Por el paso 3 sabemos que existe algún α_{pq}^t con la propiedad deseada. Supongamos entonces que existe otro $\beta \in [0,1]$ tal que

$$\beta p + (1-\beta) q \sim \alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q \sim t.$$

Demostraremos ahora que no podemos tener $\beta > \alpha_{pq}^t$, el caso para $\beta < \alpha_{pq}^t$ es análogo y será omitido. Si $\alpha_{pq}^t = 1$, β no puede ser menor o igual a 1, y mayor que α_{pq}^t, por lo que no hay nada que demostrar. Asumiremos entonces que $\alpha_{pq}^t < 1$. Tampoco podemos tener $\alpha_{pq}^t = 0$ y $\beta = 1$, pues quedaría

$$q = \alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q \sim \beta p + (1-\beta) q = p$$

lo que contradice $p \succ q$. Si $\alpha_{pq}^t = 0$ y $\beta \in (0,1)$, por el paso 1 obtenemos que

$$\beta p + (1-\beta) q \succ q = \alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q \sim t$$

lo que contradice $\beta p + (1-\beta) q \sim t$. Supongamos entonces que $\alpha_{pq}^t, \beta \in (0,1)$ y $\beta > \alpha_{pq}^t$. En ese caso, el paso 2 nos dice que $\beta p + (1-\beta) q \succ \alpha_{pq}^t p + \left(1-\alpha_{pq}^t\right) q$, lo cual es una contradicción.

Paso 5. Existen x_m y x_M (piensen en mínimo y máximo) tales que $\delta_{x_M} \succeq p \succeq \delta_{x_m}$ para todo $p \in P$ (donde δ_x es la lotería que le asigna probabilidad 1 a la canasta x). Primero debemos ranquear todas las loterías δ_{x_i} de acuerdo a las preferencias. Dentro de las que sean las mejores (si hay más de una) elegimos una, y la llamamos δ_{x_M}. Dentro de las peores, elegimos δ_{x_m}. Ahora demostraremos que $\delta_{x_M} \succeq p$ para todo $p \in P$. El caso para $p \succeq \delta_{x_m}$ es análogo y se omite. Tenemos que $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, donde p_i es la probabilidad que se le asigna a x_i y por lo tanto,

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}.$$

Aplicando independencia tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{x_M} &\succeq p_1\delta_{x_1} + (1-p_1)\,\delta_{x_M} \succeq p_1\delta_{x_1} + (1-p_1)\left(\frac{p_2}{1-p_1}\delta_{x_2} + \left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)\delta_{x_M}\right) \\
&= p_1\delta_{x_1} + p_2\delta_{x_2} + (1-p_1-p_2)\,\delta_{x_M} \\
&\succeq p_1\delta_{x_1} + p_2\delta_{x_2} + (1-p_1-p_2)\left(\frac{p_3}{1-p_1-p_2}\delta_{x_3} + \left(1-\frac{p_3}{1-p_1-p_2}\right)\delta_{x_M}\right) \\
&= p_1\delta_{x_1} + p_2\delta_{x_2} + p_3\delta_{x_3} + (1-p_1-p_2-p_3)\,\delta_{x_M} \\
&\succeq ... = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta_{x_i}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Paso 6. La función $U(p) = \alpha_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}^{p}$ representa a $\succeq$. Debemos demostrar que $U(p) \geq U(q)$ si y sólo si $p \succeq q$.

Paso 6.i. Asumamos que $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$ (pues si son iguales se obtiene trivialmente que $p \sim q$). Si $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, obtenemos $p \succeq \delta_{x_m} \sim q$, por lo que asumimos $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \in (0,1)$. Si $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 1$, obtenemos $p \sim \delta_{x_M} \succeq q$, por lo que asumimos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \in (0,1)$. El paso 2 nos dice ahora que

$$\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m}$$

como queríamos demostrar.

Paso 6.ii. Demostraremos ahora que $p \succeq q$ implica $U(p) \geq U(q)$. No podemos tener $p \succeq q$ y $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 1$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, pues tendríamos $q \sim \delta_{x_M} \succ \delta_{x_m} \sim p$. Tampoco podemos tener $p \succeq q$ y

$$1 > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$$

pues el paso 1 nos dice que

$$q \sim \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \delta_{x_m} \sim p$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $p \succeq q$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = 0$, obtenemos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$.

Si $p \succeq q$ y $1 = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > 0$, el paso 1 nos daría

$$q \sim \delta_{x_M} \succ \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \sim p$$

otra contradicción. Por lo tanto, si $p \succeq q$ y $1 = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, obtenemos $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} = \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$.

Resta ahora analizar el caso en que $p \succeq q$ y $1 > \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$ y $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > 0$. Si tuviéramos $\alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} > \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, el paso 2 nos diría que

$$q \sim \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \succ \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\delta_{x_M} + \left(1 - \alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}\right)\delta_{x_m} \sim p$$

lo cual constituye una contradicción. Debemos tener entonces $\alpha^p_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}} \geq \alpha^q_{\delta_{x_M}\delta_{x_m}}$, como queríamos demostrar.

Paso 7. Se dice que una función $U : P \to \mathbf{R}$ es **lineal** si

$$U(ap + (1-a)q) = aU(p) + (1-a)U(q)$$

para todo $p, q \in P$ y $a \in [0,1]$. Mostraremos que la función U dada en el paso 6 es lineal. Tenemos que por independencia,

$$\begin{aligned}
ap + (1-a)q &\sim a\left(U(p)\delta_{x_M} + (1 - U(p))\delta_{x_m}\right) + (1-a)q \\
&\sim a\left(U(p)\delta_{x_M} + (1 - U(p))\delta_{x_m}\right) + (1-a)\left(U(q)\delta_{x_M} + (1 - U(q))\delta_{x_m}\right) \\
&= [aU(p) + (1-a)U(q)]\delta_{x_M} + [1 - aU(p) - (1-a)U(q)]\delta_{x_m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando que $U(ap + (1-a)q)$ es aquél número para el cual

$$U(ap + (1-a)q)\delta_{x_M} + (1 - U(ap + (1-a)q))\delta_{x_m} \sim ap + (1-a)q,$$

vemos que $U(ap + (1-a)q) = aU(p) + (1-a)U(q)$ como queríamos demostrar.

Paso 8. Mostraremos ahora que si $U : P \to \mathbf{R}$ es lineal, existe una función $u : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$U(p) = \sum_x u(x)p(x) \tag{12}$$

Para hacer eso, necesitamos una definición. El **soporte** de una distribución de probabilidad p es el conjunto de puntos para los cuales $p_i > 0$. Vamos a mostrar que para una U lineal, $u(x) \equiv U(\delta_x)$ satisface (12). Lo haremos por inducción en el tamaño del soporte de p. Si el soporte tiene un elemento, $p = \delta_x$ para algún x. Por lo tanto, $U(p) = U(\delta_x) = u(x) = u(x) * 1$. Supongamos ahora que (12) se cumple para todas las distribuciones p con soporte de tamaño $m-1$, y tomemos una p con soporte de tamaño m. También, sea z un elemento cualquiera del soporte de p, y sea q tal que

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z \\ \frac{p(x)}{1-p(z)} & \text{si } x \neq z \end{cases}$$

Vemos que q tiene soporte de tamaño $m-1$ y

$$p = p(z)\,\delta_z + (1-p(z))\,q.$$

Como U es lineal y satisface (12) para q, tenemos

$$\begin{aligned} U(p) &= p(z)\,U(\delta_z) + (1-p(z))\,U(q) \\ &= p(z)\,u(z) + (1-p(z))\sum_{x\neq z}\frac{p(x)}{1-p(z)}u(x) \\ &= \sum_x p(x)\,u(x) \end{aligned}$$

y la demostración está completa.■

Falta ahora demostrar que v también satisface (11) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$. Y falta también demostrar que si $\succeq$ tiene una representación como (11), entonces satisface los axiomas. Eso se deja como ejercicio.

Ejercicio 61 Las funciones u y v satisfacen (11) si y sólo si existen $a > 0$ y $b \in \mathbf{R}$ tales que $v(.) = au(.) + b$.

Ejercicio 62 Mostrar que si $\succeq$ satisface (11) para alguna función de utilidad u, entonces tiene que ser completa, transitiva, continua, y satisfacer independencia.

El Teorema de la Utilidad Esperada tiene infinidad de aplicaciones. Veamos por ejemplo una de sus primeras aplicaciones.

Ejercicio 63 Considere el conjunto de loterías ΔX definidas sobre un conjunto finito de números $X \subset \mathbf{R}$. Dada una lotería (distribución de probabilidad) $p \in \Delta X$, recordamos que la varianza de p se puede calcular como $V_p(x) = E_p(x^2) - [E_p(x)]^2$, y definimos $U(p) = E_p(x) - \frac{V_p(x)}{4}$. Para lo que sigue, suponga $X = \{0, 1, 4\}$.

Parte A. De acuerdo a esas preferencias, ¿cuál de las siguientes dos loterías prefiere (o es indiferente entre ellas)?: $p = \delta_1 = (0, 1, 0)$ (la lotería p da un dólar seguro) o $q = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.
Parte B. Usando una tercera lotería (elegida por usted en forma apropiada), y mezclándola con p y q, argumente que estas preferencias no satisfacen el axioma de independencia.

Aplicación A. La Paradoja de San Petesburgo. Esta paradoja fue descrita por Daniel Bernoulli en un artículo en 1738. Contaré la versión basada en la leyenda, no la del artículo, porque no lo he leído. En San Petesburgo había una casa de apuestas que le ponía un precio a cualquier apuesta, y la jugaba.

Bernoulli se imaginó el siguiente experimento: comenzar a tirar una moneda, y si la primera cara salía en la n-ésima tirada, la casa de apuestas le pagaba a él \$$2^n$. En la época se pensaba que la gente evaluaba este tipo de apuestas por su valor esperado: si la casa de apuestas le ponía a la apuesta cualquier precio menor al valor esperado de las ganancias, la persona "debía" aceptar. Haciendo un simple cálculo vemos que el valor esperado de la apuesta es infinito

Primera cara en tirada	1	2	3	4	...	n	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...
Plata	2	4	8	16	...	2^n	...
Producto	1	1	1	1	...	1	...

Si lo que creía la gente en aquél entonces era correcto, Daniel tendría que haber estado dispuesto a pagar cualquier suma de dinero que le propusiera la casa de apuestas. La realidad del asunto es que nadie estaría dispuesto a pagar mucho más que, digamos, \$1000. Bernoulli se preguntó ¿por qué? Su respuesta fue que la gente tiene funciones de utilidad cóncavas, para las cuales la utilidad marginal del dinero (la derivada primera) es decreciente: a Bill Gates tener \$100.000 más, no le cambia nada, en cambio a cualquiera de nosotros sí nos cambia mucho. En particular, él dijo que la gente se comporta como si tuviera una función de utilidad logarítmica: $u(x) = \log x$. En ese caso la utilidad esperada de la apuesta propuesta, asumiendo que después de pagar el precio la riqueza es 0, es

$$\sum_{t=1}^{t=\infty} \frac{1}{2^t} \log 2^t = \ln 4$$

que es mucho menos que infinito!■

Un pequeño desvío en la ruta: que el valor esperado de la apuesta de San Petesburgo sea infinito quiere decir que para cualquier precio fijo que nos quieran cobrar por cada intento, si hacemos el experimento una cantidad suficiente de veces podemos asegurarnos que nuestra ganancia será más grande que cualquier número que nos fijemos como objetivo. En general a la gente le suena muy raro eso. Supongamos que la casa de apuestas nos quiere cobrar \$1000 por cada intento. Si sale cara en la primera tirada, habremos perdido \$998. Si probamos otra vez, y sale cara por primera vez en la tirada 4, habremos perdido \$984. Sin embargo, hay una forma fácil de convencerse que se terminará ganando cualquier cantidad de dinero casi seguramente con suficientes tiradas.

En Excel, pongan en la celda A1 la fórmula "=Aleatorio()". Esa fórmula nos da un número aleatorio entre 0 y 1, distribuido uniformemente: tiene la misma probabilidad de caer en cualquier parte del intervalo. De acuerdo a esta distribución, la probabilidad de que el número caiga en cada intervalo es igual a la longitud del intervalo. Así por ejemplo, la probabilidad de que caiga en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ es $\frac{1}{2}$, y por tanto, es como si la primera cara hubiera salido en la primera tirada. Similarmente, la probabilidad de que el número aleatorio caiga en el intervalo $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right)$ es $\frac{1}{16}$ y es como si la primera cara hubiera caido en la cuarta tirada. Esa información se resume en la tabla siguiente:

Intervalo	$\left[0, \frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$	...	$\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right)$	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...
Primera Cara en Tirada	1	2	3	...	n	...

Por lo tanto, si llamamos x al número aleatorio, y

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^n}$$

es que salió cara en la n-ésima tirada. Igualando x al primer término, y despejando n obtenemos n como función de x :

$$1-\frac{1}{2^{n-1}}=x\Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{2^{n-1}}\Leftrightarrow \log(1-x)=(-n+1)\log 2\Leftrightarrow n=1-\frac{\log(1-x)}{\log 2}.$$

Ahí fijamos el x más chico para el cual sale cara en la n-ésima tirada, pero para cualquier otro x, nos puede dar n un número no entero. Por lo tanto, alcanza con encontrar la parte entera de $1-\log(1-x)/\log 2$. Así, poniendo en Excel, en la celda B1 "=Entero(1-Log(1-A1)/Log(2))" obtenemos para cada x que se genere en la celda A1, a qué tirada corresponde la primera cara. En la celda C1 ponemos +2^B1 - 1000, y sale la cantidad de dinero que se ganaría en un experimento, con un precio de 1000. Copiando esas tres celdas en las filas de abajo, tanto como quieran, obtendrán lo que hubiera obtenido Bernoulli en varios experimentos independientes. Sumando las "ganancias" de cada experimento, se obtiene que cuando el número de filas se hace más y más grande, las ganancias van creciendo. Pero hay que ser paciente: si el experimento se repite 65.000 veces, la cantidad esperada de experimentos donde sale la primera cara en la tirada 16 es 1, y es obviamente la mitad para la primera cara en 17, y así sucesivamente. A pesar de lo difícil que es sacar cara en la tirada 16, "sólo" se obtienen \$65.536. Peor aún, la probabilidad que en todos los experimentos la primera cara salga antes de la tirada 23 es 99%!

El ejemplo de la Paradoja de San Petesburgo sirve para ilustrar varias cosas. Primero, el concepto de "utilidad marginal decreciente del dinero", pero también para indicar que en general la gente es "aversa al riesgo", no le gusta tomar riesgos. Definiremos ahora la aversión al riesgo formalmente. Hasta ahora hemos trabajado con un conjunto X finito, pero para tratar loterías sobre cantidades de dinero, y temas de aversión al riesgo es más conveniente trabajar con un intervalo $X\subseteq\mathbf{R}$, y con P el conjunto de loterías sobre X.

Ejercicio 64 Suponga que $X=\{1,2,3\}$, y que $\succeq$ sobre $\Delta(X)=\left\{p\in\mathbf{R}_+^3:\sum_{i=1}^3 p_i=1\right\}$ satisfacen Independencia. Asuma también que una función U representa a las preferencias $\succeq$, con $U\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=U(0,1,0)=\frac{1}{2}$ y $U(0,0,1)=1$. ¿Podemos saber cuánto es $U(1,0,0)$? Y si en vez de saber que $\succeq$ satisface independencia supiéramos que u es lineal, ¿podríamos saber cuánto es $U(1,0,0)$?

Definición. Una relación de preferencias $\succeq$ en P es **aversa al riesgo** si para toda lotería p, la lotería que es degenerada en el valor esperado de p, δ_{Ep}, es preferida a $p:\delta_{Ep}\succeq p$. Es decir, la persona prefiere recibir una cantidad de dinero segura, antes que una lotería que en promedio da esa cantidad, pero que tiene cierta variabilidad. Por ejemplo, una persona aversa al riesgo prefiere 1 millón de dólares seguro, antes que una lotería 50-50 de recibir \$0 o 2 millones de dólares.

Si las preferencias se pueden representar con una función de utilidad esperada u, cuya derivada segunda existe para todo x, hay otras dos condiciones que podrían parecer adecuadas para ser la definición de aversión al riesgo:

Condición A. La función u exhibe utilidad marginal decreciente del dinero. Formalmente, esto quiere decir que u' es decreciente. Para ver porqué esta podría ser una definición de aversión al riesgo, imaginemonos un individuo que evalúa quedarse seguro con la cantidad de dinero que tiene, o tomar una lotería con probabilidades $50-50$ de perder o ganar un peso. En este contexto, la persona piensa:

Si gano un peso, la utilidad marginal de ese peso va a ser chica, no gano tanto, mientras que si pierdo un peso, la utilidad marginal de ese peso es alta, pierdo mucho. Por lo tanto, no tomo esa apuesta.

Por lo tanto, la persona elige la opción sin riesgo.

Condición B. La función u es cóncava: para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$u(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y). \tag{13}$$

Para ver porqué la concavidad de u es razonable como definición de aversión al riesgo, es útil interpretar a λ como la probabilidad que salga x. Así, que u sea cóncava nos dice que la persona prefiere recibir seguro $\lambda x + (1-\lambda) y$ pesos, antes que una lotería que le da $\$x$ con probabilidad λ y $\$y$ con probabilidad $1-\lambda$, ya que el lado derecho de la desigualdad (13) es la utilidad esperada de esa lotería.

Por suerte, la definición de aversión al riesgo es equivalente a la Condición A y a la Condición B. Para ver que A y B son equivalentes, alcanza con saber que si u tiene derivada segunda, u es cóncava si y sólo si, su derivada segunda es negativa. Eso es lo mismo que decir que la derivada primera es decreciente, que es la Condición A. Veremos ahora que $u'' \leq 0$ implica concavidad (la condición B). Por el Teorema de Taylor, u alrededor de $\lambda x + (1-\lambda) y$ se puede escribir, para algún w entre z y $\lambda x + (1-\lambda) y$, como

$$u(z) = u(\lambda x + (1-\lambda) y) + u'(\lambda x + (1-\lambda) y)(z - \lambda x - (1-\lambda) y) + \frac{u''(w)}{2}(z - \lambda x - (1-\lambda) y)^2.$$

Como $u'' \leq 0$, obtenemos para $z = x$ y $z = y$,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(\lambda x + (1-\lambda) y) + u'(\lambda x + (1-\lambda) y)(x - \lambda x - (1-\lambda) y) = u(\lambda x + (1-\lambda) y) + u'(\lambda x + (1-\lambda) y)(1-\lambda)(x - \\ u(y) &\leq u(\lambda x + (1-\lambda) y) + u'(\lambda x + (1-\lambda) y)(y - \lambda x - (1-\lambda) y) = u(\lambda x + (1-\lambda) y) + u'(\lambda x + (1-\lambda) y)\lambda(y - x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando el primer renglón por λ y el segundo por $1-\lambda$, y sumando obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y) &\leq u(\lambda x + (1-\lambda) y) + \lambda u'(\lambda x + (1-\lambda) y)(1-\lambda)(x - y) + (1-\lambda) u'(\lambda x + (1-\lambda) y)\lambda(y - x) \\ &= u(\lambda x + (1-\lambda) y) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Para ver la conexión entre la Condición B y la definición, vemos que la persona es aversa al riesgo si y sólo si para todo p

$$u(E_p(x)) \geq E_p(u(x)). \tag{14}$$

Demostraremos que la Condición B y la definición son equivalentes si demostramos que u es cóncava si y sólo si se cumple la ecuación (14). Eso es el contenido del siguiente Teorema.

Teorema 65 ***Desigualdad de Jensen.*** *La función $u : X \to \mathbf{R}$ es cóncava si y sólo si para toda lotería p se cumple la ecuación (14).*

Prueba. Asumamos primero que la ecuación (14) se cumple para todas las loterías. Entonces, se cumple en particular para cualquier lotería que asigne probabilidades λ y $1-\lambda$ a x e y, por lo que la función debe ser cóncava.

Para ver el converso, recordamos que para las funciones cóncavas, la recta $y = m(x - E_p(x)) + u(E_p(x))$ pasa por el punto $(E_p(x), u(E_p(x)))$ y está siempre por encima de $u(x)$, cuando m es menor que la derivda por la izquierda de u, y mayor que la derivda por la derecha de u (las derivadas por izquierda y derecha siempre existen) en el punto $E_p(x)$. Es decir, para un m adecuado, para todo x,

$$m(x - E_p(x)) + u(E_p(x)) \geq u(x).$$

Para completar la demostración sólo hace falta tomar esperanzas con respecto a p en ambos lados de esa ecuación para obtener $u(E_p(x)) \geq E_p(u)$. Eso es equivalente a hacer lo siguiente: si p le asigna probabilidades positivas a $x_1, x_2, ..., x_n$, reescribiendo la ecuación de arriba obtenemos

$$\begin{array}{ccc} m(x_1 - E_p(x)) + u(E_p(x)) \geq u(x_1) & \Rightarrow & m(p_1x_1 - p_1E_p(x)) + p_1u(E_p(x)) \geq p_1u(x_1) \\ m(x_2 - E_p(x)) + u(E_p(x)) \geq u(x_2) & \Rightarrow & m(p_2x_2 - p_2E_p(x)) + p_2u(E_p(x)) \geq p_2u(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m(x_n - E_p(x)) + u(E_p(x)) \geq u(x_n) & \Rightarrow & m(p_nx_n - p_nE_p(x)) + p_nu(E_p(x)) \geq p_nu(x_n) \\ \text{sumando la columna derecha} & : & u(E_p(x)) \geq E_p(u) \end{array}$$

como queríamos demostrar.■

En la demostración usamos que la cuerda $y = m(x - E_p(x)) + u(E_p(x))$ está siempre por encima de $u(x)$, para m entre las derivadas por la izquierda y por la derecha de u. Si la derivada de u existe, $m = u'(E_p(x))$, y la ecuación se transforma en

$$u'(E_p(x))(x - E_p(x)) + u(E_p(x)) \geq u(x).$$

Para ver por qué es cierta esa afirmación, pongamos $E_p(x) = x_0$ para que quede

$$u(x) \leq u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) \tag{15}$$

que se parece mucho a una expansión de Taylor. Recordemos que una versión de Taylor es que para todo x y x_0 (no para x cerca de x_0) y para algún x^* entre x y x_0,

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x^*)}{2}(x - x_0)^2.$$

Como u es cóncava, obtenemos $u'' \leq 0$, y por tanto se cumple la ecuación (15).
Comentario Jensen: El Teorema 65 está formulado en términos de una función cóncava, pero como u es cóncava si y sólo si $-u$ es convexa, la desigualdad de Jensen también nos dice que u es convexa si y sólo si $u(E(p)) \leq E_p(u)$.

Crítica D: Rabin, "Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem", Econometrica. Esta es una crítica a la utilidad esperada, y no al axioma de Independencia.

Aplicación B. Demanda de Activos Riesgosos. Hay un activo que cuesta 1 peso por cada unidad. Por cada unidad del activo que el inversor compre hoy, recibirá un retorno aleatorio, variable, de $\$z$ mañana. La variable z se distribuye de acuerdo a una probabilidad p. Sólo sabemos que el valor esperado de z, la cantidad promedio de dinero que dará, es mayor que 1, es decir, $E(z) > 1$. Cada peso no invertido en el activo puede ser guardado debajo del colchón hasta mañana, sin generar intereses. El que debe tomar la decisión de cuanto comprar posee una riqueza de $\$r$, y tiene una función de utilidad esperada $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, donde $u(x)$ es la utilidad del individuo de tener una riqueza de x mañana. La función u es diferenciable y cóncava: es averso al riesgo. Es común que la gente piense que con sólo esa información no se puede decir nada sobre si la persona invertirá algo, poco, mucho o nada en el activo riesgoso. Eso está mal. Con la información que poseemos, sabemos que el individuo invertirá seguro algo en el activo riesgoso.

El tomador de decisiones debe elegir la cantidad c de dinero para maximizar

$$\sum_i u\left(r-c+cz_i\right)p_i.$$

Para cada retorno z que pueda dar el activo, la riqueza mañana será $r-c$, que se guardó debajo del colchón, más cz que es el retorno del activo, multiplicado por la cantidad de unidades. Si tomamos las condiciones de primer orden obtenemos

$$\frac{d\sum_i u\left(r-c+cz_i\right)p_i}{dc}=\sum_i \frac{du\left(r-c+cz_i\right)p_i}{dc}=\sum_i u'\left(r-c+cz_i\right)\left(z_i-1\right)p_i.$$

Si esta derivada es estrictamente positiva en $c=0$, quiere decir que si la persona está evaluando invertir 0 en el activo riesgoso, puede aumentar su utilidad eligiendo algún $c>0$. Vemos ahora que la última expresión, evaluada en 0 es

$$\sum_i u'\left(r\right)\left(z_i-1\right)p_i=u'\left(r\right)\left(\sum_i z_ip_i-1\right)$$

que es estrictamente positiva pues $\sum_i z_ip_i=E\left(z\right)>1$, como queríamos demostrar.■

Ejercicio 66 Suponga que un individuo tiene una función de utilidad u por niveles de riqueza w tal que $u'\left(w\right)>0>u''\left(w\right)$ para todo w. La riqueza inicial del individuo es $r>0$ y le ofrecen: "para cualquier $t<r$ que se te ocurra, te ofrezco una apuesta en la que ganás $2t$ con probabilidad $\frac{1}{2}$, y perdés t con probabilidad $\frac{1}{2}$." Muestre que existe algún $t>0$ para el cual el individuo querrá tomar la apuesta.

Ahora un "contraejemplo" a la aplicación.

Ejercicio 67 Hay un activo que cuesta 1 peso por unidad invertida en el activo. El mismo da retornos de 2.5 y 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$. El individuo puede comprar cualquier proporción que quiera del activo (es decir, si quiere comprar un décimo, puede hacerlo, pagando $\frac{1}{10}$ pesos, y obtiene, en caso que el activo de el retorno positivo, $\frac{1}{4}$). Si su riqueza inicial es un peso, y su utilidad es

$$u\left(x\right)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 1\\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

¿Cuál es el valor esperado de la riqueza si se adquieren z unidades del activo? ¿Cuánto comprará del activo? ¿Hay algo "raro" en esto, dada la Aplicación D?

Ejercicio 68 Considere un contribuyente con ingresos exógenos (fijos) $y>0$ por el que debe pagar un impuesto proporcional t , donde $0<t<1$. La DGI le pide una declaración jurada en la que debe indicar el monto que percibe de ingresos x y que pague tx. Si el contribuyente es honesto va a reportar $y=x$, pero también podría declarar otro x, con $0\leq x<y$. Definimos $z=y-x$, o sea el monto en el que se sub-declara los ingresos. A priori la DGI no conoce los ingresos verdaderos y por lo tanto debe implementar un sistema de auditorías y multas para que las personas paguen sus impuestos.

Supongamos que la política del organismo recaudador es auditar los reportes con probabilidad $p\in(0,1)$, independientemente del valor de x. Cada vez que se audita un reporte, la DGI logra conocer y. Si x distinto de y, el contribuyente debe pagar una multa m por cada peso de ingreso no declarado, mz, además del impuesto evadido, obviamente.

Asuma que el contribuyente es averso al riesgo, que maximiza su utilidad esperada, y que la utilidad es derivable.

Parte A. Escriba la utilidad esperada de declarar x. Escríbala también como la utilidad esperada de subdeclarar $z \in [0, y]$.
Parte B. Encuentre un valor t^* (depende de p y m) tal que el individuo evade si y sólo si $t > t^*$. (Pista: utilice una técnica similar a la que usamos para mostrar que si una apuesta tiene valor esperado positivo, el individuo siempre comprará un poco de la apuesta).
Parte C. Asuma que el contribuyente elige $z^* > 0$. Pruebe que z^* es decreciente en p y en m. Se puede hacer de dos formas, una "intuitiva" o una más técnica, usando el teorema de la función implícita, que dice que si $f(p, z(p)) \equiv 0$ (para cada p, elegimos $z(p)$ para que la función sea 0; es una identidad, no una igualdad), entonces $\frac{dz}{dp} = -\frac{\partial f / \partial p}{\partial f / \partial z}$ (y similarmente para m). Eso sale de tomar derivadas en ambos lados de $f = 0$, y usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{dp} = -\frac{\partial f / \partial p}{\partial f / \partial z}.$$

Ejercicio 69 Hay un activo que cuesta \$1 por unidad. El activo valdrá v_i en el estado i de la naturaleza ($i = 1, ..., n$). Para fijar ideas, supongamos que $v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n$. El estado i ocurre con probabilidad p_i, y asumimos que $E(v) > 1$. Un individuo tiene una riqueza inicial de w y una función de utilidad sobre niveles finales de riqueza z dada por $u(z) = z - az^2$, para $a > 0$. Asumimos que $wv_n \leq 1/2a$ (eso asegura que la función de utilidad sea creciente en todos los tramos relevantes).

Parte A. Encuentre la cantidad q óptima del activo que comprará el individuo.
Parte B. Defina $r_i = v_i - 1$, el retorno del activo (el valor, menos el precio). Escriba la cantidad óptima q hallada en la Parte A como función de la media del retorno, $\mu = E(r_i)$ y de la varianza del retorno, $\sigma^2 = E(r^2) - (E(r))^2$.
Parte C. Calcule la derivada de q con respecto a μ,y verifique que podría haber dos activos, A y B tales que tuvieran la misma varianza, $\mu_A \geq \mu_B$ y sin embargo, el individuo demandara más de B que de A. ¿cómo es posible?

Ejercicio 70 Considere una persona con la siguiente función de utilidad:

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{5}{2} \\ x + \frac{5}{2} & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Parte A. Represéntela gráficamente. Muestre que el individuo es averso al riesgo. Se puede hacer directamente con la definición, o se puede hacer mostrando que u es el mínimo de dos funciones, y usar esa propiedad para mostrar la concavidad.
Parte B. Suponga que hay tres estados de la naturaleza posibles, todos con la misma probabilidad. Hay dos activos, a y b. El activo a da en cada estado los retornos (o riquezas finales) $(1, 5, 9)$ y el activo b los retornos $(2, 3, 10)$. Calcule la utilidad esperada de ambos activos. ¿Qué activo sería preferido por esta persona si se los ofrecieran al mismo precio? (suponga que es cero, por simplicidad).
Parte C. Calcule el retorno esperado de cada activo. Calcule la varianza de los pagos de cada activo. ¿Qué activo elegiría si fuera "averso a la varianza"? Para calcular la varianza utilice la siguiente fórmula: $v(x) = E(x^2) - (E(x))^2$
Parte D. Basado en las respuestas anteriores, comente la siguiente afirmación: "Todo individuo averso al riesgo es también "averso a la varianza"".

Aplicación C. Demanda de Seguros. Este ejemplo muestra la contracara de la Aplicación B. Esa decía que si era beneficioso tomar riesgos, el individuo iba a tomar algo, aunque fuera averso al riesgo. Esta dice que si existe un seguro con una prima "justa" el individuo se asegurará completamente.

El individuo posee una casa valuada en $\$D$, que puede quemarse con una probabilidad p, y pasar a valer $\$D-L$. La persona puede comprar tantas unidades como quiera, a un precio de $\$q$ por unidad, de un seguro que paga $1 en caso de accidente, y 0 en caso contrario. Como hay competencia en el mercado de seguros, los beneficios esperados de las compañías son 0 :

$$q - p * 1 - (1-p) * 0 = 0 \Leftrightarrow p = q.$$

¿Cuánto comprará el individuo de seguro si su función de utilidad esperada es tal que $u'' < 0$?

El individuo debe elegir x, la cantidad de unidades de seguro, para maximizar su utilidad esperada

$$pu\left(D - L + x - px\right) + \left(1 - p\right) u\left(D - px\right).$$

La condición de primer orden (como u es cóncava, es necesaria y suficiente) es

$$pu'\left(D - L - px + x\right)\left(1 - p\right) = \left(1 - p\right) u'\left(D - px\right) p \Leftrightarrow u'\left(D - L - px + x\right) = u'\left(D - px\right).$$

Como $u'' < 0$, eso implica que se debe cumplir que $D - L - px + x = D - px$ o lo que es lo mismo, $x = L$. Es decir, el individuo se asegura completamente. Otra forma fácil de ver que la solución es la propuesta, es ver que si el individuo compara asegurarse completamente con tomar un seguro con $x \neq L$, ambas loterías tienen la misma media, $D - pL$, pero una tiene riesgo y la otra no: para cada x, el valor esperado de la riqueza es

$$E\left(w\right) = p\left(D - L - px + x\right) + \left(1 - p\right)\left(D - px\right) = D - Lp.$$

Por definición de aversión al riesgo, el individuo preferirá el seguro total.

Otra forma de verlo, es pensando que la compañía de seguros ofrece dos niveles de riqueza al individuo, w_n en caso de *no* fuego, y w_f en caso de fuego. Es fácil ver que cada x que uno elige se tranforma en un par de niveles de riqueza w_n y w_f; pero también es cierto que se puede pasar de un "contrato" w_n, w_f a un x, notando que si uno elige un nivel de riqueza $w_n = w$, está eligiendo el x tal que $D - px = w \Leftrightarrow x = \frac{D-w}{p}$. Es decir, se puede pasar de un tipo de contrato al otro. Si la firma nos ofreciera contratos en la forma w_n, w_f, la condición de beneficio 0 sería que el individuo puede elegir los w_f y w_n que quiera, mientras cumplan $pw_f + (1-p) w_n = D - pL$. Graficando eso en un par de ejes con w_n en las abcisas y w_b en las ordenadas, queda como una restricción presupuestal. El individuo debe maximizar $pu(w_f) + (1-p) w_n$ sujeto a esa restricción, y se maximiza en $w_n = w_f$.

Ejercicio 71 Continuado de la Aplicación D. El individuo posee una casa valuada en $\$D$, que puede quemarse con una probabilidad p, y pasar a valer $\$D - L$. La persona puede comprar tantas unidades como quiera, a un precio de $\$q$ por unidad, de un seguro que paga $1 en caso de accidente, y 0 en caso contrario. Asuma que $q > p$, y demuestre que el individuo no se asegurará completamente.

Aplicación E. La inflación es buena para las empresas. Esta aplicación la formularemos como un ejercicio.

Ejercicio 72 Recordamos que una función es convexa si para todo $a \in [0,1]$ tenemos $f\left(ax + (1-a) y\right) \leq af\left(x\right) + (1-a) f\left(y\right).$

Parte A. Muestre que si f es convexa, entonces $g(x) = -f(x)$ es cóncava.
Parte B. Suponga que la firma puede elegir cualquier $y \in Y$, cerrado y acotado, su espacio de posibilidades de producción. Recuerde que en ese caso, py son los beneficios de la firma. Definimos la función de beneficios como $\pi(p) = \max_{y \in Y} py$, que son los beneficios máximos que puede obtener una firma cuando los precios son p. Muestre que la función de beneficios es convexa.
Parte C. Suponga que una empresa puede elegir entre una de dos alternativas. En la primera, el vector de precios es aleatorio, con alguna distribución g, y la firma puede elegir su vector de producción luego de saber qué valor tomó el vector de precios. En la segunda alternativa, los precios están fijos, y son iguales al valor esperado de los precios en la primera alternativa, digamos serán $q = E_g(p)$. ¿Cuál opción es mejor para la empresa?

¿Por qué se dice entonces que la inflación es mala para las empresas? Explicación: el dueño puede ser averso al riesgo, o hay monopolios, o la incertidumbre se resuelve luego de tomadas las decisiones de producción. Que el dueño sea averso importa poco: si con mayor volatilidad aumenta el valor esperado de los beneficios, eso aumentará el valor de la firma, y el dueño podría vender la firma y ganar más (seguro, con la venta) que si se quedara con la firma. Que la firma sea un monopolio tampoco es una buena defensa de la aseveración "a las firmas no les gusta la volatilidad de precios": si la firma no es tomadora de precios no podés decir "A las empresas no les gusta que varíen los precios," y al mismo tiempo decir que "las empresas son monopolios y por lo tanto fijadoras de precios").

Ejercicio 73 Calcular las utilidades esperadas de cada función de utilidad, con cada una de las distribuciones. Algunas utilidades esperadas pueden no existir. Indique cuáles.

	$u(x)$	*distribución*	*distribución*
a.I	x^a para $a \in [0,1]$	uniforme en $[0,1]$	$p(0) = \alpha, p(1) = 1-\alpha$
a.II	$\log x$	uniforme en $[0,1]$	$p(0) = \alpha, p(1) = 1-\alpha$
a.III	$ax + b$	uniforme en $[0,1]$	$p(0) = \alpha, p(1) = 1-\alpha$
a.IV	$-x+1$	uniforme en $[0,1]$	$p(0) = \alpha, p(1) = 1-\alpha$
a.V	$-x^{-1}$	uniforme en $[0,1]$	$p(0) = \alpha, p(1) = 1-\alpha$

Ejercicio 74 Una empresa debe decidir entre tres proyectos mutuamente excluyentes:

- El proyecto P tiene cuatro pagos posibles con igual probabilidad: \$80 millones, \$100 millones, \$120 millones y \$140 millones,
- El proyecto Q tiene tres pagos posibles con igual probabilidad: \$90 millones, \$110 millones y \$130 millones,
- El proyecto R tiene dos pagos posibles con igual probabilidad: \$90 millones y \$130 millones.

Suponga que sabe que el director de la empresa es averso al riesgo. Determine sus preferencias sobre P, Q y R.

Antes de pasar a la siguiente aplicación, daremos la definición de lo que significa que un individuo sea más averso al riesgo que otro.

Definición. Una relación de preferencias $\succeq_2$ es **más aversa al riesgo** que la relación de preferencias $\succeq_1$ si siempre que $p \succeq_2 \delta_{\overline{x}}$ (para cualquier p y x) tenemos que $p \succeq_1 \delta_{\overline{x}}$. Es decir, podemos decir que Woody

Allen es más averso al riesgo que Schwarzenegger si siempre que Woody Allen elige algo riesgoso sobre algo sin riesgo, Schwarzenegger también elige la alternativa riesgosa.

Esta formulación parece bastante intuitiva, pero no muy útil. Además, uno podría pensar que hay otras condiciones que también parecen razonables, y que parecen más útiles. Por ejemplo, damos dos ahora.

Condición A. Para preferencias $\succeq_1$ y $\succeq_2$ que tienen funciones de utilidad u_1 y u_2, decimos que u_2 es más cóncava que u_1 si existe una función cóncava y estrictamente creciente f tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$. Como habíamos asociado concavidad a aversión al riesgo, esta parece una condición razonable.

Condición B. Definimos el coeficiente de aversión al riesgo de Arrow y Pratt como

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Decimos que u_2 es más aversa al riesgo que u_1 si para todo x, $-\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} \geq -\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)}$.

Si la curvatura es una señal de aversión al riesgo, cuanto más curva u, más grande $-u''$, y más grande $r(x)$. La razón para dividir entre u', es que u'' depende de la representación que elijamos para $\succeq$: por ejemplo, según el teorema de la utilidad esperada, tanto $u(x) = \sqrt{x}$ como $v(x) = 2\sqrt{x}$ representan a las mismas preferencias. Si el coeficiente de aversión al riesgo fuera sólo $-u''$, obtendríamos que el coeficiente de aversión al riesgo de v sería mayor que el de u, lo cual no tendría demasiado sentido, porque son las mismas preferencias. Al dividir entre u' se arregla ese problema.

Por suerte, otra vez, la definición de "más averso al riesgo" es equivalente a las Condiciones A y B.

Teorema 75 *Asuma que las relaciones de preferencias $\succeq_1$ y $\succeq_2$ se pueden representar por funciones de utilidad u_1 y u_2 (estrictamente crecientes) con derivadas segundas negativas. La relación de preferencias $\succeq_2$ es más aversa al riesgo que $\succeq_1$ si y sólo si $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x, si y sólo si existe una función cóncava y (estrictamente) creciente f tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$.*

El siguiente ejercicio pide la demostración de una de las "flechitas" (Definición $\Leftrightarrow$ Condición A $\Leftrightarrow$ Condición B: habría que demostrar 2 flechitas. La forma habitual es hacer Definición $\Rightarrow$ Condición A $\Rightarrow$ Condición B $\Rightarrow$ Definición. Con eso nos ahorramos de hacer las otras flechitas).

Ejercicio 76 Deberes. Muestre que si $u_2 = f(u_1)$, para f cóncava y estrictamente creciente si y sólo si $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x.

Otra de las cosas relativamente fáciles de demostrar del Teorema es el objeto del siguiente ejercicio.

Ejercicio 77 Si $u_2 = f(u_1)$ para f cóncava y creciente, entonces las preferencias $\succeq_2$ representadas por u_2 son más aversas al riesgo que las preferencias $\succeq_1$ representadas por u_1.

Como siempre, para que las definiciones tengan algún sentido, deben tener alguna implicación testeable que sea razonable. Por ejemplo, si digo que Juan es más averso al riesgo que Pedro, debería suceder que, a igualdad de otras cosas, Pedro invierte más en un activo riesgoso que Juan. La próxima aplicación demuestra precisamente eso.

Aplicación F. Como en la Aplicación B, hay un activo que cuesta 1 peso por cada unidad. Por cada unidad del activo que el inversor compre hoy, recibirá un retorno aleatorio, variable, de $\$z$ mañana. La variable z

se distribuye de acuerdo a una probabilidad p con $E_p(z) > 1$. Sean u_1 y u_2 tales que u_2 es más aversa al riesgo que u_1, es decir, $u_2 = f(u_1)$ para f cóncava. Sea c_k la cantidad que resuelve el problema de elegir c para maximizar

$$v_k(c) = \sum_i u_k(r - c + cz_i)\, p_i. \tag{16}$$

Para que la definición de "más averso al riesgo" tenga algo de sentido en términos de comportamiento, debería suceder que, como u_2 es más averso al riesgo que u_1, c_2 debería ser más chico que c_1. En particular, debería suceder que $v_2'(c_1)$ sea negativo. Eso quiere decir que si al individuo 2 le preguntamos "¿cómo te sentís invirtiendo lo mismo que el superarriesgado individuo 1?" él nos contesta "mal, me doy cuenta que invirtiendo un poco menos en el activo riesgoso estoy más contento". Demostraremos entonces que $v_2'(c_1) \leq 0$.

En la demostración precisaremos usar que, como f' es decreciente,

$$f'(u_1(r + c_1(z-1)))(z-1) \leq f'(u_1(r))(z-1) \tag{17}$$

pues

$$\begin{array}{lll} z > 1 \Rightarrow & u_1(r + c_1(z-1)) \geq u_1(r) \Rightarrow & f'(u_1(r + c_1(z-1))) \leq f'(u_1(r)) \\ z < 1 \Rightarrow & u_1(r + c_1(z-1)) \leq u_1(r) \Rightarrow & f'(u_1(r + c_1(z-1))) \geq f'(u_1(r)) \end{array}$$

y en ambos casos se obtiene la ecuación (17).

La condición de primer orden para el individuo 1 en el problema (16) es

$$v_1'(c_1) = Eu_1'(r - c_1 + c_1 z)(z-1) = 0$$

y tenemos que v_2' evaluada en c_1 es

$$\left.\frac{dv_2}{dc}\right|_{c_1} = \left.\frac{dEf(u_1(r - c + cz))}{dc}\right|_{c_1} = E\left[f'(u_1(r + c_1(z-1)))\, u_1'(r + c_1(z-1))(z-1)\right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} v_2'(c_1) &= E\left[f'(u_1(r + c_1(z-1)))\, u_1'(r + c_1(z-1))(z-1)\right] \leq E\left[f'(u_1(r))\, u_1'(r + c_1(z-1))(z-1)\right] \\ &= f'(u_1(r))\, E\left[u_1'(r + c_1(z-1))(z-1)\right] = f'(u_1(r)) * 0 = 0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.■

La última aplicación de utilidad esperada que consideraremos es al problema de analizar cómo cambia el ahorro de una persona en el primer período de su vida si aumenta la incertidumbre respecto a los ingresos en el segundo período de su vida.

Aplicación G. Un individuo recibe riquezas w_0 y w_1 en los períodos 0 y 1 de su vida. Debe decidir sólo cuánto ahorrar, o pedir prestado, en el primer período de su vida, para maximizar su utilidad. La tasa de interés es r y asumiremos que la utilidad se puede escribir como $u_0 + u_1$ para u_0 y u_1 cóncavas. El problema es entonces el de elegir el ahorro s para maximizar

$$v(s) = u_0(w_0 - s) + u_1(w_1 + s(1+r)).$$

Por la concavidad de las u, la condición de primer orden es necesaria y suficiente para encontrar el s óptimo:

$$v'(s^*) = 0 \Leftrightarrow u_0'(w_0 - s^*) = u_1'(w_1 + s^*(1+r))(1+r)$$

Supongamos ahora que en vez de ser la riqueza del segundo período un número cierto w_1, es $w_1 + z$, donde z es aleatorio, y $Ez = 0$. En ese caso, el individuo debe elegir s para maximizar

$$V(s) = u_0(w_0 - s) + Eu_1(w_1 + z + s(1 + r)).$$

Otra vez, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes. El individuo incrementará su ahorro con incertidumbre si y sólo si $V'(s^*) \geq 0$; la utilidad marginal de ahorrar lo mismo que cuando no había incertidumbre. Eso se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} u_0'(w_0 - s^*) &\leq Eu_1'(w_1 + z + s^*(1 + r))(1 + r) \Leftrightarrow \\ u_1'(w_1 + s^*(1 + r))(1 + r) &\leq Eu_1'(w_1 + z + s^*(1 + r))(1 + r) \Leftrightarrow \\ u_1'(w_1 + s^*(1 + r)) &\leq Eu_1'(w_1 + z + s^*(1 + r)) \end{aligned}$$

que se cumple si y sólo si u_1' es convexa (ver Comentario Jensen). Es decir, el individuo aumenta su ahorro cuando aumenta la incerticumbre ($V'(s^*) \geq 0$) si y sólo si u_1' es convexa. Entonces, se dice que el individuo es prudente si u_1' es convexa.

Ejercicio 78 Sean $u(x) = -e^{-ax}$ para $a > 0$ y $v(x) = \sqrt{x}$ dos funciones que representan dos preferencias sobre loterías.

Parte A. Si el dominio de las funciones es $\mathbf{R}_{++}$, ¿hay algún a tal que alguna de las funciones de utilidad sea más aversa al riesgo que la otra?
Parte B. Si el dominio de las funciones es $(0, 10)$, ¿hay algún a tal que alguna de las funciones de utilidad que sea más aversa al riesgo que la otra?

Ejercicio 79 Deberes. Supongamos que tengo $W = 100$ dólares para invertir en dos activos. Por cada dólar que invierto en la fábrica de Paraguas gano \$10 si el año es lluvioso y \$3 si el año es seco. Por cada dólar que invierto en la fábrica de Helados gano \$2 si el año es lluvioso y \$9 si es seco. El año es lluvioso con probabilidad 0.5 y seco con 0.5. Mi función de utilidad esperada es $u(x) = \sqrt{x}$ cuando mi riqueza final es x. Supongamos que invierto una fracción λ de mi riqueza en Paraguas y el resto en los Helados.

Parte A. ¿Cuál es el valor de λ que maximiza el retorno esperado?

Parte B. ¿Cuál es el valor de λ que maximiza mi utilidad esperada?

Ejercicio 80 Deberes. Suponga que la relación de preferencias $\succeq$ definida en el conjunto P de distribuciones de probabilidad sobre $X = \{1, 2, 3\}$ es completa, transitiva y satisface continuidad. Para todo $p \in P$,

$$p = (a, b)$$

querrá decir que la probabilidad que p le asigna a 1 es a, y a 2 es b. Si la relación de preferencias es tal que

$$(0, 1) \succ \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ y además } \left(\frac{3}{4}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

¿puede satisfacer independencia?

Ejercicio 81 Sea $X = \{0, 200, 1.200, x_L, x_M\}$ y sea P el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X. Sean las loterías (distribuciones de probabilidad)

$$L = \begin{cases} 200 & \text{dólares con probabilidad } 0,7 \\ 0 & \text{dólares con probabilidad } 0,3 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} 1.200 & \text{dólares con probabilidad } 0,1 \\ 0 & \text{dólares con probabilidad } 0,9 \end{cases}$$

y sean x_L y x_M las cantidades de dinero que son indiferentes a L y M respectivamente. Diremos que una relación de preferencias $\succeq$ en P es monótona si para todo $x, y \in X$, la lotería que le asigna probabilidad 1 a x es estrictamente preferida a la lotería que le asigna probabilidad 1 a y si y sólo si $x > y$. Demostrar que si las preferencias son transitivas y monótonas, $L \succ M \Leftrightarrow x_L > x_M$. (En la solución no tendrán que usar las formas específicas de L y M, pero el punto es que en experimentos mucha gente revela con sus elecciones que $L \succ M$, pero $x_L < x_M$).

Ejercicio 82 Suponga que X, el espacio de los premios, es $X = \{1, 2, 3\}$ y que $\delta_2 \sim \frac{3}{4}\delta_3 + \frac{1}{4}\delta_1$. Si existe una función de utilidad u tal que

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum_x u(x)\, p(x) \sum_x u(x)\, q(x)$$

encuentre α para que la lotería $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim \alpha\delta_3 + (1 - \alpha)\,\delta_1$.

Ejercicio 83 . Un consumidor tiene una función de utilidad dada por $u(w) = \ln w$. Se le ofrece una apuesta que le dejará una riqueza final de w_1 con probabilidad p y w_2 con probabilidad $1 - p$. ¿Cuál es el nivel de riqueza w que lo deja indiferente entre tener una riqueza w y aceptar la apuesta?

El ejercicio anterior define implícitamente el **equivalente en certidumbre** para una apuesta: el monto de dinero que lo deja indiferente entre una apuesta, y esa cantidad de dinero segura. Formalmente, para cualquier lotería p sobre niveles de riqueza, y cualquier utilidad u, definimos el equivalente en certidumbre de p como $CE_u(p) = u^{-1}(E_p(u))$. El próximo ejercicio complementa el Teorema 75.

Ejercicio 84 Usando que si $u_2(x) = f(u_1(x))$ entonces para todo z tenemos $u_2^{-1}(z) = u_1^{-1}\left(f^{-1}(z)\right)$, muestre que u_2 es más aversa al riesgo que u_1 si y sólo si $CE_{u_2}(p) \leq CE_{u_1}(p)$ para todo p.

Ejercicio 85 Sea $X = \{a, b, c\}$ y sea $\succeq$ en P (el conjunto de probabilidades sobre X) dada por

$$p \succeq q \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_c < q_c \\ o \\ p_c = q_c \text{ y } p_b \leq q_b \end{array} \right\}.$$

La interpretación es que c es muy malo y que a es mejor que b. Con argumentos similares a los utilizados para demostrar que las preferencias lexicográficas no tenían una función de utilidad, se puede demostrar que estas preferencias tampoco tienen una función de utilidad. Por tanto, no tienen una función de utilidad esperada, y ello significa que deben violar alguno de los siguientes axiomas: completas; transitivas; continuas; independencia. Determine cual o cuáles satisface y cual o cuáles viola.

Ejercicio 86 Sea $X = \{a, b, c\}$ y sea P el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X. Suponga que $p = (p_a, p_b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (q_a, q_b) = q$, y que $\succeq$ satisface independencia. Cuáles de las siguientes alternativas son Verdaderas, Falsas, o Imposibles de determinar con la información dada:

(i) $\delta_a \succeq p$

(ii) $\delta_a \succeq q$

(iii) $\delta_b \sim p$

(iv) $\left(\frac{1}{4}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

Ejercicio 87 Deberes. El temeroso. Un individuo se va a ir a estudiar un doctorado a Estados Unidos. Al terminar tendrá tres opciones: volver (v), irse a Europa (e) o quedarse en Estados Unidos (q). Él sabe que las preferencias de la gente cambian con el tiempo, y evalúa que sus utilidades posibles al terminar son u y w, que vienen dadas por: $u(v) = 1$, $u(e) = 2$ y $u(q) = 3$ o $w(v) = 3$, $w(e) = 2$ y $w(q) = 1$. Para irse a estudiar, precisa elaborar una propuesta de trabajo, y cada propuesta genera una distribución de probabilidades sobre v, e y q (por ejemplo, si en la propuesta el individuo dice que va a estudiar las causas de la pobreza en Uruguay, la probabilidad de conseguir trabajo en Europa o Estados Unidos son 0, por lo que volverá seguro). Como el individuo es muy temeroso, y piensa que la naturaleza le jugará una mala pasada con la elección de sus preferencias en el futuro, evalúa la utilidad de cada distribución de probabilidades $p = (p_v, p_e, p_q)$ con la fórmula

$$U(p) = \min \{p_v u(v) + p_e u(e) + p_q u(q), p_v w(v) + p_e w(e) + p_q w(q)\}.$$

Parte A. Calcule las utilidades de las loterías $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Parte B. Grafique la curva de indiferencia que pasa por la lotería que es degenerada en e, y grafique la curva de indiferencia que pasa por la lotería $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Parte C. Diga (no demuestre) cuáles de los axiomas del teorema de la utilidad esperada satisfacen las preferencias de este individuo, y si se viola alguno, demuestre con un ejemplo porqué se viola.

Ejercicio 88 Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\succeq$ definida sobre $P(X)$. Sea $u : X \to \mathbf{R}$ tal que

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum u(x) p(x) \geq \sum u(x) q(x)$$

y tal que $u(1) = 1$, $u(2) = 3$ y $u(3) = 5$. Para las siguientes funciones de utilidad $u_i : X \to \mathbf{R}$ determine si: u_i también representa a $\succeq$; si u_i no representa a $\succeq$; no se puede saber si u_i representa a $\succeq$.

$$\begin{aligned} u_1(1) &= 1, u_1(2) = 2, u_1(3) = 5. \\ u_2(1) &= 1, u_2(2) = 5, u_2(3) = 9. \end{aligned}$$

Ejercicio 89 Deberes. Sean $u(x) = -e^{-x}$ y $v(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$, para $a \in (0, 1)$, dos funciones de utilidad esperada definidas sobre $X = \mathbf{R}_+$. ¿Se puede decir que las preferencias representadas por u son más aversas al riesgo que las representadas por v? ¿Y lo contrario?

Ejercicio 90 Sea $X = \{1, 2, 3\}$, y suponga que para cada $p = (p_1, p_2, p_3) \in P$, p_i es la probabilidad que p le asigna a que salga el número i. Suponga además que $\delta_3 \succ \delta_2 \succ \delta_1$ y las preferencias $\succeq$ satisfacen independencia.

Parte A. Si $\delta_2 \sim \frac{2}{3}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_1$, encuentre el número α tal que $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \sim \alpha\delta_3 + (1-\alpha)\,\delta_1$.

Parte B. Si las preferencias son transitivas, ¿cuál de las siguientes aseveraciones es cierta: $\delta_2 \succ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, o $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \succ \delta_2$?

Ejercicio 91 Hay un activo que cuesta \$1 por cada unidad comprada y, por cada unidad, da retornos de \$0, \$1 y \$2 con probabilidades $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Una persona con una riqueza inicial de $\$r$ intenta decidir cuánto invertir en ese activo y cuánto poner debajo del colchón. Su función de utilidad es $u(x) = -e^{-ax}$ para $a > 0$.

Parte A. Calclule el coeficiente de aversión al riesgo, el coeficiente de Arrow-Pratt.
Parte B. Asuma que $r > \frac{1}{2a}\ln 2$ y muestre que la persona invertirá

$$c^* = \frac{1}{2a}\ln 2$$

(cuando más grande a, menos invierte en el activo riesgoso).

Ejercicio 92 Considere la siguiente familia de funciones de utilidad: $u(w) = \frac{1-e^{-aw}}{a}$ donde a es un parámetro y w la riqueza del individuo.

Parte A. Muestre que a es el coeficiente de Arrow – Pratt.
Parte B. Considere la lotería x con pagos positivos y negativos. Determine el valor de $E(u(x))$ cuando a tiende a infinito.
Parte C. Muestre que u se vuelve una función lineal en w cuando a tiende a cero (pista: usar la Regla de L'Hôpital: para $f(a)$ y $g(a)$ tendiendo a 0 cuando a tiende a 0, $\lim_{a\to 0}\frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a\to 0}\frac{f'(a)}{g'(a)}$).

La función de utilidad de los ejercicios anteriores se llama CARA (Constant Absolute Risk Aversion), porque el coeficiente de aversión al riesgo es constante en la riqueza. Un reflejo de eso, que no está bueno, es que cuando aumenta el ingreso, la persona sigue comprando la misma cantidad del activo, y eso no se corresponde con la realidad: la gente tiende a volverse relativamente menos aversa al riesgo a medida que aumenta su riqueza. Por eso, estas funciones de utilidad no se usan en muchos trabajos empíricos, y en cambio se usan las CRRA (Constant Relative Risk Aversion), que son las del ejercicio siguiente.

Ejercicio 93 Deberes. Hay un activo que cuesta \$1 por cada unidad comprada y, por cada unidad, da retornos de \$0, \$1 y \$2 con probabilidades $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Una persona con una riqueza inicial de $\$r$ intenta decidir cuánto invertir en ese activo y cuánto poner debajo del colchón. Su función de utilidad es $u(x) = x^a$ para $a \in (0, 1)$.

Parte A. Muestre que la persona invertirá

$$c^* = r\frac{2^{\frac{1}{1-a}} - 1}{2^{\frac{1}{1-a}} + 1}$$

en el activo riesgoso, y que pondrá $w - c^*$ debajo del colchón.

Parte B. Muestre que cuanto más chico es a, menos se invierte en el activo riesgoso.

Parte C. Muestre de al menos dos formas que cuanto más chico es a, más aversa al riesgo es la persona.

Ejercicio 94 Sea $u(x)$ una función de utilidad con $u'' < 0.$. Hay un activo z que se rinde $M > 0$ o 0 con probabilidad 1/2 cada uno, por unidad de dinero invertida. El individuo puede invertir la proporción que desee de su riqueza w en el activo, y el resto lo puede poner debajo del colchón.

Parte A. Si $M = 2$, ¿Cuanto invertirá en z?

Parte B. Si $M > 2$, y $u(x) = -e^{-rx}$, ¿Cuánto invertirá en z?

Parte C. ¿Cómo cambia su demanda cuando cambian r y M? Sin hacer los cálculos en la Parte B, ¿sabemos algo sobre cómo cambia la demanda cuando cambia r?

Ejercicio 95 Mostrar que si para todo $t \in P$, $U_t = \{p : p \succeq t\}$ y $L_t = \{p : t \succeq p\}$ son cerrados, entonces $\succeq$ es continua. Es decir, el axioma de continuidad que usamos antes (en las notas de preferencias y utilidad) es más fuerte que el que estamos usando en estas notas.

Ejercicio 96 Deberes. Sea z un activo que se distribuye uniformemente en $[0, 2]$, y que cuesta \$1 por unidad invertida. Sea $w = 2$ la riqueza inicial, y sea $u(x) = -x(x - 20)$ la utilidad si la riqueza final es x.

Parte A. Encuentre la inversión óptima. Explique.

Parte B. Encuentre la inversión óptima si z se distribuye uniformemente en $[0, 3]$.

Ejercicio 97 Deberes. Muestre que para una función de utilidad dada por $u(x) = -e^{-ax}$, si una lotería es mejor que otra para una riqueza inicial w, entonces sigue siendo mejor para cualquier otro nivel inicial de riqueza $w' \neq w$. Es decir, suponga que la lotería π arroja premios $x_1, ..., x_n$ con probabilidades $\pi_1, ..., \pi_n$ y que la lotería ρ arroja los mismos premios con probabilidades $\rho_1, ..., \rho_n$. Muestre que si π es mejor que ρ para el nivel de riqueza inicial w, entonces sigue siendo mejor que ρ para cualquier otro nivel de riqueza inicial w'. Como el nivel de riqueza inicial no afecta las actitudes frente al riesgo de quienes tienen esta función de utilidad, se las llama de aversión al riesgo constante. Para verificar que el nombre tiene sentido, calcule el coeficiente de aversión al riesgo de esta utilidad, y verifique que no depende del nivel de riqueza.

El ejercicio anterior está en un cierto contraste con el que viene. En "el mundo real" uno observa que la gente más rica suele ser menos aversa al riesgo que la más pobre. Alguien podría pensar que son más ricos porque son menos aversos al riesgo (y que por eso tomaron decisiones con mayores retornos esperados). Pero uno se da cuenta que en realidad quizás sea que realmente la gente se vuelve menos aversa a medida que crece su riqueza (que la misma persona, si fuera más rica, sería menos aversa). Para ilustrar esta idea, pensemos en lo siguiente: si a mi me ofrecieran 100 millones de dólares seguro, o una lotería de 500 con probabilidad $\frac{1}{2}$ o 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$, yo tomaría los 100 millones seguros. Pero si en vez de eso me ofrecen 1000 dólares seguro o una lotería de 5000 con probabilidad $\frac{1}{2}$ o 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$, tomaría la segunda. Posiblemente haya gente con una riqueza menor que la mía, que tomaría los 1000 dólares seguros. Para captar este cambio en la aversión al riesgo de la gente, los economistas usan funciones de utilidad que se vuelven menos aversas al riesgo a medida que crece la riqueza inicial.

Ejercicio 98 A un inversor con una riqueza inicial de \$$w$ y utilidad $\sqrt{w}$ le ofrecen dos loterías \$1 seguro, o una lotería en la que pierde \$1 o gana \$4 con igual probabilidad. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería. Para hacerlo, encuentre el w para el cual es indiferente; como $\sqrt{w}$ es CRRA, para niveles mayores de riqueza preferirá la lotería no degenerada.

Parte A. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería. Para hacerlo, encuentre el w para el cual es indiferente; como $\sqrt{w}$ es CRRA, para niveles mayores de riqueza preferirá la lotería no degenerada.
Parte B. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería si la utilidad es en cambio $\sqrt{\frac{w}{2}}$.

Ejercicio 99 Hay un individuo cuyas preferencias sobre loterías con niveles finales de riqueza (números reales) se pueden representar con la función de utilidad esperada $u(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$ (donde típicamente se estima que $a \approx 2$). El individuo tiene una riqueza inicial w y le ofrecen dos loterías p y q que le darán premios x_i con probabilidad p_i y q_i respectivamente, con un número finito de premios (son distribuciones discretas), $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$. Si sale el premio x_i, la riqueza final pasa a ser $w + x_i$. Muestre que si $E_p(x) > E_q(x)$, existe una riqueza inicial $\overline{w}$ tal que si el individuo tiene $w \geq \overline{w}$, preferirá p.

Ejercicio 100 Los premios posibles son $(5, 10, 15, 20, 30)$ y hay dos loterías $p = \left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$ y $q = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{9}, 0, \frac{1}{9}\right)$. Muestre que cualquier tomador de decisiones que sea averso al riesgo y cuyas preferencias cumplen independencia preferirá p a q.

Ejercicio 101 Hay una lotería que arroja un pago Alto, A, con probabilidad p, y uno Bajo, B, con probabilidad $1-p$. El individuo posee una riqueza inicial w y tiene una función de utilidad esperada u.

Parte A. Encuentre el precio π más chico al cual el individuo estaría dispuesto a vender la lotería, si fuera el dueño.

Parte B. Encuentre el precio π más alto que estaría dispuesto a pagar por la lotería si no fuera el dueño.

Parte C. ¿Por qué no son iguales los precios? Argumente que es por el efecto de la riqueza inicial sobre la aversión al riesgo. ¿Bajo qué condiciones sobre A, B, p y u son iguales?

Parte D. Sean $A = 25$, $B = 7$, $w = 9$, $p = 1/2$ y $u(x) = \sqrt{x}$. Calcule los precios de compra y venta para este caso. Verá que es más grande el de la Parte A que el de la Parte B, y eso es porque esta utilidad, y cualquiera de la forma x^a tienen aversión al riesgo decreciente en x (Verifíquelo).

Parte E. Sean $A = 25$, $B = 7$, $w = 9$, $p = 1/2$ y $u(x) = -e^{-x}$. Calcule los precios de compra y venta para este caso.

Ejercicio 102 Suponga que $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $P = \left\{p \in \mathbf{R}^3_+ : \sum p_i = 1\right\}$. El individuo tiene preferencias $\succeq \subset P \times P$ que satisfacen independencia y son transitivas. El vector $p \in P$ le asigna una probabilidad p_1 a 1, p_2 a 2 y $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ a 3. Asuma que

$$\delta_3 = (0, 0, 1) \succ (0, 1, 0) = \delta_2 \sim \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right).$$

Parte A. Muestre que las preferencias del individuo son completas.

Parte B. Encuentre una vector $u \in \mathbf{R}^3_+$ (una función de utilidad) que represente a las preferencias: $p \succeq q \Leftrightarrow \sum p_i u_i \geq \sum q_i u_i$. Pista: fíjese en la demostración del teorema de von Neumann y Morgenstern qué utilidad se le asigna a cada lotería, y trate de construir la utilidad en este caso de la misma forma. En particular, encuentre $U(\delta_i)$ para $i = 1, 2, 3$, y luego observe que

$$\begin{aligned} U(p) &= U\left(p_1(1,0,0) + (1-p_1)\left(0, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}\right)\right) = p_1 U(\delta_1) + (1-p_1) U\left(0, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}\right) \\ &= p_1 U(\delta_1) + (1-p_1) U\left(\frac{p_2}{1-p_1}(0,1,0) + \frac{p_3}{1-p_1}(0,0,1)\right) = p_1 U(\delta_1) + p_2 U(\delta_2) + p_3 U(\delta_3) \end{aligned}$$

Ejercicio 103 Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea

$$P = \left\{ p \in \mathbf{R}^3 : p_i \in [0,1] \text{ para todo } i, \text{ y } \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \right\},$$

con la interpretación que p_1 es la probabilidad que p le asigna a 1, p_2 la probabilidad de 2, y p_3 la probabilidad de 3. Suponga que unas preferencias $\succeq$ sobre P satisfacen independencia. Suponga que

$$\delta_2 = (0,1,0) \sim \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Parte A. Asuma que existe $u \in \mathbf{R}^3$ tal que $p \succeq q \Leftrightarrow u.p = \sum u_i p_i \geq \sum u_i q_i = u.q$, y utilizando esta función de utilidad muestre que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \sim \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

Parte B. Usando sólo el axioma de independencia muestre que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \sim \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 104 Calcule la utilidad esperada de un individuo que: tiene una riqueza inicial de $r = 10$; que compra 2 unidades de un activo que cuesta \$1 por unidad; que ese activo tiene un retorno aleatorio de z, por cada unidad comprada, con $z \in \mathbf{R}_+$; que z tiene una densidad dada por

$$f(z) = 2e^{-2z};$$

y la función de utilidad del individuo, para una riqueza final de w es $-e^{-3w}$.

Ejercicio 40. There are three prizes an individual can receive $x_1 = \$1$, $x_2 = \$4$ and $x_3 = \$9$.

Part A. 4% If we set $U(x_1) = 0$ and $U(x_3) = 1$, what is $U(x_2)$ according to the Von Neumann Morgenstern construction of utilities?

Part B. 4% If the individual had to pay \$4 to participate in a bet that would give \$1 with probability $\frac{5}{8}$ and \$9 with probability $\frac{3}{8}$, would that bet be actuarially fair?

Part C. 4% Suppose the individual's initial wealth is \$4, and that he has a utility function $U(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$. Would he take the bet in Part B?

Part D. 6% Suppose the individual with utility $\sqrt{x}$ has a car worth \$9 (and no other wealth) which would be worth \$1 if it caught fire, and assume that the probability of fire is 5/8. What would be a fair price for the insurance, and how much would the individual be willing to pay?

Ejercicio 41: Suponga que un agente, con utilidad sobre la riqueza $u(w) = w^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ va a un casino a jugar a la ruleta. Suponga que puede jugar a cualquiera de los juegos de la ruleta una cantidad $z \in [0, +\infty)$. (es decir, no es discreto: si quisiera, podría jugar π pesos, o $\sqrt{2}$ pesos). También implica que el individuo no tiene cota para endeudarse: puede jugar todo lo que quiera. Se supone que la ruleta tiene 0 y 00 entre las posibilidades.

Parte A. Sabiendo que la casa paga 36 a 1 lo apostado a un numero cualquiera: ¿cual es la apuesta óptima del agente dependiendo del parámetro α ?

Parte B. Sabiendo que la casa paga 2 a 1 lo apostado a color: ¿cual es la apuesta óptima del agente dependiento del parámetro α?

Parte C. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente presenta aversión al riesgo

Parte D. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente es amante del riesgo (es decir, su función de utilidad es convexa)

Parte E. Encuentre el rango de valores para α para los cuales el agente es neutral al riesgo (es decir, su función de utilidad es convexa y cóncava)

Parte F ¿Que relación encuentra entre los resultados de las partes A y B con las partes C a E?

Ejercicio 42 Sea $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad sobre estados, definida sobre niveles de riqueza.

Parte A. Pruebe que si u es de la forma: $u(x) = \alpha x + \beta$, entonces, para toda distribución de probabilidades F (continua o discreta) sobre la variable aleatoria X (definida como riqueza) se cumple que:

$$\mathbb{E}_F(u(X)) = u(\mathbb{E}_F(X))$$

A este tipo de funciones se les llama **funciones afines** y a agentes que presentan funciones lineales o afines se los llama **neutrales al riesgo**. Interprete esta definición.

Parte B. En general, se define función lineal a aquella que, dados $x, y \in \mathbb{R}_+$ cumple que:

$$u(\lambda x + (1-\lambda y)) = \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y) \qquad \text{para todo } \lambda \in [0,1]$$

Pruebe que si u es diferenciable dos veces, si u es lineal, obtenemos que $u'' = 0$. (**Sugerencia:** pruebe que este tipo de funciones de utilidad son de agentes tanto amantes del riesgo como aversos al riesgo)

Parte C. Asumiendo que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pruebe que si u no es afín, entonces existe una distribución F_u tal que

$$\mathbb{E}_{F_u}(u(X)) \neq u(\mathbb{E}_{F_u}(X))$$

(**Sugerencia:** Estudie el significado de que una función no sea afín, e intente encontrar una distribución F_u discreta)

Ejercicio 43. Hay un agente con función de utilidad sobre la riqueza $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con u diferenciable dos veces (es decir, existen u' y u'') tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$. Suponga ademas, que el individuo cuenta con una riqueza fija w. Suponga ahora que se le presenta la siguiente lotería:

$$\begin{cases} \text{gana } 100\varepsilon\% \text{ de } w & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} + \pi \\ \text{pierde } 100\varepsilon\% \text{ de } w & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} - \pi \end{cases}$$

Parte A. Sea W la riqueza esperada de enfrentar esta lotería. Pruebe que $\mathbb{E}(W) = w(1 + 2\pi\varepsilon)$. Usando esto, pruebe que $\mathbb{E}(W) \to w$ cuando $\varepsilon \to 0$.También vea que si $\pi = 0$ entonces $\mathbb{E}(W) = w$. Interprete.

Ejercicio 105 A un inversor con riqueza inicial W le ofrecen una oportunidad de inversión con la que podría ganar \$$h$ o perder \$$h$. Por su parte, $\pi(W,h)$ es la probabilidad del resultado favorable \$$h$ que lo deja indiferente entre aceptar y rechazar la propuesta. Sabemos que el inversor intenta maximizar su utilidad esperada, $E(u(W))$.

Parte A. Demuestre que $\pi(W,h) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}hr(W)$, donde $r(W)$ es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt visto en clase. (Pista: use el desarrollo de Taylor). Interprete.
Parte B. Considere la función de utilidad $u(W) = -e^{-\gamma W}$ y escriba π.
Parte C. Ahora defina $\theta = \frac{h}{W}$, o sea el pago como proporción de la riqueza del inversor. Reescriba π como función de θ y del coeficiente de aversión al riesgo relativo $\sigma(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}W$. Interprete. Escriba π para la función de utilidad $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.
Parte D. ¿En qué medida los resultados de la parte C pueden ayudar a interpretar el siguiente párrafo?

"Históricamente, los retornos del mercado accionario han sido estacionarios (misma media a lo largo del tiempo), mientras que la riqueza agregada ha ido en aumento. Por lo tanto, los inversores requieren un retorno esperado con independencia de la cantidad de riqueza en juego".

Definimos **premio en probabilidad relativo por riesgo** a la probabilidad $\pi(\varepsilon)$ que depende de la cantidad que puede ganar (o perder) a aquella probabilidad que hace que el individuo sea indiferente entre tomar la loteria y quedarse con la riqueza w. Esto es, $\pi(\varepsilon)$ se define **implícitamente** a partir de la siguiente ecuación:

$$u(w) = \left[\frac{1}{2} + \pi(\varepsilon)\right] u[w(1+\varepsilon)] + \left[\frac{1}{2} - \pi(\varepsilon)\right] u[w(1-\varepsilon)]$$

Parte B. Si el agente es averso al riesgo, argumente (con palabras) porque debería suceder que $\pi(\varepsilon) \geq 0$ para todo $\varepsilon > 0$

Parte C. Pruebe que $\pi(0) = 0$. Para esto, diferencie ambos lados de la igualdad respecto de ε y pruebe que:

$$\pi(\varepsilon)\{u'(w(1+\varepsilon)) + u'(w(1-\varepsilon))\}w + \pi'(\varepsilon)\{u(w(1+\varepsilon)) - u(w(1-\varepsilon))\} + \frac{1}{2}[u'(w(1+\varepsilon)) - u'(w(1-\varepsilon))]w = 0$$

Y luego valúe esta igualdad en $\varepsilon = 0$

Parte D. Pruebe que $\pi'(0) = -\alpha\frac{u''(w)w}{u'(w)} = \alpha\sigma(w)$ con $\sigma(w)$ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt y $\alpha \in \mathbb{R}$ (**Sugerencia:** diferencie la igualdad encontrada en el punto anterior y valúela luego en $\varepsilon = 0$. No se asusten: son muchos terminos, pero cuando $\varepsilon = 0$ luego son facilmente simplificables). Esto nos dice que el coeficiente de aversión relativa al riesgo mide la tasa a la cual el premio en probabilidad relativo por riesgo crece cuando estamos en situaciones con poco riesgo (medidos por ε)

Ejercicio 44 (Mas Collel). Pruebe las siguientes afirmaciones:
Parte A. Una función de utilidad sobre estados $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente, tiene coeficiente de aversión relativa al riesgo $\sigma = -\frac{u''(x)}{u'(x)}x$ constante para todo $x \in \mathbb{R}_+$ si y solo si $u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$ con $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$

Parte B. Una función de utilidad sobre estados $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ creciente, tiene coeficiente de aversión relativa al riesgo constante e igual a 1 para todo $x \in \mathbb{R}_+$ si y solo si $u(x) = \beta\ln(x) + \gamma$ con $\beta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$
Parte C. $\lim_{\rho\to 1} \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} = \ln(x)$ para todo $x > 0$.

Sugerencias: Para las Partes A y B utilice lo que conoce de resolución de ecuaciones diferenciales, de matematica 3. Para la Parte C utilice la regla de L'Hopital, que dice que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejercicio 45 (Mas Collel) Sea $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad de estados sobre riqueza, con la forma:

$$u(x) = \beta x^2 + \gamma x$$

Parte A. Pruebe que la utilidad esperada para cualquier distribución F depende unicamente del valor esperado de la riqueza bajo $F, \mathbb{E}_F(X)$ y de su varianza, $\mathbb{V}_F(X)$.

Parte B ¿Para que valores de x y valores de los parametros β y γ es la función de utilidad creciente y cóncava?

Ejercicio 47. Suponga que el espacio de estados es $X = \mathbb{R}^2_+$. Es decir, los estados son las posibles canastas de consumo . Suponga que la función de utilidad sobre estados es una Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$. Suponga que los precios de los bienes son $p_1, p_2 > 0$ y que el ingreso es $w > 0$.

Parte A. Pruebe que la solución de problema del consumidor, sin incertidumbre, consiste en elegir consumos óptimos (x_1^*, x_2^*) tales que

$$x_1^* = \alpha \frac{w}{p_1} \text{ y } x_2^* = (1-\alpha) \frac{w}{p_2}$$

Parte B. Suponga que ahora, el agente no puede comprar directamente los bienes, sino que puede comprar activos A_1 y A_2 tales que si compro z_1 unidades del activo A_1, obtengo $z_1 X_1$ unidades del bien 1, con X_1 una variable aletoria que toma valores positivos. De la misma manera, si compro z_2 unidades del activo A_2, obtengo $z_2 X_2$ unidades del bien 2, con X_2 otra variable aleatoria que toma también valores positivos. El vector aleatorio (X_1, X_2) tiene densidad $f(x_1, x_2)$ con $f(x_1, x_2) > 0$ siempre que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Es decir:

$$(X_1, X_2) \sim f(x_1, x_2)$$

Cada unidad del activo A_1 cuesta q_1 pesos y cada unidad del activo A_2 cuesta q_2 pesos. explique con palabras, que el problema a resolver es el de elegir z_1, z_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(z_1 x_1, z_2 x_2) f(x_1 x_2) \, dx_1 dx_2 \\ \text{sujeto a} \quad : \quad & q_1 z_1 + q_2 z_2 \leq w \end{aligned}$$

Parte C. Suponiendo que existe la esperanza de la variable aleatoria $H = X_1^{\alpha} X_2^{1-\alpha} = u(X_1, X_2)$, pruebe que, para el caso de $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ se cumple que:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(z_1 x_1, z_2 x_2) f(x_1 x_2) \, dx_1 dx_2 = u(z_1, z_2) \mathbb{E}[u(X_1, X_2)] = u(z_1, z_2) \mathbb{E}(H)$$

Parte D. Utilizando la parte anterior, y sin resolver explícitamente el problema, pruebe que la solución al problema planteado en la Parte B consiste en elegir cantidades de activos (z_1^*, z_2^*) tales que:

$$z_1^* = \alpha \frac{w}{q_1} \text{ y } z_2^* = (1-\alpha) \frac{w}{q_2}$$

Parte E. Resuelva el mismo problema cuando $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con

$$\begin{aligned} X_1 &\sim U[0,1] \\ X_2 &\sim U[0,2] \end{aligned}$$

Interprete.

Ejercicio 106 Deberes (basado en Mas-Collel) Suponga que una agencia de seguridad nacional esta pensando en establecer un criterio bajo el cual un área que es suceptible de enfrentar huracanes sea evacuada o no. La probabilidad de que haya un huracán es de 1%. Hay 4 posibles resultados:

1. No es necesario evacuar la ciudad (no hay huracán) y no se realiza la evacuación (que llamaremos escenario A)
2. No es necesario evacuar (no hay huracán) y se realiza una evacuación innecesaria (que llamaremos escenario B)
3. Es neceasario evacuar (hay huracán) y se hace la evacuación (que llamaremos escenario C)
4. Es necesario evacuar, pero no se realiza una evacuación (que llamaremos escenario D)

Suponga que la agencia está indiferente entre el escenario B y una loteria que con probabilidad 0.9 da el escenario A y con probabilidad 0.1 da el escenario D. También suponga que la agencia esta indiferente entre el escenario C y una lotería que con probabilidad 0.95 da el escenario A y con probabilidad 0.05 da el escenario D. Suponga también que las preferencias son tales que el escenario A es estrictamente preferido al escenario D (y ademas, son el mejor y el peor) y que las preferencias sobre loterias sobre los estados son tales que se cumplen los supuestos del teorema de Von Neumman y Morgenstern.

Parte A. Construya una función de utilidad sobre estados para calcular la utilidad esperada de la agencia (Sugerencia: Siempre se puede suponer que la utilidad de la peor lotería degenerada es 0 y que la utilidad de la mejor loteria degenerada es 1)

Parte B. Considere los siguientes criterios:

- Criterio 1: Se evacúa el 90% de los casos en los que un huracán pasa por la ciudad; si no hay huracán, se evacúa en el 10% de los casos;
- Criterio 2: Se evacúa el 95% de los casos en los que un huracán pasa por la ciudad; si no hay huracán, se evacúa en el 15% de los casos.

Derive las distribuciones de probabilidad de los 4 escenarios bajo ambos criterios, y en base a la Parte A encuentre cual de los dos criterios debería ser escogido por la agencia.

Ejercicio 48 (Basado en Mas Collel) El siguiente ejercicio es un argumento por el cual a veces se pide que la función de utilidad sobre riqueza $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sea acotada. Decimos que una funcion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es acotada si existe $K \in \mathbb{R}_+$ tal que $|u(x)| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$

Parte A. Suponga que un agente tiene utilidad sobre la riqueza $u(w)$ tal que u es una función no acotada. Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un nivel de riqueza x_n tal que $u(x_n) > 2^n$

Parte B. A este agente se le presenta la siguiente apuesta: "Se tira una moneda hasta que sale cara. Si sale cara en la $n-$ésima tirada, se paga x_n al agente" con la secuencia x_n la definida en el punto anterior. Pruebe que la utilidad esperada de esta lotería es infinito (**Sugerencia:** utilice el primer criterio de comparación para series infinitas que dice si tengo dos sucesiones tales que $a_n > b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_1^\infty b_n = +\infty$ entonces $\sum_0^\infty a_n > \sum_0^\infty b_n = +\infty \Longrightarrow \sum_0^\infty a_n = +\infty$)

Parte C. Suponga que usted tiene una casa de apuestas, y que hay dos tipos de personas a las cuales puede enfrentarse: aquellas con función de utilidad $u(x) = \log(x)$ y aquellas con funcion de utilidad $v(x) = \sqrt{x} - 5$. En base a lo visto en las partes anteriores, diseñe una loteria en base a tiradas repetidas de una moneda, tal que cualquiera de los dos individuos estaría dispuestos a pagar cualquier suma de dinero por esta lotería. ¿Encuentra algo extraño en esta aseveración, si quisiera testearse a nivel empírico?

Ejercicio 49. Suponga que tiene un individuo con función de utilidad sobre riqueza $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Este individuo tiene riqueza $w = 1$. Al individuo se le presentan dos activos: un activo A_1 que por unidad comprada, paga un rendimiento de $R_1 = (1 + \tau_1)$ con τ_1 la "tasa de interes", aleatorio, y un activo A_2 que paga un rendimiento R_2 aleatorio por unidad comprada. Ambos activos cuestan $1 la unidad. Asuma, asimismo, que el individuo puede comprar cualquier cantidad de estos activos (es decir, puede llegar a comprar mas que lo que puede con la riqueza w) Suponga que los rendimientos aleatorios de ambos activos, (R_1, R_2) son un vector aleatorio con la siguiente función de densidad:

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } r_1 + r_2 \leq 2, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Parte A. Bosqueje el soporte de la densidad f (es decir, el conjunto en $\mathbb{R}^2_+$ donde $f > 0$)
Parte B. Encuentre las densidades marginales para R_1 y R_2
Parte C. Calcule $\mathbb{E}(R_1)$, $\mathbb{E}(R_2)$ y $\mathbf{Cov}(R_1, R_2)$
Parte D. Argumente (con palabras) que el problema que debe resolver el agente es el de elegir $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+$ para maximizar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u[w - z_1(1 - r_1) - z_2(1 - r_2)] f(r_1, r_2) \, dr_1 dr_2$$

Parte E Usando la Parte B encuentre las demandas óptimas de estos activos si existiera solamente el activo 1 y el activo 2: es decir, si llamamos $g_1(r_1)$ a la marginal de R_1, encuentre la solución al problema de elegir z_1 para maximizar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u[w - z_1(1 - r_1)] g_1(r_1) \, dr_1$$

y análogamente para el activo A_2.
Parte F. Sin resolver el problema planteado en la Parte D, investigue si las soluciones separadas para cada activo encontradas en la Parte E son también solución del problema de la Parte D. (Sugerencia: encuentre las condiciones de primer órden del problema de la Parte D sin resolverlas, e investigue si las soluciones particulares que encontró en la Parte E la satisfacen)
Parte G. Explique, en base a los datos que a encontrado a lo largo del ejercicio, porque pasa lo que vió en la parte F (Sugerencia: investigue los momentos encontrados para la distribución f)

Ejercicio 50. Un fabricante de lámparas de halógeno es monopolista en el mercado local. La intendencia municipal le solicita un presupuesto para hacer el alumbrado público de un parque: que cotice para colocar una lámpara. El fabricante de lámparas debe elegir la calidad de la unidad que venderá. La calidad viene dada por la duración esperada de la bombita: se supone que si llamamos T a la duracion de la lampara, tenemos que $T \sim \exp(\lambda)$, o más concretamente, T tiene densidad

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{1}{\lambda} t\right) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Puede probarse que $\mathbb{E}(T) = \lambda$. Justamente es el parámetro λ el indicador de "calidad" de la lámpara. El tiempo se mide en días. Por otra parte, el fabricante tiene un costo para la tecnología de producción de calidad $\lambda : c(\lambda) = \rho\lambda^{\beta}$ con $\rho, \beta > 0$. El contrato que propone la intendencia es el siguiente: si las lámparas duran t días, pagará $P(t) = at$, con $a > 0$ El fabricante debe elegir λ para maximizar beneficios.

Parte A. Dada una calidad λ, demuestre que la utilidad esperada del fabricante es $u(\lambda) = a\lambda - \rho\lambda^{\beta}$

Parte B. Encuentre la calidad óptima λ^* dependiendo de los parámetros a y ρ

Parte C. Suponga que $\beta = 1$ y que en el contrato, se exige una duración mínima de D días: si la lampara se rompe antes de los D dìas, la intendencia no paga nada por ella. Plantee y resuelva el problema: ¿como cambia la solución del problema anterior?

Parte D ¿ Cual es el tiempo esperado de duración de las lamparas en ambos problemas?

Ejercicio 51. Tenemos un conductor, que puede chocar o no chocar. Esto depende de la cantidad de esfuerzo que realiza al conducir, teniendo en cuenta las señales de tránsito, respetando los límites de velocidad, etc. El nivel de esfuerzo que realiza afecta la probabilidad de chocar: explicitamente, suponemos que el nivel de esfuerzo es una variable $e \in [0,1]$, tenemos que $\Pr[\text{chocar} \mid e] = 1 - e$. Obviamente, tendremos entonces que $\Pr[\text{no chocar} \mid e] = e$, por lo que el esfuerzo se interpretara como la probabilidad de no tener accidentes de transito. La utilidad del individuo en los siguientes estados de la naturaleza es la siguiente:

- Utilidad de esforzarse e si no choca: $-e^2$
- Utilidad de esforzarse e si choca: $-(a+s) - e^2$

Con $a \in (0,1)$ y $s \in (0,1)$ las desutilidades por la destrucción del auto (a) y por los gastos médicos luego del accidente (s). El conductor elige el nivel de esfuerzo óptimo $e \in [0,1]$

Parte A. Plante el problema de elección del nivel de esfuerzo óptimo del conductor, suponiendo que puede aplicarsele el teorema de la utilidad esperada.

Parte B. Encuentre el nivel de esfuerzo óptimo e^* dependiendo de los parametros (a, s). Encuentra la utilidad esperada en el nivel de esfuerzo óptimo e^*. ¿Como cambia la solución e^* ante cambios en los parámetros? Explique la intuición detrás de los resultados

Parte C. Suponga que ahora se le obliga al conductor usar cinturón de seguridad. Esto hace que, en caso de accidente, el costo por gastos médicos sea $s' < s$. Sin embargo, por tener que utilizar cinturón de seguridad, tiene desutilidad $c \in (0,1)$. Es decir:

- Utilidad de esforzarse e si no choca: $-e^2 - c$
- Utilidad de esforzarse e si choca: $-(a+s') - e^2 - c$

Plantee y resuelva para e. Encuentre la utilidad esperada para el valor de $\overline{e}$ óptimo

Parte D. Suponga ahora que se le da a elegir libremente al conductor entre usar cinturón de seguridad y no usarlo. ¿Cual es la elección óptima del conductor? (**Sugerencia:** Compare las utilidades esperadas maximas de los puntos **(b)** y **(c)**

Parte E. En no mas de 5 líneas, y sin usar ninguna formula matemática, discuta la siguiente afirmación: "La obligatoriedad del cinturón de seguridad ha contribuido a la disminución de los accidentes de tránsito"

Ejercicio 107 Supongamos que hay exactamente dos activos, A y B y dos estados de la naturaleza, 1 y 2. Los pagos de los activos en los dos estados son:

	Activo A	Activo B
Estado 1	5	20
Estado 2	6	0

Sean x_A y x_B las cantidades de activos A y B demandadas por el comprador. Si llega a importar, asuma $x_A, x_B \geq 0$. Que haya dos activos quiere decir que el individuo debe invertir todo su capital en esos activos (no puede quedárselo en dinero).

Decimos que la Relación Fundamental de Valuación (RFV) se cumple si para ambos activos, en el óptimo,

$$E\left(u'\left(w\right)\left(1+r_A\right)\right) = E\left(u'\left(w\right)\left(1+r_B\right)\right)$$

donde r_A y r_B son los retornos (en porcentaje) de los activos. Suponga que la utilidad del individuo es $u\left(w\right) = \sqrt{w}$, que la riqueza inicial es 390, que la probabilidad del estado 1 es $\frac{1}{3}$ y que $p_A = p_B = 2$.

Parte A. Calcule el portafolio óptimo del individuo, y verifique que se cumple la RFV.

Parte B. Calcule el portafolio óptimo si los retornos vienen dados por

	Activo A	Activo B
Estado 1	6	18
Estado 2	6	0

¿se cumple la RFV?

Parte C. Calcule el portafolio óptimo con estos retornos, y verifique si se cumple la RFV

	Activo A	Activo B
Estado 1	6	17
Estado 2	6	0

Ejercicio 108 Hay un trabajador de una línea de ensamblaje, cuya probabilidad de tener un accidente depende del esfuerzo que realice en cuidarse (respetar manuales de procedimiento, usar vestimenta y calzado adecuado, nivel de atención, etc). Supondremos que el nivel de esfuerzo es una variable $e \in [0,1]$ y obviamente la probabilidad de tener un accidente depende negativamente de él, en particular asumiremos $\Pr\left(\text{accidente } \mid e\right) = 1 - e$, de manera que el esfuerzo se interpretará como la probabilidad de no tener accidentes. El problema es que el esfuerzo le genera desutilidad al trabajador, cuya función de utilidad respecto al esfuerzo, el dinero w, y el costo c de usar casco (que no reduce la probabilidad de accidente), viene dada por $u\left(w,e,c\right) = w - e^2 - c$. En caso que ocurra un accidente asumiremos que el trabajador quedará imposibilitado de trabajar y más allá de que tenga un subsidio por enfermedad el mismo le implica cobrar $\$p$ menos de lo que sería su salario normal (llame s al salario, y p a la pérdida). Asuma que $p \in (0,2)$.

Parte A. Plantee el problema de elección del nivel de esfuerzo óptimo por parte del trabajador, suponiendo que es aplicable el teorema de utilidad esperada.

Parte B. Encuentre el nivel de esfuerzo óptimo e^*, dependiendo del parámetro p. Encuentre la utilidad esperada en dicho nivel óptimo de esfuerzo. ¿Cómo cambia la elección de e^* ante cambios en el parámetro p?

Parte C. Suponga que ahora se le obliga al trabajador a usar casco de seguridad. Esto hace que en caso de accidente, y en virtud que se han tomado mayores precauciones, se aumente lo que se le paga al trabajador como subsidio, de manera que la cantidad de salario perdida es ahora p' con $p' < p$. Sin embargo la utilización del casco, le genera una desutilidad de c, como dijimos anteriormente. Plantee el problema y resuelva en este caso el esfuerzo óptimo para el trabajador. Encuentre la utilidad esperada en el nivel óptimo.

Parte D. Suponga que ahora se le da la libertad al trabajador de utilizar o no el casco de seguridad. ¿cuál es la elección óptima del trabajador?

Parte E. Discuta brevemente la siguiente afirmación (dé sólo la intuición sin utilización de fórmulas matemáticas):

"La obligatoriedad del uso del casco de seguridad en las industrias, ha contribuido a reducir el número de accidentes laborales"

Ejercicio 109 An investor chooses a portfolio comprising one risky asset with expected rate of return $\mu_Z = 0.15$, and standard deviation of return $\sigma_Z = 0.40$, and lending or borrowing at a risk-free rate, $r_0 = 7\%$. Let μ_P denote the expected rate of return on the investor's portfolio, and let σ_P denote the standard deviation of the rate of return on the portfolio. Let q denote the proportion of the portfolio invested in the risky asset.

Part A. In a diagram, sketch the trade-off of feasible pairs of (μ_P, σ_P) (i.e. pairs that the investor could choose). In the diagram, identify the points for which $q = 0$ (all capital invested at the risk-free rate) and $q = 1$ (all capital invested in the risky asset). Show that the slope of the trade-off equals 0.20.

Part B. Assume that the investor acts to maximise the objective function: $G(\mu_P, \sigma_P) = \mu_P - 0.5\sigma_P^2$. Sketch the indifference curves for the investor in (μ_P, σ_P) space. Show that the slope of each indifference curve for this objective function equals σ_P (i.e. $d\mu_P/d\sigma_P = \sigma_P$). Generalise your answer to show that if $G(\mu_P, \sigma_P) = \mu_P - \alpha\sigma_P^2$, then the slope of each indifference curve equals $2\alpha\sigma_P$. (Note: is a parameter that expresses the investor's risk preferences.)

Part C. In a diagram, depict the pair (μ_P, σ_P) corresponding to an optimal portfolio. Using the information given above, show that for this investor, one-half of the portfolio is invested in the risky asset and one-half in the risk-free asset, i.e. $q = 1/2$. [Hint: $\sigma_P = q\sigma_Z$, and equate the slope of the indifference curve at the optimum with the slope of the trade-off of feasible portfolios.] Generalise your result to show that $q = (\mu_Z - r_0)/2\alpha\sigma^2 Z$.

Part C. Suppose that the interest rate increases to 11% (μ_Z and σ_Z, remaining unchanged). Sketch the effect on the optimal portfolio in a diagram and calculate the new value of q, given the numerical information provided.

53. La utilidad es $u(m) = \ln(m)$, la riqueza inicial es $m = 30$. En una apuesta, si sale $hh = +20$, $ht = -24$, $tt = +4$, $th = -6$.

53.A. Cual es el valor esperado? $EV = \frac{20+4-30}{4} = -\frac{3}{2}$

53.B. Cual es la utilidad esperada? $Eu = \frac{\ln(50)+\ln(6)+\ln(34)+\ln(24)}{4} = 3.102$

53.C. Cuanto esta dispuesto a pagar para salirse de la apuesta? $u(30 - x) = 3.102 \Leftrightarrow \ln(30 - x) = 3.102$, Solution is: 7.7576

There's an asset that costs $p = 1$ and that has returns of 4 and 16 in states 1 and 2 respectively; the states have probability 1/2 each. The consumer has an initial wealth of w and a utility function for consumptions in periods 0 and 1 given by

$$U\left(c_0, c_1\right)=\frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\delta E\left(\frac{c_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

where E is the expectation operator. Find how much will the individual save.

The individual must choose s to maximize

$$\begin{aligned}
& \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\delta E\left(\frac{c_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \\
s.t.c_0 &= w-s \\
c_{11} &= 4s \\
c_{12} &= 16s
\end{aligned}$$

Substituting, we get

$$U=\frac{(w-s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\frac{\delta}{2}\left[\frac{(4s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\frac{(16s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]=\frac{(w-s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\frac{\delta}{2}\left[\frac{4^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\frac{16^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]s^{1-\gamma}$$

and the first order condition is

$$U=-\left(w-s\right)^{-\gamma}+\frac{\delta}{2}\left[4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right]s^{-\gamma}=0 \Leftrightarrow \left(w-s\right)^{-\gamma}=\frac{\delta}{2}\left[4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right]s^{-\gamma}$$

so that elevating both sides to the power of $-1/\gamma$ we get

$$w-s=\left[\frac{\delta}{2}\left(4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right)\right]^{\frac{-1}{\gamma}}s \Leftrightarrow s=\frac{w}{1+\left[\frac{\delta}{2}\left(4^{1-\gamma}+16^{1-\gamma}\right)\right]^{\frac{-1}{\gamma}}}$$

Suppose asset returns are given by

	Asset A	Asset B
State 1	5	20
State 2	6	0

and that the probability of state 1 is 1/3 while that of state 2 is 2/3. Suppose that the von Neumann Morgenstern utility function (or the Bernoulli utility function) is $u\left(c_0, c_1\right)=\sqrt{c_0}+\delta E\sqrt{c_1}$ (the price of the consumption good is 1 in both periods) that the initial wealth level of the individual is w, and that $p_A=p_B=2$. Calculate the optimal portfolio for this individual.

He must choose c_0, x_A, x_B to maximize

$$\begin{aligned}
& \sqrt{c_0}+\delta E\left(\sqrt{c_1}\right) \\
w &= c_0+2x_A+2x_B \\
c_{11} &= 5x_A+20x_B \\
c_{12} &= 6x_A
\end{aligned}$$

Getting rid of x_B using the budget constraint, we see that the individual must choose c_0 and x_A to maximize

$$\sqrt{c_0}+\delta\left(\frac{1}{3}\sqrt{5x_A+20\frac{w-c_0-2x_A}{2}}+\frac{2}{3}\sqrt{6x_A}\right)$$

The first order conditions with respect to c_0 and x_A imply

$$c_{11}=\delta^2\frac{100}{9}c_0 \quad \text{and} \quad 8c_{11}=75x_A$$

respectively. Using $c_{11} = 5x_A + 20\frac{w-c_0-2x_A}{2}$ (which contains the budget constraint and $c_{11} = 5x_A + 20x_B$) we get

$$c_0 = 9\frac{w}{26\delta^2+9}, \quad \text{and} \quad x_A = 32w\frac{\delta^2}{78\delta^2+27}.$$

Then, using the budget constraint we get $x_B = 7w\frac{\delta^2}{78\delta^2+27}$.

If, for example $w = 795$ and $\delta = \frac{3}{20}\sqrt{5}$ we get $c_0 = 600$ and $x_A = 80$ and $x_B = 35/2$.

Ejercicio 108.A. El trabajador debe elegir $e \in [0,1]$ y $x \in \{0,1\}$ para maximizar

$$e\left(w - e^2 - xc\right) + (1-e)\left(w - p - e^2 - xc\right).$$

La variable x dice si usó casco o no.

108.B. Obviamente va a elegir $x = 0$. Por otro lado, como la función objetivo es cóncava, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes, y dan $2e^* = p \Leftrightarrow e^* = p/2$. La utilidad esperada es

$$e\left(w - e^2\right) + (1-e)\left(w - p - e^2\right) = \frac{1}{4}p^2 - p + w.$$

108.C. Cuando cae p, cae el esfuerzo óptimo de $\frac{p}{2}$ a $\frac{p'}{2}$. La utilidad esperada es $\frac{1}{4}p'^2 - p' + w - c$.

108.D. El trabajador debe elegir entre $\frac{1}{4}p^2 - p + w$ y $\frac{1}{4}p'^2 - p' + w - c$, y usará casco si y sólo si $\frac{1}{4}p'^2 - p' - c \geq \frac{1}{4}p^2 - p$ o $c \leq p'\left(\frac{1}{4}p' - 1\right) - p\left(\frac{1}{4}p - 1\right)$.

108.E. La afirmación es falsa: cuando se fuerza el uso del casco, baja el nivel de prevención.

Ejercicio 91.A. Le coeficiente de aversión al riesgo es

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-a^2e^{-ax}}{ae^{-ax}} = a$$

91.B. El problema es el de elegir c para maximizar

$$U = -\frac{1}{4}e^{-a(r-c)} - \frac{1}{4}e^{-ar} - \frac{1}{2}e^{-a(r+c)} = -\frac{e^{-ar}}{4}\left(e^{ac} + 1 + 2e^{-ac}\right).$$

Como

$$\frac{d\left(e^{ac} + 1 + 2e^{-ac}\right)}{dc} = \frac{a}{e^{-ac}}\left(1 - 2e^{-2ac)}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2e^{-2ac}$$

obtenemos $\frac{1}{2a}\ln 2 = c^*$.

Ejercicio 110 Sea G el conjunto de apuestas (distribuciones de probabilidad) sobre un número finito de resultados $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbf{R}_+$, con $a_i > a_{i-1}$. Para cada apuesta $p = (p_1, ..., p_n) \in G$, sea $h(p)$ el resultado máximo que se puede alcanzar en $p : h(p) = \max\{a_k : p_k > 0\}$. Definimos ahora una función de utilidad $V(p)$, que valora los incrementos sobre $h(p) : V(p) = \sum p_i (a_i - h(p))$.

Parte A. Calcule el valor esperado y la utilidad esperada de las siguientes apuestas sobre $\{0,1,2,3,4,5\}$: $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$ y $q = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

Parte B. Muestre que para todo a_i y a_j, las loterías que son degeneradas en a_i y a_j arrojan la misma utilidad.

Parte C. Muestre que la relación de preferencias no es monótona, en el sentido que no se cumple que $(1-\alpha, 0, ..., 0, \alpha) \succ (1-\beta, 0, ..., 0, \beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta$. Es decir, cuando aumenta la probabilidad de un resultado bueno, a_n, y baja la de uno malo (a_1), "debería" aumentar la utilidad (si son monótonas).

Soluciones Utilidad Esperada

Ejercicio 58 (por Manuel Macera). Si las preferencias son transitivas y cumplen independencia tenemos

$$p \succ q \Rightarrow \lambda p + (1-\lambda) r \succeq \lambda q + (1-\lambda) r$$

y si tuviéramos $\lambda q+(1-\lambda)r \succeq \lambda p+(1-\lambda)r$ obtendríamos (usando la flecha que "vuelve" en Independencia) $q \succeq p$, por lo que concluimos que $\lambda p + (1-\lambda)r \succ \lambda q + (1-\lambda)r$. En forma similar,

$$p \succ r \Rightarrow (1-\lambda)p + \lambda p \succ (1-\lambda)r + \lambda p$$

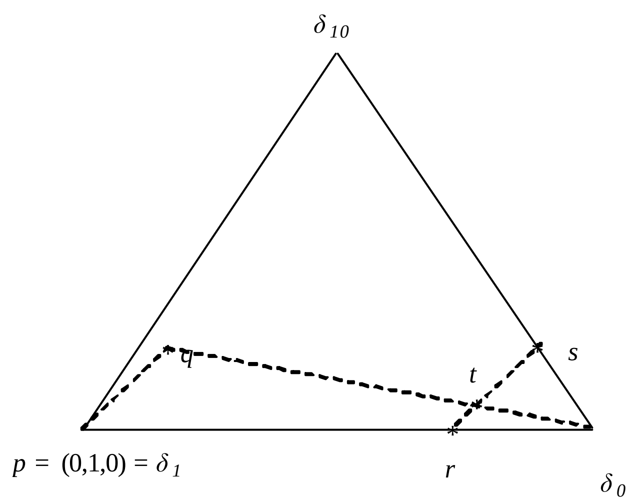
por lo que juntando ambos resultados tenemos $p \succ (1-\lambda)r + \lambda p \succ \lambda q + (1-\lambda)r$ y por transitividad $p \succ \lambda q + (1-\lambda)r$. que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 59. Se viola Independencia. Como $r = \frac{11}{100}p + \frac{89}{100}\delta_0$ se cumple que

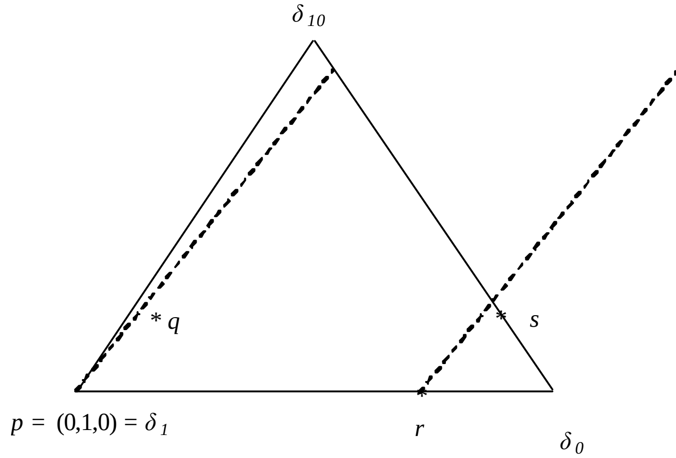
$$p \succ q \Rightarrow r = \frac{11}{100}p + \frac{89}{100}\delta_0 \succ \frac{11}{100}q + \frac{89}{100}\delta_0 = \left(\frac{11}{1000}, \frac{979}{10\,000}, \frac{8911}{10\,000}\right) = t.$$

Pero como $s \succ r$, tenemos que $t = \frac{11}{100}s + \frac{89}{100}r \succ \frac{11}{100}r + \frac{89}{100}r = r$ lo que constituye una contradicción.

El siguiente dibujo ilustra la construcción de t :



El próximo ilustra por qué no pueden ser rectas paralelas las curvas de indiferencia



(por Manuel Macera). Para empezar dibujemos las loterías involucradas en el simplex de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que la lotería r es indiferente a alguna combinación de la lotería degenerada en 0 (δ_0) y la lotería degenerada en 1 (δ_1). En particular:

$$r = \frac{11}{100}\delta_1 + \frac{89}{100}\delta_0$$

y yace en el lado del triángulo que une ambas loterías degeneradas. De hecho, si la lotería z se encuentra sobre el lado $\overline{\delta_x\delta_y}$, entonces se cumple $z = \lambda\delta_x + (1-\lambda)\delta_y$ para algún λ, y además:

$$\frac{\overline{\delta_x z}}{\overline{\delta_x\delta_y}} = 1-\lambda \quad \text{y} \quad \frac{\overline{\delta_y z}}{\overline{\delta_x\delta_y}} = \lambda$$

Pensemos ahora cómo son las curvas de indiferencias (vamos a asumir razonablemente que $\delta_{10} \succ \delta_1 \succ \delta_0$). Sabemos que existe $\beta \in [0,1]$ tal que $p \sim \beta\delta_0 + (1-\beta)\delta_{10}$, lo cual quiere decir que la curva de indiferencia de p pasa por un punto sobre la base del triángulo que vamos a llamar A. Sabemos además que es una recta y que si el individuo reveló $p \succ q$, tiene que pasar a la derecha de q, pues $\delta_{10} \succ p$. No sabemos exactamente donde queda A pero podemos restringir su valor. Si $p \succ q$ entonces:

$$\begin{aligned} u(1) &> \frac{10}{100}u(10) + \frac{89}{100}u(1) + \frac{1}{100}u(0) \Leftrightarrow u(1) > \frac{10}{11}u(10) + \frac{1}{11}u(0) \Leftrightarrow \\ p &\succ \frac{10}{11}\delta_{10} + \frac{1}{11}\delta_0 \Leftrightarrow A \succ \frac{10}{11}\delta_{10} + \frac{1}{11}\delta_0 \end{aligned}$$

La última línea implica que el punto A también está a la derecha de la lotería $\frac{10}{11}\delta_{10} + \frac{1}{11}\delta_0$ y por lo tanto $\frac{\overline{\delta_0 A}}{\overline{\delta_0\delta_{10}}} > \frac{10}{11}$. Del mismo modo, $s \succ r$ implica que si llamamos B a la lotería que es indiferente a r y que combina las loterías degeneradas δ_0 y δ_{10} , este punto está a la izquierda de s y por lo tanto $\frac{\overline{\delta_0 B}}{\overline{\delta_0\delta_{10}}} < \frac{10}{100}$. Si las curvas de indiferencia son paralelas, por semejanza de triángulos se debe cumplir

$$\frac{\overline{\delta_0 r}}{\overline{\delta_0\delta_1}} = \frac{\overline{\delta_0 B}}{\overline{\delta_0 A}}$$

Utilizando $\frac{\overline{\delta_0 r}}{\overline{\delta_0\delta_1}} = \frac{11}{100}$, $\frac{\overline{\delta_0 A}}{\overline{\delta_0\delta_{10}}} > \frac{10}{11}$, $\frac{\overline{\delta_0 B}}{\overline{\delta_0\delta_{10}}} < \frac{10}{100}$, vemos que esto es un absurdo pues

$$\frac{11}{100} = \frac{\overline{\delta_0 r}}{\overline{\delta_0\delta_1}} = \frac{\overline{\delta_0 B}}{\overline{\delta_0 A}} < \frac{10/100}{\overline{\delta_0 A}} < \frac{10/100}{10/11} < \frac{11}{100} \iff \frac{11}{100} < \frac{11}{100}$$

Ejercicio 61. Probaremos primero que si $u(\cdot)$ satisface (11), $v(x) = au(x) + b$ también. Sean dos loterías cualquiera p, q tales que $p \succeq q$, entonces:

$$u(p) \geq u(q) \iff au(p) \geq au(q) \iff au(p) + b \geq au(q) + b \iff v(p) \geq v(q)$$

y por lo tanto $v(\cdot)$ también satisface (11).

Forma 1. Para probar la otra implicancia neguemos $v(x) = au(x) + b$. Basta con imaginarse una lotería para la cual no se cumpla la igualdad aunque para todas las demás se cumpla. Sin pérdida de generalidad, sea P el conjunto de las loterías posibles y p, q, y r tres loterías tales que $p \succeq r \succeq q$ y además $v(x) = au(x)+b$ para todo $x \in P - \{p\}$. Esto quiere decir (abusando notación) que $v(p) \neq au(p) + b$. Sabemos que existe una lotería que es combinación de p y q tal que:

$$r \sim \alpha p + (1 - \alpha) q$$

Como $u(\cdot)$ representa a las preferencias se debe cumplir

$$u(r) = u(\alpha p + (1 - \alpha) q)$$

$$u(r) = \alpha u(p) + (1 - \alpha) u(q)$$

$$au(r) + b = \alpha(au(p) + b) + (1 - \alpha)(au(q) + b)$$

Si $v(\cdot)$ satisface (11), debe satisfacer también el último resultado, lo cual evidentemente no ocurre pues aunque $v(r) = au(r) + b$ y $v(q) = au(q) + b$, sucede que $v(p) \neq au(p) + b$, con lo cual probamos la doble implicancia.

Forma 2. Sin pérdida de generalidad ordenamos a los x en forma decreciente: llamamos x_n al mejor de los premios, x_{n-1} al siguiente, y así sucesivamente; es decir $\delta_{x_i} \succeq \delta_{x_{i-1}}$ para todo i). Usando que v representa a $\succeq$, tenemos $v(x_n) \geq v(x) \geq v(x_1)$ para todo x. Si todas las loterías son indiferentes, no hay nada que demostrar, así que asumamos que $v(x_n) > v(x_1)$, por lo que existe un único c_i tal que $\delta_{x_i} \sim c_i \delta_{x_n} + (1 - c_i) \delta_{x_1}$. Planteamos ahora un sistema de ecuaciones y encontramos a y b (no implica asumir el resultado, sólo planteamos este sistema, y encontramos las incógnitas):

$$\left.\begin{array}{c} v(x_n) = au(x_n) + b \\ v(x_1) = au(x_1) + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a = \frac{v(x_n) - v(x_1)}{u(x_n) - u(x_1)} > 0 \\ b = \frac{v(x_1) u(x_n) - v(x_n) u(x_1)}{u(x_n) - u(x_1)} \end{array}$$

y ahora obtenemos que para cualquier otro x_i, como $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ satisfacen (11),

$$\begin{aligned} \delta_{x_i} &\sim c_i \delta_{x_n} + (1 - c_i) \delta_{x_1} \Leftrightarrow v(x_i) = c_i v(x_n) + (1 - c_i) v(x_1) \\ &= c_i (au(x_n) + b) + (1 - c_i)(au(x_1) + b) = a(c_i u(x_n) + (1 - c_i) u(x_1)) + b \\ &= au(x_i) + b \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 62. Supongamos que $\succeq$ satisface (11) para alguna función de utilidad u.

Completas: para todo p y q,

$$\begin{array}{ccc} up \geq uq & \Leftrightarrow & p \succeq q \\ & o & \\ uq \geq up & \Leftrightarrow & q \succeq p \end{array}$$

o ambas, por lo cual las preferencias son completas.

Transitivas: supongamos que $p \succeq q$ y $q \succeq r$. Por la ecuación (11) de las notas tenemos que

$$\left.\begin{array}{ccc} p \succeq q & \Leftrightarrow & up \geq uq \\ q \succeq r & \Leftrightarrow & uq \geq ur \end{array}\right\} \Rightarrow up \geq ur \Leftrightarrow p \succeq r$$

por lo que las preferencias son transitivas.

Continuas: supongamos que hay una secuencia (sucesión) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\alpha_n p + (1 - \alpha_n) q \succeq t, \forall n \tag{18}$$

y $\alpha_n \to \alpha$. Para demostrar que $\{\alpha : \alpha p + (1 - \alpha q) \succeq t\}$ es cerrado, necesitamos demostrar que $\alpha p + (1 - \alpha q) \succeq t$ (es decir, tomamos una secuencia que converge, y que para todo n está dentro del conjunto y debemos demostrar que el límite está dentro del conjunto). Por (18) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} u\left[\alpha_n p + (1 - \alpha_n q)\right] & \geq & ut \Leftrightarrow \alpha_n up + (1 - \alpha_n) uq \geq ut \Rightarrow \\ \alpha up + (1 - \alpha) uq & \geq & ut \Leftrightarrow u\left[\alpha p + (1 - \alpha q)\right] \geq ut \Leftrightarrow \\ \alpha p + (1 - \alpha) q & \succeq & t \Rightarrow \alpha \in \{\alpha : \alpha p + (1 - \alpha q) \succeq t\}. \end{array}$$

Haciendo una demostración análoga para mostrar que $\{\alpha : t \succeq \alpha p + (1 - \alpha q)\}$ es cerrado, se muestra que las preferencias son continuas.

Independencia: supongamos que p, q y r son loterías y que $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} p & \succeq & q \Leftrightarrow up \geq uq \Leftrightarrow \alpha up \geq \alpha uq \Leftrightarrow u\alpha p \geq u\alpha q \Leftrightarrow \\ u\alpha p + u(1 - \alpha) r & \geq & u\alpha q + u(1 - \alpha) r \Leftrightarrow u\left[\alpha p + (1 - \alpha) r\right] \geq u\left[\alpha q + (1 - \alpha) r\right] \Leftrightarrow \\ \alpha p + (1 - \alpha) r & \succeq & \alpha q + (1 - \alpha) r \end{array}$$

por lo que se cumple independencia.

Ejercicio 63.A. La lotería p tiene media 1 y varianza 0, por lo que $U(p) = 1$. Por otro lado, $E_q(x)$ y $E_q(x^2) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}16 = 8$ y por tanto $U(q) = 2 - \frac{8-4}{4} = 1$ y la persona es indiferente.
63.B. Una forma de hacer esto es directamente probar qué pasa si mezclamos las dos loterías p y q con la lotería $\delta_0 = (1, 0, 0)$. Según el axioma de independencia, la persona debería ser indiferente entre estas dos mezclas. Sin embargo no lo es.

Tenemos que $E_{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\delta_0}(x^2) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}$, $V_{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\delta_0}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ y $E_{\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\delta_0}(x^2) = E_{\left(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right)}(x^2) = 4$ por lo que

$$U\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\delta_0\right) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{7}{16} \text{ y } U\left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\delta_0\right) = 1 - \frac{4-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Si no probaban con eso, podían probar de graficar la curva de indiferencia que pasaba entre p y q. Vemos que

$$r = a(0, 1, 0) + (1 - a)\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1-a}{2}, a, \frac{1-a}{2}\right)$$

y por lo tanto $E_r(x) = 2 - a$ y $E_r(x^2) = 8 - 7a$ por lo que

$$U(r) = 2 - a - \frac{8 - 7a - (2 - a)^2}{4} = \frac{1}{4}a(a - 1) + 1.$$

Verificamos que cuando $a = 0$ y $a = 1$ obtenemos la misma utilidad (las utilidades de q y p respectivamente). Sin embargo, para cualquier $a \in (0, 1)$ la utilidad es más pequeña que 1.

Ejercicio 64. Sean $V(p) = \frac{E(p)-1}{2}$ y $W(p) = \frac{[E(p)]^2+1}{10}$. Estas dos funciones de utilidad generan las mismas preferencias (porque las dos son transformaciones crecientes de $p \succeq q \Leftrightarrow E(p) \geq E(q)$) que satisfacen independencia.

Una forma cortita de ver que las preferencias generadas por v y w satisfacen independencia es ver que las preferencias definidas por $p \succeq q \Leftrightarrow E(p) \geq E(q)$ satisfacen independencia, y como son las mismas que las generadas por v y w, estaremos listos. Tenemos

$$\begin{aligned} p &\succeq q \Leftrightarrow E(p) \geq E(q) \Leftrightarrow E(\lambda p) \geq E(\lambda q) \Leftrightarrow E(\lambda p) + E((1-\lambda) r) \geq E(\lambda q) + E((1-\lambda) r) \Leftrightarrow \\ E(\lambda p + (1-\lambda) r) &\geq E(\lambda q + (1-\lambda) r) \Leftrightarrow \lambda p + (1-\lambda) r \succeq \lambda q + (1-\lambda) r \end{aligned}$$

Una forma un poco más tediosa y directa, es chequear directamente que las preferencias generadas por v y w satisfacen independencia. Tomemos por ejemplo las preferencias generadas por W :

$$\begin{aligned} p &\succeq q \Leftrightarrow [E(p)]^2 \geq [E(q)]^2 \Leftrightarrow E(p) \geq E(q) \Leftrightarrow \\ \lambda^2 E^2(p) + \lambda(1-\lambda) E(p) E(r) &\geq \lambda^2 E^2(q) + \lambda(1-\lambda) E(q) E(r) \Leftrightarrow \\ [\lambda E(p) + (1-\lambda) E(r)]^2 &\geq [\lambda E(q) + (1-\lambda) E(r)]^2 \Leftrightarrow \\ [E(\lambda p + (1-\lambda) r)]^2 &\geq [E(\lambda q + (1-\lambda) r)]^2 \Leftrightarrow \lambda p + (1-\lambda) r \succeq \lambda q + (1-\lambda) r. \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Vemos que tanto V como W generan preferencias que satisfacen independencia, y también que

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= V(0,1,0) = W\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = W(0,1,0) = \frac{1}{2} \\ V(0,0,1) &= W(0,0,1) = 1 \end{aligned}$$

pero $V(1,0,0) = 0$ y $W(1,0,0) = 1/5$. Por lo tanto, no podríamos saber si $U = V$ o $U = W$, por lo que no podemos saber cuánto es $U(1,0,0)$.

Si supiéramos que U es lineal, tendríamos

$$U\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = U\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}(0,1,0)\right] = \frac{2}{3} U\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} U(0,1,0) = U(0,1,0)$$

por lo que $u\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = u(0,1,0) = \frac{1}{2}$. Luego,

$$\frac{1}{2} = u\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,0,1)\right) = \frac{1}{2} u(1,0,0) + \frac{1}{2} u(0,0,1) = \frac{1}{2} u(1,0,0) + \frac{1}{2}$$

por lo que $u(1,0,0) = 0$.

Ejercicio 66. Hay dos formas de hacer este ejercicio. Una es citar la Aplicación B hecha en clase. El activo riesgoso cuesta \$1 por unidad (el individuo "compra" tantas unidades t como desee) y paga 3 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$. En ese caso, el individuo compró una apuesta en la que gana $2t$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y pierde t con probabilidad $\frac{1}{2}$. Lo que nos decía esa aplicación era que como la derivada de la utilidad esperada en $t = 0$ era positiva, existía un $t > 0$, suficientemente pequeño, tal que el individuo estaba mejor comprando t unidades que 0.

La otra es hacer el problema directamente. La utilidad esperada es $\frac{1}{2} u(r+2t) + \frac{1}{2} u(r-t)$ por lo que la derivada evaluada en $t = 0$ es $\frac{1}{2} u(r+2t) * 2 + \frac{1}{2} u(r-t) * (-1)\big|_{t=0} = u(r) - \frac{1}{2} u(r) > 0$.

Ejercicio 67. El valor esperado de comprar z unidades es $1 + \frac{z}{4}$. El individuo no comprará nada del activo, pues la utilidad de comprar z unidades es

$$\frac{1}{2} u(1-z) + \frac{1}{2} u\left(\frac{3z+2}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-z) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3z+2}{2}+1}{2}\right) = 1 - \frac{z}{8}$$

que se maximiza para $z = 0$. Lo que es "raro" es que en clase vimos que para cualquier función de utilidad diferenciable, si un activo tiene retornos esperados positivos, la persona comprará siempre una porción, no importa cuán pequeña.

Ejercicio 68.A. La utilidad esperada es

$$U(z) = (1-p)\,u(y - tx) + pu(y - ty - m(y-x)) = (1-p)\,u(y(1-t) + tz) + pu(y(1-t) - mz).$$

68.B. Para que sea óptimo subdeclarar algo, debe ser que cuando $z = 0$, $U'(0) > 0$ (si está considerando no subdeclarar, se da cuenta que aumentando un poco su subdeclaración mejora su utilidad). Tenemos

$$\begin{aligned} U'(z) &= (1-p)\,u'(y(1-t) + tz)\,t - pu'(y(1-t) - mz)\,m \qquad (19)\\ U'(0) &= [(1-p)\,t - pm]\,u'(y(1-t)) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{p}{1-p}m \equiv t^*. \end{aligned}$$

El individuo puede no subdeclarar nada, y obtener seguro $(1-t)\,y$. O puede subdeclarar un poco, que es equivalente a comprar un poco de una lotería riesgosa. Como cuando $t > \frac{p}{1-p}m$ la lotería de subdeclarar un poco tiene valor esperado mayor que $(1-t)\,y$:

$$(1-p)(y(1-t) + tz) + p(y(1-t) - mz) = (1-t)\,y + [(1-p)\,t - pm]\,z > (1-t)\,y \Leftrightarrow t > \frac{p}{1-p}m \equiv t^*.$$

68.C. Si $z^* > 0$ se cumple la condición de primer orden que $U'(z^*) = 0$ en (19) (hay que verificar que se cumple también la de segundo orden, $U''(z) \leq 0$, que se cumple pues el individuo es averso al riesgo, que asegura $u'' \leq 0$). Si llamamos $z(p)$ al z óptimo para p, tenemos que $U'(z(p)) \equiv 0$, y (19) queda

$$f(p, z(p)) = U'(z(p)) = (1-p)\,u'(y(1-t) + tz)\,t - pu'(y(1-t) - mz)\,m = 0.$$

La versión intuitiva de la estática comparativa es que si sube p bajan tanto el primer término como el segundo (en ambos aparece $-p$). Para que se reestablezca la igualdad debemos aumentar $u'(y(1-t) + tz)$ o reducir $u'(y(1-t) - mz)$; ambas cosas suceden si reducimos z, pues $u'' \leq 0$.

La versión formal es que

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{\partial f/\partial p}{\partial f/\partial z} = \frac{u'(y(1-t) + tz)\,t + u'(y(1-t) - mz)\,m}{(1-p)\,u''(y(1-t) + tz)\,t^2 + pu''(y(1-t) - mz)\,m^2} < 0,$$

como queríamos demostrar.

En forma similar,

$$\frac{dz}{dm} = -\frac{\partial f/\partial m}{\partial f/\partial z} = -\frac{pu''(y(1-t) - mz)\,zm - pu'(y(1-t) - mz)}{(1-p)\,u''(y(1-t) + tz)\,t^2 + pu''(y(1-t) - mz)\,m^2} < 0.$$

Una forma aún mejor de hacer esta estática comparativa es la siguiente (no se obtiene tan fácilmente que z es estrictamente decreciente, pero es muy fácil e intuitivo ver que es al menos débilmente decreciente). Supongamos que para p, el z óptimo es z, y que para $p' < p$ el z óptimo es z'. Lo que nos dice eso es que

$$\begin{aligned} (1-p)\,u(y(1-t) + tz) + pu(y(1-t) - mz) &\geq (1-p)\,u(y(1-t) + tz') + pu(y(1-t) - mz')\\ (1-p')\,u(y(1-t) + tz) + p'u(y(1-t) - mz) &\leq (1-p')\,u(y(1-t) + tz') + p'u(y(1-t) - mz'). \end{aligned}$$

Si restamos el segundo renglón del primero (del lado izquierdo, a algo grande le restamos algo chico, y del lado derecho a algo chico le restamos algo grande) obtenemos

$$(p' - p)\,[u(y(1-t) + tz) - u(y(1-t) - mz)] \geq (p' - p)\,[u(y(1-t) + tz') - u(y(1-t) - mz')].$$

Como $p' < p$ eso sólo puede suceder si $u(y(1-t)+tz) - u(y(1-t)-mz) \leq u(y(1-t)+tz') - u(y(1-t)-mz')$, que ocurre sólo si $z' \geq z$. Es decir, cuando aumenta la probabilidad de p' a p, cae la subdeclaración de z' a $z \leq z'$.

Ejercicio 69.A. La riqueza en el estado i, si compró q unidades será $w + (v_i - 1) q$, por lo que debe elegir q para mazimizar

$$E\left(w + (v-1)q - a[w + (v-1)q]^2\right)$$

La condición de primer orden es

$$E(v - 1 - a2(w + (v-1)q)(v-1)) = 0 \Leftrightarrow q = \frac{E(v-1)(1-2aw)}{2aE(v-1)^2}$$

69.B. La solución es

$$q = \frac{\mu(1-2aw)}{2a(\sigma^2+\mu^2)}$$

69.C. La derivada es

$$\frac{dq}{d\mu} = \frac{(1-2aw)\left(\sigma^2-\mu^2\right)}{2a(\sigma^2+\mu^2)^2}$$

Supongamos que $a = 1/4$, $w = 1/2$ y sean los retornos de B iguales a $v_1^B = 1$ y $v_2^B = 3$, ambos con probabilidad $1/2$. Sea A tal que $v_1^A = 1.1$ y $v_1^B = 3.1$. En ambos casos siendo $v_1 = \mu - 1$ y $v_2 = \mu + 1$, la varianza de $v - 1$ es entonces

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(\mu - 1 - \mu)^2 + \frac{1}{2}(\mu + 1 - \mu)^2 = 1.$$

En ambos casos, el individuo demanda

$$q = \frac{\mu}{2\mu^2+2} \Rightarrow q^B = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad q^A = \frac{55}{221} = 0.24887 < \frac{1}{4}$$

El "problema" con este ejercicio es que el individuo es cada vez más averso al riesgo cuando incrementa su riqueza.

Ejercicio 70.A. Una forma de hacerlo es por fuerza bruta. Para cualquier x y $y \geq x$, debemos mostrar que $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$. Si tanto x como y son mayores o iguales que $\frac{5}{2}$, tendremos que $\lambda x + (1-\lambda)y$ también es mayor o igual que $\frac{5}{2}$, y en cualquier caso, $u(z) = z + \frac{5}{2}$, para $z = x, y, \lambda x + (1-\lambda)y$, por lo que

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda x + (1-\lambda)y + \frac{5}{2} = \lambda\left(x + \frac{5}{2}\right) + (1-\lambda)\left(y + \frac{5}{2}\right) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y).$$

En forma similar, si $\frac{5}{2} \geq y \geq x$, tendremos que $u(z) = 2z$, para $z = x, y, \lambda x + (1-\lambda)y$, y otra vez se cumplirá la igualdad.

El caso "difícil" es si $y \geq \frac{5}{2} \geq x$ (con $x \neq y$; si son iguales es una bobada). Ahí, surgen dos casos. Si $\lambda \geq \frac{y-\frac{5}{2}}{y-x}$, tendremos $\lambda x + (1-\lambda)y \geq \frac{5}{2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda x + (1-\lambda)y + \frac{5}{2} = \lambda\left(x + \frac{5}{2}\right) + (1-\lambda)\left(y + \frac{5}{2}\right) \geq \\ &\geq \lambda 2x + (1-\lambda)\left(y + \frac{5}{2}\right) = \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y). \end{aligned}$$

En forma análoga, si $\lambda \leq \frac{y-\frac{5}{2}}{y-x}$, tendremos $\lambda x+(1-\lambda)y \leq \frac{5}{2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(\lambda x+(1-\lambda)y) &= 2(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda 2x+(1-\lambda)2y \\ &\geq \lambda 2x+(1-\lambda)\left(y+\frac{5}{2}\right) = \lambda u(x)+(1-\lambda)u(y). \end{aligned}$$

Esa demostración es un caso especial del siguiente resultado.

Teorema. Si $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbf{R}$ son funciones cóncavas en un X convexo, la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es cóncava.

Demostración. Debemos demostrar que $h(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$. Tenemos

$$\begin{aligned} h(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \min\{f(\lambda x+(1-\lambda)y), g(\lambda x+(1-\lambda)y)\} \geq \min\{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\} \\ &\geq \lambda\min\{f(x), g(x)\}+(1-\lambda)\min\{f(y), g(y)\} = \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y). \blacksquare \end{aligned}$$

El punto clave es la segunda desigualdad en la ecuación anterior: elegir el mínimo entre dos promedios da más grande que elegir el mínimo entre $f(x)$ y $g(x)$; luego el mínimo entre $f(y)$ y $g(y)$; y finalmente promediarlos. La razón es que en el segundo caso tenemos la libertad de elegir por separado (para x y para y) si el mínimo se da con f o con g. En el caso de elegir entre $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ y $\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$, tenemos que elegir (tanto para x como para y) a la misma función. Para ilustrar, supongamos que $f(x) = 4 = g(y)$ y $f(y) = 2 = g(x)$; con $\lambda = \frac{1}{2}$, tenemos $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) = \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) = 3$, por lo que el mínimo es 3, mientras que

$$\lambda\min\{f(x), g(x)\}+(1-\lambda)\min\{f(y), g(y)\} = \lambda 2+(1-\lambda)2 = 2.$$

70.B. $EU(a) = 21/3 < EU(b) = 22/3$ por lo tanto prefiere el b.

70.C. $E(a) = E(b) = 5$, $v(a) = 32/3 < v(b) = 38/3$, elegiría el a.

70.D. Es falsa. De las Partes A, B y C tenemos un ejemplo de un individuo averso al riesgo que prefiere un activo con igual media y mayor varianza.

Ejercicio 73.I. $E(u) = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$, y $E(u) = \alpha 0^a+(1-\alpha)1^a$

73.II. En el primer caso, tenemos que

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{z\rightarrow 0}\int_z^1 \log x dx = \lim_{z\rightarrow 0}|x\log x - x|_z^1 = \lim_{z\rightarrow 0}(-1-z\log z+z) = -1$$

Para el caso de la distribución discreta, tenemos que $E(u) = \alpha\log 0+(1-\alpha)\log 1$, que no existe, pues $\log 0$ no existe.

73.III. $E(u) = \int_0^1 (ax+b)dx = \frac{a}{2}+b$, y $E(u) = (1-\alpha)a+b$

73.IV. Sustituyendo en la parte III, obtenemos $E(u) = \frac{1}{2}$, y $E(u) = \alpha$.

73.V. En el caso de la uniforme debemos demostrar que la utilidad esperada es menor que cualquier número $k < 0$ que elijamos (es decir, la utilidad esperada es $-\infty$). Con eso habremos demostrado que la utilidad esperada no existe. Vemos que como $-x^{-1} < 0$ para todo $x > 0$,

$$\int_0^1 \left(-x^{-1}\right)dx < \int_{e^k}^1 \left(-x^{-1}\right)dx = k$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 74. Como el director es averso al riesgo, sabemos que su función de utilidad es cóncava. Luego, se tiene:

$$\begin{aligned}u(Q) &= \frac{1}{3}u(90) + \frac{1}{3}u(110) + \frac{1}{3}u(130) = \frac{1}{3}u(90) + \frac{1}{3}u(\frac{1}{2}(90) + \frac{1}{2}(130)) + \frac{1}{3}u(130) \geq \\ &\geq \frac{1}{3}u(90) + \frac{1}{6}u(90) + \frac{1}{6}u(130) + \frac{1}{3}u(130) = \frac{1}{2}u(90) + \frac{1}{2}u(130) = u(R)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(R) &= \frac{1}{2}u(90) + \frac{1}{2}u(130) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}(80) + \frac{1}{2}(100)) + \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}(120) + \frac{1}{2}(140)) \geq \\ &\geq \frac{1}{4}u(80) + \frac{1}{4}u(100) + \frac{1}{4}u(120) + \frac{1}{4}u(140) = u(P)\end{aligned}$$

Ejercicio ??. Tenemos que para r la riqueza y u la utilidad del individuo, como es averso al riesgo, prefiere la riqueza $r+10$ seguro, antes que una lotería que le da $r+5$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $r+15$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ (en forma similar para $r+20$):

$$\begin{aligned}u(r+10) &\geq \frac{1}{2}u(r+5) + \frac{1}{2}u(r+15) \\ u(r+20) &\geq \frac{2}{3}u(r+5) + \frac{1}{3}u(r+30)\end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por $\frac{1}{3}$, la segunda por $\frac{2}{3}$ y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned}U(q) &= \frac{2}{3}u(r+10) + \frac{1}{3}u(r+20) \geq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}u(r+5) + \frac{1}{2}u(r+15)\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u(r+5) + \frac{1}{3}u(r+30)\right) \\ &= \frac{1}{3}u(r+5) + \frac{5}{9}u(r+15) + \frac{1}{9}u(r+30) = U(p).\end{aligned}$$

Ejercicio 76. Tenemos que como u_2 y u_1 son estrictamente crecientes, existe una f tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$ para todo x. Debemos preguntarnos si $r_2(x) \geq r_1(x)$ si y sólo si f es cóncava:

$$\begin{aligned}r_2(x) &= -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = -\frac{[f'(u_1(x))u_1'(x)]'}{f'(u_1(x))u_1'(x)} = -\frac{f''(u_1(x))u_1'^2(x) + f'(u_1(x))u_1''(x)}{f'(u_1(x))u_1'(x)} \\ &= -\frac{f''(u_1(x))u_1'(x)}{f'(u_1(x))} + r_1(x) \geq r_1(x) \Leftrightarrow f''(y) \leq 0 \forall y \Leftrightarrow f \text{ es cóncava.}\end{aligned}$$

Ejercicio 77. Asumo que $p \succeq_2 \delta_{\overline{x}}$ para algún p y $\overline{x}$. Debo demostrar que si $u_2 = f(u_1)$ para f cóncava y creciente, entonces $p \succeq_1 \delta_{\overline{x}}$. Como f es cóncava, la desigualdad de Jensen nos dice que para la variable aleatoria $y = u_1(x)$,

$$f(E_p(y)) \geq E_p(f(y)) = E_p(f(u_1(x))) = E_p(u_2(x)) \geq u_2(\overline{x}) = f(u_1(\overline{x})),$$

donde la segunda desigualdad sale de $p \succeq_2 \delta_{\overline{x}}$ y el hecho que u_2 representa a $\succeq_2$. Como f es creciente, $f(E_p(y)) \geq f(u_1(\overline{x})) \Leftrightarrow E_p(y) \geq u_1(\overline{x})$ como queríamos demostrar.

Ejercicio 78. Para u y v los coeficientes de aversión al riesgo de Arrow Pratt son

$$r_u(x) = -\frac{-a^2 e^{-ax}}{a e^{-ax}} = a \text{ y } r_v(x) = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x}$$

por lo que para x chico, $r_v(x) > r_u(x)$, mientras que para x grande, $r_v(x) < r_u(x)$, por lo que ninguna es más aversa. Eso no depende del tamaño de a.

78.B. La función u nunca puede ser más aversa, ya que el coeficiente de aversión al riesgo de v se hace infinito cerca de 0. Pero v es más aversa que u si

$$\frac{1}{2x} \geq a, \forall x \leq 10 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{20}.$$

Ejercicio 79.A. El retorno esperado para un λ cualquiera es la probabilidad de lluvia por el retorno de lluvia, más la probabilidad de seco por el retorno de seco:

$$0.5\left(\$100\lambda\$10 + \$100\left(1-\lambda\right)\$2\right) + 0.5\left(\$100\lambda\$3 + \$100\left(1-\lambda\right)\$9\right)$$

Simplificando queda $100\lambda + 550$, por lo que el retorno esperado se maximiza con $\lambda = 1$. No hay que hacer esta cuenta para darse cuenta de eso: en los años favorables P da 10 y H 9, y en los desfavorables P da 3 y H 2, y los años favorables para cada fábrica ocurren con igual probabilidad.

79.B. La utilidad esperada para un λ cualquiera es la probabilidad de lluvia por la utilidad del retorno de lluvia, más la probabilidad de seco por la utilidad del retorno de seco:

$$0.5u\left(100\left(8\lambda+2\right)\right) + 0.5u\left(100\left(9-6\lambda\right)\right) = 0.5\sqrt{100\left(8\lambda+2\right)} + 0.5\sqrt{100\left(9-6\lambda\right)}$$

La derivada segunda de esta función es

$$10\frac{\left(24-16\lambda\right)\sqrt{9-6\lambda} + \left(12\lambda+3\right)\sqrt{8\lambda+2}}{\left(8\lambda+2\right)^{\frac{3}{2}}\left(2\lambda-3\right)\sqrt{9-6\lambda}} < 0$$

por lo que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un máximo, que se obtiene en $\lambda = 0.75$. En este caso el λ óptimo es menor que 1, pues invirtiendo también en la fábrica de helados se diversifica la inversión, y eso es bueno para reducir el riesgo.

Ejercicio 80. No, no puede satisfacer Independencia. Lo veremos de dos formas. Primero, la menos correcta, que asume que las preferencias se pueden representar con una función de utilidad (no podemos asumirlo porque no lo dice la letra). Si cumpliera independencia, y pudiera ser representada por una función de utilidad esperada, tendríamos

$$p \succeq q \Leftrightarrow p_1u\left(1\right) + p_2u\left(2\right) + \left(1-p_1-p_2\right)u\left(3\right) \geq q_1u\left(1\right) + q_2u\left(2\right) + \left(1-q_1-q_2\right)u\left(3\right).$$

Tendríamos entonces que

$$\begin{aligned} (0,1) &\succ \left(\frac{1}{2},0\right) \Leftrightarrow u\left(2\right) > \frac{1}{2}u\left(1\right) + \frac{1}{2}u\left(3\right) \\ \left(\frac{3}{4},0\right) &\succ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4}u\left(1\right) + \frac{1}{4}u\left(3\right) > \frac{1}{2}u\left(1\right) + \frac{1}{2}u\left(2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}u\left(1\right) + \frac{1}{2}u\left(3\right) > u\left(2\right) \end{aligned}$$

lo que constituye una contradicción.

Una segunda forma de verlo, es notando que si la relación de preferencias satisface Independencia,

$$\begin{aligned} (0,1) &\succ \left(\frac{1}{2},0\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(0,1\right) + \frac{1}{2}\left(1,0\right) \succ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{2}\left(1,0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \succ \left(\frac{3}{4},0\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 81 (por Manuel Macera). Dado que $L \succ M$ sabemos que $x_L \sim L \succ M \sim x_M$, lo cual por transitividad implica que $x_L \succ x_M$, y como las preferencias son monótonas $x_L > x_M$. Por otro lado si

$x_L > x_M$, por preferencias monótonas se cumple $x_L \succ x_M$ y además sabemos que $L \sim x_L \succ x_M \sim M$, lo cual por transitividad implica $L \succ M$, con lo cual demostramos la doble implicancia.

Ejercicio 82. Tenemos que $u(2) = \frac{3}{4}u(3) + \frac{1}{4}u(1)$ y por lo tanto,

$$\frac{1}{3}u(1) + \frac{1}{3}u(2) + \frac{1}{3}u(3) = \frac{5}{12}u(1) + \frac{7}{12}u(3).$$

Eso implica

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \sim \frac{5}{12}\delta_1 + \frac{7}{12}\delta_3.$$

Ejercicio 83. Tenemos

$$\ln w = p \ln w_1 + (1-p) \ln w_2 \Leftrightarrow w = w_1^p w_2^{1-p}$$

Ejercicio 2. A un inversor con una riqueza inicial de $\$w$ y utilidad $\sqrt{w}$ le ofrecen dos loterías \$1 seguro, o una lotería en la que pierde \$1 o gana \$4 con igual probabilidad. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería. Para hacerlo, encuentre el w para el cual es indiferente; como $\sqrt{w}$ es CRRA, para niveles mayores de riqueza preferirá la lotería no degenerada.

Parte A. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería. Para hacerlo, encuentre el w para el cual es indiferente; como $\sqrt{w}$ es CRRA, para niveles mayores de riqueza preferirá la lotería no degenerada.

Parte B. Encuentre los valores de w para los cuales prefiere la primera lotería si la utilidad es en cambio $\sqrt{\frac{w}{2}}$.

Parte A. Encontraremos w para que sea indiferente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{w-1} + \frac{1}{2}\sqrt{w+4} &= \sqrt{w+1} \Leftrightarrow w - 1 + w + 4 + 2\sqrt{w-1}\sqrt{w+4} = 4w + 4 \Leftrightarrow \\
2\sqrt{w-1}\sqrt{w+4} &= 2w + 1 \Leftrightarrow 4(w-1)(w+4) = 4w^2 + 4w + 1 \Leftrightarrow w = \frac{17}{8}.
\end{aligned}$$

Parte B. No cambia nada pues $\sqrt{\frac{w}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w}$ es una transformación lineal de $\sqrt{w}$, y el Teorema de von Neumann Morgenstern nos dice que entonces representa las mismas preferencias.

Ejercicio 84. Las preferencias u_2 son más aversas al riesgo que u_1 si y sólo si existe f cóncava tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$. Como u_1 y u_2 son crecientes, existe f tal que $u_2(x) = f(u_1(x))$, y además $E_p(u_2) = E_p(f(u_1(x))) \leq f(E_p(u_1(x)))$ para todo p si y sólo si f es cóncava (eso es Jensen). Por lo tanto, como u^{-1} y f^{-1} también son crecientes,

$$\begin{aligned}
CE_{u_2}(p) &\leq CE_{u_1}(p)\,\forall p \Leftrightarrow u_2^{-1}(E_p(u_2)) \leq u_1^{-1}(E_p(u_1))\,\forall p \Leftrightarrow u_1^{-1}\left(f^{-1}(E_p(f(u_1)))\right) \leq u_1^{-1}(E_p(u_1))\,\forall p \Leftrightarrow \\
f^{-1}(E_p(f(u_1))) &\leq E_p(u_1) = f^{-1}(f(E_p(u_1))) \Leftrightarrow E_p(f(u_1)) \leq f(E_p(u_1))\,\forall p \Leftrightarrow f \text{ es cóncava.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 85. Son completas, transitivas, satisfacen independencia, pero no son continuas.

Ejercicio 86. (i) y (ii) no se pueden saber, (iii) es cierto, y (iv) falso.

Ejercicio 87.A. Tenemos

$$\begin{aligned}
U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) &= \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right\} = \min\left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right\} = \frac{7}{4} \\
U\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= \min\left\{\frac{1+2+3}{3}, \frac{3+2+1}{3}\right\} = 2
\end{aligned}$$

87.B. Si ponemos a la lotería degenerada en e en la punta superior del simplex, las curvas de indiferencia son rectas paralelas y verticales. La curva que pasa por $(0,1,0)$ es la misma que pasa por $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

87.C. Se satisfacen todos los axiomas, menos independencia. No había que decir lo que viene ahora, pero igual va la justificación. Continuidad se satisface porque el mínimo es una función continua, y las dos funciones que están adentro del mínimo son utilidades esperadas que satisfacen continuidad. Las preferencias son completas, porque dados p y q, U les asigna un número a cada una de las loterías, y como los números siempre se pueden comparar, las loterías también (además a esta altura ya podrían saber que si unas preferencias se pueden representar por una función de utilidad, son necesariamente completas y transitivas). Independencia no se satisface, porque aunque las curvas de indiferencia son rectas paralelas, no crecen siempre en la misma dirección. En este caso, la dirección de crecimiento es hacia el medio. Así por ejemplo, $(0,0,1)\sim(1,0,0)$ y los dos arrojan una utilidad de 1, y sin embargo, $U(0,1,0)=U\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=2$. Para ver que se viola independencia, notamos que

$$(0,0,1)\sim(1,0,0)\nRightarrow\frac{1}{2}(0,0,1)+\frac{1}{2}(1,0,0)\sim\frac{1}{2}(1,0,0)+\frac{1}{2}(1,0,0).$$

Ejercicio 88. No hay $a>0$ y b tales que $u=au_1+b$, así que u_1 no representa a $\succeq$. También, la degenerada en 2 es indiferente la lotería que da 1 y 3 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Sin embargo, u_1 no respeta eso: la degenerada es peor. Por otra parte, si hacemos los cálculos, "parecería" que $u_2=2u-1$, pero como no sabemos cuánto valen $u(4)$ y $u_2(4)$, es imposible determinar si u y u_2 representan a las mismas preferencias.

Ejercicio 89. Para $u(x)$ tenemos

$$r_u(x)=-\frac{e^{-x}}{-e^{-x}}=1$$

por lo que el coeficiente de aversión al riesgo es constante. De hecho, cualquier función de utilidad que tenga un coeficiente de aversión al riesgo constante es "básicamente" de la forma $-e^{-bx}$. Para $v(x)$ tenemos

$$r_v(x)=-\frac{-ax^{-a-1}}{x^{-a}}=\frac{a}{x}.$$

Esta es la forma de función de utilidad más usada en trabajos empíricos, pues la aversión al riesgo "relativa" (relativa a la riqueza x) es constante. Es muy utilizada, pues es "obvio" que cuanto más rica es una persona, menos aversa al riesgo.

Por lo tanto,

$$x<a\Leftrightarrow r_v>r_u$$

y ninguna de las relaciones de preferencias es más aversa que la otra.

Ejercicio 90.A (por Manuel Macera). Si $\delta_2\sim\frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1$ se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\delta_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta_3+\frac{1}{2}\delta_1\right) &\sim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta_3+\frac{1}{2}\delta_1\right)\Leftrightarrow\\ \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) &\sim \left(\frac{1}{3}\delta_3+\frac{1}{6}\delta_1\right)+\left(\frac{1}{4}\delta_3+\frac{1}{4}\delta_1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\sim\left(\frac{7}{12}\delta_3+\frac{5}{12}\delta_1\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha=\frac{7}{12}$.

90.B. Graficando las curvas de indiferencia, dado que $\delta_3\succ\delta_2\succ\delta_1$, es fácil darse cuenta que $\delta_2\succ\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. También podemos ver que por independencia:

$$\begin{aligned}\delta_3 &\succ \delta_1\Leftrightarrow\frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1\succ\delta_1\Leftrightarrow\frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1\succ\frac{1}{8}\delta_1+\frac{7}{8}\left(\frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1\right)\Leftrightarrow\\ \frac{2}{3}\delta_3+\frac{1}{3}\delta_1 &\succ \frac{7}{12}\delta_3+\frac{5}{12}\delta_1\end{aligned}$$

y dado que $\delta_2 \sim \frac{2}{3}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_1$ y $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \sim \left(\frac{7}{12}\delta_3 + \frac{5}{12}\delta_1\right)$ si las preferencias son transitivas obtenemos que:

$$\delta_2 \sim \frac{2}{3}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_1 \succ \left(\frac{7}{12}\delta_3 + \frac{5}{12}\delta_1\right) \sim \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \delta_2 \succ \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 93.A. La utilidad esperada de la persona es

$$\frac{1}{4}(w-z)^a + \frac{1}{4}(w)^a + \frac{1}{2}(w+z)^a$$

que es una función cóncava de z por lo que la condición de primer orden

$$\frac{d\left(\frac{1}{4}(w-z)^a + \frac{1}{4}(w)^a + \frac{1}{2}(w+z)^a\right)}{dz} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(w-z)^{a-1}a + \frac{1}{2}(w+z)^{a-1}a = 0 \Leftrightarrow z = w\frac{2^{\frac{1}{1-a}}-1}{2^{\frac{1}{1-a}}+1}$$

es necesaria y suficiente para un máximo interior. Como además, por la Aplicación B, sabemos que $z(a,w)$ será siempre mayor estricto que 0 y el $z(a,w)$ encontrado es siempre menor que w, no hay soluciones de esquina.

93.B. Debemos encontrar la derivada de $z(a,w)$ con respecto a a :

$$\frac{dz(a,w)}{da} = w\frac{d\left(\frac{2^{\frac{1}{1-a}}-1}{2^{\frac{1}{1-a}}+1}\right)}{da} \overset{k=2^{\frac{1}{1-a}}}{=} w\frac{d\left(\frac{k-1}{k+1}\right)}{dk}\frac{dk}{da} = w\underbrace{\frac{2}{(k+1)^2}}_{>0}\underbrace{\frac{2^{-\frac{1}{a-1}}}{(a-1)^2}\ln 2}_{>0} > 0$$

como queríamos demostrar.

93.C. Para la primera demostración, notamos que si $0<a<b<1$, entonces $u(x)=x^a$ es una transformación cóncava de $v(x)=x^b$:

$$x^a = \left(x^b\right)^{\frac{a}{b}}.$$

Es decir, para $f(x)=x^{\frac{a}{b}}$, $u(x)=f(v(x))$, y como

$$f''(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}-1\right)x^{\frac{a}{b}-2} < 0,$$

f es una función cóncava.

Para la segunda demostración, calculamos los coeficientes de aversión al riesgo de Arrow y Pratt para ambas funciones de utilidad y mostramos que el de x^a es mayor que el de x^b. Para cualquier función de utilidad x^p el coeficiente de aversión al riesgo de Arrow y Pratt es

$$r_p(x) = -\frac{p(p-1)x^{p-2}}{px^{p-1}} = \frac{1-p}{x}$$

y por lo tanto, $r_a(x) > r_b(x)$.

Ejercicio 94.A. Si $M=2$, la persona invierte $z=0$ en el activo, pues tiene esperanza 1, y tiene riesgo, y $u''<0$ nos dice que la persona es aversa al riesgo.

94.B. La utilidad esperada de invertir z es

$$-\frac{1}{2}e^{-r(w-z)} - \frac{1}{2}e^{-r(w-z+zM)}$$

que se maximiza cuando

$$e^{-r(w-z)} = (M-1)\, e^{-r(w-z+zM)} \Leftrightarrow -r\,(w-z) = \log(M-1) - r\,(w-z+zM) \Leftrightarrow z = \frac{\ln(M-1)}{rM}.$$

94.C. Sin hacer los cálculos, por la Aplicación F sabemos que cuando sube r la persona se vuelve más aversa al riesgo, y por tanto baja su demanda del activo. Después de hacer los cálculos, se ve claramente que la demanda baja con r. Sobre M, es más complicado, pero $dz/dM > 0$ (como debería).

Ejercicio 96.A El individuo debe elegir c para maximizar su utilidad esperada

$$\int_0^2 u\,(w + c\,(z-1))\,\frac{1}{2}dz = \int_0^2 -(w + c\,(z-1))\,(w + c\,(z-1) - 20)\,\frac{1}{2}dz.$$

Hay tres formas de hacer esto.

Primera. Darse cuenta que la inversión en z es riesgosa y tiene la misma esperanza que meter el dinero debajo del colchón, por lo que invertirá 0.

Segunda. Calcular la utilidad esperada y maximizarla con respecto a c :

$$\int_0^2 -(w + c\,(z-1))\,(w + c\,(z-1) - 20)\,\frac{1}{2}dz = 20w - \frac{1}{3}c^2 - w^2$$

que se maximiza con $c = 0$.

Tercera. Derivar la utilidad esperada con respecto a c (como paso intermedio para igualarla a 0):

$$\begin{aligned}
\frac{d\left[\int_0^2 -(w + c\,(z-1))\,(w + c\,(z-1) - 20)\,\frac{1}{2}dz\right]}{dc} &= \int_0^2 \frac{-d\,(w + c\,(z-1))\,(w + c\,(z-1) - 20)\,\frac{1}{2}}{dc}dz \\
&= \int_0^2 -\left(c - w - 10z - 2cz + wz + cz^2 + 10\right)dz = -\frac{2}{3}c
\end{aligned}$$

Como ya habíamos determinado, la utilidad marginal de incrementar c es siempre negativa, por lo que elegimos $c = 0$. Esta tercera forma de hacer el ejercicio está sólo para mostrar que este ejercicio se puede hacer con la derivada de la integral, o con la integral de la derivada.

96.B. Tenemos

$$\frac{d\left[\int_0^3 -(w + c\,(z-1))\,(w + c\,(z-1) - 20)\,\frac{1}{3}dz\right]}{dc} = 10 - w - 2c.$$

Con $w = 2$, quedaría $c = 4$, que es más de lo que tiene el individuo. Si asumimos que puede pedir prestado sin intereses, está bien. Si no, tenemos que fijar $c = 2$ (hágalo con Kuhn-Tucker).

Otro detalle: la razón por la cual se fijó $w = 2$ en este ejercicio es que para $x > 10$ la utilidad del individuo es decreciente en la riqueza, y si el individuo tuviera más de $w = 4$, y lo invirtiera todo, su riqueza podría llegar a ser 12, que le daría menos utilidad que una riqueza de 10.

Ejercicio 97. Si π es mejor que ρ para el nivel de riqueza inicial w, significa que

$$\begin{aligned}
-\sum \pi_i e^{-a(w+x_i)} &\geq -\sum \rho_i e^{-a(w+x_i)} \Leftrightarrow -\sum \pi_i \left[e^{-aw} e^{-ax_i}\right] \geq -\sum \rho_i \left[e^{-aw} e^{-ax_i}\right] \Leftrightarrow \\
-e^{-aw} \sum \pi_i e^{-ax_i} &\geq -e^{-aw} \sum \rho_i e^{-ax_i} \Leftrightarrow -e^{-aw'} \sum \pi_i e^{-ax_i} \geq -e^{-aw'} \sum \rho_i e^{-ax_i} \Leftrightarrow \\
-\sum \pi_i e^{-a\left(w'+x_i\right)} &\geq -\sum \rho_i e^{-a\left(w'+x_i\right)}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 98.A. Encontraremos w para que sea indiferente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{w-1}+\frac{1}{2}\sqrt{w+4} &= \sqrt{w+1}\Leftrightarrow w-1+w+4+2\sqrt{w-1}\sqrt{w+4}=4w+4\Leftrightarrow\\ 2\sqrt{w-1}\sqrt{w+4} &= 2w+1\Leftrightarrow 4\left(w-1\right)\left(w+4\right)=4w^2+4w+1\Leftrightarrow w=\frac{17}{8}.\end{aligned}$$

Aún sin usar que es una CRRA, podemos ver el resultado que w más chicos favorecen a la degenerada empezando con

$$\frac{1}{2}\sqrt{w-1}+\frac{1}{2}\sqrt{w+4}\leq\sqrt{w+1}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow w\leq\frac{17}{8}.$$

98.B. No cambia nada pues $\sqrt{\frac{w}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w}$ es una transformación lineal de $\sqrt{w}$, y el Teorema de von Neumann Morgenstern nos dice que entonces representa las mismas preferencias. De todas maneras, aún si lo plantéaramos, podíamos ver que

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w-1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w+4}{2}}=\sqrt{\frac{w+1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w+4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{w+1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{w-1}+\frac{1}{2}\sqrt{w+4}=\sqrt{w+1}$$

y quedan las mismas cuentas que antes.

Ejercicio 99. Para una función de utilidad u cualquiera, por Taylor, tenemos que para algún z entre w y $w+x_i$,

$$u\left(w+x_i\right)=u\left(w\right)+u'\left(w\right)\left(w-\left(w+x_i\right)\right)+u''\left(z\right)\frac{\left(w-\left(w+x_i\right)\right)^2}{2}=u\left(w\right)+u'\left(w\right)x_i+u''\left(z_i\right)\frac{x_i^2}{2}$$

por lo que

$$E_p\left(u\left(w+x\right)\right)-E_q\left(u\left(w+x\right)\right)=u'\left(w\right)\left[E_p\left(x\right)-E_q\left(x\right)\right]+E_p\left(u''\left(z_i\right)\frac{x_i^2}{2}\right)-E_q\left(u''\left(z_i\right)\frac{x_i^2}{2}\right).$$

Si dividimos entre $u'\left(w\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned}E_p\left(u\left(w+x\right)\right)-E_q\left(u\left(w+x\right)\right) &> 0\Leftrightarrow\frac{E_p\left(u\left(w+x\right)\right)-E_q\left(u\left(w+x\right)\right)}{u'\left(w\right)}>0\Leftrightarrow\\ \left[E_p\left(x\right)-E_q\left(x\right)\right]+E_p\left(\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right)-E_q\left(\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right) &> 0\Leftrightarrow E_p\left(x\right)-E_q\left(x\right)>E_p\left(-\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right)-E_q\left(-\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Como $u'\left(z\right)=z^{-a}$ y $u''\left(z\right)=-az^{-a-1}$, tenemos que $0\leq-u''\left(z\right)\leq-u''\left(w\right)$ (la derivada segunda sube en valor absoluto con z, y $z\geq w$). Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon>0$ podemos elegir w de tal forma que

$$-\frac{u''\left(z\right)}{u'\left(w\right)}\leq-\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}=\frac{aw^{-a-1}}{w^{-a}}=\frac{a}{w}<\varepsilon\Leftrightarrow w>\frac{a}{\varepsilon}.$$

En ese caso, como $E_p\left(x\right)-E_q\left(x\right)>0$, para ε pequeño tendremos

$$E_p\left(x\right)-E_q\left(x\right)>\varepsilon E_p\left(\frac{x_i^2}{2}\right)\geq E_p\left(-\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right)>E_p\left(-\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right)-E_q\left(-\frac{u''\left(z_i\right)}{u'\left(w\right)}\frac{x_i^2}{2}\right).\tag{20}$$

Para ser más precisos, podemos tomar $0<\varepsilon<2\frac{E_p(x)-E_q(x)}{E_p\left(x_i^2\right)}$, y con $\overline{w}>\frac{a}{\varepsilon}$, tendremos $-\frac{u''(z)}{u'(w)}<\varepsilon$, que asegura (20).

Ejercicio 100.A. Tenemos que $p=\frac{2}{3}\delta_{10}+\frac{1}{3}\delta_{20}$. Como el individuo es averso al riesgo, y $20=\frac{2}{3}*15+\frac{1}{3}*30$, por definición de averso al riesgo tenemos que $\delta_{20}\succeq\frac{2}{3}\delta_{15}+\frac{1}{3}\delta_{30}$, y por independencia

$$p=\frac{2}{3}\delta_{10}+\frac{1}{3}\delta_{20}\succeq\frac{2}{3}\delta_{10}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\delta_{15}+\frac{1}{3}\delta_{30}\right).\tag{21}$$

De la misma manera $10 = \frac{1}{2} * 5 + \frac{1}{2} * 15$, y por la definición de aversión al riesgo obtenemos $\delta_{10} \succeq \frac{1}{2}\delta_5 + \frac{1}{2}\delta_{15}$. Por independencia, de (21) obtenemos

$$p \succeq \frac{2}{3}\delta_{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\delta_{15} + \frac{1}{3}\delta_{30}\right) \succeq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\delta_5 + \frac{1}{2}\delta_{15}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\delta_{15} + \frac{1}{3}\delta_{30}\right) = \frac{1}{3}\delta_5 + \frac{5}{9}\delta_{15} + \frac{1}{9}\delta_{30} = q.$$

Otra forma de hacerlo, pero hay que asumir que el individuo tiene una utilidad esperada, es la siguiente. Recordamos que si es averso al riesgo la utilidad es cóncava, por lo que

$$\begin{aligned} E_p u &= \frac{2}{3}u(10) + \frac{1}{3}u(20) = \frac{2}{3}u\left(\frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}15\right) + \frac{1}{3}u\left(\frac{2}{3}15 + \frac{1}{3}30\right) \\ &\geq \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}u(5) + \frac{1}{2}u(15)\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u(15) + \frac{1}{3}u(30)\right] = \frac{1}{3}u(5) + \frac{5}{9}u(15) + \frac{1}{9}u(30) = E_q u. \end{aligned}$$

Ejercicio 101.A. El individuo debe comparar la utilidad de tener la lotería, $pu(w+A) + (1-p)u(w+B)$ con la utilidad de venderla, $u(w+\pi)$. Si esta última es mayor, la venderá, si es menor, no. El precio mínimo al cual está dispuesto a venderla es aquél que las iguala:

$$u\left(w + \pi^A\right) = pu(w+A) + (1-p)u(w+B) \Leftrightarrow \pi^A = u^{-1}\left(pu(w+A) + (1-p)u(w+B)\right) - w. \tag{22}$$

101.B. Si no compra, el individuo tiene una riqueza inicial de w, y una utilidad de $u(w)$. Si compra la lotería a un precio π, tendrá una utilidad de $pu(w-\pi+A) + (1-p)u(w-\pi+B)$. Comprará si y sólo si esta última utilidad esperada es mayor que $u(w)$, y el precio máximo al cual está dispuesto a comprar viene dado por

$$u(w) = pu\left(w - \pi^B + A\right) + (1-p)u\left(w - \pi^B + B\right) \tag{23}$$

101.C. Los precios vienen dados por distintas ecuaciones, por lo que no tienen por qué ser iguales. La razón es que puede haber un efecto ingreso. Si el individuo se vuelve menos averso al riesgo cuanto más grande es la riqueza, la lotería en la Parte A vale más que la misma lotería, para el mismo individuo, en la Parte B, por lo que el precio de venta será mayor que el que obtendríamos en la Parte B. Para que los precios sean iguales, se tiene que cumplir la ecuación 23 evaluada en $\pi = \pi^A$. Dos formas triviales en que se cumple esto es con una utilidad lineal, y con $A = B$. También si el individuo tiene una función de utilidad tipo $-e^{-ax}$ (verifíquelo).

101.D. De la Parte A obtenemos

$$\pi^A = \left(\frac{1}{2}\sqrt{36} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{16}\right)^2 - 9 = 16$$

y de la Parte B,

$$\sqrt{9} = \frac{1}{2}\sqrt{36 - \pi^B} + \frac{1}{2}\sqrt{16 - \pi^B} \Leftrightarrow \pi^B = \frac{128}{9} < 16 = \pi^A.$$

101.E. De la Parte A,

$$\pi^A = -\log\left(\frac{1}{2}e^{-36} + \frac{1}{2}e^{-16}\right) - 9 = 7.6931$$

y en la Parte B verificamos que son iguales los precios (por el Ejercicio 97). Sustituimos π^A en la ecuación de la Parte B:

$$\begin{aligned} -e^{-9} &= -\frac{1}{2}e^{\pi^A - 36} - \frac{1}{2}e^{\pi^A - 16} = -\frac{1}{2}e^{\log\left(\frac{1}{2}e^{-36} + \frac{1}{2}e^{-16}\right)^{-1} - 45} - \frac{1}{2}e^{\log\left(\frac{1}{2}e^{-36} + \frac{1}{2}e^{-16}\right)^{-1} - 25} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-36} + \frac{1}{2}e^{-16}\right)^{-1}\left(e^{-45} + e^{-25}\right) = \frac{e^{-25}\left(1 + e^{-20}\right)}{e^{-16}\left(1 + e^{-20}\right)} \\ &= -e^{-9} \end{aligned}$$

Ejercicio 104. La riqueza final para cada retorno de z es $10 - 2 + 2z$, por lo que la utilidad esperada es

$$\int_0^\infty -e^{-3(8+2z)} 2e^{-2z} dz = -\frac{1}{4} e^{-24}$$

Ejercicio 105.A. Tenemos que la persona debe ser indiferente entre $u(W)$ y la lotería que paga h o $-h$ con probabilidad π :

$$u(W) = \pi u(W+h) + (1-\pi) u(W-h).$$

Si ponemos la versión de Taylor con igualdad para h chico (o la aproximada con h grande, no importa mucho) tenemos

$$\begin{aligned} u(W+h) &= u(W) + u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \\ u(W-h) &= u(W) - u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en $u(W)$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(W) &= \pi \left[u(W) + u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \right] + (1-\pi) \left[u(W) - u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \right] \\ 0 &= \pi \left[u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \right] + (1-\pi) \left[-u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \right] \\ &= \pi u'(W) h - (1-\pi) u'(W) h + \frac{1}{2} u''(W) h^2 \Leftrightarrow \\ \pi(W,h) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{u''(W)}{u'(W)} h = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} r(W) h. \end{aligned} \tag{24}$$

Vemos que la probabilidad de éxito que te deja indiferente aumenta cuanta más plata hay en juego y además aumenta con el grado de aversión absoluta al riesgo. El aumento de la probabilidad con la riqueza es porque para h chicos, el individuo es "casi" neutral al riesgo, pero a medida que aumenta h se fuelve más importante la aversión al riesgo.

105.B. Para $u(W) = -e^{-\gamma W}$ tenemos la fórmula exacta para π

$$\begin{aligned} -e^{-\gamma W} &= -\pi e^{-\gamma(W+h)} - (1-\pi) e^{-\gamma(W-h)} = -\pi e^{-\gamma W} e^{-\gamma h} - (1-\pi) e^{-\gamma W} e^{\gamma h} \Leftrightarrow \\ 1 &= \pi e^{-\gamma h} + (1-\pi) e^{\gamma h} \Leftrightarrow \pi = \frac{e^{h\gamma} - 1}{e^{h\gamma} - e^{-h\gamma}} \end{aligned} \tag{25}$$

y si utilizamos los resultados de la Parte A obtenemos que como $u' = \gamma e^{-\gamma W}$ y $u'' = -\gamma^2 e^{-\gamma W}$

$$\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \gamma h.$$

Esto no es necesario hacerlo, pero para ver qué conexión hay entre los dos resultados, podemos hacer la expansión de Taylor de π en (25):

$$\pi(h) = \pi(0) + \pi'(0) h.$$

Como $\pi(0)$ no está definido, calculamos su límite usando L'Hopital: (el límite de un $\frac{0}{0}$ es el límite de la derivada de lo de arriba, sobre la derivada de lo de abajo)

$$\pi(0) = \left. \frac{e^{h\gamma} - 1}{e^{h\gamma} - e^{-h\gamma}} \right|_{h=0} = \left. \frac{\gamma e^{\gamma h}}{\frac{\gamma \left(e^{2(-h\gamma)} + 1 \right)}{e^{-h\gamma}}} \right|_{h=0} = \left. \frac{1}{e^{-2h\gamma} + 1} \right|_{h=0} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\pi'(0) = \gamma \left.\frac{e^{-h\gamma}}{(e^{-h\gamma}+1)^2}\right|_{h=0} = \gamma\frac{1}{4} \Rightarrow \pi(h) = \pi(0) + \pi'(0)h = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma h$$

105.C. De la ecuación (24) tenemos

$$\pi(W,h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{u''(W)}{u'(W)}\right)h = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{u''(W)}{u'(W)}W\right)\frac{h}{W} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sigma(W)\theta = \pi(W,\theta).$$

y como para la función CRRA $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ se cumple $\sigma(W) = \gamma$, queda $\pi(W,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma\theta$.
105.D. Se puede interpretar π como el "retorno esperado requerido" (es cuánto tiene que rendir la inversión para que quieras meterte). Y lo que dice el π para la CRRA es que con θ constante, el π ha sido constante. Y π ha sido constante porque han aumentado W y h (que es lo que dice la cita).

Ejercicio 106.A. Con $u(A) = 1$ y $u(D) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} u(B) &= \frac{9}{10}u(A) + \frac{1}{10}u(D) \Leftrightarrow u(B) = \frac{9}{10} \\ u(C) &= \frac{19}{20}u(A) + \frac{1}{20}u(D) \Leftrightarrow u(C) = \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

106.B. Las distribuciones de probabilidad sobre los cuatro estados que genera cada criterio, condicional a si hubo huracán o no, son:

$$\begin{array}{ccc} & \multicolumn{2}{c}{\text{Criterio 1}} \\ & \text{No Evacúa} & \text{Evacúa} \\ \text{No Huracán} & \Pr(A) = \frac{9}{10} & \Pr(B) = \frac{1}{10} \\ \text{Huracán} & \Pr(D) = \frac{1}{10} & \Pr(C) = \frac{9}{10} \end{array} \text{ y } \begin{array}{ccc} & \multicolumn{2}{c}{\text{Criterio 2}} \\ & \text{No Evacúa} & \text{Evacúa} \\ \text{No Huracán} & \Pr(A) = \frac{17}{20} & \Pr(B) = \frac{3}{20} \\ \text{Huracán} & \Pr(D) = \frac{1}{20} & \Pr(C) = \frac{19}{20} \end{array}.$$

Como la probabilidad de huracán es 1%, la distribución de probabilidades sobre los 4 estados (la incondicional) es entonces

$$\begin{array}{ccc} & \multicolumn{2}{c}{\text{Criterio 1}} \\ & \text{No Evacúa} & \text{Evacúa} \\ \text{No Huracán} & \Pr(A) = \frac{891}{1000} & \Pr(B) = \frac{99}{1000} \\ \text{Huracán} & \Pr(D) = \frac{1}{1000} & \Pr(C) = \frac{9}{1000} \end{array} \text{ y } \begin{array}{ccc} & \multicolumn{2}{c}{\text{Criterio 2}} \\ & \text{No Evacúa} & \text{Evacúa} \\ \text{No Huracán} & \Pr(A) = \frac{1683}{2000} & \Pr(B) = \frac{297}{2000} \\ \text{Huracán} & \Pr(D) = \frac{1}{2000} & \Pr(C) = \frac{19}{2000} \end{array}.$$

Las utilidades de los criterios son entonces

$$\begin{aligned} U(C1) &= \frac{891}{1000}u(A) + \frac{99}{1000}u(B) + \frac{9}{1000}u(C) + \frac{1}{1000}u(D) = \\ &= \frac{891}{1000} + \frac{99}{1000}\frac{9}{10} + \frac{9}{1000}\frac{19}{20} = \frac{19\,773}{20\,000} = 0.98865 \\ U(C2) &= \frac{1683}{2000} + \frac{297}{2000}\frac{9}{10} + \frac{19}{2000}\frac{19}{20} = \frac{39\,367}{40\,000} = 0.98418 \end{aligned}$$

Problem 40.A. We must have $U(x_2) = p$ for a p such that receiving x_2 for sure is indifferent to receiving \$9 with probability p and \$1 with probability $1-p$.

Part B. 4% The bet would be fair since the expected value of the bet is 0 : with probability $\frac{5}{8}$ his payoff is $1-4=-3$ and with probability $\frac{3}{8}$ his payoff is $9-4=5$, so that

$$0 = -\frac{5}{8}3 + \frac{3}{8}5$$

Part C. 4% No he wouldn't. Without making any calculations, we know that $\sqrt{x}/3$ is a concave function, so that the individual is risk averse, and therefore would avoid a bet with expected value of 4, but with risk. If we do the calculations, we confirm this suspicion. If he has an initial wealth of \$4 and he doesn't take the bet, his utility is $\frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}$. If he take the bet, his expected utility is

$$\frac{5}{8}\frac{\sqrt{4-4+1}}{3} + \frac{3}{8}\frac{\sqrt{4-4+9}}{3} = \frac{5}{8}\frac{1}{3} + \frac{3}{8}1 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}.$$

Part D. 6% The fair (actuarilly fair) price would solve

$$0 = \frac{5}{8}(x-8) + \frac{3}{8}(x-0) \Leftrightarrow x = 5.$$

The individual's utility function when he does not purchase insurance is

$$\frac{5}{8}\sqrt{1} + \frac{3}{8}\sqrt{9} = \frac{7}{4}$$

and when he does for a price of y his utility is $\sqrt{9-y}$. Therefore, he would be willing to pay up to

$$\sqrt{9-y} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \frac{95}{16} = 5.9375 > 5.$$

107.A. The investor's preferences are represented by $U = U(W_1, W_2)$ where W_k denotes the level of wealth in state k: $W_1 = 5x_A + 20x_B$ and $W_2 = 6x_A$.

107.B. Now preferences are represented by:

$$U = U(W_1, W_2) = \frac{1}{3}u(W_1) + \frac{2}{3}u(W_2)$$

where u(·) denotes the investor's von Neumann Morgenstern utility function (as a function of wealth in state k, W_k).

107.C. The investor must choose x_A to maximize

$$\frac{1}{3}u(5x_A + 20x_B) + \frac{2}{3}u(6x_A) = \frac{1}{3}u(5x_A + 20\left(\frac{390-2x_A}{2}\right)) + \frac{2}{3}u(6x_A) = \frac{1}{3}\sqrt{5x + 20\left(\frac{390-2x}{2}\right)} + \frac{2}{3}\sqrt{6x}.$$

To get this result, take the first order condition

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}u(5x_A + 20\left(\frac{390-2x_A}{2}\right)) + \frac{2}{3}u(6x_A) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{3}u'\left(5x_A + 20\left(\frac{390-2x_A}{2}\right)\right)[-15] + \frac{2}{3}u'(6x_A)6 = 0 \Leftrightarrow \\ 4u'(6x_A) \quad &= \quad 5u'\left(5x_A + 20\left(\frac{390-2x_A}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{6x}} = \frac{5}{2\sqrt{5x + 20\left(\frac{390-2x}{2}\right)}} \end{aligned}$$

and solving for x by squaring both sides we obtain $x_A = 160$ and $x_B = 35$. La FVR se cumple pues

$$\frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{160*5+35*20}}\left(1+\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{160*6}}(1+2) = \frac{\sqrt{15}}{90} = \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{160*5+35*20}}\left(1+\frac{18}{2}\right)$$

107.D. The optimal choice has $x_B = 0$. To see so, take the derivative of the utility

$$\frac{1}{3}\sqrt{6x + 18\left(\frac{390-2x}{2}\right)} + \frac{2}{3}\sqrt{6x}$$

with respect to x_A and evaluate at $x_A = 195$:

$$\frac{d\left(\frac{1}{3}\sqrt{6x + 18\left(\frac{390-2x}{2}\right)} + \frac{2}{3}\sqrt{6x}\right)}{dx} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{x}} \frac{\sqrt{585 - 2x} - \sqrt{x}}{\sqrt{585 - 2x}}\Bigg|_{x=195} = 0$$

This means that the individual maximizes his utility at $x_A = 195$ and $x_B = 0$. The idea is that the individual is risk averse, and since the expected returns of both assets are the same, and those of B are riskier, the individual only wants asset A.

107.E. The optimal demand is with $x_A = 195$, but the FVR is not satisfied, because the first order conditions are not satisfied in this corner solution.

Ejercicio 110.A. El valor esperado de p es 1, y su utilidad esperada es $1 - 2 = -1$. El valor esperado de q es $\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{3} * 4 + \frac{1}{6} * 5 = \frac{8}{3}$ y su utilidad esperada es $\frac{8}{3} - 5 = -\frac{7}{3}$ que es peor que -1. Aunque aumenta el valor esperado, el individuo "aspira" a 5, en vez de aspirar a 3, y por eso su utilidad es menor.

110.B. La utilidad de cualquier lotería degenerada es 0, pues $a_i - h\left(\delta_{a_i}\right) = a_i - a_i = 0$.

110.C. Para ver que no se cumple monotonía notamos que δ_5 corresponde a un caso con $\alpha = 1$, y δ_0 corresponde a $\beta = 0$, y sin embargo no tenemos $\delta_5 \succ \delta_0$.

Maximización de Utilidad

Antes de pasar a equilibrio general, pongo en esta sección un repaso de maximización de funciones de utilidad típicas para calcular demandas. En la parte de equilibrio general asumiré que el lector puede calcular una demanda para cualquiera de estas utilidades.

The individual must choose x and y to maximize $U(x,y)$ subject to $p_x x + p_y y = I$.

The first way of solving that is finding y from the budget constraint and substituting in U :

$$y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x \Rightarrow U\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right).$$

This just recognizes that as you change x, the amount of good y will move along the budget line. So we have reduced a problem of two variables to a problem with 1 variable. You know that the chain rule is that if we have a function $f(x,y)$ and substitute y for $g(x)$, we obtain

$$\frac{df(x,g(x))}{dx} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,g(x))} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,g(x))} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{\partial f(x,g(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,g(x))}{\partial y}\frac{dg(x)}{dx}.$$

Hence, maximizing $U\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)$ with respect to x yields $dU/dx = 0$ or

$$\frac{dU\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)}{dx} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\frac{\left(\frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)}{dx} = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\frac{p_x}{p_y} = 0$$

which yields

$$MRS = \frac{\partial U(x,y)/\partial x}{\partial U(x,y)/\partial y} = \frac{p_x}{p_y}. \tag{26}$$

This must then be combined with the budget constraint to solve for x and y.

The second way of solving this problem is to set up the Lagrangean

$$L = U(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - I),$$

take the three derivatives with respect to x, y and λ, and equate them to 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \lambda p_x &= 0 \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \lambda p_y &= 0 \\ p_x x + p_y y - I &= 0 \end{aligned}$$

Solving for λ from the first equation, and plugging it into the second we obtain

$$\lambda = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{p_x} \Rightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{p_x}p_y = 0 \Leftrightarrow MRS = \frac{\partial U(x,y)/\partial x}{\partial U(x,y)/\partial y} = \frac{p_x}{p_y}$$

which is the same as equation (26). Again, we then use the budget constraint to obtain the values of x and y.

1 Cobb-Douglas

Utility is

$$U(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

Demand: choose x, y to maximize $x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ subject to

$$p_x x + p_y y = I \Leftrightarrow y = \frac{I - p_x x}{p_y}. \tag{27}$$

We then get to choose x to maximize $x^{\alpha}\left(\frac{I-p_x x}{p_y}\right)^{1-\alpha}$. The first order condition is

$$\begin{aligned}
\alpha x^{\alpha-1}\left(\frac{I-p_x x}{p_y}\right)^{1-\alpha} + (1-\alpha) x^{\alpha}\left(\frac{I-p_x x}{p_y}\right)^{-\alpha}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) &= 0 \Leftrightarrow \text{(using eq (27))} \\
\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} + (1-\alpha) x^{\alpha} (y)^{-\alpha}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\left(-\frac{p_x}{p_y}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} &= (1-\alpha)\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \\
\frac{y}{x} &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_x}{p_y}
\end{aligned} \tag{28}$$

Substituting into equation (27), we get

$$p_x x + p_y x\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_x}{p_y} = I \Leftrightarrow x\left(p_x, p_y, I\right) = \frac{\alpha I}{p_x} \text{ and } y\left(p_x, p_y, I\right) = \frac{(1-\alpha) I}{p_y}. \tag{29}$$

With the Lagrangian method, we would have written the Lagrangian

$$L = x^{\alpha} y^{1-\alpha} + \lambda\left(I - p_x x - p_y y\right)$$

and made the three partial derivatives equal to 0 (and hence to each other):

$$\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} - \lambda p_x = (1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} - \lambda p_y = I - p_x x - p_y y = 0.$$

From $\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} - \lambda p_x = 0$, we get

$$\lambda = \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} / p_x \tag{30}$$

and substituting into $(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} - \lambda p_y = 0$ we obtain

$$(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} - \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}\frac{p_y}{p_x} = 0$$

which is exactly the same as equation (28).

La función de utilidad indirecta es

$$V(p, I) = (x(p, I))^{\alpha}(y(p, I))^{1-\alpha} = \frac{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}{p_x^{\alpha} p_y^{1-\alpha}} I$$

A su vez, la demanda compensada es elegir x, y para minimizar $p_x x + p_y y$ sujeto a $x^{\alpha} y^{1-\alpha} \geq u$. Debemos elegir y para minimizar

$$\begin{aligned}
p_x\left(\frac{u}{y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + p_y y \quad &\Rightarrow \quad p_x\frac{1}{\alpha}\left(\frac{u}{y^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} u(\alpha-1) y^{\alpha-2} + p_y = 0 \Leftrightarrow x = y\frac{p_y}{p_x}\frac{\alpha}{1-\alpha} \Leftrightarrow \\
y^c \quad &= \quad u\left(\frac{p_x}{p_y}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow x^c = u\left(\frac{p_y}{p_x}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

La ecuación de Slutsky en este caso es

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=\frac{\partial x^c}{\partial p_x}-x\frac{\partial x}{\partial I}\Leftrightarrow -\alpha\frac{I}{p_x^2}=u\left(1-\alpha\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}\left(-\frac{p_y}{p_x^2}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)-\alpha\frac{I}{p_x}\alpha\frac{1}{p_x}.$$

Sustituyendo $u=\frac{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}{p_x^\alpha p_y^{1-\alpha}}I$, verificamos que

$$-\alpha\frac{I}{p_x^2}=\frac{\alpha^\alpha\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha}}{p_x^\alpha p_y^{1-\alpha}}I\left(1-\alpha\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}\left(-\frac{p_y}{p_x^2}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)-\alpha^2\frac{I}{p_x^2}=-\alpha\left(1-\alpha\right)\frac{I}{p_x^2}-\alpha^2\frac{I}{p_x^2}=-\alpha\frac{I}{p_x^2}$$

2 Perfect complements

An individual has a utility function over goods x and y given by $u\left(x,y\right)=\min\left\{ax,y\right\}$. Notice first that this utility function is general enough that it covers all utility functions of the form $\min\left\{cx,dy\right\}$: fix any c and d that you want, and plot the indifference curves; then plot the indifference curves of $\min\left\{\frac{c}{d}x,y\right\}$. They should be the same.

La demanda Marshalliana cuando $p_x,p_y>0$ se encuentra poniendo $ax=y$. La razón es que si, por ejemplo, $ax>y$, se puede vender un poco de x, comprar más y, y aumentar la utilidad. Concretamente, para $0<\varepsilon<x-\frac{y}{a}$, vender ε de x, y comprar $\frac{\varepsilon p_x}{p_y}$ de y aumenta estrictamente la utilidad:

$$\begin{aligned} u\left(x,y\right) &= y<y+\frac{\varepsilon p_x}{p_y} \text{ y también } u\left(x,y\right)=y<a\left(x-\varepsilon\right)\Leftrightarrow \\ u\left(x,y\right) &= y<u\left(x-\varepsilon,y+\frac{\varepsilon p_x}{p_y}\right). \end{aligned}$$

Cuando algún precio es 0, el individuo se gasta todo el dinero en el bien con precio positivo, y la demanda ya no es una función, ya que cualquier canasta con esa cantidad del bien caro, y cualquier cantidad grande del bien gratuito será óptima. Pero sigue siendo óptima la siguiente solución:

$$I=p_xx+p_yy=p_xx+p_yax=x\left(p_x+ap_y\right)\Rightarrow x\left(p_x,p_y,I\right)=\frac{I}{p_x+ap_y}\quad y\left(p_x,p_y,I\right)=\frac{aI}{p_x+ap_y}$$

3 Perfect substitutes

An individual has a utility function over goods x and y given by $u\left(x,y\right)=ax+y$. Notice first that this utility function is general enough that it covers all utility functions of the form $cx+dy$: fix any c and d that you want, and plot the indifference curves; then plot the indifference curves of $\frac{c}{d}x+y$. They should be the same.

The individual has to choose x,y to maximize $ax+y$ subject to the constraint $I=p_xx+p_yy$. Solving for $y=\frac{I-p_xx}{p_y}$ from the budget constraint we obtain that the individual must choose x to maximize $ax+\frac{I-p_xx}{p_y}=x\left(a-\frac{p_x}{p_y}\right)+\frac{I}{p_y}$. Never, ever, ever maximize a linear function by taking a derivative and equating to 0. You would get $a=\frac{p_x}{p_y}$, which are three quantities you don't control (you could get $2=1$, for example). In any case, it is a linear function, so if the coefficient on x is negative (that is $a<\frac{p_x}{p_y}$), choose $x=0$, to obtain $y=\frac{I}{p_y}$ (you spend all in y), and if the coefficient is positive ($a>\frac{p_x}{p_y}$), spend all you can in x, without making y negative: $x = \frac{I}{p_x}$ and $y = 0$. If they are equal, you are indifferent between all bundles. In short, the demand is

$$x^* = x(p_x, p_y, I) = \begin{cases} 0 & a < \frac{p_x}{p_y} \\ \left[0, \frac{I}{p_x}\right] & a = \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{I}{p_x} & a > \frac{p_x}{p_y} \end{cases} \text{ and } y^* = y(p_x, p_y, I) = \begin{cases} \frac{I}{p_y} & a < \frac{p_x}{p_y} \\ \left[0, \frac{I}{p_y}\right] & a = \frac{p_x}{p_y} \\ 0 & a > \frac{p_x}{p_y} \end{cases}$$

4 Quasi Linear Preferences

Suppose the utility of the consumer is given by $u(x_1, x_2) = x_2 + f(x_1)$ for some increasing f such that $f'' < 0$. Then, the slope of the indifference curve is

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = -f'(x_1)$$

so that for each $x = (x_1, x_2)$, the slope (of the indifference curve) is determined only by the value of x_1. That is, the indifference curves are just paralell (vertical) translations of each other.

Exercise 1. Quasi Linear Preferences. Suppose a consumer has an income of 100, and that the prices are given by $p = (p_1, p_2) = (2, 1)$. The individual's utility function is given by $u(x_1, x_2) = x_2 + 16\sqrt{x_1}$.

Part A. Plot the indifference curves corresponding to utility values of 32, 60 and 132.

Part B. In the same picture as in Part A, plot the budget line.

Part C. Using the method of the Lagrangian, find the optimal bundle.

Part D (Difficult). Is there any price p_1 large enough that would make the (optimal) demand of x_1 equal to 0? Why is that?

Part E. Suppose instead that the income of the individual was 30. Find the optimal bundle graphically.

Part F. Suppose a consumer has an income of 100, and that the prices are given by $p = (p_1, p_2) = (2, 1)$. The individual's utility function is given by $u(x_1, x_2) = x_2 - 10e^{-x_1}$ (don't worry about the possibility of utility being negative). Plot the indifference curves corresponding to 40, 60 and $98 - 2\ln 5 = 94.781$. Find the optimal bundle. What would the optimal bundle be if income were $I = 3$? And what would the optimal bundle be if income was still 100, and $p = (p_1, p_2) = (15, 1)$?

Solution. Part C. Using the method of the Lagrangian, we know that we must have

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{16}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{x_1}} = 2 \Leftrightarrow x_1 = 16$$

This last equality implies (using the budget constraint) that $x_2 = 68$.

Solution. Part D. No, because the marginal utility of x_1 at 0 is infinity: no matter how large the price, the individual is always willing to buy some of the good.

Solution. Part E. In this case, the income of the individual is not enough to buy the 16 units that he deems optimal, and since the marginal utility of purchasing some more x_1 is still larger than 2, the individual is better off consuming all in good 1 : he buys 15 units of x_1 and 0 of x_2.

Solution. Part F. Using the same formulas as above, we obtain $x_1 = \ln 5 = 1.609\,4$

The bottom line of these problems is that: if the marginal utility of x_1 is infinity, you'll always demand something of the good; if you can't afford what you want of good x_1, then you'll spend all of your income in good 1, and 0 in good 2; once you can afford your optimal quantity of good 1, as your income rises, you keep on buying the fixed amount of good 1, and spend all the rest in good 2.

5 Constant Elasticity of Substitution

$u(x,y) = \frac{x^d}{d} + \frac{y^d}{d} \Rightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}} \Rightarrow I = p_x y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}} + p_y y = y\left(p_x \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}} + p_y\right) \Leftrightarrow$

$$y^*(p,I) = \frac{I}{\left(\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{d}{d-1}} + 1\right) p_y}$$

y también

$$x^*(p,I) = y\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}} = \frac{I}{\left(p_x^{\frac{d}{d-1}} p_y^{\frac{d}{1-d}} + 1\right) p_y}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}} = \frac{I}{\left(\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{d}{d-1}} + 1\right) p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{1-d}}} = \frac{I}{\left(1 + \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{d}{1-d}}\right) p_x}$$

Aún sin estas cuentas,

$$\frac{p_x x}{p_y y} = \frac{p_x y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{d-1}}}{p_y y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{d}{d-1}}$$

Equilibrio General

En Equilibrio General se estudia la economía en su conjunto: como se determinan todos los precios y las asignaciones para todos los individuos y todas las firmas en todos los mercados. Hay al menos tres razones para estudiar Equilibrio General, y no quedarse en el equilibrio parcial. Primero, hay preguntas que no pueden contestarse con un análisis de equilibrio parcial. Por ejemplo, estudiar la determinación del precio de los zapatos en equilibrio parcial está bien, pues se puede tomar como dado el ingreso de los individuos. Pero el problema del crecimiento económico, que es el estudio de cómo crecen los ingresos, nunca podría hacerse en equilibrio parcial, pues no se puede tomar como dado el ingreso. Es más, los problemas económicos más importantes son los que no se pueden estudiar en equilibrio parcial. Un segundo motivo para estudiar Equilibrio General es que la pregunta quizás más vieja de economía, "¿Funcionan eficientemente los mercados?", necesariamente debe ser analizada en este contexto. De hecho, es una de las primeras preguntas que se estudiaron fue precisamente esa, y la vamos a estudiar en este curso. Finalmente, en algunos casos, la respuesta a una pregunta, cuando se utiliza el herramental de equilibrio parcial, puede ser errónea. Después de ver algunas definiciones veremos un ejemplo para mostrar este problema.

En la economía que estudiaremos, hay $I > 0$ consumidores, $J > 0$ firmas, y $L > 0$ bienes. Cada consumidor tiene preferencias (completas y transitivas) $\succeq_i$ definidas en su espacio de consumo $X_i \subseteq \mathbf{R}^L$. Cada firma j tiene un conjunto de posibilidades de producción $Y_j \subseteq \mathbf{R}^L$ que es cerrado y no vacío. Los recursos iniciales de la economía, su dotación inicial, es un vector $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_L) \in \mathbf{R}^L$. Para cada individuo i, $\omega_i = (\omega_{1i}, ..., \omega_{Li})$ es la dotación inicial de recursos.

Una **asignación** $(x, y) = (x_1, ..., x_I, y_1, ..., y_J)$ es una especificación de un vector de consumo $x_i \in X_i$ para cada consumidor $i = 1, ..., I$ y un vector de producción $y_j \in Y_j$ para cada firma $j = 1, ..., J$. Una **asignación es alcanzable (posible)** si $\sum_i x_{li} = \overline{\omega}_l + \sum_j y_{lj}$ para cada bien l. Es decir, si

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \overline{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j$$

Para completar la descripción de una economía, hace falta especificar la estructura de propiedad de las firmas. Para cada consumidor i existe $\theta_i = (\theta_{i1}, ..., \theta_{iJ})$, donde $\theta_{ij} \in [0, 1]$ es el porcentaje de los beneficios de la firma j que pertenecen al consumidor i. Por supuesto, para cada j,

$$\sum_{i=1}^{i=I} \theta_{ij} = 1$$

Una asignación alcanzable (x, y) es **Pareto Optima** si no existe otra asignación alcanzable (x', y') que Pareto domina a (x, y). Eso es, no existe una asignación alcanzable (x', y') tal que $x'_i \succeq_i x_i$ para todo i, y existe algún i para el cual $x'_i \succ x_i$.

Ejemplo 0. Dada una economía especificada por

$$\left(\left\{\left(\mathbf{R}_+^2, u(x) = x_1 + x_2, \omega = (1, 0)\right)\right\}, \left\{Y = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\}\right\}\right)$$

encontrar las asignaciones Pareto Óptimas. En este contexto, si una asignación es Pareto Óptima maximiza la utilidad del individuo sujeto a la tecnología relevante. Es decir, se debe elegir x_1, x_2, y_1, y_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a } x_1 &= 1 + y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ y_2 &\leq \sqrt{-y_1}. \end{aligned}$$

Del tercer y cuarto renglón sacamos $x_2 \leq \sqrt{-y_1}$ y del primero $x_2 \leq \sqrt{1-x_1}$. Por lo que se debe elegir x_1, x_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a } x_2 \quad \leq \quad & \sqrt{1-x_1}. \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos que debemos elegir la curva de indiferencia más alta que nos permita la tecnología. La solución a este problema es $x_1 = \frac{3}{4}$, y la asignación Pareto Óptima es $(x^*, y^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)$. ∎

Dada una economía especificada por $\left(\{(X_i, \succeq_i, \omega_i, \theta_i)\}_{i=1}^{i=I}, \{Y_j\}_{j=1}^{j=J}\right)$ una asignación (x^*, y^*) y un vector de precios $p = (p_1, ..., p_L)$ constituyen un **equilibrio Walrasiano o competitivo** si

(i) Para cada j, y_j^* maximiza beneficios en Y_j, es decir,

$$p.y_j \leq p.y_j^* \text{ para todo } y_j \in Y_j$$

(ii) Para cada i, x_i^* es maximal para $\succeq_i$ en la restricción presupuestal

$$\left\{x_i : px_i \leq p\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} p y_j^*\right\}$$

Es decir, no existe x_i en la restricción presupuestal, tal que $x_i \succ_i x_i^*$.

(iii) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Ejemplo 0 Continuado. Dada una economía especificada por

$$\left(\left\{\left(\mathbf{R}_+^2, u(x) = x_1 + x_2, \omega = (1,0), \theta = 1\right)\right\}, \left\{Y = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\}\right\}\right)$$

encontrar el o los equilibrios competitivos. (Gráficamente, la restricción presupuestal pasa por $\omega + y(p)$).

El siguiente ejemplo, tomado del trabajo "Factor prices may be constant but factor returns are not," de D. Bradford en Economic Letters (1978) ilustra cómo si se hace un análisis de equilibrio parcial, la respuesta a una pregunta puede ser equivocada.

Ejemplo 1. Análisis de la Incidencia de un Impuesto. Hay una economía con N (grande) ciudades y en cada ciudad hay una firma que utiliza trabajo l para producir un único bien con una función de producción f estrictamente cóncava. El bien se comercia en un único mercado nacional. Hay M consumidores que ofrecen inelásticamente M unidades de trabajo: sólo derivan placer del bien y no del ocio. Los trabajadores se pueden mover libremente entre ciudades para buscar el salario más alto. En el análisis que sigue, normalizamos el precio del bien a 1, y llamamos w_n al salario en la ciudad n. Como los trabajadores se pueden mover libremente, debemos tener $w_1 = w_2 = ... = w_n = \overline{w}$. En equilibrio, cada firma maximiza beneficios

$$f(l) - \overline{w}l$$

y como f' es estrictamente decreciente, la condición de primer orden

$$f'(l^*) = \overline{w}$$

asegura que en cada ciudad se contrata a la misma cantidad de gente M/N.

Supongamos ahora que la ciudad 1 decide poner un impuesto al trabajo. Analizaremos sobre quien recae el pago del impuesto, su incidencia, primero en equilibrio parcial, y luego en equilibrio general.

Si la tasa de impuesto es t y el salario en la ciudad 1 es w_1, la cantidad de trabajo contratada por la firma 1 será el $l_1(t)$ tal que

$$f'(l_1(t)) = w_1 + t. \tag{31}$$

Como la cantidad de ciudades es grande, el salario en las otras ciudades no cambiará de su nivel pre-impuesto de $\overline{w}$, y como el trabajo se puede mover libremente, tendremos $f'(l_1) = \overline{w} + t$. Este análisis revela que el ingreso de los trabajadores se mantiene y que como la firma 1 contrata menos gente a un precio mayor, el impuesto recae sólo sobre ella. La intuición típica de estos casos es que, como la oferta de trabajo es infinitamente elástica, la carga del impuesto recae sobre la firma 1.

Analizamos ahora el problema desde el punto de vista del Equilibrio General. Por la libre movilidad sabemos que el sueldo en las ciudades 2 a N será el mismo. Como en principio puede depender de la tasa de impuestos, llamaremos a ese sueldo en las demás ciudades $w(t)$. También por la libre movilidad sabemos que el salario para los trabajadores en la ciudad 1 debe ser $w_1(t) = w(t) + t$. Además, como f' es decreciente, la condición de primer orden

$$f'(l(t)) = w(t)$$

asegura que la cantidad de trabajo contratada en cada ciudad $2, ..., N$ sea la misma. Por lo tanto, la condición de oferta igual demanda en la definición de equilibrio competitivo, la condición (iii), requiere que

$$(N-1)\,l(t) + l_1(t) = M.$$

De esta ecuación obtenemos $l_1(t) = M - (N-1)\,l(t)$. Sustituyendo en la condición de primer orden de la firma 1, la ecuación (31), queda

$$f'(M - (N-1)\,l(t)) = w(t) + t.$$

Consideraremos ahora un aumento marginal en la tasa de impuestos desde 0. Para eso, tomaremos derivadas en esta ecuación, y evaluaremos en 0, recordando que $l_1(0) = l(0) = M/N$ y que $w_1(0) = w(0)$:

$$\begin{aligned} f''(M - (N-1)\,l(0))\,(1-N)\,l'(0) &= w'(0) + 1 \Leftrightarrow f''\left(M - (N-1)\frac{M}{N}\right)(1-N)\,l'(0) = w'(0) + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -f''\left(\frac{M}{N}\right)(N-1)\,l'(0) = w'(0) + 1. \end{aligned} \tag{32}$$

De derivar la condición de primer orden de las firmas en las demás ciudades, $f'(l(t)) = w(t)$, obtenemos

$$f''(l(t))\,l'(t) = w'(t) \Rightarrow f''(l(0))\,l'(0) = w'(0) \Rightarrow f''\left(\frac{M}{N}\right)l'(0) = w'(0). \tag{33}$$

De las ecuaciones (32) y (33) se deduce que

$$-w'(0)\,(N-1) = w'(0) + 1 \Leftrightarrow w'(0) = -\frac{1}{N}.$$

Como habíamos deducido del análisis de equilibrio parcial, para N grande, el salario en las demás ciudades cambia muy poco. La diferencia entre el análisis de equilibrio parcial y el de equilibrio general se da en la incidencia. Contrariamente a lo que había sugerido el análisis de equilibrio parcial, ahora mostraremos que la suma de los beneficios a nivel de toda la economía no cambia, por lo que el impuesto recae sobre los trabajadores.

Llamamos $\pi(w)$ a los beneficios de la firma cuando ha elegido la cantidad óptima de trabajo para un salario de w. Tenemos entonces que los beneficios totales en la economía son

$$(N-1)\,\pi(w(t)) + \pi(w(t) + t).$$

Por lo tanto, el cambio en los beneficios derivado de un cambio marginal, comenzando en 0, de la tasa de impuestos es

$$\begin{aligned}(N-1)\pi'(w(0))w'(0)+\pi'(w(0))(w'(0)+1) &= N\pi'(w(0))w'(0)+\pi'(w(0)) \\ &= -\pi'(w(0))+\pi'(w(0))=0\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Primer Teorema del Bienestar

Una relación de preferencias $\succeq_i$ en el espacio de consumo X_i es **localmente no saciable en** $x_i \in X_i$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $x_i' \in X_i$ tal que $\|x_i - x_i'\| < \varepsilon$ y $x_i' \succ x_i$. Las preferencias $\succeq$ son **localmente no saciables** si son localmente no saciables en todo $x_i \in X_i$, es decir, si para cada $x_i \in X_i$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $x_i' \in X_i$ tal que $\|x_i - x_i'\| < \varepsilon$ y $x_i' \succ x_i$.

Ejercicio 2 (Ejercicio 27 del repartido de ejercicios). Sea $X_i = \mathbf{R}_+^L$, $Y = -\mathbf{R}_+^L$ (no hay producción) y sea $\succeq_i$ una relación de preferencias que es localmente no saciable.

Parte A. Demuestre que si $x^* \succeq x$ para todo x tal que $px \leq K$, y $x^{**} \succeq x^*$, entonces $px^{**} \geq K$.

Parte B. Demuestre que si $x_i(p, p\omega_i)$ es la demanda Walrasiana del individuo i, con preferencias localmente no saciables, entonces $x_i(p, p\omega_i)$ cumple la Ley de Walras: $px_i(p, p\omega_i) = p\omega_i$.

Parte C. Demuestre que si $x_i(p, p\omega_i)$ es la demanda Walrasiana del individuo i, con preferencias localmente no saciables, y que si

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij}(p, p\omega_i) = \sum_{i=1}^{I} \omega_{ij}$$

para todo $j \neq k$ y algún $p \gg 0$ ($p_l > 0$ para todo $l = 1, 2, ..., L$) entonces

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ik}(p, p\omega_i) = \sum_{i=1}^{I} \omega_{ik},$$

por lo que p es un precio de equilibrio (Pista: utilice la Parte B).

Nota: La Parte B y la Parte C son las dos versiones de la Ley de Walras. La Parte A es la versión $px(p, p\omega) = p\omega$ (con $K = p\omega$), y la Parte B es la versión "si oferta igual demanda en $L-1$ mercados, la oferta es también igual a la demanda en el $L-$ésimo."

Primer teorema del bienestar. Si las preferencias son localmente no saciables, y si (x^*, y^*, p) es un equilibrio competitivo, entonces la asignación (x^*, y^*) es Pareto Optima.

Paso 1. Demostraremos primero que si (x, y) Pareto domina a (x^*, y^*), debemos tener que

$$\sum_{i=1}^{i=I} px_i > \sum_{i=1}^{i=I} p\left(\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} y_j^*\right). \tag{34}$$

Si (x,y) Pareto domina a (x^*,y^*), existe algún i tal que $x_i \succ_i x_i^*$. Como (x^*,y^*), p son un equilibrio, la condición (ii) de la definición nos dice que

$$px_i > p\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} p y_j^*. \tag{35}$$

Es decir, si la canasta x_i es estrictamente mejor que x_i^*, y el individuo i no eligió x_i, quiere decir que no le alcanzaba la plata para comprarla.

Para el resto de los individuos, si (x,y) Pareto domina a (x^*,y^*), tenemos que, por el Ejercicio 1, $x_i \succeq_i x_i^*$ implica

$$px_i \geq p\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} p y_j^*. \tag{36}$$

Sumando ahora para todos los individuos, las ecuaciones (35) y (36) implican la ecuación (34), que es lo que queríamos demostrar.

Paso 2. Demuestrar que, como y_i^* maximiza beneficios,

$$\sum_i px_i > p\overline{\omega} + \sum_j py_j \tag{37}$$

Para demostrar esto, recordamos que para todo j se cumple que $\sum_i \theta_{ij} = 1$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=I} p\left(\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} y_j^*\right) &= \sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{i=1}^{i=I}\sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{j=1}^{j=J}\sum_{i=1}^{i=I} \theta_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{j=1}^{j=J} y_j^*
\end{aligned}$$

Combinando esto con (34) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{i=I} px_i > \sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{j=1}^{j=J} y_j^*. \tag{38}$$

Finalmente, como y_j^* maximiza beneficios a los precios p para todas las firmas, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{j=1}^{j=J} y_j^* \geq \sum_{i=1}^{i=I} p\omega_i + p\sum_{j=1}^{j=J} y_j = p\overline{\omega} + p\sum_{j=1}^{j=J} y_j$$

y combinando esta última ecuación con (38) obtenemos el resultado en (37) que es lo que queríamos demostrar.

Paso 3. Como la ecuación (37) implica que

$$p\left(\sum_i x_i - \overline{\omega} - \sum_j y_j\right) > 0$$

obtenemos que $\sum_i x_i - \overline{\omega} - \sum_j y_j \neq 0$, lo que contradice que que (x, y) es una asignación alcanzable. Por tanto (x^*, y^*) es Pareto Optima. ∎

Ejercicio 3 (Ejercicio 11 del repartido de ejercicios). En esta economía hay dos agentes, el 1 y el 2. Las utilidades y dotaciones están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ u_2 &= x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ \omega_1 &= \omega_2 = (1, 1) \end{aligned}$$

Parte A. Verifique que

$$\left[x^1, x^2, p\right] = \left[(1,1), (1,1), (1,1)\right]$$

es un equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. La asignación $\left[x^1, x^2\right] = \left[(1,1), (1,1)\right]$, ¿es Pareto Óptima? Si no lo es, ¿cuál asignación la domina?

Parte C. Si la asignación de la Parte B no es Pareto Óptima, ¿porqué falla el Primer Teorema del Bienestar?

Parte D. Demuestre que no hay ningún equilibrio que sea Pareto Óptimo (pista: encuentre la única asignación Pareto Óptima que le da una utilidad de 1 al individuo 1 y demuestre que no es un equilibrio para ningún vector de precios $(1, p)$, y haga lo mismo para la única asignación Pareto Óptima que le da una utilidad de 0 al individuo 1)

Ejercicio 4 (Ejercicio 12 del repartido de ejercicios). Sean $\omega_1 = \omega_2 = (1, 1)$ y

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{12}^{\frac{1}{2}} \\ u_2(x_2) &= x_{21}^{\frac{1}{2}} x_{22}^{\frac{1}{2}} + x_{11} \end{aligned}$$

de tal forma que el individuo 2 disfruta del consumo que tenga la persona 1 del bien 1 (por ejemplo, podría ser que el bien 1 es "música" o "plantas de jardín"). Esto es lo que se llama una "externalidad".

Parte A. Encuentre el único equilibrio de esta economía.

Parte B. Muestre que el equilibrio no es Pareto Óptimo. Explique porqué.

Ejercicio 5. Sea $X = \mathbf{R}_+^L$ y sea $\succeq$ una relación de preferencias monótona, es decir, tal que $y \gg x$ (es decir $y_i > x_i$ para todo i) implica $y \succ x$. Demuestre que si una relación de preferencias es monótona, entonces es localmente no saciable.

Pasamos a una economía llamada de generaciones superpuestas. Los períodos de tiempo son $t = 0, 1, 2, ...$ En cada período hay un joven y un viejo (que fué joven el período pasado). Las dotaciones para cada individuo son de una unidad del único bien de la economía en cada período. Siendo j_t el consumo del joven en el período t y v_t el consumo del viejo en el período t, la función de utilidad del individuo que es jóven en t es

$$u_t(j_t, v_{t+1}) = j_t^{\alpha} v_{t+1}^{1-\alpha}.$$

Para el viejo en el período 0, lo único que nos interesa, es que su utilidad es creciente en su consumo, pero para simplificar, asumamos que su utilidad de consumir v_0 es v_0.

Para cada jóven en $t = 0, 1, 2, ...$ el problema de maximización dados los precios $(p_0, p_1, p_2, ...)$ es el de elegir (j_t, v_{t+1}) para maximizar

$$\begin{aligned} & j_t^\alpha v_{t+1}^{1-\alpha} \\ \text{sujeto a } p_t j_t + p_{t+1} v_{t+1} \quad \leq & \quad p_t + p_{t+1} \end{aligned}$$

La solución a este problema es

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\alpha}{p_t}(p_t + p_{t+1}) \\ v_{t+1} &= \frac{1-\alpha}{p_{t+1}}(p_t + p_{t+1}). \end{aligned}$$

Para el viejo en el período 0, su ingreso es p_0, y se gastará todo su ingreso en consumo del bien, por lo que su demanda del bien es 1.

Para que los precios $(p_0, p_1, p_2, ...)$ sean de equilibrio, debemos tener que oferta igual demanda en todos los períodos. Como la oferta es 2 en todos los períodos, tenemos que

$$\begin{array}{ll} t = 0 & 2 = 1 + j_0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\alpha}{p_0}(p_0 + p_1) \Leftrightarrow p_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_0 \\ t = 1 & 2 = v_1 + j_1 = \frac{1-\alpha}{p_1}(p_0 + p_1) + \frac{\alpha}{p_1}(p_1 + p_2) \Leftrightarrow p_2 = p_0 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2. \end{array}$$

Normalizamos $p_0 = 1$, adivinamos que $p_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^t$ y lo demostramos por inducción. El primer paso (demostrar que se cumple para algún t) ya lo hicimos, pues mostramos que $p_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Ahora asumimos que es cierto para $t < T$ y lo demostramos para T. Tenemos que

$$\begin{aligned} 2 &= v_{T-1} + j_{T-1} = \frac{1-\alpha}{p_{T-1}}(p_{T-2} + p_{T-1}) + \frac{\alpha}{p_{T-1}}(p_{T-1} + p_T) \Leftrightarrow \\ 2 &= \frac{1-\alpha}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-2} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}\right) + \frac{\alpha}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1} + p_T\right) \Leftrightarrow \\ p_T &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^T \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Dado esto, vemos que para todo t,

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\alpha}{p_t}(p_t + p_{t+1}) = 1 \\ v_{t+1} &= \frac{1-\alpha}{p_{t+1}}(p_t + p_{t+1}) = 1 \end{aligned}$$

como era obvio: en el período 0, el viejo se come su dotación, y el jóven también, por lo que el viejo en el período 1 debe comerse su dotación, y así sucesivamente. Con esta asignación, la utilidad de las personas en equilibrio es 1.

Si $\alpha < \frac{1}{2}$, esta asignación no es Pareto Óptima, pues les da a todos una utilidad de 1, mientras que la asignación

$$(v_t, j_t) = (2(1-\alpha), 2\alpha)$$

arroja una utilidad de $2(1-\alpha) > 1$ para el viejo, y $2\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} > 1$ para todos los demás.

¿Qué es lo que pasa en este equilibrio, que no es Pareto Óptimo? Para empezar, lo que sucede es que como $\alpha < \frac{1}{2}$, eso quiere decir que a los individuos les gusta más consumir cuando son viejos que cuando son jóvenes, pero en equilibrio deben consumir lo mismo en ambos períodos. El problema es que no hay forma de "transferir" recursos de un período al siguiente.

Una segunda forma de ver el problema, es tratando de entender porqué falla el Primer Teorema del Bienestar. Para ello escribimos formalmente la economía del modelo de generaciones superpuestas como un modelo de equilibrio general. En esta economía hay infinitos agentes (uno por cada número natural) y otros tantos bienes (con la interpretación siendo que trigo hoy es un bien distinto a trigo mañana), y una sola firma, cuyo conjunto de posibilidades de producción es $\{(0,0,0,...)\}$ (es decir, no puede transformar ningún bien en ningún otro bien). El espacio de consumo de cada consumidor es $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.... La dotación inicial de la economía es $(2,2,2,...)$ y la del jóven del período t es

$$\left(\underbrace{0,0,...0}_{t-1},1,1,0,0,...\right).$$

La estructura de propiedad de las firmas no importa, pues los beneficios son siempre 0, pero para ser correctos, ponemos que la firma pertenece, por ejemplo, al viejo del período 0. Formalmente, si el viejo en el período t es el agente t, tenemos que $\theta_0 = 1$ y $\theta_t = 0$ para todo $t > 0$.

Ahora vemos que si $\alpha < \frac{1}{2}$, $p_t \to \infty$, y la demostración del primer teorema del bienestar falla, pues varias de las sumatorias divergen.

Ejercicio 6. Encontrar el paso exacto en el cual falla la demostración del primer teorema del bienestar con la economía de generaciones superpuestas.

Ejemplo 111 Hay dos bienes en la economía. El individuo 1 tiene la dotación $\omega_1 = (2,0)$ y el 2 la dotación $\omega_2 = (0,5)$. Las utilidades son $u_1(x) = \frac{x_1}{5} + x_2$ y $u_2(x) = x_2 - \frac{9}{x_1+1}$. Con estas utilidades, las demandas cuando los precios son $(1,p)$ son

$$x_1 = \begin{cases} (2,0) & \text{si } p > 5 \\ \left(s, \frac{2-s}{5}\right) & s \in [0,2] \text{ si } p = 5 \\ \left(0, \frac{2}{p}\right) & \text{si } p < 5 \end{cases} \quad \text{y } x_2 = \left(\frac{3\sqrt{p^3}-p}{p}, \frac{p-3\sqrt{p^3}+5p^2}{p^2}\right)$$

Cuando $p = 1$, tenemos que las demandas son $(0,2) + (3-1, 1-3+5) = (2,5)$, por lo que los precios $(1,1)$ son un equilibrio.

Si en cambio asumimos que la oferta total en el mercado es $(1,5)$ (porque el individuo 1 se olvidó donde había dejado una unidad del bien 1), y asumimos (y después chequeamos que p es menor que 5) el p que equilibra el mercado del bien 1 es aquél que hace $0 + \frac{3\sqrt{p^3}-p}{p} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{4}{9}$. Supongamos que luego de esto, el individuo 1 encuentra la unidad que perdió, entonces habrá vendido una unidad del bien 1, y consumirá $(1,0) + \left(0, \frac{1}{4/9}\right) = \left(1, \frac{9}{4}\right)$; el individuo 2 consumirá

$$\left(\frac{3\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} - \left(\frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)}, \frac{\left(\frac{4}{9}\right) - 3\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} + 5\left(\frac{4}{9}\right)^2}{\left(\frac{4}{9}\right)^2}\right) = \left(1, \frac{11}{4}\right).$$

En este caso, el individuo 1 se comporta como un monopolista, y está mejor (antes consumía $(0,2)$ y ahora $\left(1, \frac{9}{4}\right)$, que es más en ambos bienes). El problema es que la asignación es ineficiente: si el individuo 1 le diera 1 unidad del bien 1 al 2, que le daría una unidad del bien 2, ambos estarían mejor ya que

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{1+1} - \left(\frac{7}{4} - \frac{9}{2+1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 112 El individuo 1 tiene una utilidad $u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ y el individuo 2 $u_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Hay una unidad de x_1 y otra unidad de x_2.

Parte A. Encuentre todas las asignaciones eficientes de esta economía.
Parte B. Si las dotaciones son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$ encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.
Parte C. Suponga que el individuo 2 actúa en forma competitiva (tomador de precios) y el individuo 1 "se olvida" que tiene $\frac{1}{2}$ unidad del bien 1, y actúa en forma competitiva; los precios igualan la oferta de $\frac{1}{2}$ del bien 1 y su demanda. La canasta de consumo de 1 es la canasta de este nuevo equilibrio, más $\frac{1}{2}$ del bien 1. Esta asignación ¿es eficiente? Al individuo 1 ¿le conviene actuar así?

En el ejercicio anterior (Ej. 112) el individuo 1 se consume lo que se "olvidó" de ofrecer en el mercado. En el próximo ejercicio vemos que para que la utilidad de un individuo mejore no es necesario que vuelva a consumir lo que olvidó: el agente "tira" parte de su dotación y aún así mejora.

Ejercicio 113 Considere una economía de intercambio (sin producción), con dos personas y dos bienes. El individuo 1 tiene utilidad $U(x_1) = \min\{x_{11}, x_{12}\}$ y el 2 tiene utilidad $V(x_2) = \min\{4x_{21}, x_{22}\}$.

Parte A. Si las dotaciones son $\omega_1 = (30, 0)$ y $\omega_2 = (0, 20)$, encuentre el o los equilibrios (cuando los encuentre, argumente que no hay otros). Puede ser útil dibujar las curvas de oferta de cada individuo en una caja de Edgeworth (la curva de oferta, u offer curve, es el conjunto de puntos tangentes a la restricción presupuestal a medida que variamos los precios).

Parte B. Si las dotaciones son $\omega_1 = (10, 0)$ y $\omega_2 = (0, 20)$, encuentre el o los equilibrios.

Parte C. Compare las utilidades de cada individuo en las Partes A y B. Explique en dos renglones por qué pasa esto.

Otras tres versiones del PTB

Una asignación alcanzable (x, y) es **Débilmente Pareto Optima** si no existe una asignación alcanzable (x', y') tal que $x_i' \succ_i x_i$ para todo i.

Teorema 7. Otra versión del Primer teorema del bienestar. Si (x^*, y^*, p) es un equilibrio competitivo, entonces la asignación (x^*, y^*) es Débilmente Pareto Optima.

Antes de hacer la demostración, piensen un segundo. Fíjense que los supuestos son más débiles (no asumimos que las preferencias son localmente no saciables) y la conclusión es más débil (hay asignaciones que son Débilmente Pareto Óptimas, pero que no son Pareto Óptimas).

Paso 1. Demostrar que si (x, y) pareto domina débilmente a (x^*, y^*) , debemos tener que

$$\sum_i p.x_i > \sum_i p\left(\omega_i + \sum_j \theta_{ij} y_j^*\right)$$

Paso 2. Demostrar que, como y_i^* maximiza beneficios,

$$\sum_i p.x_i > p.\overline{\omega} + \sum_j p y_j \tag{39}$$

Paso 3. Demostrar que la ecuación anterior implica que (x, y) no es una asignación alcanzable, y que por tanto (x^*, y^*) es Débilmente Pareto Óptima.

Una **asignación** $(x, y) = (x_1, ..., x_I, y_1, ..., y_J)$ es una especificación de un vector de consumo $x_i \in X_i$ para cada consumidor $i = 1, ..., I$ y un vector de producción $y_j \in Y_j$ para cada firma $j = 1, ..., J$. Una asignación es alcanzable (posible) si $\sum_i x_{li} = \overline{\omega}_l + \sum_j y_{lj}$ para cada bien l. Es decir, si

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \overline{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j$$

Una asignación alcanzable (x, y) es **Pareto Optima** si no existe otra asignación alcanzable (x', y') que Pareto domina a (x, y). Eso es, no existe una asignación alcanzable (x', y') tal que $x_i' \succeq_i x_i$ para todo i, y existe algún i para el cual $x_i' \succ x_i$.

Dada una economía especificada por $\left(\left\{(X_i, \succeq_i)_{i=1}^{I}\right\}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\right)$ una asignación (x^*, y^*) y un vector de precios $p = (p_1, ..., p_L)$ constituyen un **equilibrio con transferencias** si existe un vector de riquezas $(w_1, ..., w_I)$, con $\sum w_i = p.\overline{\omega} + \sum_j p.y_j^*$ tal que

(i) Para cada j, y_j^* maximiza beneficios en Y_j, es decir,

$$p.y_j \leq p.y_j^* \text{ para todo } y_j \in Y_j$$

(ii) Para cada i, x_i^* es maximal para $\succeq_i$ en la restricción presupuestal

$$\{x_i : p.x_i \leq w_i\}$$

(iii) $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Finalmente, una relación de preferencias $\succeq_i$ en el espacio de consumo X_i es localmente no saciable si para cada $x_i \in X_i$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $x_i' \in X_i$ tal que $\|x_i - x_i'\| < \varepsilon$ y $x_i' \succ x_i$.

Teorema 8. Primer teorema del bienestar. Si las preferencias son localmente no saciables, y si (x^*, y^*, p) es un equilibrio con transferencias, entonces la asignación (x^*, y^*) es Pareto Optima.

Paso 1. Demuestre que si (x, y) pareto domina a (x^*, y^*) , debemos tener que

$$\sum_i p.x_i > \sum_i w_i$$

Paso 2. Demuestre que, como y_i^* maximiza beneficios,

$$\sum_i p.x_i > p.\overline{\omega} + \sum_j py_j \tag{40}$$

Paso 3. Demuestre que la ecuación (40) implica que (x, y) no es una asignación alcanzable, y que por tanto (x^*, y^*) es Pareto Optima.

Ejercicio 9. Demuestre que todo equilibrio competitivo es Pareto Óptimo utilizando este último Teorema. Pista: demuestre que todo equilibrio competitivo es un equilibrio con transferencias.

Ejercicio 10 (Ejercicio 25 del repartido de ejercicios). En este ejercicio se demostrará que aún si el individuo puede saciarse (las preferencias no son localmente no saciables) los equilibrios son Pareto Óptimos. Suponga que cada X_i es no vacío y convexo. Unas preferencias $\succeq_i$ en X_i son **estrictamente convexas** si $x' \succeq_i x$ y $x' \neq x$ implican que $\alpha x' + (1 - \alpha) x \succ_i x$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Parte A. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas, para cada i existe a lo sumo un x_i^s que sacia al individuo ($x_i^s \succeq_i x_i$ para todo $x_i \in X_i$).

Parte B. Demuestre que si no existe un x_i^s que sacia al individuo y las preferencias son estrictamente convexas, entonces las preferencias son localmente no saciables.

Parte C. Demuestre que si aún si existe un x_i^s que sacia al individuo, si las preferencias son estrictamente convexas, $\succeq_i$ es localmente no saciable en x_i, para todo $x_i \neq x_i^s$.

Parte D. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas y x_i^* es óptimo para $\succeq_i$ en la restricción presupuestal $px \leq K$ y $x_i^{**} \succeq_i x_i^*$ entonces sólo hay dos opciones: o $x_i^* = x_i^s$ o $px_i^{**} \geq K$.

Parte E. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas todo equilibrio competitivo es Pareto Óptimo (si hace la Parte F, ignore esta parte, y será tomada como correcta).

Parte F. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas todo equilibrio con transferencias es Pareto Óptimo.

Existencia

Una pregunta relevante es: ¿bajo qué condiciones sobre las primitivas de la economía (asignaciones, utilidades, etc) es seguro que existe un equilibrio competitivo? Nos gustaría estar seguros que si escribimos un modelo y decimos "en equilibrio pasa tal o cual cosa" no estemos hablando de un conjunto vacío. Analizaremos ahora una versión muy simple de un teorema de existencia de equilibrio general.

Sea $x_i(p, p\omega_i)$ la demanda "Walrasiana" de los individuos (es decir, el conjunto de canastas preferidas por el individuo cuando los precios son p y el ingreso es $p\omega_i$). Para una economía de intercambio (es decir, cuando $J = 1$ y $Y_1 = -\mathbf{R}_+^L$) la definición de qué constituye un equilibrio Walrasiano se puede reescribir como: (x^*, y^*) y un vector de precios $p = (p_1, ..., p_L)$ constituyen un equilibrio Walrasiano si

(i') $y^* \leq 0$, $p \geq 0$ y $py^* = 0$.

(ii') $x_i^* \in x_i(p, p\omega_i)$ para todo i.

(iii') $\sum_i x_i^* = \sum_i \omega_i + y^*$

Que las condiciones (ii') y (iii') son equivalentes a (ii) y (iii) es trivial, y no lo mostraremos. Ahora mostraremos que (i') es equivalente a (i).

Lema 10. $y^* \in Y_1$ es tal que $py^* \geq py$ para todo $y \in Y_1$ si y sólo si $y^* \leq 0$, $py^* = 0$ y $p \geq 0$.

Prueba. ($\Leftarrow$) Asumamos para comenzar que $y^* \leq 0$, $p \geq 0$ y $py^* = 0$. Debemos mostrar que $y^* \in Y_1$ es tal que $py^* \geq py$ para todo $y \in Y_1$. Primero vemos que como $y^* \leq 0$ y $Y_1 = -\mathbf{R}_+^L$, tenemos que $y^* \in Y_1$. Segundo, como $py^* = 0$ y $py \leq 0$ para todo $y \in Y_1$ (pues $p \geq 0$, y $Y_1 = -\mathbf{R}_+^L$) tenemos que $py^* \geq py$ para todo $y \in Y_1$.

($\Rightarrow$) Asumimos ahora que $y^* \in Y_1$ es tal que $py^* \geq py$ para todo $y \in Y_1$ y mostraremos que $y^* \leq 0$, $p \geq 0$ y $py^* = 0$. Primero, como $y^* \in Y_1 = -\mathbf{R}_+^L$, tenemos que $y^* \leq 0$. Segundo, $p \geq 0$, pues si para algún l, $p_l < 0$, tendríamos que para $\widetilde{y} \equiv \left(y_1^*, ..., y_{l-1}^*, y_l^* - 1, y_{l+1}^*, ..., y_L^*\right) \in Y_1$,

$$p\left(y_1^*, ..., y_{l-1}^*, y_l^* - 1, y_{l+1}^*, ..., y_L^*\right) = py^* - p_l > py^*$$

contradiciendo que $py^* \geq py$ para todo $y \in Y_1$. Tercero, vemos que

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c} p \geq 0 \\ y \leq 0, \forall y \in Y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad py \leq 0, \forall y \in Y_1 \\ \left.\begin{array}{c} 0 \in Y_1 \\ py^* \geq py, \forall y \in Y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad py^* \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow py^* = 0$$

como queríamos demostrar. ■

El siguiente lema caracteriza las condiciones bajo las cuales un vector de precios es parte de un equilibrio Walrasiano.

Lema 12. Suponga que para todo i las preferencias $\succeq_i$ son localmente no saciables, y que para todo p y ω_i, $x_i(p, p\omega_i)$ es una sola canasta (es decir, la canasta que maximiza la utilidad sujeta a la restricción presupuestal es única). Para una economía de intercambio $p \geq 0$ es parte de un equilibrio Walrasiano (existe una asignación (x^*, y^*) tal que $[(x^*, y^*), p]$ es un equilibrio Walrasiano) si y sólo si,

$$\sum_i (x_i (p, p\omega_i) - \omega_i) \leq 0 \tag{41}$$

Antes de pasar a la demostración, notamos que en ningún caso hay que demostrar que $p \geq 0$. El lema dice que $p \geq 0$ es parte de un equlibrio Walrasiano si y sólo si se cumple la ecuación (41). No nos pide que demostremos que p es tal que $p \geq 0$ y es parte de un equilibrio Walrasiano.

Prueba. ($\Rightarrow$) Demostraremos primero que si p es parte de un equilibrio Walrasiano, se cumple la ecuación (41). Sabemos entonces que existe una asignación (x^*, y^*) tal que para $[(x^*, y^*), p]$ se cumplen las condiciones (i'),(ii') y (iii'). De la condición (iii') sabemos que $\sum_i (x_i^* - \omega_i) = y^*$, y de la (i'), que $y^* \leq 0$, por lo que $\sum_i (x_i^* - \omega_i) \leq 0$. A su vez, de la condición (ii') obtenemos la ecuación (41).
($\Leftarrow$) Asumamos ahora que (41) se cumple, y pongamos

$$\begin{aligned} y^* &= \sum_i (x_i (p, p\omega_i) - \omega_i) \\ x_i^* &= x_i (p, p\omega_i). \end{aligned}$$

Tenemos que (i') se satisface pues; $p \geq 0$ (por hipótesis); $y^* \leq 0$ por definición de y^* y el hecho que (41) se cumple; $py^* = 0$ pues por ser las preferencias localmente no saciables, $px_i (p, p\omega_i) - p\omega_i = 0$ para todo i, y entonces

$$py^* = p \sum_i (x_i (p, p\omega_i) - \omega_i) = \sum_i (px_i (p, p\omega_i) - p\omega_i) = 0.$$

La condición (ii') se satisface por la forma como definimos x_i^*, y la (iii') por la forma como definimos y^*. ■

Definimos ahora

$$z_i (p) = x_i (p, p\omega_i) - \omega_i \text{ y } z (p) = \sum_i z_i (p)$$

por lo que, si para todo i las preferencias $\succeq_i$ son localmente no saciables, y para todo p, $z(p)$ es una sola canasta, para una economía de intercambio $p \geq 0$ es parte de un equilibrio Walrasiano si y sólo si, $z(p) \leq 0$. Demostraremos ahora que existe un equilibrio Walrasiano, si z satisface ciertas condiciones.

Teorema 13. Asuma que para todo i, $z_i(p)$ es una función de $\mathbf{R}_+^L - \{0\}$ en $\mathbf{R}^L$ que es continua, homogénea de grado 0 y que satisface la ley de Walras (es decir, $pz_i(p) = 0$ para todo p). Entonces existe un p^* tal que $Z(p^*) = \sum_i z_i(p^*) \leq 0$, y por tanto la asignación $(\{z_i(p^*) + \omega_i\}, Z(p))$ y el vector de precios p^* constituyen un equilibrio Walrasiano.

Antes de pasar a la demostración, vale la pena aclarar un par de puntos. Primero, el supuesto de continuidad de z se puede deducir de la continuidad de las preferencias y su convexidad, por lo cual no es un supuesto raro para hacer sobre z. Segundo, con no saciedad local, z satisface la ley de Walras, por lo cual tampoco es raro asumir que z satisface dicha ley. Finalmente, una cosa mala de este teorema es que no se aplica a una amplia gama de casos que estudiamos comunmente pues:

1) supone que z_i es una función (es decir, no admite que para ciertos precios haya varias canastas que son óptimas y dejan al individuo indiferente). Esto se soluciona asumiendo que las preferencias son estrictamente convexas (es decir, que si $y \succeq w$ y $x \succeq w$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $\alpha x + (1-\alpha) y \succ w$).

2) supone que z_i está definida para todo $p > 0$. Es decir, asume que aunque haya algún precio igual a 0, la demanda de ese bien no será infinita. Para una amplia gama de preferencias, eso no es así. En particular, eso no es cierto para el ejemplo que más usamos los economistas: la Cobb-Douglas.

Sin perjuicio de lo anterior, hay versiones más sofisticadas del teorema que no necesitan asumir ni que z es una función, ni que está definida para todo $p > 0$.

Continuamos con un ejercicio que será útil para entender la demostración.

Ejercicio 14. Suponga que $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Parte A. Dibuje un exceso de demanda $Z(p)$ que cumpla la Ley de Walras, y demuestre que para el $Z(p)$ elegido se cumple la Ley de Walras.

Parte B. Para el $Z(p)$ elegido, defina $Z_l^+(p) = \max\{0, Z_l(p)\}$ y $Z^+(p) = \left(Z_1^+(p), ..., Z_L^+(p)\right)$. Dibuje $Z^+(p)$.

Parte C. Demuestre que si $Z(p) Z^+(p) = 0$, eso quiere decir que $Z(p) \leq 0$. Hágalo para todo p, y no sólo para el p elegido.

Parte D. Demuestre que para

$$\alpha(p) = \sum_{l=1}^{L} \left(p_l + Z_l^+(p)\right)$$

la función f definida por

$$f(p) = \frac{p + Z^+(p)}{\alpha(p)}$$

es tal que para cualquier $p \in \Delta = \left\{p \in \mathbf{R}_+^L : \sum_l p_l = 1\right\}$ se cumple que $f(p) \in \Delta$.

Parte E. Dibuje, para el p de la Parte A, $f(p)$. Verifique que para los bienes en los cuales había exceso de demanda, se subió el precio relativo.

Un último paso antes de la demostración del Teorema 13, es presentar el enunciado del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Teorema de punto fijo de Brouwer. Sea $S \subseteq \mathbf{R}^n$ para algún n, un conjunto cerrado, acotado y convexo, y sea $f : S \to S$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe un s tal que $f(s) = s$.

Para ver que cada uno de los supuestos cumple algún rol relevante vemos que si no pedimos que S sea cerrado, $f : (0,1) \to (0,1)$ definida por

$$f(x) = \frac{1+x}{2}$$

no tiene punto fijo. Si no pedimos que S sea acotado, tenemos que $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definida por $f(x) = x + 1$ tampoco tiene punto fijo. Si no requerimos que S sea convexo, vemos que $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $f(x) = 1 - x$ tampoco tiene punto fijo. Finalmente, si f es discontinua, tenemos que $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

tampoco tiene punto fijo.

Prueba del Teorema 13. Sea $\Delta = \left\{p \in \mathbf{R}_{+}^{L} : \sum_{l} p_l = 1\right\}$, y definamos $Z_l^{+}(p) = \max\{0, Z_l(p)\}$ y $Z^{+}(p) = \left(Z_1^{+}(p), ..., Z_L^{+}(p)\right)$. Vemos que $Z^{+}(p)$ es continua y que $Z(p) Z^{+}(p) = 0$ implica $Z(p) \leq 0$. Definimos también

$$\alpha(p) = \sum_{l=1}^{L} \left(p_l + Z_l^{+}(p)\right)$$

que es continua y mayor o igual que 1 para todo p. Nos definimos

$$f(p) = \frac{p + Z^{+}(p)}{\alpha(p)}$$

que también es continua y tal que $f : \Delta \to \Delta$, donde Δ es cerrado, acotado y convexo. Por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe un $p^* \in \Delta$ tal que $p^* = f(p^*)$. Por la ley de Walras, tenemos que

$$0 = p^* Z(p^*) = f(p^*) Z(p^*) = \frac{p^* + Z^{+}(p^*)}{\alpha(p^*)} Z(p^*) = \frac{Z^{+}(p^*)}{\alpha(p^*)} Z(p^*)$$

por lo que $Z^{+}(p^*) Z(p^*) = 0$, y eso implica $Z(p^*) \leq 0$, como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 15 (24 en el repartido de Ejercicios). Definimos en $X = \mathbf{R}_{+}^{2}$ las siguientes funciones de utilidad: $u_1(x) = \min\{x_1, x_2\} - (x_1 - x_2)^2$ y $u_2(x) = x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2$. Demuestre que para $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$ y las utilidades u_1 y u_2 la demanda $x(p)$:

Parte A. Es una función de $\mathbf{R}_{+}^{2} - \{0\}$ en $\mathbf{R}^2$.

Parte B. Es continua.

Parte C. Es homogénea de grado 0 y satisface la ley de Walras.

Ejercicio 16 (119 en el repartido de ejercicios). Suponga que $\omega_1 = (2,0)$ y $\omega_2 = (0,2)$. Asuma que $u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11} + \sqrt{x_{12}}$ y $u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}$. Normalice el precio del bien 2 a 1.
Parte A. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.
Parte B. Suponga ahora que $u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$. si existe un equilibrio, encuéntrelo. Si no existe, demuestre que para cada $(p_1, p_2) \neq (0,0)$, la suma de las demandas no es igual a la suma de las dotaciones.

Ejercicio 114 Suponga que $\omega_1 = (1,1)$ y $\omega_2 = (1,1)$. Asuma que $u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, f(x_{12})\}$ para alguna función continua y creciente f; asuma que $u_2(x_{21}, x_{22}) = \min\{x_{21}, f(x_{22})\}$. Demuestre que existe un equilibrio en esta economía.

Ejercicio 115 Sean $u_A\left(x^A\right) = x_1^A$ y $u_B\left(x^B\right) = x_2^B$. Las dotaciones son $\omega^A = (1,1)$ y $\omega^B = (0,1)$.

Parte A. Encuentre el, o los, equilibrios competitivos de esta economía. Si no hay equilibrio, argumente por qué, y explique por qué falla el Teorema 13 de existencia (qué propiedad de la función z no se cumple en este caso).
Parte B. Encuentre la asignación Pareto Óptima de esta economía.

Ejercicios de Equilibrio General

Ejercicio 0. Dada una economía especificada por

$$\left(\left\{\left(\mathbf{R}_{+}^{2}, u\left(x\right)=x_1+x_2, \omega=\left(1,0\right)\right)\right\}_{i=1}^{i=1}, \left\{Y=\left\{y\in\mathbf{R}^{2}: y_2\leq\sqrt{-y_1}\right\}\right\}_{j=1}^{j=1}\right)$$

encuentre las asignaciones Pareto Óptimas.

Ejercicio 1. Edgeworth con un único equilibrio. En esta economía hay dos agentes, el 1 y el 2. Las utilidades y dotaciones están dadas por $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_1 x_2$, $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$. Encuentre todos los equilibrios de esta economía. En particular, encuentre qué precios pueden ser de equilibrio, y para cada precio de equilibrio, encuentre las canastas de consumo de los agentes.

Ejercicio 2. Edgeworth con múltiples equilibrios. En esta economía hay dos agentes, el 1 y el 2. Las utilidades y dotaciones están dadas por $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_1 + 2x_2$, $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$. Encuentre todos los equilibrios de esta economía. En particular, encuentre qué precios pueden ser de equilibrio, y para cada precio de equilibrio, encuentre las canastas de consumo de los agentes.

Ejercicio 3. Robinson Crusoe. Hay una única persona en la economía: Robinson. La economía está dada por los siguientes datos. Hay dos bienes, tiempo libre y cocos. Robinson tiene una dotación de $(1, 1)$ (una unidad de tiempo y una de cocos), y su función de utilidad está dada por

$$u\left(t,c\right)=c^{\frac{1}{2}}$$

es decir, Robinson no valora su tiempo libre. Robinson también posee la única firma de la isla que transforma tiempo libre en cocos, mediante la técnica "me trepo a la palmera y los bajo." El conjunto de posibilidades de producción de la firma está dado por

$$Y\equiv\left\{\left(-t,c\right):c\leq t^{\frac{1}{2}}\right\}$$

así por ejemplo, si Robinson invierte 1 unidad de tiempo, podrá conseguir, como máximo, $1^{\frac{1}{2}} = 1$ coco.

Normalice el precio del tiempo a 1 y llame p al precio de los cocos.

Parte A. Para cada $(1, p)$ determine cuanto trabajo demandará la firma y cuánto coco producirá. Para ello, resuelva el problema de maximización de beneficios.

Parte B. Determine a cuanto ascienden los beneficios de la firma cuando demanda la cantidad óptima de trabajo.

Parte C. Determine cuanto tiempo trabajará Robinson (recuerde que no obtiene utilidad del ocio y que cuanto más trabaja, más cocos puede comer) y cuántos cocos demandará. (no olvide incluir los beneficios de la firma en la restricción presupuestal de Robinson).

Parte D. Determine el precio p de equilibrio y las cantidades de coco que produce la firma, y que consume Robinson (no olvide que hay dotaciones iniciales).

Ejercicio 116 Un individuo debe elegir qué porción de su tiempo T asignar a laburar l, y cuánto a recreación r. Su función de utilidad por consumo del único bien x y recreación es

$$u(c,r) = cr.$$

El individuo es dueño de la única firma de la economía que transforma trabajo en bien de consumo mediante la función de producción $f(l) = al^{\frac{1}{2}}$, donde a es un parámetro tecnológico.

Normalice el precio del bien a 1, llame w al salario, y encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Ejercicio 4. La vaca inteligente. Una vaca posee 1 kilo de semilla de trigo y 1 kilo de hojas de la planta del trigo. La vaca posee una firma que tiene una tecnología de punta (llamada "planto la semilla y que crezca") para transformar semillas de trigo en hojas de trigo. Esta tecnología le permite transformar x kilos de trigo en x kilos de hojas de trigo. Las preferencias de la vaca por kilos de semillas s y kilos de hojas h están dadas por $u(s,h) = s^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$. Normalice el precio de las semillas a 1, llamele p al precio de las hojas.

Parte A. Encuentre la demanda de semillas de la firma $s_f^d(p)$ y la oferta de hojas de la firma $h_f^o(p)$ en función de p (tenga ojo, no derive para maximizar los beneficios de la firma. Piense)

Parte B. Encuentre el consumo de semillas $s_v^d(p)$ y de hojas $h_v^d(p)$ de la vaca.

Parte C. Grafique la demanda total de semillas con p en el eje horizontal (no se asuste, debería ser creciente en p). Grafique en el mismo par de ejes la oferta total se semillas.

Parte D. ¿Cuál es el precio de equilibrio? ¿Cuáles son los valores de $s_v^d, s_f^d, h_v^d\ h_f^o$?

Ejercicio 5. Robinson Crusoe y Viernes. En esta economía hay dos agentes, 1 y 2; dos bienes, Naranjas n y Bananas b y un solo período de tiempo. No hay producción, y las funciones de utilidad de los agentes están dadas por

$$u_i(n,b) = n^{\alpha}b^{1-\alpha} \text{ para } i = 1,2 \text{ y } 0 \leq \alpha \leq 1$$

La dotación inicial del agente 1 es $(1,0)$ (una naranja y ninguna banana) y la de 2 es $(0,1)$ (ninguna naranja y una banana).

Parte A. Normalice el precio de las naranjas a 1, llámele p al precio de las bananas y encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. ¿Qué sucede con p cuando aumenta α? ¿Porqué?

Ejercicio 6. Robinson Crusoe y Viernes otra vez. En esta economía hay dos agentes, R y V; dos bienes, Naranjas n y Bananas b y un sólo período de tiempo. No hay producción, y las funciones de utilidad de los agentes están dadas por

$$u_R(n,b) = n^{\alpha}b^{1-\alpha} \text{ y } u_V(n,b) = \max\{n,b\}$$

La dotación inicial de R es $(1,0)$ (una naranja y ninguna banana) y la de V es $(0,1)$ (ninguna naranja y una banana).

Parte A. Normalice el precio de las naranjas a 1, llámele p al precio de las bananas y encuentre las demandas de ambos bienes para ambos agentes. Encuentre también la demanda agregada de bananas (es decir, para cada nivel de precios, cuál es la cantidad total demandada). Grafique con p en el eje de las abcisas la demanda agregada de bananas para $\alpha = \frac{1}{2}$, y la oferta de bananas.

Parte B ¿Hay un equilibrio en esta economía? Si lo hay, especifique el precio p, y las cantidades consumidas de ambos bienes, por ambos agentes.

Parte C Si la respuesta en la Parte B fue que no había un equilibrio, ¿cuál o cuáles de las siguientes hipótesis que aseguran la existencia de equilibrio no están presentes?

(i) $z_i(p)$, el exceso de demanda del bien i, para $i = b, n$, es una función.

(ii) Si $z_i(p)$ no es una función ¿Hay alguna forma de, quitándole cantidades demandadas para algunos precios, hacer que sea una función continua?

(iii) Si $z_i(p)$ no es una función ¿Hay alguna forma de, quitándole cantidades demandadas para algunos precios, hacer que $z_i(p)$ sea un número real para todo $p \geq 0$? (en particular, ¿qué pasa en este caso si $p = 0$?)

Ejercicio 7. Un modelo de generaciones superpuestas. Este ejercicio ilustra como puede surgir asignación ineficiente en una economía con horizonte infinito. Por supuesto, no cumple con los supuestos del Primer Teorema del Bienestar.

Los períodos de tiempo son $t = 0, 1, 2, ...$ En cada período $t = 1, 2, ...$ hay un joven y un viejo, que fue joven el período pasado. En el período 0 hay un viejo, que no se especifica de donde vino. Las dotaciones para cada individuo son de una unidad del único bien de la economía en cada período. Siendo j_t el consumo del joven en el período t y v_t el consumo del viejo en el período t, la función de utilidad del individuo que es joven en t es

$$u_t(j_t, v_{t+1}) = j_t^{\alpha} v_{t+1}^{1-\alpha}.$$

Para el viejo en el período 0, lo único que nos interesa, es que su utilidad es creciente en su consumo, pero para simplificar, asumamos que su utilidad de consumir v_0 es v_0.

Parte A. Dados los precios $(p_0, p_1, p_2, ...)$ plantee el problema de maximización del individuo que es joven en el período t y encuentre sus demandas óptimas y la del viejo del período 0.

Parte B. Normalice $p_0 = 1$ y encuentre todos los precios de equilibrio. Usando el equilibrio en el mercado de bienes para el período 1 encuentre p_1. Luego asuma que $p_t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^t$ para todo $t < T$ y demuestre usando la condición de equilibrio en el mercado de bienes en el período t, que $p_T = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^T$.

Dado el resultado de la Parte B, vemos que para todo t,

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\alpha}{p_t}(p_t + p_{t+1}) = 1 \\ v_{t+1} &= \frac{1-\alpha}{p_{t+1}}(p_t + p_{t+1}) = 1 \end{aligned}$$

como era obvio: en el período 0, el viejo se come su dotación, y los precios son tales el joven quiere comerse también 1. Por lo tanto, el viejo en el período 1 debe comerse su dotación, y así sucesivamente. Con esta asignación, la utilidad de las personas en equilibrio es 1.

Parte C. Muestre que si $\alpha < \frac{1}{2}$, esta asignación no es Pareto Óptima, pues la asignación

$$(x_0, x_1, x_2, ...) = (v_0, (j_0, v_1), (j_1, v_2), ...) = (2(1-\alpha), (2\alpha, 2(1-\alpha)), ...)$$

es alcanzable y la Pareto Domina.

¿Qué es lo que pasa en este equilibrio, que no es Pareto Óptimo? Para empezar, lo que sucede es que como $\alpha < \frac{1}{2}$, eso quiere decir que a los individuos les gusta más consumir cuando son viejos que cuando son jóvenes, pero en equilibrio deben consumir lo mismo en ambos períodos. El problema es que no hay forma de "transferir" recursos de un período al siguiente.

Una segunda forma de ver el problema, es tratando de entender porqué falla el Primer Teorema del Bienestar. El modelo de generaciones superpuestas es una economía que entra dentro del modelo de equlibrio general. En esta economía hay infinitos agentes (uno por cada número natural) y otros tantos bienes (con la interpretación siendo que trigo hoy es un bien distinto a trigo mañana), y una sola firma, cuyo conjunto de posibilidades de producción es $\{(0,0,0,...)\}$ (es decir, no puede transformar ningún bien en ningún otro bien). El espacio de consumo de cada consumidor es $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.... La dotación inicial de la economía es $(2,2,2,...)$ y la del joven del período t es

$$\Bigg(\underbrace{0,0,...0}_{t-1},1,1,0,0,...\Bigg).$$

La estructura de propiedad de las firmas no importa, pues los beneficios son siempre 0, pero para ser correctos, ponemos que la firma pertenece, por ejemplo, al viejo del período 0. Formalmente, si el viejo en el período t es el agente t, tenemos que $\theta_0 = 1$ y $\theta_t = 0$ para todo $t > 0$.

Ahora vemos que si $\alpha < \frac{1}{2}$, $p_t \to \infty$, y la demostración del primer teorema del bienestar falla, pues varias de las sumatorias divergen.

Parte D. Encontrar el paso exacto en el cual falla la demostración del primer teorema del bienestar con la economía de generaciones superpuestas.

Ejercicio 8. Considere la siguiente economía. Hay un agente por cada número natural, o lo que es lo mismo, $I = \mathbf{N}$, y hay dos bienes: bananas y naranjas (las bananas son el bien 1 y las naranjas el bien 2). El precio de las bananas es normalizado a 1 y llamamos p al de las naranjas. Cada agente posee una dotación de una banana y una naranja, y la función de utilidad de cada agente es

$$u(b,n) = b^{\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Parte A. Encuentre un equilibrio competitivo de esta economía. Sea cuidadoso con la notación.

Parte B. ¿Es la asignación que encontró Pareto Óptima? (Demuestre su respuesta) ¿Se aplica el Primer Teorema del Bienestar que vimos en clase a esta economía? (Justifique). Si la asignación no es Pareto Óptima, ¿dónde falla la demostración?

Ejercicio 9. Hay un individuo y una firma. El bien 1 son semillas de trigo, y el 2 es tiempo libre. La dotación inicial es $(1,1)$. La firma produce semillas de trigo s a partir de semillas de trigo y trabajo t con la tecnología dada por

$$f(s,t) = 4s^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}.$$

Las preferencias del individuo por semillas y trabajo estan definidas en el conjunto $X = R_+ \times [0,1]$ (puede consumir cualquier cantidad positiva de semillas, pero sólo puede trabajar entre 0 y 1 unidades de tiempo, piense que el tiempo esta medido en "vidas") y vienen dadas por

$$u(s,t) = s^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$$

Parte A. Demuestre que si $(1, w)$ son los precios de equilibrio (normalizando el precio de las semillas a 1 y llamándole w al salario) y $(s^*, -t^*)$ es el vector de "producción" de la firma (tiene una producción neta de s^* semillas usando t^* de trabajo) entonces los beneficios de la firma son 0 (pista: tienen que ser mayores o iguales que 0 porque siempre puede producir 0 demandando 0 de ambos insumos, por lo que restaría demostrar que no pueden ser estrictamente mayores que 0. Para demostrar eso, note que la tecnología de la firma tiene retornos constantes a escala y use eso para demostrar que si fueran > 0, la oferta de la firma en equilibrio sería infinita).

Parte B. Encuentre la forma de producir x unidades de semillas que minimiza el costo para cada vector de precios $(1, w)$.

Parte C. Usando las partes A y B muestre que en equilibrio $w \geq 4$ y que si $w > 4$, entonces la firma no produce nada.

Parte D. Usando la Parte A, encuentre la canasta de consumo óptima del individuo para cada vector de precios $(1, w)$.

Parte E. Usando la demanda de semillas del individuo, demuestre que la firma tiene que producir una cantidad positiva de semilla en equilibrio (argumente que si no lo hiciera, se obtendría $w = 1$, que llevaria a una contradicción con la Parte C).

Parte F. Usando las Partes E y C encuentre los precios y la asignación de equilibrio.

Ejercicio 10. En esta economía hay dos agentes, el 1 y el 2. Las utilidades y dotaciones están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ u_2 &= x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} \\ \omega_1 &= \omega_2 = (1,1) \end{aligned}$$

Parte A. Encuentre las funciones de exceso de demanda de ambos individuos. ¿Si u_1 fuera $x_1 + x_2$, habría una función de exceso de demanda? Explique.

Parte B. ¿Se puede aplicar el teorema de existencia de equilibrio visto en clase y las notas? Verifique cada una de las hipótesis (¿Se satisface la ley de Walras? ¿Están los excesos de demanda definidos para todo $p \geq 0$? etc, etc).

Parte C. Encuentre el o los equilibrios de esta economía.

Ejercicio 11. En esta economía hay dos agentes, el 1 y el 2. Las utilidades y dotaciones están dadas por

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + x_2 \geq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ u_2 &= x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ \omega_1 &= \omega_2 = (1,1) \end{aligned}$$

Parte A. Verifique que

$$\left[x^1, x^2, p\right] = \left[(1,1), (1,1), (1,1)\right]$$

es un equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. La asignación $\left[x^1, x^2\right] = [(1,1), (1,1)]$, ¿es Pareto Óptima? Si no lo es, ¿cuál asignación la domina?

Parte C. Si la asignación de la Parte B no es Pareto Óptima, ¿porqué falla el Primer Teorema del Bienestar?

Parte D. Demuestre que no hay ningún equilibrio que sea Pareto Óptimo (pista: encuentre la única asignación Pareto Óptima que le da una utilidad de 1 al individuo 1 y demuestre que no es un equilibrio para ningún vector de precios $(1, p)$, y haga lo mismo para la única asignación Pareto Óptima que le da una utilidad de 0 al individuo 1)

Ejercicio 12. Sean $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$ y

$$\begin{aligned} u_1(x_1) &= x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{12}^{\frac{1}{2}} \\ u_2(x_2) &= x_{21}^{\frac{1}{2}} x_{22}^{\frac{1}{2}} + x_{11} \end{aligned}$$

de tal forma que el individuo 2 disfruta del consumo de que tenga 1 del bien 1 (por ejemplo, podría ser que el bien 1 es "música" o "plantas de jardín"). Esto es lo que se llama una "externalidad".

Parte A. Encuentre el único equilibrio de esta economía.

Parte B. Muestre que el equilibrio no es Pareto Óptimo. Explique porqué.

Ejercicio 13. Sean

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left\{(y_1, y_2) : y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\} \\ Y_2 &= \left\{(y_1, y_2) : y_2 \leq 1 - y_1^2\right\}. \end{aligned}$$

Hay dos individuos en la economía, el individuo i es propietario de la firma i. Las dotaciones iniciales son $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$, y las utilidades

$$u_1(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad u_2(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}.$$

Encuentre el o los equilibrios de esta economía. Si queda una ecuación de tercer grado en p, demuestre que existe un precio de equilibrio $p \in (1,2)$.

Ejercicio 14. Hay dos economías, con un consumidor, una firma y dos bienes cada una. Para

$$\begin{aligned} &\succeq_1 : x \succeq_1 y \Leftrightarrow x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geq y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha} \\ &\succeq_2 : x \succeq_2 y \Leftrightarrow x_1^{\beta} x_2^{1-\beta} \geq y_1^{\beta} y_2^{1-\beta} \end{aligned}$$

las economías vienen dadas por

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\{X, \succeq\}, Y, \{(\omega, \theta)\}\right) \\ &= \left(\left\{\mathbf{R}_+^2, \succeq_1\right\}, \left\{(-y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^2 : y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\}, \{((1,1), 1)\}\right) \\ E_2 &= \left(\left\{\mathbf{R}_+^2, \succeq_2\right\}, \left\{(-y_1, y_2) \in \mathbf{R}_+^2 : y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\}, \{((1,1), 1)\}\right) \end{aligned}$$

Parte A. Calcule las utilidades de cada agente en el único equilibrio en cada economía (calcule sólo una, pues la otra es cambiar α por β).

Parte B. Considere ahora la economía dada por la unión de ambas economías (dos bienes, dos agentes, dos firmas, cada agente es dueño de una firma). Suponga $\alpha = \frac{1}{2} = 2\beta$. Muestre que en el equilibrio en esta nueva economía las utilidades de equilibrio son mayores que las que tenían en los equilibrios cuando las economías estaban en autarquía (eran economías separadas).

Parte C. ¿Se le ocurre algún razonamiento general que demuestre que esto es siempre así? Es decir, demuestre (en palabras) que dadas dos economías separadas, si se abren al libre comercio, estarán mejor que en autarquía.

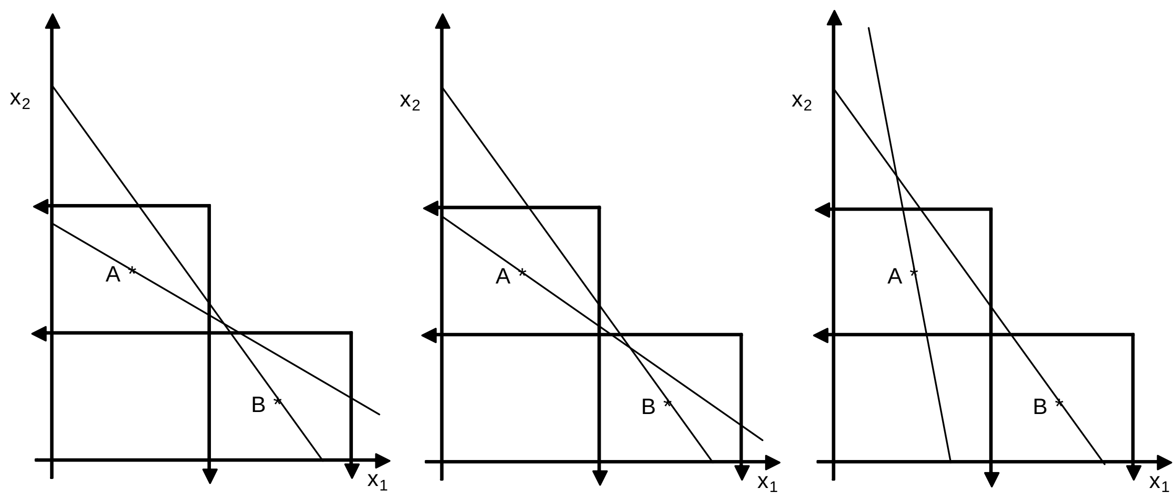
Ejercicio 15. Sea $X = \mathbf{R}_+^2$, y sean u_1 y u_2 funciones de utilidad para los individuos 1 y 2. Sean

$$\omega_1^A = (1,3)\,, \omega_2^A = (1,1)\,, \omega_1^B = (3,1)\,, \omega_2^B = (1,1)$$

las dotaciones de los individuos 1 y 2 en las economías A y B respectivamente. Es decir, las economías A y B vienen dadas por

$$E^A = \left\{\left(X, u_i, \omega_i^A\right)\right\}_{i=1}^{i=2} \quad \text{y} \quad E^B = \left\{\left(X, u_i, \omega_i^B\right)\right\}_{i=1}^{i=2}.$$

Los siguientes tres gráficos presentan las cajas de Edgeworth, con sus dotaciones, para tres pares distintos de precios



Parte A. En la hoja proporcionada con los dibujos, para cada economía $i = A, B$, dibuje el conjunto C_i de asignaciones que cumplen la restricción presupuestal para ambos individuos y son alcanzables.

Parte B. Indique cuál o cuáles de los paneles podrían representar pares de precios de equilibrio. Es decir, en cada panel, indique si el par de precios p_A y p_B podrían ser los precios de equilibrio en las economías A y B respectivamente. En los paneles en los cuales los precios podrían ser de equilibrio, dibuje en la hoja una asignación que podría ser de equilibrio para cada economía. Pista: para determinar si los pares de precios son de equilibrio o no, intente encontrar, o muestre que no hay, una asignación en C_A y otra en C_B que cumplan con el Axioma Débil de la Preferencia Revelada para el individuo 1 (si x_A es elegido en A y x_B en B, debemos tener que $p_B x_A \leq p_B x_B$ implica $p_A x_B > p_A x_A$ y similarmente, $p_A x_B \leq p_A x_A$ implica $p_B x_A > p_B x_B$)

Ejercicio 16. Considere una economía con dos agentes, dos bienes, y sin producción. Las dotaciones son $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$ y las utilidades $u_1(x_1, x_2) = x_1$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Parte A. Encuentre el conjunto de asignaciones Débilmente Pareto Óptimas y dibújelas en una caja de Edgeworth.

Parte B. Encuentre el o los equilibrios para la dotación dada.

Parte C. Encuentre todas las asignaciones que pueden ser parte de un equilibrio competitivo, suponiendo que las dotaciones pueden cambiar de tal forma que la dotación total de cada bien es 2. ¿Cuáles asignaciones Pareto Óptimas no pueden ser de equilibrio? ¿Porqué?

Ejercicio 16'. Considere una economía con dos agentes, dos bienes, y sin producción. Las dotaciones son $\omega_1 = \omega_2 = (1, 1)$ y las utilidades $u_1(x_1, x_2) = x_1$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Parte A. Encuentre el conjunto de asignaciones Pareto Óptimas y dibújelas en una caja de Edgeworth.

Parte B. Encuentre el o los equilibrios para la dotación dada.

Parte C. Encuentre todas las asignaciones que pueden ser parte de un equilibrio competitivo, suponiendo que las dotaciones pueden cambiar de tal forma que la dotación total de cada bien es 2. ¿Alguna asignación Pareto Óptima no pueden ser de equilibrio?

Ejercicio 17. Considere una economía con dos agentes, dos bienes, y sin producción. Las dotaciones son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$ y las utilidades $u_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.

Parte A. Calcule el equilibrio competitivo como función de α.

Parte B. Asuma que $\alpha = \frac{3}{4}$. Si un gobernante quiere maximizar la suma de las utilidades, ¿qué asignación elegirá?

Parte C. Encuentre una transferencia de dotaciones entre los individuos tal que el equilibrio competitivo con esas dotaciones sea la asignación de la Parte B.

Parte D. La solución (más sencilla) de la Parte B implica transferencias de ambos individuos entre sí. Encuentre una transferencia de dotaciones del individuo 1 al 2, o del 2 al 1, tal que el equilibrio competitivo con esas nuevas dotaciones sea el de la Parte B. Pista: encuentre cuáles deben ser los precios de equilibrio en la Parte B, y transfiera dotaciones desde el que le sobra plata (para comprar la canasta de la Parte B, con las dotaciones iniciales) al que le falta.

Ejercicio 18. Considere una economía con dos agentes, dos bienes, y sin producción. Las dotaciones son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$ y las utilidades $u_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1 + bx_2$ para $b > 0$

Parte A. Calcule el equilibrio competitivo como función de b.

Parte B. Si un gobernante quiere maximizar la suma de las utilidades, ¿qué asignación elegirá?

Parte C. Encuentre una transferencia de dotaciones entre los individuos tal que el equilibrio competitivo con esas dotaciones sea la asignación de la Parte B.

Parte D. La solución (más sencilla) de la Parte B implica transferencias de ambos individuos entre sí. Encuentre una transferencia de dotaciones del individuo 1 al 2, o del 2 al 1, tal que el equilibrio competitivo con esas nuevas dotaciones sea el de la Parte B. Pista: encuentre cuáles deben ser los precios de equilibrio en la Parte B, y transfiera dotaciones desde el que le sobra plata (para comprar la canasta de la Parte B, con las dotaciones iniciales) al que le falta.

Ejercicio 19. Considere una economía con dos agentes, dos bienes, y sin producción. Las dotaciones son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (0, 1)$ y las utilidades $u_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.

Parte A. Calcule el equilibrio competitivo como función de α.

Parte B. Si un gobernante quiere maximizar la suma de las utilidades, ¿qué asignación elegirá?

Parte C. Encuentre una transferencia de dotaciones entre los individuos tal que el equilibrio competitivo con esas dotaciones sea la asignación de la Parte B.

Parte D. La solución (más sencilla) de la Parte B implica transferencias de ambos individuos entre sí. Encuentre una transferencia de dotaciones del individuo 1 al 2, o del 2 al 1, tal que el equilibrio competitivo con esas nuevas dotaciones sea el de la Parte B. Pista: encuentre cuáles deben ser los precios de equilibrio en la Parte B, y transfiera dotaciones desde el que le sobra plata (para comprar la canasta de la Parte B, con las dotaciones iniciales) al que le falta.

Ejercicio 20 (de Kreps). Considere una economía con dos agentes, tres bienes, y dos firmas. El agente 1 es dueño de la firma 1, que transforma el bien 1 en 3 de acuerdo a la tecnología $y_3 \leq 3y_1$, y el agente 2 de la firma 2, que transforma el bien 1 en 2 de acuerdo a la tecnología $y_2 \leq 4y_1$. Cada consumidor posee como dotación 5 unidades del bien 1. Las utilidades son

$$u_1(x) = 6 + \frac{2 \log x_3 + 3 \log x_2}{5} \quad \text{y} \quad u_2(x) = 8 + \log x_3 + \log x_2$$

Parte A. Normalice $p_1 = 1$ y encuentre el equilibrio de esta economía.

Parte B. Encuentre el equilibrio de esta economía si revertimos la estructura de propiedad. Vale lo mismo hacer las cuentas otra vez, que dar un argumento bien elaborado "en palabras".

Parte C. Encuentre las asignaciones Pareto Óptimas de esta economía.

Ejercicio 21. En una economía hay 2 bienes, un individuo, y una firma. La dotación inicial es $\omega = (1, 1)$, la tecnología de la firma es

$$Y = \left\{ y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \leq 0 \text{ y } y_2 \leq \sqrt{-y_1} \right\}$$

y la función de utilidad del individuo es $u(x) = x_1 x_2$.

Parte A. Encuentre el único equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. Asuma que la economía se abre al comercio internacional y que enfrenta unos precios $(1, p)$ en el mercado internacional, a los cuales la firma puede comprar y vender todo lo que desee, y el individuo puede comprar todo lo que desee. En la jerga de economía internacional, es una economía pequeña y abierta. Encuentre el único equilibrio de esta economía. En este caso el equilibrio es la asignación (x, y) correspondiente al individuo y a la firma, a los precios dados internacionalmente.

Parte C. Muestre que la utilidad del individuo es mayor en la Parte B que en la Parte A.

Ejercicio 22. En una economía hay 2 bienes, y $n+1$ individuos, y una firma. La dotación inicial de cada individuo es $\omega = (d, 0)$, la tecnología de la firma es

$$Y = \left\{ y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \leq 0 \text{ y } y_2 \leq -y_1 \right\}$$

y las funciones de utilidad de los individuos son $u_1(x) = u_2(x) = ... = u_n(x) = x_1 x_2$ y $u_{n+1}(x) = x_1$.

Parte A. Encuentre el único equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. Encuentre cómo varían los precios y la asignación de equilibrio cuando cambian n y d.

Ejercicio 23. En una economía hay 2 bienes, dos individuos y una firma. La tecnología de la firma es $Y = \{(0,0)\}$. La dotación inicial de cada individuo i es $\omega_i = (1,1)$, y las preferencias son $u_1(x) = x_1 x_2$ y $u_2(x) = 0$, para todo x.

Parte A. Encuentre todos los equilibrios competitivos de esta economía.

Parte B. Para cada equilibrio de la Parte A determine si es Pareto Óptimo o no (en cada caso demuestre su respuesta).

Parte C. Si encontró algún equilibrio que no es Pareto Óptimo, explique por qué falla el Primer Teorema del Bienestar.

Parte D. Encuentre las asignaciones Pareto Óptimas de esta economía.

Ejercicio 24. Definimos en $X = \mathbf{R}^2_+$ las siguientes funciones de utilidad: $u_1(x) = \min\{x_1, x_2\} - (x_1 - x_2)^2$ y $u_2(x) = x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2$. Demuestre que para $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$ y las utilidades u_1 y u_2 la demanda $x(p)$:

Parte A. Es una función de $\mathbf{R}^2_+ - \{0\}$ en $\mathbf{R}^2$.

Parte B. Es continua.

Parte C. Es homogénea de grado 0 y satisface la ley de Walras.

Ejercicio 25. En este ejercicio se demostrará que aún si el individuo puede saciarse (las preferencias no son localmente no saciables) los equilibrios son Pareto Óptimos. Suponga que cada X_i es no vacío y convexo. Unas preferencias $\succeq_i$ en X_i son **estrictamente convexas** si $x' \succeq_i x$ y $x' \neq x$ implican que $\alpha x' + (1-\alpha) x \succ_i x$ para todo $\alpha \in (0,1)$.

Parte A. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas, para cada i existe a lo sumo un x_i^s que sacia al individuo ($x_i^s \succeq_i x_i$ para todo $x_i \in X_i$).

Parte B. Demuestre que si no existe un x_i^s que sacia al individuo y las preferencias son estrictamente convexas, entonces las preferencias son localmente no saciables.

Parte C. Demuestre que si aún si existe un x_i^s que sacia al individuo, si las preferencias son estrictamente convexas, $\succeq_i$ es localmente no saciable en x_i, para todo $x_i \neq x_i^s$.

Parte D. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas y x_i^* es óptimo para $\succeq_i$ en la restricción presupuestal $px \le K$ y $x_i^{**} \succeq_i x_i^*$ entonces sólo hay dos opciones: o $x_i^* = x_i^s$ o $px_i^{**} \ge K$.

Parte E. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas todo equilibrio competitivo es Pareto Óptimo (si hace la Parte F, ignore esta parte, y será tomada como correcta).

Parte F. Demuestre que si las preferencias son estrictamente convexas todo equilibrio con transferencias es Pareto Óptimo.

Ejercicio 26. En una economía hay dos individuos, una firma, y dos bienes: trigo (bien 1) y bananas. El individuo 1 tiene una dotación inicial de $\omega_1 = (1,1)$, una utilidad $u_1(x_1) = x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{12}^{\frac{1}{2}}$. El individuo 2 es el dueño de la firma, tiene una dotación de $\omega_2 = (0,0)$ y sólo consume bananas: $u_2(x_2) = x_{22}$. La firma tiene una tecnología dada por $\left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \le \sqrt{-y_2}\right\}$ (come bananas para producir trigo, por lo que $y_2 \le 0$).

Parte A. Encuentre las demandas del individuo 1.

Parte B. Sabiendo la demanda del individuo 1, $x_{11}(p) = a + bp$ (verifique que la demanda encontrada en la Parte A tiene esta forma), y que

$$x_{11} = 1 + \sqrt{-y_2} \Leftrightarrow a + bp = 1 + \sqrt{-y_2} \Leftrightarrow p = \frac{1 - a + \sqrt{-y_2}}{b}$$

la firma elige y_2 para maximizar beneficios

$$\sqrt{-y_2} + py_2 = \sqrt{-y_2} + \left(\frac{1 - a + \sqrt{-y_2}}{b}\right) y_2.$$

Encuentre la cantidad de trigo producida y las bananas demandadas por la firma. Calcule también los beneficios de la firma.

Parte C. Encuentre la demanda del individuo 2.

Parte D. Encuentre el precio de equilibrio (el que hace oferta igual demanda). Es más fácil en el mercado 1, pero por supuesto da igual en los dos mercados.

Parte E. Plantee el problema que debe resolver para encontrar la única asignación Pareto Óptima de esta economía en la cual el individuo 2 tiene una utilidad de

$$\frac{1}{18} \frac{7\sqrt{7} - 10}{2 + \sqrt{7}}.$$

Parte F. Muestre que la derivada de

$$\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{18} \frac{7\sqrt{7} - 10}{2 + \sqrt{7}} - b}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$$

evaluada en

$$b = \frac{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}}{2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)}$$

es distinta de cero (en particular, es negativa). Argumente que eso quiere decir que la asignación de equilibrio no es Pareto Óptima.

Parte G. Esta es la única pregunta relevante del examen. Piensen. ¿por qué no es Pareto Óptima la asignación de equilibrio?

Parte H. Resuelva el problema de la Parte E.

Ejercicio 27. Sea $X_i = \mathbf{R}_+^L$, $Y = -\mathbf{R}_+^L$ (no hay producción) y sea $\succeq_i$ una relación de preferencias que es localmente no saciable.

Parte A. Demuestre que si $x^* \succeq x$ para todo x tal que $px \leq K$, y $x^{**} \succeq x^*$, entonces $px^{**} \geq K$.

Parte B. Demuestre que si $x_i\left(p, p\omega_i\right)$ es la demanda Walrasiana del individuo i, con preferencias localmente no saciables, entonces $x_i\left(p, p\omega_i\right)$ cumple la Ley de Walras: $px_i\left(p, p\omega_i\right) = p\omega_i$.

Parte C. Demuestre que si $x_i\left(p, p\omega_i\right)$ es la demanda Walrasiana del individuo i, con preferencias localmente no saciables, y que si

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij}\left(p, p\omega_i\right) = \sum_{i=1}^{I} \omega_{ij}$$

para todo $j \neq k$ y algún $p \gg 0$ ($p_l > 0$ para todo $l = 1, 2, ..., L$) entonces

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ik}\left(p, p\omega_i\right) = \sum_{i=1}^{I} \omega_{ik},$$

por lo que p es un precio de equilibrio (Pista: utilice la Parte B).

Ejercicio 28. En una economía hay dos bienes, dos individuos y dos firmas. Las dotaciones son $\omega_1 = (a, 0)$ y $\omega_2 = (1-a, 0)$, las utilidades $u_1(x) = x_1$ y $u_2(x) = x_2$. El individuo i es propietario de la firma i, con $Y_1 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq -y_1 \text{ con } y_1 \leq 0\right\}$ y $Y_2 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \leq 0 \text{ y } y_2 \leq \sqrt{-y_1}\right\}$.

Parte A. Encuentre las ofertas de las dos firmas.

Parte B. Encuentre las demandas de los individuos.

Parte C. Normalice el precio del bien 1 a 1, y argumente que $p > 1$ no puede ser parte de un equilibrio. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía como función de a (Pista: discuta según p. Para p pequeños, la firma 1 estará inactiva, encuentre el equilibrio, y muestre que $a > 3/4$. Luego estudie el caso $p = 1$ y $a \leq 3/4$).

Ejercicio 29. En una economía hay dos bienes, dos individuos y dos firmas. Las dotaciones son $\omega_1 = (1, 0)$ y $\omega_2 = (1, 0)$, las utilidades $u_1(x) = x_1 x_2$ y $u_2(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. El individuo i es propietario de la firma i, con $Y_1 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq 4\left(-y_1\right)^{\frac{1}{4}} \text{ con } y_1 \leq 0\right\}$ y $Y_2 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 \leq 0 \text{ y } y_2 \leq 8\left(-y_1\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$.

Parte A. Encuentre las ofertas de las dos firmas.

Parte B. Encuentre las demandas de los individuos.

Parte C. Normalice el precio del bien 1 a 1, y encuentre el equilibrio de esta economia.

Ejercicio 30. In the economy

$$\left(\left\{\left(\mathbf{R}_+^2, u(x) = x_1 x_2, \omega = (1,0)\right)\right\}_{i=1}^{i=1}, \left\{Y = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq 2\sqrt{-y_1}\right\}\right\}_{j=1}^{j=1}\right)$$

the individual is the owner of the firm. Normalize the price of good 1 to 1 and call p the price of good 2.

Part A. Find the supply of the firm, and its profits.

Part B. Find the demand of the individual.

Part C. Find the competitive equilibrium price p and the allocation.

Ejercicio 31: Equilibrio competitivo con gobierno. Una economía tiene 2 bienes, un consumidor y una firma. Las preferencias del consumidor vienen dadas por la función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^{1-\sigma_1}}{1-\sigma_1} + \frac{x_2^{1-\sigma_2}}{1-\sigma_2}.$$

La firma tiene conjunto de posibilidades de producción $Y = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq (-y_2)^{\beta}\right\}$ con $\beta \in (0,1)$. La dotación de la economía es $\overline{\omega} = \omega_1 = (0,1)$

Parte A. Normalizando el precio del bien 1 a 1, encuentre el equilibrio competitivo de esta economía

Suponga ahora que se introduce un gobierno. Este tiene que financiar un gasto exógeno en los dos bienes, que denotaremos G_1 y G_2 por 3 vías: impuestos ad valorem al bien 1, impuestos ad valorem al bien 2, ambos cobrados al consumidor, e impuestos de suma fija $T \in \mathbb{R}$. Estos impuestos pueden llegar a ser negativos, si es que se recaudó más en los dos primeros impuestos que lo que debía gastarse. Tanto G_1, G_2 como las tasas impositivas sobre los bienes 1 y 2, τ_1 y τ_2 son exógenas: por lo tanto, lo único que puede hacer el gobierno es elegir un nivel de impuestos de suma fija (o transferencias si son negativos) $T \in \mathbb{R}$ para que se satisfaga la restricción presupuestal del gobierno:

$$G_1 + pG_2 = \tau_1 x_1 + \tau_2 p x_2 + T \iff T = G_1 + pG_2 - \tau_1 x_1 - \tau_2 p x_2$$

Un equilibrio competitivo con gobierno será una asignación $((x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*))$, un vector de precios $(1, p^*)$ y un nivel de impuesto de suma fija $T^* \in \mathbb{R}$ tales que:

1. El consumidor optimiza en el conjunto $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1+\tau_1) x_1 + (1+\tau_2) p^* x_2 \leq (1+p^*) - T\right\}$
2. Las firma optimiza dado el precio p^*
3. Se cumple consistencia agregada (oferta igual a demanda en ambos mercados)
4. T^* satisface $T^* = G_1 + p^* G_2 - \tau_1 x_1^* - \tau_2 p^* x_2^*$

Parte B. Suponga $\beta = \frac{1}{2}$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$. Encuentre el equilibrio competitvo con gobierno de esta economía. Si $G_1 = G_2 = \frac{1}{4}$ y $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{10}$, encuentre explícitamente dicho equilibrio

Parte C (difícil). Considere una economía cualquiera en el formato general visto en clase, con L bienes, I consumidores y J firmas. Considere un gobierno que debe financiar gastos en cada bien $\{G_l\}_{l=1}^{l=L}$ con impuestos ad valorem $\{\tau_l\}_{l=1}^{l=L}$ dados, y un nivel de impuesto de suma fija para cada consumidor i, de la forma $\{T_i\}_{i=1}^{i=I}$ tales que se cumple la restricción presupuestal del gobierno. En base a lo visto en la parte anterior, proponga una definición para un equilibrio general con gobierno para esta economía.

Ejercicio 117 Una economía pequeña y abierta. Una economía tiene un solo agente, una sola firma y dos bienes: un bien de consumo (C) y ocio (o). Las preferencias del agente vienen dadas por la función de utilidad

$$u(c,l) = c^{\alpha}(1-l)^{1-\alpha}$$

con c el bien de consumo, $l \in [0,1]$ el trabajo, que es $o = 1-l$, y $\alpha \in (0,1)$. La firma tiene tecnología dada por la función de producción $f(l) = \kappa l^{\beta}$ con $\kappa > 0$ y $\beta \in (0,1)$. La dotación de la economía es $\omega = \omega_1 = (\bar{c}, \bar{o}) = (0,1)$.

Parte A. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. Suponga $\beta = \frac{1}{2}, \kappa = 1$ y $\alpha = \frac{1}{3}$. Encuentre el equilibrio walrasiano en este caso

Parte C. En el caso de la Parte B, suponga que ahora la economía se abre al mercado internacional: en el los salarios y los precios del bien de consumo son $(p,w) = (4,2)$. Una economía pequeña y abierta se caracteriza por tomar como dados los precios internacionales, y puede exportar e importar tanto como quiera sin afectar los precios. Tomando los precios como dados, encuentre la demanda y oferta de trabajo por parte del agente, y la oferta de bien C y demanda de trabajo por parte de la firma. ¿Cumple esta asignación con el requerimiento de "oferta=demanda"? (**Sugerencia:** no normalice)

Parte D. Encuentre el balance comercial de la economía, tanto en el bien C como en el trabajo (**Sugerencia:** encuentre los excesos de demanda en ambos mercados)

Parte E. (Difícil) En una economía cualquiera, como las vistas en clase, proponga una definición de equilibrio competitivo en una economía pequeña y abierta. (**Sugerencia:** La definición debe tomar como dato del problema el vector de precios internacionales, $p^{int} \in \mathbb{R}^{L}_{+}$. ¿Hay alguna de las 3 condiciones de la definición clásica que sea redundante en este contexto?)

Ejercicio 33. Hay dos cazadores en un bosque, A y B, los cuales intentan cazar el unico venado disponible. Con probabilidad $\lambda \in [0,1]$ el venado es cazado por el cazador A, mientras que con probabilidad $1-\lambda$ es cazado por el segundo cazador. El venado tiene 1 unidad de carne, y las utilidades de cada uno de los cazadores por unidad de carne es:

$$u_A(c) = \ln(c) = u_B(c)$$

Con $c \in (0,1)$ Hay por lo tanto, dos bienes en la economía: la carne de venado cuando es cazada por el cazador A (que denotaremos por c_A) y la carne de venado cuando es cazada por el cazador B, que denotaremos c_B. Antes de salir a cazar, los individuos se comprometen a una manera en la que repartiran la carne.

Parte A. Suponga que las preferencias de los individuos sobre loterias satisfacen el teorema de utilidad esperada. Encuentre la utilidad esperada de cada uno de los agentes. Estas serán de la forma $U_A(c_A, c_B)$ y $U_B(c_A, c_B)$.

Parte B. Suponga que establecen una economía de intercambio, en el que ambos bienes, c_A y c_B. ¿Cuales son las dotaciones ω_A y $\omega_B \in \mathbb{R}^2_+$ en esta economía?

Parte C. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía. Investigue que sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$ e interprete.

Ejercicio 34 (basado en Reny). Tome una economía de las mas generales que se vieron en clase, de la forma:

$$\mathbf{E} = \left\{ \{X_i, \succeq_i, \omega_i\}_{i=1}^{i=I}, \{Y_j\}_{j=1}^{j=J} \right\}$$

tales que $X_i \subseteq \mathbb{R}_+^L$, $Y_j \subseteq \mathbb{R}^L$ y las preferencias $\succeq_i$ definidas sobre X_i, racionales y localmente no saciables. Suponga que la estructura de la economía es tal que, para toda asignación de dotaciones $\{\omega_i\}_{i=1}^{i=I}$ posibles, siempre existe un equilibrio walrasiano para dicha economía. Un equilibrio walrasiano (x^*, y^*, p) **provoca envidia** si existen consumidores $i, j \in I$ tales que $x_j^* \succ_i x_i^*$. Un equilibrio walrasiano es **libre de envidia** si nunca provoca envidia, esto es, para todo $i, j \in I, x_i^* \succsim_i x_j^*$. Suponga que existe un gobierno que puede hacer lo siguiente: antes de que la economía "comience", puede redistribuir las dotaciones iniciales: esto es, dada una asignacion de dotaciones iniciales de la economía $\{\omega_i\}_{i=1}^{i=I}$ puede cambiarla por otra asignación de dotaciones iniciales, que llamaremos una **reasignacion** $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i=1}^{i=I}$, tal que $\sum_1^I \omega_i = \sum_1^I \widetilde{\omega}_i$.

Parte A. Pruebe que, en este tipo de economía, siempre existe por lo menos una reasignación tal que el equilibrio que genera es libre de envidia (**Sugerencia:** Considere la reasignacion $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i=1}^{i=I}$ tal que $\widetilde{\omega}_i = \overline{\omega} = \frac{1}{I}\sum_1^I \omega_i \in \mathbb{R}_+^L$)

Parte B. Suponga que $L = I = 2$. Una economía de intercambio con preferencias de los dos agentes (A y B respectivamente) dadas por

$$\begin{aligned} u_A(x_1, x_2) &= x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ u_B(x_1, x_2) &= x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Las dotaciones son $\omega_1 = (1, 2)$ y $\omega_2 = (2, 1)$. Encuentre una reasignación que genera un equilibrio walrasiano libre de envidia, y encuentre dicho equilibrio walrasiano.

Ejercicio 35. Una economia con garantías: una economía tiene un consumidor y una firma. Existen 2 bienes en esta economía: un bien de consumo c y ocio. El bien de consumo puede tener fallas y no poder consumirse: específicamente, con probabilidad $\alpha \in [0, 1]$ el bien se rompe y no puede consumirse. En esta economía, la firma puede vender el bien de consumo c en dos modalidades: puede venderlo con garantía total o sin garantía total: es decir, si el consumidor compra c_g unidades del bien de consumo con garantía, y se rompe, la firma le da nuevamente la cantidad c_g: es decir, el consumidor termina consumiendo **seguro** c_g. Si compra c_s unidades del bien de consumo sin garantía, con probabilidad $1 - \alpha$ lo consume, pero con probabilidad α termina sin poder consumirlo. Por lo tanto, en esta economía hay tres bienes: el bien de consumo con garantía c_g, el bien de consumo sin garantía c_s y el trabajo L (tomado como $1 - o$, siendo o el ocio). La dotación de la economía es $(c_g, c_s, L) = (0, 0, 1)$. Normalizaremos el precio del bien con garantías a 1; cualquier vector de precios es de la forma $\mathbf{p} = (1, p, w)$ con p el precio relativo del bien sin garantía respecto del bien con garantía, y w el salario en términos del bien con garantías.

El problema de la firma. La firma utiliza como insumo trabajo (L) para producir bienes de consumo con garantía (y_g) y sin garantia (y_s). El conjunto de producción viene dada por la función de producción $f(L) = \kappa L$ con $\kappa > 0$. Supondremos que, por la ley de los grandes números, una proporción α de los bienes producidos con garantías deberán ser fabricados nuevamente: explicitamente, el problema que debe resolver la firma es el de elegir y_g, y_s y L para maximizar

$$y_g + p y_s - wL$$

$$\text{sujeto a: } (1+\alpha) y_g + y_s \leq \kappa L$$

Parte A. Suponiendo que en equilibrio deben producirse cantidades positivas de ambos bienes, encuentre cual debe ser el precio p de equilibrio para que la firma produzca ambos con probabilidad positiva. (**Sugerencia:** defina la variable $\widetilde{y_g} = (1+\alpha) y_g$ y plantee el problema de la firma eligiendo $(\widetilde{y_g}, y_s, L)$)

Parte B. Pruebe que, en equilibrio, debemos tener que el salario de equilibrio debe ser $w^* = \frac{\kappa}{1+\alpha}$ (**Sugerencia:** investigue los rendimientos a escala de la función de producción, y utilice lo visto en la parte anterior)

El problema del consumidor. Suponga que el consumidor tiene preferencias sobre el bien de consumo dadas por la función de utilidad $u(c) = c^2$, y que no tiene desutilidad por trabajar.

Parte C. Suponiendo que se cumplen los supuestos del teorema de Von Neuman - Morgenstern, encuentre la función de utilidad $U(c_g, c_s)$

Parte D. Argumente, en no mas de 5 líneas, porque el problema a resolver por el consumidor es el de elegir c_g y c_l para maximizar $U(c_g, c_l)$ sujeto a $c_g + pc_s \leq w$.

Parte E. Resuelva el problema del consumidor, encontrando las funciones de demanda $c_g(p, w)$ y $c_s(p, w)$. ¿Que restricción debe cumplir el precio relativo p para que elija consumir cantidades positivas de ambos bienes? ¿Cual es la intuición detrás de este resultado?

Parte F. *Equilibrio Competitivo***.** Defina y encuentre el equilibrio competitivo para esta economía. Analice como cambian las cantidades de equilibrio cuando cambia la probabilidad α. ¿Encuentra estos resultados sensatos? Comente la intuición de estos resultados

Ejercicio 36. En una economía hay dos agentes: el agente activo (A) y el agente pasivo (B) y tres bienes: trigo (t), galletas (g) y ocio (o). La dotación del agente activo es $(t, g, o) = (0, 0, 1)$, mientras que la dotación del agente pasivo es $(t, g, o) = (1, 1, 0)$. Es decir, el agente acitvo solo tiene trabajo para ofrecer, pero ningun bien para consumir, mientras que el agente pasivo no puede trabajar, pero si tiene bienes de consumo. La función de utilidad del agente activo es $u_A(t, g, l) = t^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{3}} (1-l)^{\frac{1}{3}}$ con l la cantidad de trabajo ofrecido por el agente. La utilidad del agente pasivo es $u_B(t, g) = \frac{1}{2}\ln(t) + \frac{1}{2}\ln(g)$. Por otra parte, existe una firma que toma como insumos trabajo (l) y trigo (t) para fabricar galletas (g). La función de producción de la firma es $f(t, l) = \sqrt{t} + \sqrt{l}$. La firma es total propiedad del agente pasivo (P). Normalizamos el precio de las galletas a 1, el precio del trigo a p y el salario a w.

Parte A. *Problema de la Firma.* Plantee el problema de la firma, y encuentre las demandas de insumo óptimas, asi como la producción optima dependiendo de los precios.

Parte B. Encuentre los beneficios de equilibrio de la firma, dependiendo de los precios de equilibrio

Parte C. *Problema de los consumidores.* Plantee el problema del agente A, y encuentre las demandas óptimas de trigo y galletas, y la oferta de trabajo, dependiendo de los precios p y w.

Parte D. Plantee el problema del agente P, y encuentre las demandas óptimas de trigo y galletas, dependiendo de los precios p y w. (**Nota:** Recuerde la estructura de propiedad de la firma)

Parte E. *Equilibrio Competitivo.* Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Exercise 4. There are two agents with utilities and endowments given by

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ u_2 &= x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} \\ \omega_1 &= \omega_2 = (1, 1) \end{aligned}$$

(there is no production, or equivalently, there is one firm, but the production possibility set of firm 1 is $Y_1 = \{0\}$).

Part A (20 points). Find the demand function of each individual (for a given price vector (p_1, p_2), the bundle that maximizes his utility, subject to the bundle costing less than his income, in this case, the value of his endowment).

As is standard, the demand for a Cobb Douglas $x_1^a x_2^{1-a}$, when income is I is given by $x_1 = aI/p_1$ and $x_2 = (1-a)\, I/p_2$. Since $I = p_1 + p_2$, we get for individual 1,

$$x_1 = \frac{p_1 + p_2}{2p_1} \text{ and } x_2 = \frac{p_1 + p_2}{2p_2}$$

and for individual 2,

$$x_1 = \frac{p_1 + p_2}{3p_1} \text{ and } x_2 = 2\frac{p_1 + p_2}{3p_2}$$

Exercise 4. Part B (20 points). Find the competitive equlibrium of this economy.

Letting superscripts denote individuals, we must have $x_1^1 + x_1^2 = 2$ (the total endowment of the economy), so that

$$\frac{p_1 + p_2}{2p_1} + \frac{p_1 + p_2}{3p_1} = 2 \Leftrightarrow p_2 = \frac{7}{5}p_1.$$

Any p_1 is part of an equilibrium, so long as $p_2 = \frac{7}{5}p_1$. So one standard thing to do is to normalize $p_1 = 1$ and let $p_2 = \frac{7}{5}$. Another standard thing to do is to normalize the sum of both prices to be $1 : p_1 + \frac{7}{5}p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{5}{12}$ and $p_2 = \frac{7}{12}$.

We used the first market to find the price, but we could have used the constraint that $x_2^1 + x_2^2 = 2$ to obtain the same result

$$\frac{p_1 + p_2}{2p_2} + 2\frac{p_1 + p_2}{3p_2} = 2 \Leftrightarrow p_2 = \frac{7}{5}p_1$$

Ejercicio. Considere una economía con dos agentes y dos bienes. Las preferencias de los individuos vienen dadas por

$$u(x, y) = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

siendo las dotaciones inciales de $\omega_1 = (a, 0) \in \mathbb{R}_+^2$ y $\omega_2 = (0, a) \in \mathbb{R}_+^2$.respectivamente con $a > 0$.

Parte a.- (10 puntos) Determine el precio de equilibrio competitivo de esta economía, y las consiguientes asignaciones de equilibrio.

Parte b.- (10 puntos) Con los datos ya indicados, suponga que un planificador central obliga al individuo dos a ceder δ unidades de bien dos al individuo uno, con $0 < \delta < a$

La asignación resultante, ¿es un óptimo de Pareto? Justifique. Si su respuesta es negativa, ¿cuánto bien uno deberá estar obligado a ceder el individuo uno al individuo dos para que la asignación final resultante sea un óptimo de Pareto?

Ejercicio 118 El individuo 1 tiene una función de utilidad $u(x_1) = x_{11}x_{12}$ y el individuo 2, $v(x_1, x_2) = x_{21} + x_{22} - x_{11}$. Las dotaciones iniciales son $\omega_1 = \omega_2 = (1, 1)$. No hay producción.

Parte A. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Parte B. Encuentre las asignaciones Pareto Óptimas. ¿Es la asignación de equilibrio Pareto Óptima?

Parte C. Suponga que el gobierno pone un impuesto de t por unidad al bien 1, y devuelve lo recaudado como una suma fija T a cada individuo, de tal forma que las restricciones presupuestales son ahora

$$\begin{aligned} x_{a1}(p_1+t)+x_{a2}p_2 &= \omega_{a1}p_1+\omega_{a2}p_2+T \\ x_{b1}(p_1+t)+x_{b2}p_2 &= \omega_{b1}p_1+\omega_{b2}p_2+T \end{aligned}$$

y $x_{a1}t+x_{b1}t=2T$. Asuma que los individuos, al maximizar, no saben que la transferencia depende de cuánto consumen (al momento de maximizar sólo agregan a su restricción presupuestal una suma T). ¿Hay algún t que resulte en una asignación que Pareto domine al equilibrio de la parte A?

repetir anterior con la utilidad de 2 cobb douglas también.

si no da, repetir con un impuesto solo al individuo 1

Ejercicio 119 Suponga que $\omega_1=(2,0)$ y $\omega_2=(0,2)$. Asuma que $u_1(x_{11},x_{12})=x_{11}+\sqrt{x_{12}}$ y $u_2(x_{21},x_{22})=x_{21}$. Normalice el precio del bien 2 a 1.

Parte A. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.
Parte B. Suponga ahora que $u_2(x_{21},x_{22})=x_{22}$. Si existe un equilibrio, encuéntrelo. Si no existe, demuestre que para cada $(p_1,p_2)\neq(0,0)$, la suma de las demandas no es igual a la suma de las dotaciones.

Ejercicio 120 Equilibrio General. Difícil. Considere una economía de intercambio con 2 consumidores y 2 bienes. Sea $x_{ik}>0$ el consumo del agente i del bien k. El agente 1 tiene una dotación inicial de $(2,0)$ y el agente 2 tiene una dotación inicial de $(0,1)$. Las preferencias del agente i son representadas por $u_i(x_{i1},x_{i2},x_{j1})=x_{i1}x_{i2}-v(x_{j1}-x_{i1})$, para $i=1,2$, $i\neq j$, donde $v'>0$,$v''>0$ y $v(0)=0$.

Parte A. (i) Caracterice las asignaciones Pareto eficientes, (ii) Explique el significado de cualquier condición de primer orden que obtenga, y (iii) Indique cual es una asignación que cumpla estas características, es decir, una asignación que sea Pareto eficiente.

Para lo que resta de este ejercicio concéntrense exclusivamente en el caso especial: $u_i(x_{i1},x_{i2},x_{j1})=x_{i1}x_{i2}-\frac{1}{2}(x_{j1}-x_{i1})^2$.
Parte B. Asumiendo que los dos bienes son intercambiados en mercados competitivos, caracterice las decisiones óptimas de consumo del individuo i, dado el consumo x_{j1} para $j\neq i$.
Parte C. Asumiendo que los dos agentes se comportan como en la Parte B (eligiendo canastas tomando los precios como dados, y el consumo del otro individuo como dado), caracterice un equilibrio competitivo en donde cada agente elige su vector de consumo óptimo sujeto a su restricción presupuestaria dado el consumo del otro consumidor.
Parte D. ¿Es un equilibrio competitivo Pareto eficiente en este caso?

Por solución ver ExamenEcoMat2011.pdf en esta carpeta

Ejercicio 121 Considere una economía de intercambio con 2 consumidores y 2 bienes. Sea x_{ik} el consumo del agente i del bien k. Las dotaciones de ambos agentes son $\omega_1=\omega_2=(1,1)$. Las preferencias del agente 1 son representadas por $u_1(x_{11},x_{12})=x_{11}x_{12}$, y las del 2 por $u_2(x_{21},x_{22})=1$.

Parte A. Calcule el o los equilibrios competitivos de esta economía.
Parte B. Determine si los equilibrios son Pareto Óptimos.
Parte C. Si alguno de los equilibrios no es Pareto Óptimo, explique por qué falla el Primer Teorema del Bienestar.

Ejercicio 122 En una economía hay dos bienes, dos individuos y dos firmas. Las dotaciones son $\omega_1 = (1-a,0)$ y $\omega_2 = (a,0)$, las utilidades son $u_1(x) = x_1$ y $u_2(x) = x_2$. El individuo i es propietario de la firma i, con $Y_1 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq -y_1, \text{ con } y_1 \leq 0\right\}$ y $Y_2 = \left\{y \in \mathbf{R}^2 : y_2 \leq \sqrt{-y_1}, \text{ con } y_1 \leq 0\right\}$.

Parte A. Encuentre las ofertas de las dos firmas.
Parte B. Encuentre las demandas de los individuos.
Parte C. Normalice el precio del bien 1 a 1 y argumente que $p > 1$ no puede ser parte de un equilibrio. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía como función de a. (Pista: discuta según p. Para p pequeños la firma 1 estará inactiva, encuentre el equilibrio y muestre que a debe ser menor que algún valor v. Luego estudie el caso para $p = 1$ y demás valores de a).

Ejercicio 123 Considere una economía de intercambio en la que hay dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad y dotaciones son $u_1(x) = x_1^2 x_2$, $u_2(x) = x_1 x_2$, $\omega_1 = (15,3)$ y $\omega_2 = (5,17)$.

Parte A. Argumente que se cumple la ley de Walras para cada individuo: si la demanda del individuo i dados los precios p e ingresos $p\omega_i$ es $x_i(p, p\omega_i)$, se cumple $px_i(p,p\omega_i) = p\omega_i$. Pueden utilizar resultados demostrados en clase o en ejercicios.
Parte B. Calcule el equilibrio competitivo de esta economía.
Parte C. Encuentre todas las asignaciones Pareto Óptimas.
Parte D. Si las dotaciones fueran $\omega_1 = (z,3)$ y $\omega_2 = (20-z,17)$ para algún z, ¿la asignación $(x_1,x_2) = \left(\left(10,\frac{20}{3}\right),\left(10,\frac{40}{3}\right)\right)$ podría ser parte de un equilibrio competitivo? ¿si pudiera ser, cuál sería el z que daría esa asignación como equilibrio competitivo? ¿Cuáles serían los precios?

Ejercicio 124 Hay dos agentes que tienen la misma dotación de los dos bienes que hay en la economía, $\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$. El individuo 1 tiene una función de utilidad dada por $u_1(x_1) = x_{11}x_{12}^2$, mientras que el agente 2 tiene una función de utilidad $u_2(x_2) = x_{21}^2 x_{22}$.

Parte A. Encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.
Parte B. La asignación de equilibrio, ¿es Pareto Óptima?

Ejercicio 125 Hay tres bienes en la economía, x, y y trabajo t. Robinson es el único habitante de una isla, y tiene una dotación $\omega = (0,0,168)$ (ninguna unidad de x o y, y 168 horas de tiempo). Robinson posee dos firmas que producen los bienes x y y : una unidad de x se produce con 1 unidad de t, $x \leq -t$; la producción de y requiere 20 horas de trabajo para empezar a dar frutos, y además tiene un tope de horas más allá del cual no se produce nada

$$y = \begin{cases} 0 & t \geq -20 \\ -t-20 & -20 \geq t \geq -120 \\ 100 & -120 \geq t \end{cases}.$$

La función de utilidad de Robinson es $u(x,y,t) = x + 2y$ (es decir, no valora el ocio). Normalice el precio del trabajo a 1, y encuentre el equilibrio competitivo de esta economía.

Ejercicio 126 Considere una economía con I consumidores. Cada consumidor tiene una función de utilidad

$$u(x_i) = \left(x_{i1}^{\frac{1}{2}} + x_{i2}^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

y una dotación ω_i. La dotación total es $\overline{\omega} = \sum_1^I \omega_i$.

Parte A. Calcule el equilibrio y las asignaciones Pareto Óptimas (interiores, donde todo el mundo consume $x_{ij} > 0$). El precio de equilibrio ¿depende sólo de $\overline{\omega}$ o de todas las asignaciones?
Parte B. Suponga que los individuos 1 a $I-1$ tienen utilidad $u(x_i) = x_{i1}^{\frac{1}{2}} x_{i2}^{\frac{1}{2}}$ y la utilidad del consumidor I es $u_I(x_I) = x_{I1} + 2x_{I2}$. Las dotaciones son ω_i. Defina $\overline{\omega}_{-I} = \sum_1^{I-1} \omega_i$. Encuentre el equilibrio. El precio de equilibrio ¿depende sólo de $\overline{\omega}$, o de $(\overline{\omega}_{-I}, \omega_I)$, o depende de todo el vector de dotaciones $(\omega_1, ..., \omega_I)$?

Ejercicio 127 El individuo 1 tiene una utilidad $u_1(x_1) = x_{11}^{\frac{1}{3}} x_{12}^{\frac{2}{3}}$, el individuo 2 una utilidad $u_2(x_2) = 2x_{21} + x_{22}$ y el individuo 3 tiene una utilidad $u_3(x_3) = \min\{x_{31}, 3x_{32}\}$. Las dotaciones son $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = (1,1)$. Encuentre el equilibrio de esta economía.

Ejercicio 128 Agente Representativo. En muchos modelos de macro se considera que hay un solo agente que representa el comportamiento de todos los agentes de la economía. Este ejercicio muestra algunas limitaciones que puede tener este enfoque.

Considere una economía con I agentes, $i = 1, ..., I$, intercambiando dos bienes $l = 1, 2$, con precios $p_1 = 1$ y p_2. La utilidad del individuo i es $u_i(x_i) = x_{i1}^{a_i} x_{i2}^{1-a_i}$, la dotación de i es $\omega_i \in \mathbf{R}^2$ y la dotación global es $\overline{\omega} = \sum_1^I \omega_i$.
Parte A. Calcule las demandas $x_i(p, \omega_i)$ y el exceso de demanda $z_i(p, \omega_i) = x_i(p, \omega_i) - \omega_i$; calcule también el exceso de demanda agregado $Z(p, \omega_1, ..., \omega_I) = \sum_1^I z_i(p, \omega_i)$. Encuentre el precio de equilibrio p^*.
Parte B. Considere ahora una economía en la cual hay un solo agente, con utilidad $x_1^a x_2^{1-a}$ y una dotación dada por $\overline{\omega}$. Calcule la demanda $x(p, \overline{\omega})$ y el exceso de demanda $\overline{Z}(p, \overline{\omega})$. Determine el precio de equilibrio p^{**}. Encuentre a para que, cuando los $\overline{\omega}$ de las Partes A y B sean iguales, se cumpla que $p^* = p^{**}$.
Parte C. El exceso de demanda de la Parte B, $\overline{Z}(p, \overline{\omega})$, es indirectamente una función de todos los ω_i, $\overline{Z}(p, \omega_1, ..., \omega_I)$. Entonces podemos preguntarnos si $\overline{Z}(p, \omega_1, ..., \omega_I) = Z(p, \omega_1, ..., \omega_I)$. ¿Son iguales? Si dice que sí, demuéstrelo; si dice que no, de un contraejemplo (por ejemplo, decir que las formas funcionales no son iguales no alcanza).
Parte D. Encuentre $\frac{dp_2^*}{d\omega_{i1}}$ y $\frac{dp_2^{**}}{d\omega_{i1}}$. Encuentre también cómo debe variar el a de la Parte B cuando cambia ω_{i1} (encuentre $\frac{da}{d\omega_{i1}}$ para el a que hace $p^* = p^{**}$).

Soluciones

Ejercicio 114. Sabemos que en equilibrio debemos tener $x_1^* = x_2^* = (1,1)$ (porque tienen iguales dotaciones y funciones de utilidad). Si $f(1) = 1$, con $p = (1,1)$ la asignación (x_1^*, x_2^*) es un equilibrio porque x_i^* maximiza u_i. Si $f(1) < 1$, los precios $p = (0,1)$ son de equilibrio: el individuo se gasta todo su ingreso p_2 en comprar el bien 2 (una unidad), y cualquier candidad del bien 1 débilmente mayor que $f(1)$ es parte de la demanda (en particular, $x_1 = 1$ es parte de la demanda). En forma similar, si $f(1) > 1$, los precios $p = (1,0)$ son parte de un equilibrio.

uponga que $\omega_1 = (1,1)$ y $\omega_2 = (1,1)$. Asuma que $u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, f(x_{12})\}$ para alguna función continua y creciente f; asuma que $u_2(x_{21}, x_{22}) = \min\{x_{21}, f(x_{22})\}$. Demuestre que existe un equilibrio en esta economía.

Ejercicio 115.A. Si alguno de los dos precios es 0, la demanda por ese bien es infinita (si es p_1, el individuo 1 demandará infinito de ese bien; si es p_2, el individuo 2 demandará infinito de ese bien). Si los dos precios son distintos de 0, el individuo 1 demandará 0 del bien 2, y el individuo 2 demandará 1 del bien 2 : el mercado por ese bien no puede satisfacer oferta igual demanda. El problema es que el exceso de demanda no es un número real, para todo $p \neq (0,0)$ (en particular, si uno de los precios es 0, la demanda es infinita, y se viola que $z_i(p)$ es una función de $\mathbf{R}_+^2 - \{0\}$ en $\mathbf{R}^2$).

Ejercicio 115.B. La única asignación Pareto Óptima es $x^A = (1,0)$ y $x^B = (0,2)$. Para hacerlo formalmente, tenemos que para cada $\overline{u}$, elegimos x^A y x^B para maximizar

$$\begin{aligned} u_B\left(x^B\right) &= x_2^B \\ &\text{sujeto a} \quad u_A\left(x^A\right) = x_1^A \geq \overline{u} \\ &\qquad\qquad x_1^A + x_1^B = 1 \\ &\qquad\qquad x_2^A + x_2^B = 2 \end{aligned}$$

Como x_2^B sólo aparece en la tercera restricción, y x_2^A no afecta ni las restricciones ni la función objetivo, ponemos $x_2^B = 2$. En este problema, cualquier combinación $x_1^A + x_1^B = 1$ con $x_1^A \geq \overline{u}$ es una solución. Vemos entonces que la única asignación Pareto Óptima es con $x_2^B = 2$, y $\overline{u}$ lo más grande posible, $\overline{u} = 1$, y $x_1^A = 1$.

Ejercicio 0. Si una asignación es Pareto Óptima en esta economía con un solo agente, maximiza la utilidad del individuo sujeta a la restricción de recursos. Por lo tanto, resuelve el problema de elegir x_1, x_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a } x_1 &= 1 + y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ y_2 &\leq \sqrt{-y_1}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $x_2 = \sqrt{-y_1}$ y $x_1 = 1 + y_1$, por lo que debemos maximizar $1 + y_1 + \sqrt{-y_1}$, lo que arroja $y_1 = -\frac{1}{4}$. Para graficarlo, vemos que el problema es el de maximizar $x_1 + x_2$ sujeto a $x_2 \leq \sqrt{1 - x_1}$.

Ejercicio 1 Normalizo $p_1 = 1$ y pongo $p_2 = p$. Si $p < 1$, $x_{21} = p^{-1} > 1 = \overline{\omega}_2$, no puede ser. Si $p > 1$, $x_{11} = 1 = \overline{\omega}_1$, lo cual no dejaría nada para el individuo 2, que siempre demanda algo del bien 1 :

$$x_{12} = \frac{p}{2}.$$

Por lo tanto, el único equilibrio debe ser con $p = 1$. Para $p = 1$, la única asignación de equilibrio es $x_1 = x_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Hacerlo también: encontrando las demandas de ambos individuos para ambos bienes, y con las curvas de oferta.

Ejercicio 2 Deducimos, igual que en el Ej. 1, que $p < 1$ no puede ser, y que $p > 2$ no puede ser. Para cualquier precio $p \in [1, 2]$, $x_i = \omega_i$ es la única asignación de equilibrio.

Ejercicio 3. (i) La firma debe elegir t para maximizar

$$pt^{\frac{1}{2}} - t$$

Obtenemos $t(p) = \frac{p^2}{4}$ y $c^s(p) = \frac{p}{2}$.

(ii) Los beneficios son $\pi(p) = p\frac{p}{2} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}$.

(iii) Robinson ofrecerá siempre una unidad de tiempo en el mercado de trabajo y demandará todos los cocos que le permita adquirir su ingreso (el valor de su dotación inicial más los beneficios de la firma). El ingreso de Robinson es

$$\pi(p) + 1 + p = \frac{p^2}{4} + 1 + p$$

por tanto su demanda será $c^d(p) = \frac{p}{4} + \frac{1}{p} + 1$.

Igualando la demanda $c^d(p)$ a la oferta total de cocos (la dotación inicial de 1 más $c^s(p)$) obtenemos

$$\frac{p}{4} + \frac{1}{p} + 1 = 1 + \frac{p}{2} \Leftrightarrow p = 2.$$

Noten que si en vez de usar el mercado de bienes para encontrar p, hubiésemos usado el de trabajo (tiempo total ofrecido igual a tiempo total demandado), también hubiese dado $p = 2$.

Ejercicio 116. Los beneficios de la firma son el resultado de elegir l para maximizar $al^{\frac{1}{2}} - wl$, que arroja $\frac{1}{2}\frac{a}{l^{\frac{1}{2}}} = w \Leftrightarrow l(w) = \frac{1}{4}\frac{a^2}{w^2}$ y

$$\pi(w) = a\frac{1}{2}\frac{a}{w} - w\frac{1}{4}\frac{a^2}{w^2} = \frac{1}{4}\frac{a^2}{w}.$$

Luego, el individuo debe elegir c y r para maximizar cr sujeto a $c + wr = wT + \pi(w)$, que por la fórmula de la demanda Cobb-Douglas es

$$(c, r) = \left(1, \frac{1}{w}\right)\frac{1}{2}\left(wT + \frac{1}{4}\frac{a^2}{w}\right).$$

En el equilibrio tenemos $l + r = T$, y eso sucede si y sólo si

$$\frac{1}{4}\frac{a^2}{w^2} + \frac{wT + \frac{1}{4}\frac{a^2}{w}}{2w} = T \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{T}}a.$$

El equilibrio es entonces con precios $(1, w)$ y asignación

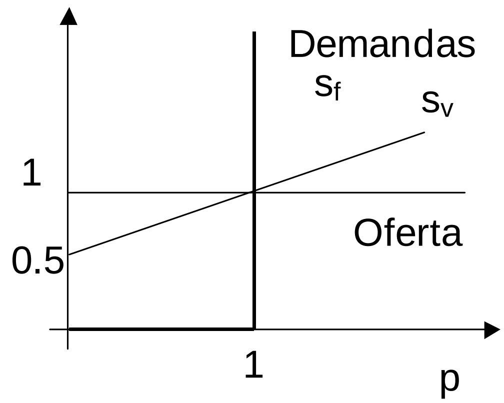
$$[(c, r), (y, l)] = \left[\left(1, \frac{1}{w}\right)\frac{1}{2}\left(wT + \frac{1}{4}\frac{a^2}{w}\right), \left(a\frac{1}{2}\frac{a}{w}, \frac{1}{4}\frac{a^2}{w^2}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{T}a, \frac{2}{3}T\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{T}a, \frac{1}{3}T\right)\right]$$

Ejercicio 4. La función de oferta de hojas de la firma es igual a su demanda de semillas

$$h_f^o(p) = s_f^d(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1 \\ \text{cualquier cosa entre } 0 \text{ e } \infty & \text{si } p = 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Las demandas de la vaca son

$$h_v^d(p) = \frac{1+p}{2p} \text{ y } s_v^d(p) = \frac{1+p}{2}$$



Igualando oferta y demanda de semillas encontramos

$$s_v^d(p) + s_f^d(p) = 1 \Leftrightarrow p = 1$$

Ejercicio 112.A. Para cada u del individuo 2, debemos elegir x_1, x_2 para maximizar $x_1 x_2$ sujeto a $(1-x_1)(1-x_2) = u$, que da como resultado $x_2 = 1 - \frac{u}{(1-x_1)}$ y como función objetivo $x_1\left(1 - \frac{u}{(1-x_1)}\right)$. La condición de primer orden es

$$\frac{x^2 - 2x - u + 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - \sqrt{u}.$$

Eso da como resultado $x_2 = 1 - \frac{u}{\sqrt{u}} = 1 - \sqrt{u}$ y una utilidad de $u_1 = (1-\sqrt{u})^2$.
112.B. Las demandas en este caso son $x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}\right)$ y $x_2 = \left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$, por lo que el precio de equilibrio resuelve $\frac{1}{2} + \frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 1$, y las asignaciones son $x_1 = x_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
112.C. La demanda del individuo 2 es $(x_1, x_2) = \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2p}\right) = \left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Supongamos que el individuo 1 decide ofrecer sólo $\frac{1}{2}$ de su unidad del bien 1. En ese caso su demanda será $(x_1, x_2) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{2p}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4p}\right)$. Luego, el p de equilibrio es aquél para el cual $\frac{1}{2} + \frac{1}{4p} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ (en el otro mercado, $\frac{p}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, que también da $p = \frac{1}{2}$). El individuo 1 que se consume su $\frac{1}{2}$ unidad tendrá una canasta de $\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4p}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, que arroja una utilidad de $\frac{3}{8}$. El individuo 2 tendrá una canasta de $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, y una utilidad de $\frac{1}{8}$.

Cuando ponemos $u = \frac{1}{8}$ en la Parte A, la utilidad de 1 sería en una asignación eficiente $u_1 = (1-\sqrt{u})^2 = 0.41$ que es mayor que $\frac{3}{8}$. Por supuesto, la asignación en este equilibrio no es eficiente, pero es mayor que $\frac{1}{4}$ que sería lo que le tocaría en el equilibrio competitivo.
Ejercicio 113.A. No hay equilibrio con $p_1, p_2 > 0$. Si lo hubiera, las demandas serían

$$x_1^* = \left(\frac{30p_1}{p_1+p_2}, \frac{30p_1}{p_1+p_2}\right), x_2^* = \left(\frac{20p_2}{p_1+4p_2}, \frac{80p_2}{p_1+4p_2}\right). \tag{42}$$

En este caso, asumiendo que ambos precios son positivos, podemos normalizar el precio del bien 1 a 1, y ver que no hay equilibrio:

$$\frac{30}{1+p} + \frac{20p}{1+4p} = 30$$

tiene solución 0 y $-\frac{1}{10}$.

Hay equilibrio con $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$. En ese caso, el individuo 1 tiene \$0, por lo que debe demandar 0 del bien 2. El individuo 2 demandará $x_2^* = (5, 20)$ (de la ecuación 42), o cualquier canasta que tenga x_{21} más grande (ya que es gratis). Por lo tanto, para cualquier $p_2 > 0$, las asignaciones

$$x_1^* = (30 - s, 0), x_2^* = (s, 20), s \in [5, 30]$$

son un equilibrio. La utilidad del individuo 1 es $U(x_1^*) = 0$ y la del 2 es $V(x_2^*) = 20$.

No hay equilibrio con $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$. En ese caso la demanda del individuo 1 sería $x_1^* = (30, 30)$ (de la ecuación 42) pero eso no puede ser parte de un equilibrio, ya que la dotación total de la economía es $\omega = (30, 20)$.

113.B. Con precios positivos, las demandas serían

$$x_1^* = \left(\frac{10p_1}{p_1 + p_2}, \frac{10p_1}{p_1 + p_2}\right), x_2^* = \left(\frac{20p_2}{p_1 + 4p_2}, \frac{80p_2}{p_1 + 4p_2}\right)$$

y normalizando el precio del bien 1 a 1 tendríamos que hay un equilibrio ya que

$$\frac{10}{1 + p} + \frac{20p}{1 + 4p} = 10 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^* = \left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right), x_1^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{40}{3}\right).$$

En este caso, las utilidades son $U(x_1^*) = \frac{20}{3}$ y $V(x_2^*) = \frac{40}{3}$.

Con $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$, tenemos equilibrios similares a los de la Parte A: $x_1^* = (10 - s, 0), x_2^* = (s, 20), s \in [5, 10]$ en los que las utilidades son nuevamente $U(x_1^*) = 0$ y $V(x_2^*) = 20$.

Con $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$, las canastas

$$x_1^* = (10, s), x_2^* = (0, 20 - s), s \in [10, 20]$$

son parte de un equilibrio competitivo, en que las utilidades son $U(x_1^*) = 10$ y $V(x_2^*) = 0$.

113.C. En todos los equilibrios de la Parte A, el individuo 1 obtiene 0 de utilidad. En la Parte B aparecen equilibrios en los que el consumidor 1 tiene utilidad positiva: $\frac{20}{3}$ si los precios son positivos, o 10 si $p_2 = 0$. Eso sucede porque el individuo 1 "tira" un poco de su bien, que se vuelve escaso (y con precio positivo). Aún actuando como tomador de precios después de tirar los bienes, mejora.

Ejercicio 7.A. Para cada joven en $t = 0, 1, 2, ...$ el problema de maximización dados los precios $(p_0, p_1, p_2, ...)$ es el de elegir (j_t, v_{t+1}) para maximizar

$$\begin{aligned} & j_t^\alpha v_{t+1}^{1-\alpha} \\ \text{sujeto a } p_t j_t + p_{t+1} v_{t+1} \leq & \; p_t + p_{t+1} \end{aligned}$$

La solución a este problema es

$$\begin{aligned} j_t &= \frac{\alpha}{p_t}(p_t + p_{t+1}) \\ v_{t+1} &= \frac{1 - \alpha}{p_{t+1}}(p_t + p_{t+1}). \end{aligned}$$

Para el viejo en el período 0, su ingreso es p_0, y se gastará todo su ingreso en consumo del bien, por lo que su demanda del bien es 1.

7.B. ara que los precios $(p_0, p_1, p_2, ...)$ sean de equilibrio, debemos tener que oferta igual demanda en todos los períodos. Como la oferta es 2 en todos los períodos, tenemos que

$$\begin{array}{cc} t=0 & 2=1+j_0 \Leftrightarrow 1=\frac{\alpha}{p_0}\left(p_0+p_1\right) \Leftrightarrow p_1=\frac{1-\alpha}{\alpha}p_0 \\ t=1 & 2=v_1+j_1=\frac{1-\alpha}{p_1}\left(p_0+p_1\right)+\frac{\alpha}{p_1}\left(p_1+p_2\right) \Leftrightarrow p_2=p_0\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2. \end{array}$$

El primer paso (demostrar que se cumple para algún t) ya lo hicimos, pues mostramos que $p_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Ahora asumimos que es cierto para $t < T$ y lo demostramos para T. Tenemos que

$$\begin{aligned} 2 &= v_{T-1}+j_{T-1}=\frac{1-\alpha}{p_{T-1}}\left(p_{T-2}+p_{T-1}\right)+\frac{\alpha}{p_{T-1}}\left(p_{T-1}+p_T\right) \Leftrightarrow \\ 2 &= \frac{1-\alpha}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-2}+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}\right)+\frac{\alpha}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{T-1}+p_T\right) \Leftrightarrow \\ p_T &= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^T \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

7.C. La asignación de equilibrio les da a todos una utilidad de 1, mientras que la asignación propuesta arroja una utilidad de $2(1-\alpha) > 1$ para el viejo, y $2\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} > 1$ para todos los demás.

Ejercicio 8.A. Las demandas de los individuos son

$$\begin{aligned} x_1^i &= \alpha(1+p) \\ x_2^i &= \frac{1-\alpha}{p}(1+p) \end{aligned}$$

Un equilibrio posible es aquél en el cual $\alpha(1+p) = 1$, es decir, cada individuo se come su dotación, que arroja un precio de

$$p = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

El equilibrio es entonces $(p, x) == \left((1,p), \left[x^1, x^2, ...\right]\right) = ((1,p), [(1,1), (1,1), ...])$.

8.B. La asignación no es Pareto Óptima pues el segundo individuo podría darle toda su dotación al individuo 1, el tercero toda su dotación al segundo, y así sucesivamente. En ese caso el primero estaría estrictamente mejor, y todos los demás iguales. El Primer Teorema del Bienestar no se aplica pues supusimos una cantidad finita de agentes. La demostración vista en clase falla pues cuando las sumatorias dan infinito, no se puede decir que una sea mayor que la otra.

Ejercicio 9.B. Hay que elegir s, t para minimizar $s + wt$ sujeto a $4s^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = x$, lo que arroja $s = \frac{x\sqrt{w}}{4}$ y $t = \frac{x}{4\sqrt{w}}$.

9.C. Supongamos que en equilibrio la firma maximiza beneficios produciendo x unidades de semilla. Eso quiere decir que, una vez elegido el nivel de producto x, la firma minimiza el costo de producir x. El beneficio de producir x es entonces

$$4\left(\frac{x\sqrt{w}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{4\sqrt{w}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x\sqrt{w}}{4} - w\frac{x}{4\sqrt{w}} = x\left(1-\frac{\sqrt{w}}{2}\right)$$

y eso es menor o igual que 0 si y solo si $w \geq 4$.

9.D. Elegir s y t para maximizar $s^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$ sujeto a $s = wt+1$. Sustituyendo por s y derivando e igualando a 0 obtenemos $t = \frac{1}{2}\frac{w-1}{w}$, $s = \frac{w+1}{2}$.

9.E. Si la firma no produce nada, entonces debemos tener que la demanda del individuo es 1 (para que haya equilibrio). Si la demanda es 1, $w = 1$, lo que llevaria a una contradicción con C.

9.F. Como la firma debe producir una cantidad positiva de semilla, debemos tener $w = 4$, lo que nos dice que la canasta del individuo es $(s,t) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{8}\right)$, por lo que la firma debe producir, en términos netos, $\frac{3}{2}$ utilizando $t = \frac{3}{8}$ (todo cierra pues si la firma quiere producir en terminos netos $\frac{3}{2}$, en forma óptima, debe producir 3, y usar $\frac{3}{2}$ de insumos de s y $t = \frac{3}{8}$. Una cosa que no cierra, pero no importa, de esto, es que la firma esta demandando como insumos mas de lo que hay en la economía. Pero digo que no importa porque podemos pensarlo en terminos del conjunto de posibilidades de produccion, o en su defecto pensar que la firma demanda 1 de s, produce más de 1, luego demanda lo que produjo, y así llegamos a producir 3).

Ejercicio 10.A. Normalizando el precio del bien 1 a 1 y llamando p al precio de 2 tenemos que las demandas son

$$\begin{aligned} x^1(p) &= \left(\frac{1+p}{2}, \frac{1+p}{2p}\right) \\ x^2(p) &= \left(\frac{1+p}{3}, \frac{2+2p}{3p}\right) \end{aligned}$$

por lo que tenemos que los excesos de demanda son

$$\begin{aligned} z_1(p) &= \left(\frac{p-1}{2}, \frac{1+p}{2p} - 1\right) \\ z_2(p) &= \left(\frac{p-2}{3}, \frac{2+2p}{3p} - 1\right) \end{aligned}$$

Si u_1 fuera $x_1 + x_2$, no habría una función de demanda, pues cuando $p = 1$, cualquier canasta es óptima, y la demanda es una correspondencia (a un precio le corresponden muchas canastas).

10.B. No se puede aplicar el teorema. La hipótesis que no se cumple, es que $z_i(p)$ esté definida para todo $p \geq 0$. En particular, cuando el precio del bien 2 es 0, las demandas son infinitas. Es fácil verificar que se cumple la ley de Walras.

10.C. Para encontrar el equilibrio de esta economía, hacemos que p sea tal que la suma de los excesos de demanda del bien 1 sea $0 : p = \frac{7}{5}$.

Ejercicio 11.A Para el individuo 1, $x^1 = (1,1)$ maximiza su utilidad dentro de la restricción presupuestal dado $p = (1,1)$ (de hecho, maximiza su utilidad dada *cualquier* restricción presupuestal). Para el individuo 2, las demandas para un vector de precios $(1,p)$ son

$$x_1^2(p) = \frac{1+p}{2} \quad \text{y} \quad x_2^2(p) = \frac{1+p}{2p}$$

que dado que los precios son $(1,1)$ arroja $x_1^2 = x_2^2 = 1$, por lo que $x^2 = (1,1)$ maximiza la utilidad de 2 dentro de la restricción presupuestal dada por los precios $(1,1)$. Como la suma de las cantidades demandadas es igual a la suma de las dotaciones:

$$x^1 + x^2 = (1,1) + (1,1) = \omega^1 + \omega^2$$

$\left[x^1, x^2, p\right] = \left[(1,1), (1,1), (1,1)\right]$ es un equilibrio.

11.B. La asignación $\left[x^1, x^2\right] = \left[(1,1), (1,1)\right]$ no es Pareto Óptima pues la asignación

$$\left[\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2\right] = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right]$$

la domina: $\widetilde{x}^1 \sim_1 x^1$ (pues las dos asignaciones le dan una utilidad de 1) y $\widetilde{x}^2 \succ_2 x^2$ (pues la utilidad de $\widetilde{x}^2$ es $\frac{3}{2}$ y la de x^2 es 1).

11.C. El PTB falla porque las preferencias de 1 no son localmente no saciables. Hay dos formas de verlo. La primera, es que sabemos que si son LNS, entonces el individuo, para cada restricción presupuestal, si maximiza utilidad, gasta todo su ingreso. Para precios $p = (1,1)$, la canasta $\widetilde{x}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ maximiza la utilidad, pero no gasta todo el ingreso. Por lo tanto, las preferencias no pueden ser LNS.

Otra forma es verificar directamente que las preferencias no son LNS: para $x^1 = (1,1)$ y cualquier $\varepsilon > 0$, no existe ningún x' tal que $\left\|x^1 - x'\right\| < \varepsilon$ y $x' \succ_1 x^1$ pues x^1 da la máxima utilidad que puede obtener el individuo.

11.D. Si $\left(\widehat{x}^1, \widehat{x}^2\right)$ es Pareto Óptima y le da una utilidad de 1 a 1, tiene que ser tal que $\widehat{x}_1^1 + \widehat{x}_2^1 = 1$ (de lo contrario podríamos darle un poco de los bienes de 1 a 2 y 2 mejoraría estrictamente sin perjudicar a 1). Por lo tanto, debemos elegir $\widehat{x}_1^1, \widehat{x}_2^1, \widehat{x}_2^2$ y $\widehat{x}_2^2$ para maximizar

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{x}_1^2 \widehat{x}_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{sujeto a } \widehat{x}_1^1 + \widehat{x}_2^1 &= 1 \\ \widehat{x}^1 + \widehat{x}^2 &= (2,2). \end{aligned}$$

Usando la primera restricción, la segunda nos queda

$$\begin{aligned} \left(\widehat{x}_1^1, 1 - \widehat{x}_1^1\right) + \left(\widehat{x}_1^2, \widehat{x}_2^2\right) &= (2,2) \overset{\text{usando } \widehat{x}_1^1 + \widehat{x}_1^2 = 2}{\Leftrightarrow} \\ 1 - \left(2 - \widehat{x}_1^2\right) + \widehat{x}_2^2 &= 2 \Leftrightarrow \\ \widehat{x}_1^2 &= 3 - \widehat{x}_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el problema se reduce a elegir $\widehat{x}_2^2$ para maximizar

$$\left(\left(3 - \widehat{x}_2^2\right) \widehat{x}_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y la solución es

$$\widehat{x}_2^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{x}_1^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{x}_1^1 = \widehat{x}_2^1 = \frac{1}{2}.$$

De las funciones de demanda encontradas en la Parte A, sabemos que

$$\widehat{x}_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1^2(p) = \frac{1+p}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = 2$$

y también, si $p = 2$,

$$x_2^2(p) = \frac{1+p}{2p} = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{2}.$$

Es decir, no hay ningún precio que haga que la asignación

$$\left[\widehat{x}^1, \widehat{x}^2\right] = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right]$$

sea parte de un equilibrio. Otra forma de ver que no es un equilibrio es notando que $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ está siempre fuera de la restricción presupuestal de 2.

Procediendo de la misma forma que antes, la única asignación Pareto Óptima que le da una utilidad de 0 al individuo 1 es aquella que tiene $\overline{x}_1^1=\overline{x}_2^1=0$ y no hay ningún p que que haga que en equilibrio el individuo consuma $\overline{x}_1^1=\overline{x}_2^1=0$, pues la canasta $x^1=(1,1)$ siempre está disponible, y le da una utilidad de 1.

Ejercicio 12.A. Como el individuo 2 no puede elegir x_{11}, el equilibrio se calcula como siempre, y da $(x_1,x_2,p)=((1,1),(1,1),(1,1))$.

12.B. Elegiremos la asignación que maximiza la utilidad de 1 dejando a 2 con una utilidad de 2 (que es lo que tiene en equilibrio): elegir $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\in\mathbf{R}_+$ para maximizar

$$
\begin{aligned}
& x_{11}^{\frac{1}{2}}x_{12}^{\frac{1}{2}} \\
\text{sujeto a } x_{21}^{\frac{1}{2}}x_{22}^{\frac{1}{2}}+x_{11} &= 2 \qquad (43)\\
x_{11}+x_{21} &= 2 \qquad (44)\\
x_{12}+x_{22} &= 2 \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Usando las restricciones (44) y (45) en la (43), obtenemos que el problema es el de elegir $x_{11},x_{12}\in[0,2]$ para maximizar

$$
\begin{aligned}
& x_{11}^{\frac{1}{2}}x_{12}^{\frac{1}{2}} \\
\text{sujeto a } \left(2-x_{11}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2-x_{12}\right)^{\frac{1}{2}}+x_{11} &= 2\Leftrightarrow x_{12}=x_{11}
\end{aligned}
$$

(x_{11} y x_{12} deben ser menores a 2 para que x_{21} y x_{22} sean positivas). Por lo tanto el problema se reduce a elegir $x_{11}\in[0,2]$ para maximizar x_{11}. La solución es

$$
x_{11}=2\Rightarrow\begin{cases} x_{12}=2\Rightarrow x_{22}=0\\ \quad x_{21}=0\end{cases}
$$

por lo que la utilidad de 1 es 2 y la de 2 es 2. Como la utilidad de 1 en equilibrio es 1, el equilibrio no es Pareto Óptimo.

La razón es que 1 compra bien 1 sólo pensando en su utilidad personal, pero "debería" comprar más porque su consumo de bien 1 hace feliz a 2.

Ejercicio 13. La firma 1 debe elegir y_1 para maximizar $p\sqrt{-y_1}+y_1$, lo que arroja

$$
y_1^*=-\frac{p^2}{4},y_2^*=\frac{p}{2},\pi_1(p)=\frac{p^2}{4}
$$

La firma 2 debe elegir y_1 para maximizar $y_1+p\left(1-y_1^2\right)$, lo que arroja

$$
y_1^*=\frac{1}{2p},y_2^*=\frac{4p^2-1}{4p^2},\pi_2(p)=\frac{1+4p^2}{4p}.
$$

Las demandas de los individuos son, por la fórmula de la Cobb-Douglas con los beneficios incluidos,

$$
\begin{aligned}
x_{11}^* &= \frac{4+4p+p^2}{8},x_{21}^*=\frac{4+4p+p^2}{8p}\\
x_{12}^* &= \frac{4p+8p^2+1}{12p},x_{22}^*=\frac{4p+8p^2+1}{6p^2}.
\end{aligned}
$$

El equilibrio se da entonces cuando

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12} &= 2+y_{11}+y_{12} \Leftrightarrow \\
\frac{4+4p+p^2}{8}+\frac{4p+8p^2+1}{12p} &= 2-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{2p} \Leftrightarrow \\
9p^3+28p^2-28p-10 &= 0
\end{aligned}$$

Como en $p=1$ la expresión es -1, y en $p=2$ es 118, existe un $p\in(1,2)$ que es de equilibrio.

Ejercicio 14.A. La firma debe elegir y para maximizar y_1+py_2 sujeto a $y_2=\sqrt{-y_1}$, lo que arroja

$$y=\left(-\frac{p^2}{4},\frac{p}{2}\right) \text{ y } \pi(p)=\frac{p^2}{4}$$

el individuo maximiza su utilidad eligiendo

$$x(p)=\left(\alpha\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right),(1-\alpha)\frac{1+p+\frac{p^2}{4}}{p}\right).$$

El precio de equilibrio es entonces aquél para el cual

$$1-\frac{p^2}{4}=\alpha\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right)\Leftrightarrow p=2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

La utilidad de los individuos en equilibrio se obtiene sustituyendo p en $x(p)$ y $x(p)$ en las funciones de utilidad. Para $\alpha=\frac{1}{2}$ y $\beta=\frac{1}{4}$ las utilidades son

$$\begin{aligned}
E_1: p=\tfrac{2}{3}\Rightarrow x=\left(\tfrac{8}{9},\tfrac{4}{3}\right)\Rightarrow u_1=\tfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}}\\
E_2: p=\tfrac{6}{5}\Rightarrow x=\left(\tfrac{16}{25},\tfrac{8}{5}\right)\Rightarrow u_2=\tfrac{8\sqrt[4]{250}}{25}
\end{aligned}$$

14.B. De la parte anterior sabemos que

$$\begin{aligned}
y^1(p) &= y^2(p)=\left(-\frac{p^2}{4},\frac{p}{2}\right) \quad \text{y} \quad \pi^1(p)=\pi^2(p)=\frac{p^2}{4}\\
x^1(p) &= \left(\frac{1}{2}\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right),\frac{1}{2}\frac{1+p+\frac{p^2}{4}}{p}\right)\\
x^2(p) &= \left(\frac{1}{4}\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right),\frac{3}{4}\frac{1+p+\frac{p^2}{4}}{p}\right)
\end{aligned}$$

por lo que el p de equilibrio es aquél para el cual

$$2-\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2}\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1+p+\frac{p^2}{4}\right)\Leftrightarrow p=\frac{10}{11}.$$

Las canastas y utilidades son por tanto

$$\begin{aligned}
x^1\left(\frac{10}{11}\right) &= \left(\frac{128}{121},\frac{64}{55}\right)\Rightarrow u_1=\frac{64\sqrt{110}}{605}\\
x^2\left(\frac{10}{11}\right) &= \left(\frac{64}{121},\frac{96}{55}\right)\Rightarrow u_2=\frac{32\sqrt[4]{2}11^{\frac{3}{4}}3^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{5}}{605}
\end{aligned}$$

14.C. Supongamos que contrariamente a lo que queremos demostrar, uno de los dos individuos se encuentra peor luego de la apertura, y supongamos sin pérdida de generalidad que es el individuo 2 el que empeora. Sean

x_a^2 la canasta consumida por el individuo 2 en autarquía

y_a^2 la canasta producida por la firma 2 en autarquía

y_l^2 la canasta producida por la firma 2 en libre comercio

p_l el vector de precios de equilibrio en libre comercio

Argumentaremos ahora que x_a^2 siempre está disponible para el consumidor en el equilibrio de libre comercio, y que por tanto 2 tiene que mejorar. Para hacerlo, alcanza con demostrar que el costo a precios p_l de x_a^2 es menor que $p_l\omega + p_l y_l^2$, el ingreso total de 2 en la situación de libre comercio. Como se cumplen

$$\begin{aligned} x_a^2 &= \omega + y_a^2 \text{ por ser la condición de oferta igual demanda en autarquía} \\ p_l y_a^2 &\leq p_l y_l^2 \text{ pues las firmas maximizan beneficios en libre comercio} \end{aligned}$$

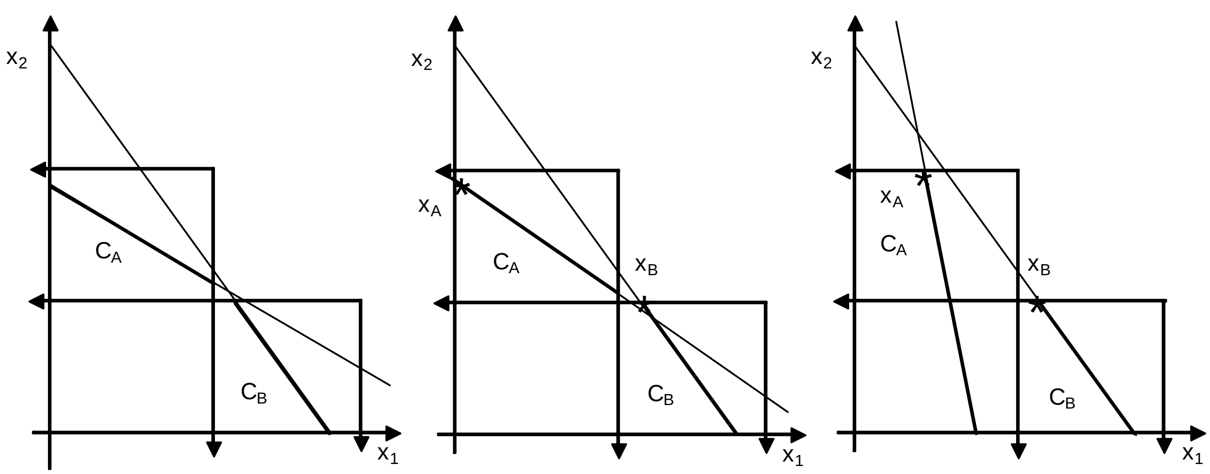
tenemos que

$$p_l x_a^2 = p_l\left(\omega + y_a^2\right) = p_l\omega + p_l y_a^2 \leq p_l\omega + p_l y_l^2$$

como queríamos demostrar.

No tiene nada que ver con las ventajas comparativas. En este caso las tecnologías son idénticas, por lo que ningún país tiene una ventaja comparativa.

Ejercicio 15.A. En los dibujos de abajo, están marcados los conjuntos C_A y C_B en cada panel. El primer panel no puede ser nunca de equilibrio pues para cualquier cosa que esté en C_A y cualquier cosa que esté en C_B, se viola el Axioma Débil de la Preferencia Revelada. En el segundo y tercer panel se presentan las asignaciones x_A y x_B que podrían surgir en un equilibrio. De la figura es fácil ver que el Axioma Débil se cumple para el individuo 1 en ambos casos. Es necesario verificar con un poco más de cuidado que el Axioma Débil también se cumple para el individuo 2 : hay que ver que cuando la linea de precios de B pasa por la dotación en A, no queden ambas canastas demandadas (por 2) por debajo de las dos líneas de presupuesto.



Ejercicio 16.A. Para encontrar las asignaciones Débilmente Pareto Óptimas, debemos elegir, para cada nivel de utilidad u del agente 2, las asignaciones que maximizan la utilidad de 1, sujeto a que 2 obtenga al

menos u. Elegir x_{11} y x_{12} para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & x_{11} \\ \text{sujeto a } 2 - x_{11} + 2 - x_{12} & \geq & u \end{array}$$

Si $u < 2$, las asignaciones que resuelven este problema relevantes son aquellas en las cuales 2 consume u o más de x_2 y 1 consume 2 de x_1 y la parte de x_2 que no consumió 2. Matemáticamente, las siguientes asignaciones son DPO:

$$\left\{\left[\left(x_{11}, x_{12}\right), \left(x_{21}, x_{22}\right)\right] : x_{11} = 2, x_{21} = 0, 2 \geq x_{22} \geq u, x_{12} = 2 - x_{22}, u < 2\right\}. \tag{46}$$

Si $u \geq 2$, el individuo 2 consume todo del bien 2, y lo que le falta hasta llegar a u del bien 1. Formalmente, las asignaciones que resuelven el problema para $u \geq 2$ son

$$\left\{\left[\left(x_{11}, x_{12}\right), \left(x_{21}, x_{22}\right)\right] : x_{11} = 4 - u, x_{21} = u - 2, x_{22} = 2, x_{12} = 0, 4 \geq u \geq 2\right\}. \tag{47}$$

El conjunto de asignaciones DPO es la unión de (46) y (47). Gráficamente, son los bordes Sur y Este de la caja de Edgeworth.

16.B. Normalizamos el precio del bien 1 a 1 y llamamos p al del bien 2. Si $p > 1$, el individuo 2 demandará $1 + p > 2 = \omega_{11} + \omega_{21}$ del bien 1, por lo que $p \leq 1$. Si $p < 1$, el individuo 2 demanda

$$\frac{1+p}{p} > 2 = \omega_{12} + \omega_{22}$$

del bien 2. Concluimos entonces $p = 1$. En ese caso, $x_{11} = 2$ y $x_{22} = 2$. El equilibrio es entonces

$$\left[\left(x_1, x_2\right), p\right] = \left[\left(\left(2, 0\right), \left(0, 2\right)\right), \left(1, 1\right)\right].$$

16.C. Las asignaciones en (46) no pueden ser de equilibrio y las de (47), si (hay una asignación en (46) que también está en (47) y que puede ser de equilibrio). Para cada asignación (x_1, x_2) en (47), si fijamos las dotaciones $\omega_1 = x_1$ y $\omega_2 = x_2$ y $p = (1, 1)$ tenemos que la asignación (x_1, x_2) es un equilibrio. Supongamos que fijamos un $u \geq 2$ cualquiera y la dotación

$$\omega_1 = \left(4 - u, 0\right), \omega_2 = \left(u - 2, 2\right).$$

En ese caso, tendremos que para $p = (1, 1)$, $x_1 = (4 - u, 0)$ y $x_2 = (u - 2, 2)$ son óptimas, y hay oferta igual demanda, por lo que son asignaciones de equilibrio.

Para cada asignación (x_1, x_2) en (46) que no está en (47), tenemos que el costo de la canasta de 1 es $2 + p\left(2 - x_{22}\right)$ para $x_{22} < 2$ (si tuviéramos $x_{22} = 2$, sería la canasta que está en (47)). Por lo tanto, la demanda óptima del individuo 1 es $x_{11} = 2 + p\left(2 - x_{22}\right) > 2$, por lo que la asignación no puede ser de equilibrio.

Ejercicio 16'. Es idéntico al Ejercicio 16, sólo que las canastas Pareto Óptimas son aquellas en (47).

Ejercicio 17.A. Normalizando los precios a 1 y p, las demandas son

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}\right) \quad \text{y} \quad x_2 = \left(\alpha p, 1 - \alpha\right)$$

por lo que debemos tener

$$\frac{1}{2} + \alpha p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2\alpha}$$

y el equilibrio es

$$[(x,y),] = \left[\left(\left(\frac{1}{2},\alpha\right),\left(\frac{1}{2},1-\alpha\right)\right),\left(1,\frac{1}{2\alpha}\right)\right]$$

Parte B. El gobernante debe elegir x_1 y x_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & x_{11}^{\frac{1}{2}}x_{12}^{\frac{1}{2}}+x_{21}^{\alpha}x_{22}^{1-\alpha} \\ \text{sujeto a } x_{11}+x_{21} &= 1 \\ x_{12}+x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

que se transforma en el problema de elegir x_{11} y x_{12} para maximizar

$$x_{11}^{\frac{1}{2}}x_{12}^{\frac{1}{2}}+(1-x_{11})^{\alpha}(1-x_{12})^{1-\alpha}.$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{r} \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\alpha\left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{1-\alpha} \\ \left(\frac{x_{11}}{x_{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2(1-\alpha)\left(\frac{x_{21}}{x_{22}}\right)^{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = \left(\frac{7}{18},\frac{21}{32}\right) \\ x_2 = \left(\frac{11}{18},\frac{11}{32}\right) \end{array}\right\}$$

Parte C. Poniendo las dotaciones iguales a la asignación deseada por el gobernante, se obtiene que en equilibrio la asignación es la deseada.

Parte D. Como siempre, la condición de optimalidad, que sale de la maximización del individuo, es que el cociente de las utilidades marginales sea igual al cociente de precios:

$$\frac{x_{11}}{x_{12}} = p \Leftrightarrow p = \frac{16}{27}.$$

Con esos precios en el equilibrio, el valor de las canastas es

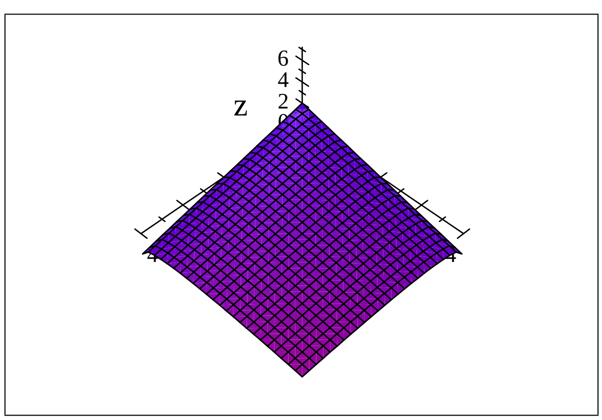
$$\begin{aligned} px_1 &= \frac{7}{18}+\frac{16}{27}\frac{21}{32}=\frac{7}{9} \\ px_2 &= \frac{11}{18}+\frac{11}{32}\frac{16}{27}=\frac{22}{27} \end{aligned}$$

y el valor de las dotaciones es $p\omega_1 = 1$ y $p\omega_2 = \frac{16}{27}$. Por lo tanto, si 1 le transfiere $\frac{2}{9}$ de unidades del bien 1 a 2, tendremos que el valor de las nuevas dotaciones ω_1' y ω_2' será:

$$p\omega_1' = \frac{7}{9} \quad \text{y} \quad p\omega_2 = \frac{2}{9}+\frac{16}{27}1=\frac{22}{27}.$$

Ejercicio 18.A. Usar Kuhn-Tucker en la maximización de

$$x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}+(1-x_1)+(1-x_2)$$



Ejercicio 19.B. El gobernante debe elegir x_{11}, x_{12}, x_{21} y x_{22} para maximizar $x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{12}^{\frac{1}{2}} + x_{21}^{\alpha} x_{22}^{1-\alpha}$ sujeto a $x_{11} + x_{21} = 1$ y $x_{12} + x_{22} = 1$. Sustituyendo las restricciones y tomando condiciones de primer orden con respecto a x_{11} y x_{12} quedan las siguientes 4 ecuaciones

$$\begin{array}{lc} \frac{1}{2}\left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha\left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{1-\alpha} & x_{11} + x_{21} = 1 \\ \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1-\alpha)}\left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\alpha} & x_{12} + x_{22} = 1 \end{array}$$

Llamando $r = x_{12}/x_{11}$ y $s = x_{22}/x_{21}$, de las dos ecuaciones de la izquierda obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} = \alpha s^{1-\alpha} \\ r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1-\alpha)} s^{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} r = 4\alpha^2 s^{2-2\alpha} \\ r = \frac{s^{2\alpha}}{4(1-\alpha)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} s = \left(16\alpha^2(1-\alpha)^2\right)^{\frac{1}{4\alpha-2}} \\ r = \frac{\left(16\alpha^2(1-\alpha)^2\right)^{\frac{2\alpha}{4\alpha-2}}}{4(1-\alpha)^2} \end{array}$$

Usando luego las definiciones de r y s y las restricciones de recursos queda

$$\left.\begin{array}{c} x_{11} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} r = \frac{1-x_{22}}{1-x_{21}} \\ s = \frac{x_{22}}{x_{21}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_{22} = s\frac{1-r}{s-r} \\ x_{21} = \frac{1-r}{s-r} \end{array}$$

Verificamos que para $\alpha = \frac{3}{4}$ queda $x_{22} = 11/32$ como en el Ejercicio 17.

Ejercicio 20.A. De las funciones de utilidad vemos que se tienen que producir si o si, bienes 2 y 3 (para cualquier precio, habrá una demanda positiva de esos bienes). Por lo tanto, como las funciones de producción son lineales, debemos tener

$$p_3 = \frac{1}{3} \quad y \quad p_2 = \frac{1}{4}$$

Como hay rendimientos constantes a escala, los beneficios son 0, la demanda del individuo 1 se obtiene resolviendo el problema de elegir x_2, x_3 para maximizar

$$u_1(x) = 6 + \frac{2\log x_3 + 3\log x_2}{5} \quad \text{sujeto a } p_2 x_2 + p_3 x_3 \leq 5.$$

Como es una Cobb-Douglas (el 6 se puede sacar, y después se hace e elevado a la función de utilidad y queda la Cobb Douglas) obtenemos

$$x_1 = \left(0, \frac{3}{p_2}, \frac{2}{p_3}\right) = (0, 12, 6).$$

Similarmente, para el individuo 2, la demanda es

$$x_2 = \left(0, \frac{5}{2p_2}, \frac{5}{2p_3}\right) = \left(0, 10, \frac{15}{2}\right).$$

El equilibrio es entonces

$$[(x,y), p] = \left[\left(\left((0,12,6), \left(0,10,\frac{15}{2}\right)\right), \left(\left(-\frac{9}{2}, 0, \frac{27}{2}\right), \left(-\frac{11}{2}, 22, 0\right)\right)\right), \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)\right]$$

20.B. El argumento en palabras es el siguiente: como las firmas tienen retornos constantes a escala, los beneficios de ambas son 0 en cualquier equilibrio. Eso implica que las restricciones presupuestales de ambos individuos son idénticas a las de la Parte A, lo que implica que sus demandas no cambian. Por otro lado, las ofertas de las firmas son iguales a la Parte A. Como ni las ofertas ni las demandas cambian, el conjunto de equilibrios es el mismo que en la Parte A.

20.C. Fijamos un nivel de utilidad u para el individuo 1, y debemos maximizar la utilidad del individuo 2 sujeto a la restricción de recursos. Es decir, debemos elegir x_2, x_3, y_2, y_3 para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & 8+\log x_2+\log x_3 \\ \text{sujeto a } 6+\dfrac{2\log(y_3-x_3)+3\log(y_2-x_2)}{5} & = & u \\ y_3 & = & 30-\dfrac{3y_2}{4} \end{array}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la segunda y despejando $y_2 - x_2$, queda

$$\begin{array}{rcl} 6+\dfrac{2\log\left(30-\frac{3y_2}{4}-x_3\right)+3\log(y_2-x_2)}{5} & = & u \Leftrightarrow 2\log\left(30-\dfrac{3y_2}{4}-x_3\right)+3\log(y_2-x_2)=5u-30 \Leftrightarrow \\ \log(y_2-x_2) & = & \dfrac{5}{3}u-10-\dfrac{2}{3}\log\left(30-\dfrac{3y_2}{4}-x_3\right) \Leftrightarrow y_2-x_2=e^{\frac{5}{3}u-10-\frac{2}{3}\log\left(30-\frac{3y_2}{4}-x_3\right)}. \end{array}$$

Despejando x_2 de esta última ecuación, y sustituyendo en la función objetivo obtenemos que debemos elegir x_3, y_2 para maximizar

$$8+\log\left(y_2-e^{\frac{5}{3}u-10-\frac{2}{3}\log\left(30-\frac{3}{4}y_2-x_3\right)}\right)+\log x_3 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 20+\frac{1}{6}2^{\frac{2}{5}}e^{u-6} \\ x_3 = 15-\frac{5}{8}2^{\frac{2}{5}}e^{u-6} \end{cases}.$$

Ejercicio 21.A. Normalizamos los precios a $(1, p)$. Para maximizar beneficios la firma elige y_1 para mazimizar

$$p\sqrt{-y_1}+y_1$$

que resulta en un vector de producción óptimo $y=\left(-\frac{p^2}{4}, \frac{p}{2}\right)$ y unos beneficios de $\frac{p^2}{4}$.

El individuo maximiza su utilidad eligiendo x para maximizar x_1x_2 sujeto a $x_1+px_2=1+p+\frac{p^2}{4}$, que arroja una demanda de $x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{8}p^2, \frac{1}{8}\frac{4+4p+p^2}{p}\right)$. El equilibrio se da cuando

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{8}p^2=-\frac{p^2}{4}+1 \Leftrightarrow p=\frac{2}{3}.$$

La asignación resultante es $[x, y]=\left[\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)\right]$.

21.B. No hay que calcular nada. La oferta de la firma es igual, y la demanda del individuo es igual. El equilibrio es la oferta y la demanda de la Parte A.

21.C. Si llamamos $y(p)$ al vector óptimo producido por la firma cuando los precios son p vemos que el ingreso total del individuo se puede escribir como $(1,p)(\omega+y(p))$. Por definición de $y(p)$, sabemos que

$$(1,p)(\omega+y(p)) \geq (1,p)\left(\omega+y\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

Como en equilibrio, la canasta $x\left(\frac{2}{3}, \omega\right)$ de autarquía es igual a $\omega+y\left(\frac{2}{3}\right)$, tenemos que $x\left(\frac{2}{3}, \omega\right)$ siempre se puede comprar, para cualquier p, es decir,

$$x\left(\frac{2}{3}, \omega\right)=\left(\omega+y\left(\frac{2}{3}\right)\right) \Rightarrow (1,p)\,x\left(\frac{2}{3}, \omega\right)=(1,p)\left(\omega+y\left(\frac{2}{3}\right)\right) \leq (1,p)(\omega+y(p)).$$

Eso asegura que si la economía se abre al libre comercio, el individuo está mejor, pues si quisiera podría comprar lo que consumía antes de la apertura.

Ejercicio 22.A. De los beneficios de la firma deducimos que $p_2 < 1 \equiv p_1$ no puede suceder ya que los individuos 1 a n siempre demandarán algo del bien 2, y $p_2 < 1$ implica una oferta nula del bien 2. También deducimos que $p_2 > 1$ no puede ser, ya que implicaría una oferta infinita para la firma. De $p_2 = 1$ deducimos que $x_{i1} = x_{i2} = d/2$ para los individuos 1 a n y como $x_{n+1} = (d, 0)$ obtenemos que la demanda agregada del bien 2 es $nd/2$ que debe ser igual a $y_2 = -y_1$. El equlibrio es entonces

$$[x, y, p] = \left[\underbrace{\left(\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right), \left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right), ..., \left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right), (d, 0)\right)}_{x^*}, \underbrace{\left(-\frac{nd}{2}, \frac{nd}{2}\right)}_{y^*}, \underbrace{(1, 1)}_{p}\right]$$

22.B. Lo único que cambia con n es y^*.

Ejercicio 23.A. Lo que determina el equilibrio es la demanda del individuo 1 (el 2 se "come" lo restante), y para cada precio hay un equilibrio, si lo que resulta es una asignación alcanzable. En particular, para *cualquier* precio $p \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$,

$$[(x_{11}^*, x_{12}^*), (x_{21}^*, x_{22}^*), (1, p)] = \left[\left(\frac{1+p}{2}, \frac{1+p}{2p}\right), \left(2 - \frac{1+p}{2}, 2 - \frac{1+p}{2p}\right), (1, p)\right]$$

es un equilibrio. Es importante notar que, por ejemplo, $[(x_{11}^*, x_{12}^*), (0, 0), (1, p)]$ no es un equilibrio por más que ambos están maximizando su utilidad, pues la asignación no es alcanzable (se consume menos que lo que hay en la economía).

23.B. Ninguno es Pareto Óptimo, pues son todos dominados por la asignación $(x_1, x_2) = ((2, 2), (0, 0))$.

23.C. Las preferencias del individuo 2 no son localmente no saciables.

23.D. La única asignación Pareto Óptima es $((2, 2), (0, 0))$.

Ejercicio 24.A. Esta parte se puede hacer de dos formas. Se pueden hacer todos los cálculos, o se puede demostrar sin necesidad de calcular la demanda. Primero, notamos que las demandas estarán siempre definidas para todo $p > 0$, y nunca podrá haber una que sea infinito aunque el precio del bien correspondiente sea 0. La razón es que el término $(x_1 - x_2)^2$ presente en ambas utilidades, no permite que la demanda de ninguno de los bienes sea "infinitamente grande".

Para demostrar que la demanda de la utilidad u_2 es en efecto una función (una canasta para cada p), asumamos que x e y son dos canastas distintas que están en la demanda para un p dado. Si así es, dan la misma utilidad, y además la canasta $ax + (1 - a)\, y$ también se puede comprar. Calcularemos la utilidad de $ax + (1 - a)\, y$ y veremos que la utilidad aumenta si empezamos en $a = 0$ y aumentamos a sólo "marginalmente" (un poquito). Así, habremos demostrado que no puede haber dos canastas en la demanda, pues el individuo estaría estrictamente mejor si consumiera una canasta "en el medio".

Tenemos que

$$u_2 (ax + (1 - a)\, y) = ax_1 + (1 - a)\, y_1 + ax_2 + (1 - a)\, y_2 - (ax_1 + (1 - a)\, y_1 - ax_2 - (1 - a)\, y_2)^2 .$$

Por lo que la derivada de esto con respecto a a y evaluada en $a = 0$ es

$$\frac{du_2 (ax + (1 - a)\, y)}{da} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_y (x_1 - y_1) + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_y (x_2 - y_2) = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 - 2\, (y_1 - y_2)\, (x_1 - y_1 - x_2 + y_2)$$

y como $u_2(x) = u_2(y)$ (pues ambas canastas están en la demanda),

$$x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2 = y_1 + y_2 - (y_1 - y_2)^2 \Leftrightarrow x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2$$

por lo que

$$\begin{aligned}
u_2'(y) &= (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - 2(y_1 - y_2)(x_1 - y_1 - x_2 + y_2) \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - 2(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \\
&= ((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2))^2 > 0
\end{aligned}$$

La otra forma de ver que la demanda de u_2 es una función, y que está definida en todo el dominio, es hacer los cálculos. El individuo debe elegir x_1, x_2 para maximizar

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)^2 \\
\text{sujeto a } p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \leq \quad & p_1 + p_2
\end{aligned}$$

Si $p_1 \neq 0$, definimos $p = p_2/p_1$ y este problema se transforma en el de elegir x para maximizar

$$1 + p(1 - x) + x - (1 + p)^2 (1 - x)^2$$

que arroja

$$x_2 = 1 + \frac{1 - p}{2(1 + p)^2} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{(1 - p)p}{2(1 + p)^2}. \tag{48}$$

Si $p_1 = 0$, tenemos que $p_2 > 0$, y que el individuo maximiza su utilidad eligiendo $x_2 = 1$ (de la restricción presupuestal) y $x_1 = 3/2$ (de la función de utilidad). Otra forma de ver que esto es así, es suponer que $p_2 \neq 0$, definir $q = p_1/p_2$ y hacer las mismas cuentas que nos llevaron a (48) para obtener

$$x_1 = 1 + \frac{1 - q}{2(1 + q)^2} \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{(1 - q)q}{2(1 + q)^2}.$$

En ese caso vemos que si $q = 0$, $x_1 = 3/2$ y $x_2 = 1$, como habíamos dicho.

La demanda en el caso de u_1 es

$$x_1(p) = x_2(p) = 1 \text{ para todo } p > 0.$$

La diferencia entre esta demanda y la de la utilidad $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$ es que esta demanda es una función aún cuando uno de los precios es 0. Para ver que esa es la demanda, supongamos que $x_1 > x_2$ para algún p (sería igual si asumiéramos $x_2 > x_1$). En ese caso, regalar $x_1 - x_2$ unidades del bien 1 aumenta estrictamente la utilidad (el mínimo no cambia, y el cuadrado de la diferencia se hace 0). Otra forma de verlo es suponer que $x_1 < x_2$, y considerar comprar un poco más de x_1, vendiendo x_2 para mantener el costo total de la canasta. Eso sería $\overline{x} = \left(x_1 + c, x_2 - \frac{p_1}{p_2}c\right)$ y vemos que para c chico esto aumenta estrictamente la utilidad (hacemos la derivada en $c = 0$ y vemos que es positiva, por lo que x no podía ser óptimo):

$$\left.\frac{du}{dc}\right|_{c=0} = \left.\frac{d\left(x_1 - \left(x_1 + c - x_2 + \frac{p_1}{p_2}c\right)^2\right)}{dc}\right|_{c=0} = 1 - 2(x_1 - x_2)\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) > 0.$$

Eso demuestra que las dos demandas deben ser iguales. Para ver que se gastan todo el ingreso alcanza con ver que las preferencias son localmente no saciables (ver la Parte C).

24.B. La demanda del individuo 1 es $(1,1)$ que por supuesto es continua en p. Es fácil ver que las demanda de 2 es continuas, pues son sumas, restas, divisiones y multiplicaciones de funciones continuas, y los denominadores son siempre distintos de 0.

24.C. La homogeneidad se satisface pues al multiplicar los precios no cambia la restricción presupuestal. La ley de Walras se cumple, pues las preferencias son localmente no saciables: de cualquier punto x, me puedo mover a $(x_1+\varepsilon, x_2+\varepsilon)$ y aumentará estrictamente mi utilidad.

Ejercicio 25.A. Supongamos, contrariamente a lo que queremos demostrar, que para algún individuo i existen dos puntos que lo sacian, x^1 y $x^2 \neq x^1$. En ese caso, tendríamos $x^1 \succeq x$ para todo $x \in X_i$ y $x^2 \succeq x^1$. Sin embargo, tendríamos que como las preferencias son estrictamente convexas, $\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \succ x^1$ (pues como X_i es convexo, $\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \in X_i$) para cualquier $\alpha \in (0,1)$, y eso contradice $x^1 \succeq x$ para todo $x \in X_i$.

25.B. Si no existe ningún x que sacia al individuo, eso quiere decir que para todo x, existe y tal que $y \succ x$. Para demostrar que las preferencias son localmente no saciables, debemos mostrar que hay algún z cercano a x que es mejor que x, para todo x. El z que construiremos, será una combinación lineal entre x e y. Como $y \succ x$, tenemos que $\alpha y + (1-\alpha) x \succ x$, para todo $\alpha \in (0,1)$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un α suficientemente cercano a 0, tal que $\|\alpha y + (1-\alpha) x - x\| < \varepsilon$ y $\alpha y + (1-\alpha) x \succ x$.

25.C. Para cada $x_i \neq x_i^s$, como $x_i^s \succeq_i x_i$, tenemos que $\alpha x_i^s + (1-\alpha) x_i \succ_i x_i$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un α suficientemente cercano a 0, tal que

$$\|\alpha x_i^s + (1-\alpha) x_i - x_i\| = \alpha \|x_i^s - x_i\| < \varepsilon$$

y $\alpha x_i^s + (1-\alpha) x_i \succ_i x_i$.

25.D. Si no hay un x_i^s que sacia, ya sabemos por el Ejercicio 1 que $px_i^{**} \geq K$ (y no hay nada que demostrar). Supongamos entonces que existe un x_i^s que sacia al individuo. Supongamos que contrariamente a lo que queremos demostrar, $x_i^* \neq x_i^s$ y además

$$px_i^{**} < K. \tag{49}$$

Si tuviéramos $x_i^{**} = x_i^s$, como $x_i^* \neq x_i^s$ y hay a lo sumo un x que sacia al individuo, tendríamos $x_i^s \succ x_i^*$, o lo que es lo mismo, $x_i^{**} \succ_i x_i^*$. Pero eso contradice que x_i^* sea óptimo en $px \leq K$ por (49). Tenemos entonces $x_i^{**} \neq x_i^s$, pero es implica que las preferencias son localmente no saciables en x_i^{**} por lo que para cualquier ε tal que $\|x_i - x_i^{**}\| < \varepsilon$ implique $px_i < K$, tendremos que existe x_i' tal que $\|x_i' - x_i^{**}\| < \varepsilon$ (es decir $px_i' < K$) y $x_i' \succ_i x_i^{**} \succeq_i x_i^*$, lo que contradice la optimalidad de x_i^* en $px \leq K$.

25.E. Paso 1. Demostraremos primero que si (x,y) Pareto domina a (x^*,y^*), debemos tener que

$$\sum_{i=1}^{i=I} px_i > \sum_{i=1}^{i=I} p\left(\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} y_j^*\right). \tag{50}$$

Si (x,y) Pareto domina a (x^*,y^*), existe algún i tal que $x_i \succ_i x_i^*$. Como (x^*,y^*), p son un equilibrio, la condición (ii) de la definición nos dice que

$$px_i > p\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} p y_j^* \geq px_i^*. \tag{51}$$

Para el resto de los individuos, si (x,y) Pareto domina a (x^*,y^*), $x_i \succeq_i x_i^*$ implica, por la Parte D, que pueden pasar dos cosas

$$px_i \geq p\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} py_j^* \geq px_i^* \tag{52}$$

o que $x_i^* = x_i^s = x_i$, en cuyo caso,

$$px_i = px_i^*. \tag{53}$$

Sumando ahora para todos los individuos, las ecuaciones (51), (52) y (53) implican

$$\sum_{i=1}^{i=I} px_i > \sum_{i=1}^{i=I} px_i^* = \sum_{i=1}^{i=I} p\left(\omega_i + \sum_{j=1}^{j=J} \theta_{ij} y_j^*\right)$$

que es la ecuación (50), que es lo que queríamos demostrar.

Los pasos 2 y 3 son idénticos a las notas.

25.F. Es una mezcla de la Parte E y la demostración de equilibrio con transferencias de las notas.

Ejercicio 26.A. La demanda de 1 es una Cobb-Douglas

$$x_{11}(p) = \frac{1+p}{2} \quad \text{y} \quad x_{12}(p) = \frac{1+p}{2p}$$

26.B. La firma maximiza

$$\sqrt{-y_2} + \left(1 + 2\sqrt{-y_2}\right) y_2$$

que arroja unos beneficios de $\frac{7}{54}\sqrt{7} - \frac{5}{27}$ en la cantidad óptima de bananas $y_2 = -\frac{2}{9} + \frac{1}{18}\sqrt{7}$, con un producto de

$$y_1 = \sqrt{\frac{2}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{7}} = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}.$$

26.C. El individuo consume todos sus beneficios en bananas:

$$x_{21} = 0 \quad \text{y} \quad x_{22} = \frac{7\sqrt{7} - 10}{54p}.$$

26.D. El precio que equilibra los mercados es aquél para el cual

$$x_{11} = 1 + y_1 \Leftrightarrow \frac{1+p}{2} = 1 + \sqrt{\frac{2}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{7}} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

o, lo que es lo mismo,

$$x_{12} + x_{22} = \omega_2 + y_2 \Leftrightarrow \frac{1+p}{2p} + \frac{7\sqrt{7} - 10}{54p} = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{18}\sqrt{7} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

Vemos que este precio coincide con el que sale de la Parte B: el precio era

$$1 + 2\sqrt{-y_2} = 1 + 2\sqrt{\frac{2}{9} - \frac{1}{18}\sqrt{7}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

26.E,H. En todas las asignaciones Pareto Óptimas que nos pide este literal el individuo 2 consume

$$x_{22} = \frac{1}{18}\frac{7\sqrt{7} - 10}{2 + \sqrt{7}},$$

por lo que debemos elegir cómo utilizar el resto de las bananas entre producción de trigo y consumo del individuo 1. Debemos elegir entonces b para maximizar

$$\begin{aligned} & x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{12}^{\frac{1}{2}} \\ \text{sujeto a } x_{11} &= 1+\sqrt{1-\frac{1}{18}\frac{7\sqrt{7}-10}{2+\sqrt{7}}-b} \\ x_{22} &= b \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, elegir b para maximizar

$$\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{18}\frac{7\sqrt{7}-10}{2+\sqrt{7}}-b}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$$

que arroja una utilidad máxima de

$$\frac{1}{54}\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{7}}\sqrt{\left(36+18\sqrt{7}+\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{\left(70+23\sqrt{7}-4\sqrt{6+48\sqrt{7}}-2\sqrt{6+48\sqrt{7}}\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)\sqrt{-33+24\sqrt{7}+3}}$$

en

$$b=\frac{8\sqrt{7}-11+\sqrt{6+48\sqrt{7}}}{27}$$

comparado con

$$\left(\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7}}{2}\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7}}{2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{7}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{3}\frac{5+\sqrt{7}}{\sqrt{2+\sqrt{7}}}=1.024$$

del equilibrio.

26.F. Cuando uno resuelve el problema de la Pareto Optimalidad, debe maximizar la expresión

$$\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{18}\frac{7\sqrt{7}-10}{2+\sqrt{7}}-b}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$$

con respecto a b. Si la derivada de esta expresión, evaluada en el consumo del individuo 1 en el equilibrio no es 0, quiere decir que el consumo del individuo 1 de bananas no es el que maximiza su utilidad. Por lo tanto la asignación no es PO.

26.G. No es Pareto Óptimo porque el monopolista no toma los precios como dados. Es decir, no es un equilibrio competitivo.

Ejercicio 27.A. Supongamos que $px^{**} < K$. Entonces, existe un ε (chico) tal que para todo x tal que

$$\|x^{**}-x\| < \varepsilon$$

se cumple que $px < K$. Pero como las preferencias son localmente no saciables, sabemos que para alguno de esos x, tendremos que $x \succ x^{**}$. Para ese x tendremos entonces $px < K$ y $x \succ x^{**} \succeq x^*$, lo que contradice que $x^* \succeq x$ para todo x tal que $px \leq K$.

27.B. Aplicamos la Parte A poniendo $x^* = x^{**} = x_i(p, p\omega_i)$ y $K = p\omega_i$. Tenemos entonces que como $x^{**} \succeq x^*$, porque son indiferentes, y $x^* \succeq x$ para todo x tal que $px \leq K$, $px^{**} \geq K$. Esta última desigualdad y $px^{**} \leq K$ implican $px^{**} = K$ o, lo que es lo mismo, $px_i(p, p\omega_i) = p\omega_i$.

27.C. Por la Parte B sabemos que

$$\sum_{i=1}^{I} px_i\left(p, p\omega_i\right)=\sum_{i=1}^{I} p\omega_i. \tag{54}$$

Supongamos ahora que se viola la igualdad para el mercado k. Obtenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ik}\left(p, p\omega_i\right)\neq\sum_{i=1}^{I}\omega_{ik} \overset{p_k\geq 0}{\Rightarrow} p_k x_{1k}+...+p_k x_{Ik}\neq p_k\omega_{1k}+...+p_k\omega_{Ik}. \tag{55}$$

Las otras igualdades, para los mercados $j\neq k$, implican que

$$p_j x_{1j}+...+p_j x_{Ij}=p_j\omega_{1j}+...+p_j\omega_{Ij}. \tag{56}$$

Sumando el lado izquierdo de la ecuación (55) más todos los lados izquierdos de cada una de las ecuaciones en (56), y lo mismo con el lado derecho, y agrupando por individuo nos queda

$$px_1+px_2+...+px_I\neq p\omega_1+...+p\omega_I$$

lo que contradice la ecuación (54).

Ejercicio 28. Del Ejercicio 21 sabemos que la oferta de la firma 2 es $4y_2=\left(-p^2, 2p\right)$ con unos beneficios de $p^2/4$. La firma 1 tendrá una oferta dada por

$$y_1=\begin{cases}(0,0) & p<1\\ (-y,y), y\geq 0 & p=1\\ (-\infty,\infty) & p>1\end{cases}.$$

Descartando $p>1$, que nunca puede ser de equilibrio, las demandas de los individuos serán $x_1=\left(a+p^2/4, 0\right)$ y $x_2=\left(0,(1-a)/p\right)$. Si $p<1$, tendremos que la firma 1 estará inactiva, y el equilibrio se encuentra de la ecuación

$$O=D\Leftrightarrow-\frac{p^2}{4}+1=a\Leftrightarrow p=2\sqrt{1-a}$$

que es consistente con $p<1$ si y sólo si $a>3/4$. Para $p=1$, el equilibrio se encuentra de la ecuación

$$\begin{aligned} O &= D\Leftrightarrow-\frac{p^2}{4}+1-y=a\Leftrightarrow-\frac{1}{4}+1-y=a\Leftrightarrow\\ y &= \frac{3}{4}-a\end{aligned}$$

Ejercicio 29.A. Fijamos el precio del bien 1 a 1 y llamamos p al precio del bien 2. Las firmas eligen y_1 para maximizar $pk\left(-y_1\right)^{\frac{1}{4}}+y_1$. Resolviendo la condición de primer orden obtenemos: para la firma 1, $y_1=-p^{\frac{4}{3}}$ y $y_2=4^{\frac{4}{3}}\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; para la firma 2, $y_1=-\left(2p\right)^{\frac{4}{3}}$ y $y_2=16\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Para la parte siguiente, los beneficios son

$$\pi_1=p4^{\frac{4}{3}}\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-p^{\frac{4}{3}}=3p^{\frac{4}{3}} \text{ y } \pi_2=p16\left(\frac{p}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(2p\right)^{\frac{4}{3}}=6\sqrt[3]{2}p^{\frac{4}{3}}$$

29.B. La demanda del individuo 1 se encuentra eligiendo x_1 y x_2 para maximizar x_1x_2 sujeto a $x_1+px_2=1+3p^{\frac{4}{3}}$, que arroja

$$x_1\left(p\right)=\left(\frac{1+3p^{\frac{4}{3}}}{2},\frac{1+3p^{\frac{4}{3}}}{2p}\right).$$

En forma similar el individuo 2 elige x_1 y x_2 para maximizar $x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$ sujeto a su presupuesto, $x_1+px_2=1+6\sqrt[3]{2}p^{\frac{4}{3}}$, que arroja

$$x_2(p)=\left(\frac{1+6\sqrt[3]{2}p^{\frac{4}{3}}}{3},\frac{2+12\sqrt[3]{2}p^{\frac{4}{3}}}{3p}\right).$$

29.C. El equilibrio se encuentra igualando la oferta del bien 1 a la demanda del bien 1 (o lo mismo con el bien 2):

$$\frac{1+3p^{\frac{4}{3}}}{2}+\frac{1+6\sqrt[3]{2}p^{\frac{4}{3}}}{3}=2-p^{\frac{4}{3}}-(2p)^{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow p=0.24671$$

Ejercicio 30.A. La firma elige y_1 para maximizar $p2\sqrt{-y_1}+y_1$, cuya condicion de primer orden es

$$-p(-y_1)^{-\frac{1}{2}}+1=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1}{-y_1}\Leftrightarrow y_1=-p^2\Leftrightarrow y_2=2p\text{ y los beneficios son }\pi=p^2.$$

30.B. El individuo debe elegir x_1 y x_2 para maximizar x_1x_2 sujeto a $x_1+px_2=1+p^2$, lo que arroja

$$x(p)=\left(\frac{1+p^2}{2},\frac{1+p^2}{2p}\right).$$

30.C. Igualando $x_1=1+y_1$ obtenemos

$$\frac{1+p^2}{2}=1-p^2\Leftrightarrow p=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\quad y(p)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Ejercicio 117.A. La firma elige l para maximizar $p\kappa l^\beta-wl$, que arroja $\beta p\kappa l^{\beta-1}=w\Leftrightarrow l^*=\left(\frac{w}{p\kappa\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$ y los beneficios son

$$\pi=p\kappa\left(\frac{w}{p\kappa\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}-w\left(\frac{w}{p\kappa\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}=(p\kappa)^{\frac{1}{1-\beta}}w^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}-\beta^{\frac{1}{1-\beta}}\right).$$

El individuo entonces elige c y o para maximizar $c^\alpha o^{1-\alpha}$ sujeto a $pc+wo\leq\pi+w$, que de la fórmula de la Cobb-Douglas es $c=\alpha\frac{\pi+w}{p}$ y $o=(1-\alpha)\frac{\pi+w}{w}$ (ambas expresiones se pueden simplificar). Para encontrar el equilibrio, ponemos $o=1-l^*$ y obtenemos para $v=w/p$ y $z=v^{\frac{1}{\beta-1}}$

$$(1-\alpha)\frac{(p\kappa)^{\frac{1}{1-\beta}}w^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}-\beta^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+w}{w}=1-\left(\frac{w}{p\kappa\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\Leftrightarrow(1-\alpha)\left(\kappa^{\frac{1}{1-\beta}}\left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}-\beta^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+1\right)=1-\left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

y de ahí se despeja $\frac{w}{p}$.

Para el caso concreto de $\beta=\frac{1}{2},\kappa=1$ y $\alpha=\frac{1}{3}$, queda $l^*=\left(\frac{p}{2w}\right)^2$ y $\pi=p\frac{p}{2w}-w\left(\frac{p}{2w}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{p^2}{w}$. Las demandas óptimas son $c=\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{4}\frac{p^2}{w}+w}{p}=\frac{p^2+4w^2}{12pw}$ y $o=\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{4}\frac{p^2}{w}+w}{w}=\frac{p^2+4w^2}{6w^2}$. Si normalizamos el precio del bien a 1, obtenemos que el equilibrio se da cuando $o=1-l$ y eso es $\frac{1^2+4w^2}{6w^2}=1-\left(\frac{1}{2w}\right)^2\Leftrightarrow w=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ejercicio 118.A. Normalizamos el precio del bien 1 a 1 y llamamos p al precio del bien 2. Si $p>1$, la demanda del bien 1 será al menos $1+p>2$, que es lo que demanda el individuo 2; por lo tanto $p>1$ no puede ser un equilibrio. En forma similar $1>p$ no puede ser un equilibrio pues 2 demandaría $\frac{1+p}{p}>2$ del bien 2. El único equilibrio es con $p=1$, y la asignación de equilibrio es $(1,1)$.

Más mecánico: las demandas óptimas de 1 y 2 son

$$x_1(p)=\left(\frac{1+p}{2},\frac{1+p}{2p}\right)\text{ y }x_2(p)=\begin{cases}(1+p,0) & p>1\\ (s,2-s) & s\in[0,2]\text{ si }p=1\\ \left(0,\frac{1+p}{p}\right) & 1>p\end{cases}$$

y la demanda total del bien 1 es: $\frac{1+p}{2}+1+p=\frac{3}{2}p+\frac{3}{2}>2$ si $p>1$; $\frac{1+p}{2}+0<1<2$ si $p<1$. Por lo tanto el equilibrio es con $p=1$, y la asignación de equilibrio es $x_1(1)=(1,1)$, con $x_2(1)=(1,1)$ para que oferta sea igual a demanda.

118.B. Para encontrar las asignaciones Pareto Óptimas fijamos la utilidad del individuo 2 en u, y encontramos la asignación que maximiza la utilidad de 1. Elegir x_{11} y x_{12} para maximizar $x_{11}x_{12}$ sujeto a $2-x_{11}+2-x_{12}-x_{11}=u \Leftrightarrow x_{12}=4-2x_{11}-u$. Sustituyendo x_{12} en la función objetivo y tomando la condición de primer orden obtenemos

$$x_{11}(4-2x_{11}-u) \Rightarrow x_{11}^*=1-\frac{u}{4} \Rightarrow x_{12}^*=2-\frac{u}{2} \text{ y } x_{21}^*=1+\frac{u}{4} \Rightarrow x_{22}^*=\frac{u}{2}.$$

En el equilibrio, el individuo 1 obtiene 1 de utilidad y el 2 obtiene 1 también. Por lo tanto, si ponemos $u=1$, obtenemos $x_1^*=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ y $x_2^*=\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right)$ que arrojan utilidades de $u_1=\frac{3}{4}\frac{3}{2}=\frac{9}{8}>1$ y $u_2=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=1$. Obtenemos que la asignación de equilibrio no es Pareto Óptima.

118.C. Tenemos $T_1=T_2=t\frac{x_{11}+x_{21}}{2}$ y $x_{11}+x_{21}=2$, o $T_1=T_2=t$. Se puede hacer casi sin hacer cuentas, igual que en la Parte A. Normalizamos el precio del bien 1 a 1 y ponemos $p_2=p$. Por cada unidad del bien 1 que compran, deben pagar $1+t$, por lo que la demanda del individuo 1 de ambos bienes es $x_1=\left(\frac{1+p+T_1}{2(1+t)},\frac{1+p+T_1}{2p}\right)$. Para el individuo 2, si p es mayor que $1+t$, tendremos que la demanda total del bien 1 será $\frac{1+p+T_1}{2(1+t)}+\frac{1+p+T_2}{1+t}=\frac{1+p+t}{2(1+t)}+\frac{1+p+t}{1+t}>\frac{2+2t}{2(1+t)}+\frac{2+2t}{1+t}=3$; si p es menor que $1+t$, tendremos que la demanda total del bien 1 será $\frac{1+p+t}{2(1+t)}+0\leq 1$. Por lo tanto, $p=1+t$.

Con cuentas,

$$x_1(p)=\left(\frac{1+p+T_1}{2(1+t)},\frac{1+p+T_1}{2p}\right) \text{ y } x_2(p)=\begin{cases}\left(\frac{1+p+T_2}{1+t},0\right) & p>1+t\\ \left(s,\frac{2+2t}{1+t}-s\right) & s\in\left[0,\frac{2+2t}{1+t}\right] \text{ si } p=1+t\\ \left(0,\frac{1+p+T_2}{p}\right) & 1+t>p\end{cases}$$

El precio como función del impuesto se encuentra igualando oferta y demanda. Vemos que no puede haber un equilibrio con $p>1+t$ ya que tendríamos

$$\frac{1+p+T_1}{2(1+t)}+\frac{1+p+T_2}{1+t}=2 \Leftrightarrow \frac{1+p+t}{2(1+t)}+\frac{1+p+t}{1+t}=2 \Leftrightarrow p=\frac{1-2t}{3}\leq\frac{1}{3}$$

que es una contradicción. En forma similar, p no puede ser menor que $1+t$, ya que tendríamos

$$\frac{1+p+T_1}{2(1+t)}=2 \Leftrightarrow \frac{1+p+t}{2(1+t)}=2 \Leftrightarrow p=3(1+t).$$

Obtenemos entonces $p=1+t$, y la asignación de equilibrio es $x_1(t)=\left(\frac{2+2t}{2(1+t)},\frac{2+2t}{2(1+t)}\right)=(1,1)=x_2(t)$.

Lo curioso de este ejercicio es que el impuesto no arregla el problema de la externalidad, ya que el comportamiento del individuo 2 no se afecta con impuestos en equilibrio.

Ejercicio 119.A. Si $p_1=0$, las demandas de ambos individuos por el bien 1 son infinitas, y demandan 0 del bien 2 (el individuo 1 porque no tiene dinero, y el 2 porque no le interesa).

Si $p_1>0$, la demanda del individuo 2 es $x_2(p)=\left(\frac{2p_2}{p_1},0\right)$ y la demanda del individuo 1 sale de elegir x_{11},x_{12} para maximizar $x_{11}+\sqrt{x_{12}}$ sujeto a $p_1x_{11}+p_2x_{12}=2p_1$. Despejando de la restricción presupuestal obtenemos que debe elegir x_{12} para maximizar $2-\frac{p_2}{p_1}x_{12}+\sqrt{x_{12}}$. La condición de primer orden, si $x_{11}>0$ (o $2>\frac{p_2}{p_1}x_{12}$) es

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_{12}}} \Leftrightarrow x_{12}=\frac{p_1^2}{4p_2^2}$$

y eso implica $x_{11}=2-\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1^2}{4p_2^2}=2-\frac{p_1}{4p_2}$ (vemos que si $p_1=0$, esta demanda está mal pues dice que $x_{11}=2$, que sabemos que es incorrecto). Esto es mayor que 0 si y sólo si $8>\frac{p_1}{p_2}$, que con la normalización $p_2=1$ es $8>p_1$. Si $p_1\geq 8$, tenemos $x_{11}=0$ y $x_{12}=2p_1$.

Como debemos tener $x_{12} = 2$ para que alguien se consuma el bien 2, obtenemos $\frac{p_1^2}{4p_2^2} = 2 \Leftrightarrow p_1 = 2\sqrt{2}p_2$. Normalizando $p_2 = 1$ tendremos $p_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \approx (0.7, 0)$ y $x_1(p) = \left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{4}, 2\right) \approx (1.3, 2)$.
119.B. La demanda del individuo 2 es ahora $x_2(p) = (0, 2)$ mientras que la del individuo 1 es la misma: si $p_1 > 0$ (que lo usamos para encontrar la demanda del individuo 1) $x_1(p) = \left(2 - \frac{p_1}{4p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2}\right)$; si $p_1 = 0$, la demanda del individuo 1 por el bien 1 es infinita (y por tanto no puede haber equilibrio con $p_1 = 0$). Pero si $p_1 > 0$, $x_{11}(p) < 2$, y no hay equilibrio tampoco.
Ejercicio 123.A. La manera más fácil de hacer esto es decir: si las preferencias son monótonas, son localmente no saciables, y si son localmente no saciables, demostramos en clase y ejercicios que se cumple la ley de Walras. Para ver que son monótonas, alcanza con ver que para $y_1 > x_1$ y $y_2 > x_2$ $u_1(y) > u_1(x)$ y también $u_2(y) > u_2(x)$. Para ver eso, ponemos $u_1(y) = y_1^2 y_2 > x_1^2 y_2 > x_1^2 x_2 = u_1(x)$, y el caso de u_2 es similar y lo omitimos.
Ejercicio 123.B. Normalizando el precio del bien 1 a 1, sabemos que las demandas son

$$x_1(p) = \left(\frac{2(15+3p)}{3}, \frac{15+3p}{3p}\right) \text{ y } x_2(p) = \left(\frac{5+17p}{2}, \frac{5+17p}{2p}\right)$$

por lo que el equilibrio se da cuando $\frac{2(15+3p)}{3} + \frac{5+17p}{2} = 20 \Leftrightarrow p = \frac{5}{7}$. De ahí obtenemos $x_1(p) = \left(\frac{80}{7}, 8\right)$ y $x_2(p) = \left(\frac{60}{7}, 12\right)$.
Ejercicio 123.C. Fijamos la utilidad de 1 en $\overline{u}$ y maximizamos la utilidad de 2. Debo elegir x_1 y x_2 para maximizar $x_{21}x_{22}$ sujeto a $x_{11}^2 x_{12} = \overline{u}$ $x_{11} + x_{21} = 20$ y $x_{12} + x_{22} = 20$ (y todos los x positivos). Por lo tanto queda que debo maximizar $(20 - x_{11})(20 - x_{12}) + \lambda\left({x_{11}}^2 x_{12} - \overline{u}\right)$. Si tomo las condiciones de primer orden con respecto a x_{12} y x_{11} y despejo λ y sustituyo en la otra queda:

$$\left\{x_{22} = 2\lambda x_{11}x_{12} \text{ y } x_{21} = \lambda x_{11}^2\right\} \Rightarrow \frac{x_{22}}{x_{21}} = 2\frac{x_{12}}{x_{11}}$$

Luego, usando las restricciones de recursos, queda $\frac{20-x_{12}}{20-x_{11}} = 2\frac{x_{12}}{x_{11}}$ y si despejamos x_{12} como función de x_{11} queda $x_{12} = \frac{20x_{11}}{40-x_{11}}$.

Las asignaciones Pareto Optimas son aquellas en las cuales $x_{11} \in [0, 20]$, $x_{12} = \frac{20x_{11}}{40-x_{11}}$ y $x_{21} = 20 - x_{11}$ y $x_{22} = 20 - x_{12}$.
Ejercicio 123.D. Si la asignación propuesta fuera de equilibrio, tendría que ser Pareto Óptima, y vemos que cumple con las condiciones de la Parte C: $x_{12} = \frac{200}{40-10} = \frac{20}{3}$.

Hay dos formas de hacer este ejercicio. Podríamos averiguar el precio de la condición de tangencia en la asignación que nos dan, y con eso averiguar qué transferencia de dotaciones se precisa para ese vector de precios. La tasa marginal de sustitución para el individuo 2 es $\frac{10}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{4}$ que debe ser igual al ratio de precios $\frac{p_2}{p_1} = p$. Para que la demanda del individuo 2 sea $\left(10, \frac{40}{3}\right)$ a los precios dados, su dotación debe ser

$$\frac{20 - z + \frac{3}{4} * 17}{2} = 10 \Leftrightarrow z = \frac{51}{4} = 12.75.$$

Otra forma de hacerlo es resolver el equilibrio para todo z, y encontrar el z que hace que las asignaciones sean las propuestas. En ese caso las demandas son

$$x_1(p) = \left(\frac{2(z+p3)}{3}, \frac{z+p3}{3p}\right) \text{ y } x_2(p) = \left(\frac{20-z+p17}{2}, \frac{20-z+p17}{2p}\right)$$

y obtenemos $\frac{2(z+p3)}{3} + \frac{20-z+p17}{2} = 20 \Leftrightarrow p = \frac{20}{21} - \frac{1}{63}z$. Luego, sustituyendo en cualquiera de las 4 demandas, e igualando al dato de la letra, obtenemos z :

$$x_{21} = \frac{20 - z + p17}{2} = \frac{20 - z + \left(\frac{20}{21} - \frac{1}{63}z\right)17}{2} = 10 \Leftrightarrow z = \frac{51}{4}$$

(como antes). Debemos verificar que con este z las canastas son las de la letra, que se cumple. Y sólo para chequear, vemos que el precio es el mismo que por el otro método: $p = \frac{20}{21} - \frac{1}{63}\frac{51}{4} = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 121.A. Normalizamos $p_1 = 1$ y $p_2 = p$. Para cada vector de precios, la demanda del individuo 1 es

$$x_1(p) = \left(\frac{1+p}{2}, \frac{1+p}{2p}\right) \tag{57}$$

y la del individuo 2 es $x_2(p) = \{x : x_1 + px_2 \leq 1 + p\}$ (es decir, cualquier cosa le sirve). Por lo tanto, para cada p, alcanza con poner las demandas del individuo 2 para que los totales demandados sean 2 de cada bien:

$$x_{21} = 2 - \frac{1+p}{2} \quad \text{y} \quad x_{22} = 2 - \frac{1+p}{2p}. \tag{58}$$

Debemos tener cuidado que las cantidades demandadas por 1 sean menores que 2, para que las cantidades de 2 sean positivas. Eso arroja $\frac{1+p}{2} \leq 2 \Leftrightarrow p \leq 3$ y $\frac{1+p}{2p} \leq 2$, o $p \geq \frac{1}{3}$. Entonces los equilibrios son: cualquier $p \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ y las cantidades dadas en las ecuaciones (57) y (58).
121.B. Ningún equilibrio es Pareto óptimo, ya que la única asignación PO es aquella en la cual el individuo 1 se lleva todo.
121.C. Las preferencias de 2 no son localmente no saciables.
122.A. Para la firma 1, tenemos que para $p < 1$ no produce, y para $p > 1$ produce infinito, mientras que le da lo mismo hacer cualquier cosa si $p = 1$:

$$y_1(p) = \begin{cases} (0,0) & p < 1 \\ (-y, y), y \geq 0 & p = 1 \\ (-\infty, \infty) & p > 1 \end{cases}.$$

La firma 2 elige x para maximizar $p\sqrt{x} - x$, que arroja $y_2(p) = \left(-\frac{p^2}{4}, \frac{p}{2}\right)$.
122. Los individuos consumen todo su ingreso en el bien que les interesa. Como el individuo 1 es dueño de la firma 1, y tiene $1 - a$ unidades del bien 1 su demanda es

$$x_1(p) = \begin{cases} (1-a, 0) & p \leq 1 \\ (\infty, 0) & p > 1 \end{cases}.$$

El individuo 2, por su parte, tiene a unidades del bien 1, y unos beneficios de $\frac{p^2}{4}$, por lo que su demanda es $x_2(p) = \left(0, \frac{a}{p} + \frac{p}{4}\right)$.
122.C. Si $p > 1$, la firma 1 demandará infinito del bien 1, que no puede ser parte de un equilibrio. Si $p < 1$, la firma 1 está inactiva, por lo que el mercado del bien 1 se equilibra cuando

$$x_{11}(p) + x_{21}(p) = \omega_{11} + \omega_{21} + y_{21}(p) \Leftrightarrow 1 - a + 0 = 1 - \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow p = 2\sqrt{a}.$$

Por lo tanto, debemos tener que $a < \frac{1}{4}$ (para que se cumpla que $p < 1$).

Si $p = 1$, la firma 1 está activa, y el mercado se equilibra cuando

$$x_{11}(p) + x_{21}(p) = \omega_{11} + \omega_{21} + y_{11}(p) + y_{21}(p) \Leftrightarrow 1 - a + 0 = 1 - \frac{1}{4} + y_{11} \Leftrightarrow y_{11} = \frac{1}{4} - a.$$

Por lo tanto, para $a < \frac{1}{4}$, el equilibrio es

$$[p, x_1, x_2, y_1, y_2] = \left[\left(1, 2\sqrt{a}\right), (1-a, 0), \left(0, \sqrt{a}\right), (0,0), \left(-a, \sqrt{a}\right)\right].$$

Para $a \geq \frac{1}{4}$, el equilibrio es

$$[p, x_1, x_2, y_1, y_2] = \left[(1,1), (1-a, 0), \left(0, a+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}-a, a-\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right].$$

Ejercicio 123.A. La manera más fácil de hacer esto es decir: si las preferencias son monótonas, son localmente no saciables, y si son localmente no saciables, demostramos en clase y ejercicios que se cumple la ley de Walras. Para ver que son monótonas, alcanza con ver que para $y_1 > x_1$ y $y_2 > x_2$ $u_1(y) > u_1(x)$ y también $u_2(y) > u_2(x)$. Para ver eso, ponemos $u_1(y) = y_1^2 y_2 > x_1^2 y_2 > x_1^2 x_2 = u_1(x)$, y el caso de u_2 es similar y lo omitimos.

Ejercicio 123.B. Normalizando el precio del bien 1 a 1, sabemos que las demandas son

$$x_1(p) = \left(\frac{2(15+3p)}{3}, \frac{15+3p}{3p}\right) \text{ y } x_2(p) = \left(\frac{5+17p}{2}, \frac{5+17p}{2p}\right)$$

por lo que el equilibrio se da cuando $\frac{2(15+3p)}{3} + \frac{5+17p}{2} = 20 \Leftrightarrow p = \frac{5}{7}$. De ahí obtenemos $x_1(p) = \left(\frac{80}{7}, 8\right)$ y $x_2(p) = \left(\frac{60}{7}, 12\right)$.

Ejercicio 123.C. Fijamos la utilidad de 1 en $\overline{u}$ y maximizamos la utilidad de 2. Debo elegir x_1 y x_2 para maximizar $x_{21}x_{22}$ sujeto a $x_{11}^2 x_{12} = \overline{u}$ $x_{11} + x_{21} = 20$ y $x_{12} + x_{22} = 20$ (y todos los x positivos). Por lo tanto queda que debo maximizar $(20 - x_{11})(20 - x_{12}) + \lambda\left({x_{11}}^2 x_{12} - \overline{u}\right)$. Si tomo las condiciones de primer orden con respecto a x_{12} y x_{11} y despejo λ y sustituyo en la otra queda:

$$\left\{x_{22} = 2\lambda x_{11}x_{12} \text{ y } x_{21} = \lambda x_{11}^2\right\} \Rightarrow \frac{x_{22}}{x_{21}} = 2\frac{x_{12}}{x_{11}}$$

Luego, usando las restricciones de recursos, queda $\frac{20-x_{12}}{20-x_{11}} = 2\frac{x_{12}}{x_{11}}$ y si despejamos x_{12} como función de x_{11} queda $x_{12} = \frac{20x_{11}}{40-x_{11}}$.

Las asignaciones Pareto Optimas son aquellas en las cuales $x_{11} \in [0, 20]$, $x_{12} = \frac{20x_{11}}{40-x_{11}}$ y $x_{21} = 20 - x_{11}$ y $x_{22} = 20 - x_{12}$.

Ejercicio 123.D. Si la asignación propuesta fuera de equilibrio, tendría que ser Pareto Óptima, y vemos que cumple con las condiciones de la Parte C: $x_{12} = \frac{200}{40-10} = \frac{20}{3}$.

Hay dos formas de hacer este ejercicio. Podríamos averiguar el precio de la condición de tangencia en la asignación que nos dan, y con eso averiguar qué transferencia de dotaciones se precisa para ese vector de precios. La tasa marginal de sustitución para el individuo 2 es $\frac{10}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{4}$ que debe ser igual al ratio de precios $\frac{p_2}{p_1} = p$. Para que la demanda del individuo 2 sea $\left(10, \frac{40}{3}\right)$ a los precios dados, su dotación debe ser

$$\frac{20 - z + \frac{3}{4} * 17}{2} = 10 \Leftrightarrow z = \frac{51}{4} = 12.75.$$

Otra forma de hacerlo es resolver el equilibrio para todo z, y encontrar el z que hace que las asignaciones sean las propuestas. En ese caso las demandas son

$$x_1(p) = \left(\frac{2(z+p3)}{3}, \frac{z+p3}{3p}\right) \text{ y } x_2(p) = \left(\frac{20-z+p17}{2}, \frac{20-z+p17}{2p}\right)$$

y obtenemos $\frac{2(z+p3)}{3} + \frac{20-z+p17}{2} = 20 \Leftrightarrow p = \frac{20}{21} - \frac{1}{63}z$. Luego, sustituyendo en cualquiera de las 4 demandas, e igualando al dato de la letra, obtenemos z :

$$x_{21} = \frac{20 - z + p17}{2} = \frac{20 - z + \left(\frac{20}{21} - \frac{1}{63}z\right)17}{2} = 10 \Leftrightarrow z = \frac{51}{4}$$

(como antes). Debemos verificar que con este z las canastas son las de la letra, que se cumple. Y sólo para chequear, vemos que el precio es el mismo que por el otro método: $p = \frac{20}{21} - \frac{1}{63}\frac{51}{4} = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 124.A. El ingreso de ambos individuos es $p_1 + p_2$ y por la fórmula de la Cobb-Douglas, las demandas son

$$x_1 = (p_1 + p_2)\left(\frac{1}{3}\frac{1}{p_1}, \frac{2}{3}\frac{1}{p_2}\right) \text{ y } x_2 = (p_1 + p_2)\left(\frac{2}{3}\frac{1}{p_1}, \frac{1}{3}\frac{1}{p_2}\right).$$

El equilibrio se da cuando $x_{11} + x_{21} = 2$, por lo que normalizando el precio del bien 1 a 1 (y llamando $p = p_2$) obtenemos

$$\frac{1+p}{3} + \frac{2+2p}{3} = 2 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), x_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

124.B. La respuesta obvia es que si, por el Primer Teorema del Bienestar. Sin embargo, las versiones que vimos en clase tenían firmas. En ese caso debemos modificar este problema, y agregar una firma con $Y_1 = -\mathbf{R}_+^2$ (que solo puede "destruir" bienes), y decir que como los beneficios serán 0, ya que la firma elegirá $y = (0,0)$, no importa la asignación de propiedad. En ese caso, el equilibrio competitivo es el mismo que el que acabamos de encontrar, y es Pareto Óptimo.

Otra forma de hacerlo es primera calcular la utilidad de los individuos en equilibrio son $u_1 = u_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$. Para encontrar las asignaciones Pareto Óptimas, debemos elegir x_1 y x_2 para maximizar $x_{11}x_{12}^2$ sujeto a $x_{11} + x_{21} = 2$, $x_{12} + x_{22} = 2$ y $x_{21}^2 x_{22} \geq \overline{u}$ para todos los valores posibles de u (entre 0 y 8). Claramente, la restricción de $\overline{u}$ estará activa (si $x_{21}^2 x_{22} > \overline{u}$, podría bajar los consumos del individuo 2 un poco y aumentar los de 1, y aumentaría el valor de la función objetivo). Entonces, de la restricción despejamos $x_{22} = \overline{u}/x_{21}^2$, por lo que en la restricción de recursos del bien 2 queda $x_{12} = 2 - \overline{u}/x_{21}^2$. De la restricción de recursos del bien 1 obtenemos $x_{11} = 2 - x_{21}$, por lo que la función objetivo es ahora

$$(2 - x_{21})\left(2 - \frac{\overline{u}}{x_{21}^2}\right)^2 \overset{\overline{u}=\frac{32}{27}}{\Rightarrow} x_{21} = \frac{4}{3}.$$

La cuenta para llegar a eso es complicada, si queremos despejar x_{21}. Sin embargo, se puede calcular la condición de primer orden, y verificar que se cumple para $x_{21} = \frac{4}{3}$.

Ejercicio 125. Llamamos a la firma que produce x la firma 1, y a la que produce y la firma 2. Debemos tener que la firma 1 demanda trabajo, por lo que $p_x \geq 1$ (aún si la firma 2 demanda todo el trabajo que es rentable, que son 120 unidades, la firma 1 aún debe demandar, porque si no queda trabajo ocioso). Por otro lado, no podemos tener $p_x > 1$, pues no habría equilibrio (la firma no tendría un vector óptimo de producción, ya que para cualquier producción, ganaría el doble si la duplicara). Deducimos $p_x = 1$.

Por otro lado, si $2 > p_y$, el individuo se gastará todo su ingreso en el bien 2, que arroja una demanda de $\frac{168}{p_y}$ de y (y 0 de x). Pero sabemos que eso es imposible pues la firma 1 tiene que producir (para que oferta y demanda de trabajo sean iguales). Resulta entonces que $p_y \geq 2$. Si $p_y > 2$, la firma 2 produce pero el individuo no demanda; deducimos entonces $p_y = 2$.

Con $p_y = 2$, el único y que maximiza beneficios es $y = 100$, y $t_y = -120$. El resto del trabajo debe usarse en la firma 1, por lo que $t_x = 48 = x$. A esos precios, cualquier canasta es óptima si cumple

$$p_x x + p_y y = w168 + \pi_1 + \pi_2 \Leftrightarrow x + 2y = 168 + 0 + (200 - 120),$$

y la canasta $x = 48$, $y = 100$ cumple con esa condición (y es la que iguala oferta y demanda en los mercados de bienes). Ese es el único equilibrio de esta economía.

Ejercicio 126.A. En las calculamos alguna vez la demanda para una CES (Constant Elasticity of Substitution), pero repetimos los cálculos en general para $u = (x_1^a + x_2^a)^{\frac{1}{a}}$. Supongamos que el individuo tiene ingreso I. En ese caso, $x_1 = \frac{I-p_2x_2}{p_1}$ y la función objetivo queda

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{I-p_2x_2}{p_1}\right)^a + x_2^a\right)^{\frac{1}{a}} &\Rightarrow \frac{1}{a}\left(\left(\frac{I-p_2x_2}{p_1}\right)^a + x_2^a\right)^{\frac{1}{a}-1}\left(x_1^{a-1}a\frac{-p_2}{p_1} + ax_2^{a-1}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1^{a-1}a\frac{-p_2}{p_1} + ax_2^{a-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x_2}{x_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{a-1}} \Rightarrow p_1x_1 + p_2x_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{a-1}} = I \Leftrightarrow \\ x_1(p,I) &= \frac{I}{p_1 + p_1^{\frac{1}{1-a}}p_2^{\frac{a}{a-1}}}, x_2(p,I) = \frac{I}{p_1^{\frac{a}{a-1}}p_2^{\frac{1}{1-a}} + p_2}.\end{aligned}$$

En esas ecuaciones debemos sustituir I por $p\omega_i$ para obtener el equilibrio (del mercado 1): (y poniendo luego $p = \frac{p_1}{p_2}$, con el bien 2 como numerario)

$$\begin{aligned}\frac{p\omega_1}{p_1 + p_1^{\frac{1}{1-a}}p_2^{\frac{a}{a-1}}} + \frac{p\omega_2}{p_1 + p_1^{\frac{1}{1-a}}p_2^{\frac{a}{a-1}}} &= \frac{p\omega_{11} + \omega_{12}}{p+p^2} + \frac{p\omega_{21} + \omega_{22}}{p+p^2} = \omega_{11} + \omega_{21} = \overline{\omega}_1 \Leftrightarrow \\ \frac{p\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2}{p+p^2} &= \overline{\omega}_1 \Leftrightarrow p + \frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1} = p + p^2 \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1}}.\end{aligned}$$

Entonces el precio de equilibrio depende sólo de la dotación agregada.

Un detalle es que el ejercicio se puede hacer tomando la utilidad $x_{i1}^{\frac{1}{2}} + x_{i2}^{\frac{1}{2}}$ que es una transformación monótona de la original. Es más fácil.

En cualquier asignación Pareto Óptima interior las tasas marginales de sustitución deben ser iguales entre todos los individuos (si dos curvas de indiferencia se cruzaran, nos podríamos mover hacia el "lente" que se forma en el medio y aumentar ambas utilidades).

La tasa marginal de sustitución para la CES es

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{\frac{1}{a}\left(x_1^a + x_2^a\right)^{\frac{1}{a}-1}ax_1^{a-1}}{\frac{1}{a}\left(x_1^a + x_2^a\right)^{\frac{1}{a}-1}ax_2^{a-1}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.$$

Debemos tener entonces para todo i,j $\sqrt{\frac{x_{i2}}{x_{i1}}} = \sqrt{\frac{x_{j2}}{x_{j1}}}$. Como el ratio $\frac{x_2}{x_1}$ no depende de i o j, lo llamamos r, y debemos tener $x_{i2} = rx_{i1}$. También,

$$\overline{\omega}_2 \equiv \sum \omega_{i2} = \sum x_{i2} = \sum rx_{i1} = r\sum x_{i1} = r\sum \omega_{i1} \equiv r\overline{\omega}_1 \Rightarrow r = \frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1}.$$

Entonces tenemos que las asignaciones Pareto Óptimas interiores son aquellas para las cuales tenemos $x_{i2} = \frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1}x_{i1}$ para todo i, y $x_{ij} > 0$ para todo i,j.

126.B. Las demandas de los $i \leq I-1$ son Cobb-Douglas comunes y corrientes, mientras que para el individuo I la demanda es la lineal típica

$$x_i(p,\omega_i) = \left(\frac{p\omega_i}{2p_1}, \frac{p\omega_i}{2p_2}\right) \text{ y } x_I(p,\omega_i) = \begin{cases} \left(\frac{p\omega_I}{p_1}, 0\right) & \frac{p_2}{p_1} > 2 \\ \left(x, \frac{p\omega_I - p_1x}{p_2}\right), x \in \left[0, \frac{p\omega_I}{p_1}\right] & \frac{p_2}{p_1} = 2 \\ \left(0, \frac{p\omega_I}{p_2}\right) & \frac{p_2}{p_1} < 2 \end{cases}.$$

Si $p = \frac{p_2}{p_1} > 2$, tendremos en el mercado 2

$$\begin{aligned}\sum^{I-1}\frac{p\omega_i}{2p_2} + 0 &= \sum^{I-1}\frac{p_1\omega_{i1} + p_2\omega_{i2}}{2p_2} = \sum^{I-1}\frac{\omega_{i1}}{2p} + \frac{\omega_{i2}}{2} = \sum^{I}\omega_{i2} \Leftrightarrow \\ \frac{\overline{\omega}_1 - \omega_{I1}}{p} &= \omega_{I2} + \overline{\omega}_2 \Leftrightarrow p = \frac{\overline{\omega}_1 - \omega_{I1}}{\omega_{I2} + \overline{\omega}_2}\end{aligned}$$

Esto debe ser mayor que 2;

$$\frac{\overline{\omega}_1-\omega_{I1}}{\omega_{I2}+\overline{\omega}_2}>2\Leftrightarrow\overline{\omega}_1-\omega_{I1}>2\left(\omega_{I2}+\overline{\omega}_2\right)\Leftrightarrow\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_2>\omega_{I1}+2\omega_{I2} \tag{59}$$

Si $p<2$, en el mercado 1 tenemos

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{I-1}\frac{p\omega_i}{2p_1}+0 &= \sum\nolimits^{I-1}\frac{p_1\omega_{i1}+p_2\omega_{i2}}{2p_1}=\frac{\overline{\omega}_1-\omega_{I1}}{2}+p\frac{\overline{\omega}_2-\omega_{I2}}{2}=\overline{\omega}_1\Leftrightarrow\\ p &= \frac{\overline{\omega}_1+\omega_{I1}}{\overline{\omega}_2-\omega_{I2}}\end{aligned}$$

que para que sea menor que 2 debe cumplir

$$\frac{\overline{\omega}_1+\omega_{I1}}{\overline{\omega}_2-\omega_{I2}}<2\Leftrightarrow\omega_{I1}+2\omega_{I2}<2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1. \tag{60}$$

Para $p=2$, quedan las demandas del individuo I como residuales:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{I-1}\frac{\omega_{i1}+2\omega_{i2}}{2}+x_{I1} &= \overline{\omega}_1\Leftrightarrow x_{I1}=\overline{\omega}_1-\frac{\overline{\omega}_{-I1}}{2}-\overline{\omega}_{-I2}\\ \sum\nolimits^{I-1}\frac{\omega_{i1}+2\omega_{i2}}{4}+x_{I2} &= \overline{\omega}_2\Leftrightarrow x_{I2}=\overline{\omega}_2-\frac{\overline{\omega}_{-I1}}{4}-\frac{\overline{\omega}_{-I2}}{2}\end{aligned}$$

y para que sea un equilibrio debemos tener $x_{Ii}\geq0$, que significa:

$$x_{I1} \geq 0\Leftrightarrow2\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_{-I1}-2\overline{\omega}_{-I2}\geq0\Leftrightarrow\omega_{I1}+\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_{-I2}-2\omega_{I2}+2\omega_{I2}\geq0\Leftrightarrow\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1 \tag{61}$$

$$x_{I2} \geq 0\Leftrightarrow\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_2 \tag{62}$$

Tenemos entonces que las ecuaciones 59 a 62 nos determinan cuál será el único equilibrio:

- Si $2\overline{\omega}_2\geq\overline{\omega}_1$
  1. y $\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1$ entonces $p=2$, y se cumple automáticamente que $\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq0\geq\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_2$ (y por tanto $x_{I1},x_{I2}\geq0$)
  2. y $\omega_{I1}+2\omega_{I2}<2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1$ entonces $p<2$.
- Si $2\overline{\omega}_2<\overline{\omega}_1$
  1. y $\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_2$ entonces $p=2$, y se cumple automáticamente $\omega_{I1}+2\omega_{I2}\geq0\geq2\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_1$.
  2. y $\omega_{I1}+2\omega_{I2}<\overline{\omega}_1-2\overline{\omega}_2$ entonces $p>2$.

Ejercicio 127. Normalizamos el precio del bien 1 a 1 y llamamos p al precio del bien 2. La demanda del individuo 1 es $x_1(p)=\left(\frac{1+p}{3},2\frac{1+p}{3p}\right)$, la del individuo 3 se encuentra poniendo $x_1=3x_2$ y $1+p=x_1+px_2$ que arroja $x_2=\frac{1+p}{3+p}$ y $x_1=3\frac{1+p}{3+p}$. En este caso la idea es sencilla: debe comprar tres unidades del bien 1 por cada unidad del bien 2; esas "canastas" tienen un costo de $3+p$, y compra todas las que puede (su ingreso $1+p$, dividido el costo de esa canasta). La demanda del individuo 2 es

$$x_2(p)=\begin{cases}\left(0,\frac{1+p}{p}\right) & \frac{1}{2}>p\\ \left(z,\frac{1+p-z}{p}\right),z\in[0,1+p] & \frac{1}{2}=p\\ (1+p,0) & \frac{1}{2}<p\end{cases}. \tag{63}$$

Supongamos primero que $\frac{1}{2} > p$. En ese caso, la demanda del bien 1 sería $\frac{1+p}{3} + 0 + 3\frac{1+p}{3+p}$, que igulada a la oferta de 3 tiene sólo una solución positiva $p = \sqrt{19} - 2$, que no puede ser pues es mayor a $\frac{1}{2}$. Por otro lado, si $p > \frac{1}{2}$, la demanda del bien 2 es $2\frac{1+p}{3p} + 0 + \frac{1+p}{3+p}$ y al igualar a la oferta de 3 obtenemos $2\frac{1+p}{3p} + 0 + \frac{1+p}{3+p} = 3$, que tiene sólo una solución positiva $p = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{11} - 2$ que es menor a $\frac{1}{2}$.

El equilibrio es entonces con $p = \frac{1}{2}$ y las demandas son $x_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $x_3 = \left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)$ y el individuo 2 consume los "restos": del bien 1 consume $x_{21} = 3 - \frac{1}{2} - \frac{9}{7} = \frac{17}{14}$ y del bien 2, $x_{22} = 3 - 2 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$. Verificamos que estas demandas son óptimas utilizando el renglón del medio de la demanda en (63): con $x_{21} = z = \frac{17}{14}$ obtenemos $x_{22} = \frac{1+\frac{1}{2}-\frac{17}{14}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$, como debe ser.

Ejercicio 128.A. Para cada individuo

$$\begin{aligned} x_i(p,\omega_i) &= \left(a_i \frac{p\omega_i}{p_1}, (1-a_i)\frac{p\omega_i}{p_2}\right) \Rightarrow z_i(p,\omega_i) = \left(a_i \frac{p\omega_i}{p_1}, (1-a_i)\frac{p\omega_i}{p_2}\right) - \omega_i \Rightarrow \\ Z(p,\omega_1,...,\omega_I) &= \left(\frac{p\sum_1^I a_i\omega_i}{p_1} - \overline{\omega}_1, \frac{p\sum_1^I (1-a_i)\omega_i}{p_2} - \overline{\omega}_2\right), \end{aligned}$$

por lo que el precio de equilibrio es el que hace que

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 &= p^* \textstyle\sum_1^I a_i\omega_i = (1, p_2^*)\sum_1^I a_i\omega_i = \sum_1^I a_i\omega_{i1} + p_2^*\sum_1^I a_i\omega_{i2} \Leftrightarrow \\ p_2^* &= \frac{\overline{\omega}_1 - \sum_1^I a_i\omega_{i1}}{\sum_1^I a_i\omega_{i2}}. \end{aligned}$$

128.B. Para este único individuo de la economía, tenemos

$$x(p,\overline{\omega}) = \left(a\frac{p\overline{\omega}}{p_1}, (1-a)\frac{p\overline{\omega}}{p_2}\right) \Rightarrow \overline{Z}(p,\overline{\omega}) = \left(a\frac{p\overline{\omega}}{p_1}, (1-a)\frac{p\overline{\omega}}{p_2}\right) - \overline{\omega}$$

por lo que el precio de equilibrio cumple

$$\overline{\omega}_1 = ap^{**}\overline{\omega} = a(1, p_2^{**})\overline{\omega} = a\overline{\omega}_1 + ap_2^{**}\overline{\omega}_2 \Leftrightarrow p_2^{**} = \frac{(1-a)\overline{\omega}_1}{a\overline{\omega}_2}.$$

Como a aparece sólo en p_2^{**}, al igualar $p_2^* = p_2^{**}$ podemos despejar a:

$$p_2^* = \frac{\overline{\omega}_1 - \sum_1^I a_i\omega_{i1}}{\sum_1^I a_i\omega_{i2}} = \frac{(1-a)\overline{\omega}_1}{a\overline{\omega}_2} = p_2^{**} \Leftrightarrow a\overline{\omega}_2 p_2^* = (1-a)\overline{\omega}_1 \Leftrightarrow a = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_1 + p_2^*\overline{\omega}_2}.$$

128.C. Para que las funciones sean iguales debemos tener que para todo p los excesos de demanda del bien 1 sean iguales

$$p\textstyle\sum_1^I a_i\omega_i = ap\overline{\omega}$$

que sólo puede suceder si $\sum_1^I a_i\omega_i = a\overline{\omega}$. Para cualquier a fijo, esa igualdad no tiene por qué cumplirse, y ese es el problema de imaginarnos que hay un solo individuo: puede haber efectos ingreso cuando transferimos dotaciones de un individuo a otro (la demanda agregada depende de efectos distributivos, y no sólo de la cantidad total de cada bien en la economía). Supongamos por ejemplo que hay sólo dos individuos en la economía, y que $a_1 = \frac{1}{3}$ mientras que $a_2 = \frac{2}{3}$; en el caso A, las dotaciones son $\omega_1^A = (1,1)$ y $\omega_2^A = (2,2)$, mientras que en el caso B las dotaciones son $\omega_1^B = (2,2)$ y $\omega_2^B = (1,1)$. Si las demandas agregadas fueran iguales (por ser $\overline{\omega}$ constante) tendríamos

$$a\overline{\omega} = \frac{1}{3}\omega_1^A + \frac{2}{3}\omega_2^A = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) \neq \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\omega_1^B + \frac{2}{3}\omega_2^B = a\overline{\omega}$$

lo que es una contradicción.

128.D. De la Parte A tenemos

$$\frac{dp_2^*}{d\omega_{i1}} = \frac{d\frac{\overline{\omega}_1 - \sum_1^I a_i\omega_{i1}}{\sum_1^I a_i\omega_{i2}}}{d\omega_{i1}} = \frac{1-a_i}{\sum_1^I a_i\omega_{i2}}.$$

y de la Parte B,

$$\frac{dp_2^{**}}{d\omega_{i1}} = \frac{d\frac{(1-a)\overline{\omega}_1}{a\overline{\omega}_2}}{d\omega_{i1}} = \frac{(1-a)}{a\overline{\omega}_2}$$

(eso dice que los efectos sobre p_2^* de agregarle algo de bien 1 al individuo i serán distintos que si se los damos al individuo j, mientras que eso no sucede si agregamos un poco de bien 1 en la economía con un solo individuo).

La parte siguiente nos pregunta "¿cómo tendría que cambiar a para que esos efectos sean iguales en las dos economías?":

$$\frac{da}{d\omega_{i1}} = \frac{d\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_1 + p_2^*\overline{\omega}_2}}{d\omega_{i1}} = \frac{\overline{\omega}_1 + p_2^*\overline{\omega}_2 - \left(1 + \frac{dp_2^*}{d\omega_{i1}}\overline{\omega}_2\right)\overline{\omega}_1}{\left(\overline{\omega}_1 + p_2^*\overline{\omega}_2\right)^2} = \frac{\overline{\omega}_2}{\left(\overline{\omega}_1 + p_2^*\overline{\omega}_2\right)^2}\left(p_2^* - \frac{dp_2^*}{d\omega_{i1}}\overline{\omega}_1\right).$$

Teoría de Juegos.

Un **juego en forma normal** es un triplete $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}_1^I, \{u_i\}_1^I\right]$ donde

- I es un conjunto finito de jugadores que normalmente llamaremos $I = \{1, 2, ..., I\}$.
- S_i es, para cada jugador i, un conjunto que llamaremos el conjunto de *estrategias*. Son las cosas que puede hacer el jugador i en el juego. Para $S = S_1 \times ... \times S_I$, a cada $s \in S$ lo llamaremos un *perfil* de estrategias: una estrategia para cada jugador.
- $u_i : S \to \mathbf{R}$ es la función de utilidad del jugador i. El número $u_i(s)$ es la utilidad que obtiene el jugador i cuando él juega s_i los demás (sus "oponentes") juegan $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_I)$.

Los juegos se utilizan para modelar situaciones que son de interés para el investigador. Por ejemplo, en 1964 fue asesinada en Queens, Nueva York, una chica llamada Kitty Genovese, mientras 38 personas miraban sin intentar evitarlo (la persona que la atacó estuvo más de media hora golpeándola, atacándola sexualmente y acuchillándola mientras la gente miraba y no llamaba a la policía, o intervenía). Esta situación resultó incomprensible para muchos hasta que un economista modeló la situación como un juego y observó que el resultado "natural" en el juego que había planteado era precisamente que nadie hiciera nada.

Por supuesto, una vez que nos planteamos un problema, o un juego, debemos decidir qué vamos a entender como el resultado "natural" de esa situación. Es decir que una vez que especificamos un grupo de jugadores, sus estrategias y sus utilidades, debemos preguntarnos "cómo actuaría un determinado grupo de gente si estuvieran en una situación como la que plantea mi juego". La terminología que se usa para "resultado natural" es *equilibrio*: debemos preguntarnos cuál es un concepto razonable de equilibrio; o lo que es lo mismo, debemos preguntarnos cuáles son las combinaciones de estrategias que tenderemos a observar.

En la profesión hay aún bastante desacuerdo sobre cuál es el resultado natural en cualquier juego que nos planteemos. Comenzaremos ahora por ver los conceptos de equilibrio menos disputados, o más aceptados.

Comenzaremos por definir el concepto de estrategia dominada: es una estrategia que le va peor que a otra, sin importar lo que hagan los demás. Definimos entonces $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_I$, el conjunto de todas las combinaciones de estrategias que pueden adoptar "los demás", cuando el jugador i está comparando sus estrategias. Es decir, $s_{-i} \in S_{-i}$ es una combinación de estrategias para los jugadores $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., I$. Una estrategia s_i para el jugador i es (débilmente) **dominada** si para algún $s_i' \in S_i$ sucede que

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$

y la desigualdad es estricta para algún perfil $s_{-i}' \in S_{-i}$. En este caso, decimos que s_i' **domina** a s_i. Es decir, una estrategia s_i es dominada si existe otra s_i' (la que la domina) a la cual le va mejor que a s_i *para cualquier combinación concebible* de las estrategias de los demás jugadores (y en algunos casos le va estrictamente mejor). Obviamente, una estrategia dominada no debería ser jugada nunca: para cualquier creencia que tengamos sobre lo que van a hacer los demás, siempre convendrá jugar s_i' y no s_i. Si pensamos que todos los demás participantes del juego son racionales, y por tanto no jugarán estrategias dominadas, podemos imaginarnos un juego en que de los espacios de estrategias se han eliminado las estrategias dominadas, y podemos ver si en este nuevo juego hay estrategias dominadas. Así, podemos seguir el proceso. Si todas las estrategias menos una se eliminaran en algún paso, el juego sería **soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas**. Veremos ahora un ejemplo de un juego sencillo (tomado del Mas-Colell, Whinston y Green) que es soluble mediante la eliminación iterada de estrategias dominadas.

Ejercicio 1. El hermando del fiscal. En las siguientes matrices están el dilema del prisionero "típico" y una variante llamada "el hermano del fiscal". En el dilema del prisionero, si ambos confiesan, van presos 5 años, si uno confiesa y el otro no, el que confesó recibe una pena muy chica, 1 año, y al otro lo guardan 10 años. Si ninguno confiesa, sólo los pueden acusar de algún delito menor, y están 2 años presos. En la variante "el hermano del fiscal", si ninguno confiesa, el fiscal puede liberar a su hermano, el jugador 1. En las matrices aparecen dos números en cada celda. El primero corresponde a la utilidad del jugador fila, y el segundo al del jugador columna. Además, habitualmente se representa al jugador 1 en las filas y al dos en las columnas.

	N	C
N	-2,-2	-10,-1
C	-1,-10	-5,-5

	N	C
N	0,-2	-10,-1
C	-1,-10	-5,-5

Parte A. En el Dilema del Prisionero, muestre que la estrategia N es dominada para ambos jugadores.

Parte B. Muestre que en el juego del Hermano del Fiscal, aunque N no es dominada para 1, el juego es soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas.

Ejemplo 2. Solución de Cournot por eliminación iterada de estrategias dominadas. En la versión sencilla del modelo de Cournot, hay dos firmas, con costos marginales c_1 y c_2. Cada una debe elegir un nivel de producción $q_i \in \mathbf{R}_+$, y enfrentan una demanda $p = a - b(q_1 + q_2)$. Así, los beneficios de la firma 1 son,

$$q_1 [a - b(q_1 + q_2) - c_1].$$

El juego en forma normal es

$$\Gamma_N = \left\{ \{1, 2\}, \{\mathbf{R}_+, q_i [a - b(q_1 + q_2) - c_i]\}_{i=1}^2 \right\}.$$

La mejor respuesta del jugador 1 a cualquier cantidad q_2 que se imagine que va a producir la firma 2 se encuentra resolviendo el problema de elegir q_1 para maximizar

$$q_1 [a - b(q_1 + q_2) - c_1]$$

De las condiciones de primer orden obtenemos

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a - bq_2 - c_1}{2b} & q_2 \leq \frac{a - c_1}{b} \\ 0 & q_2 > \frac{a - c_1}{b} \end{cases}$$

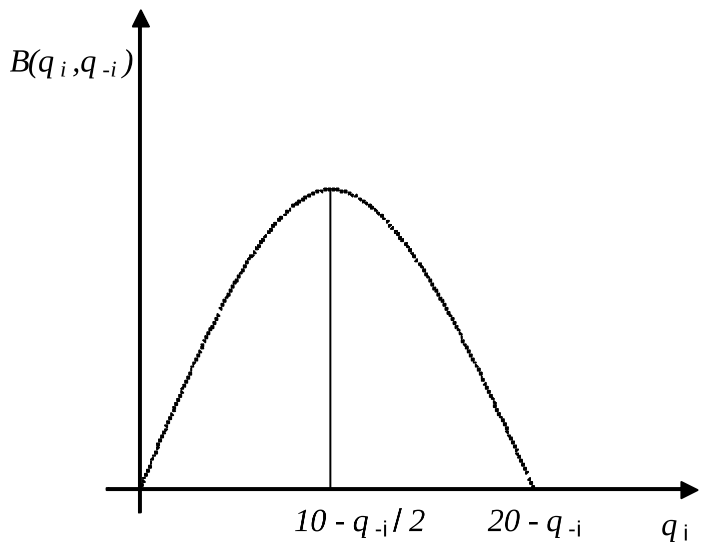
y los beneficios para la firma 1 son entonces $(a - bq_2 - c_1)^2 / 4b$. A la función $b_1(\cdot)$ se la llama **función de reacción**, o de mejor respuesta. En forma similar, obtenemos

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a - bq_1 - c_2}{2b} & q_1 \leq \frac{a - c_2}{b} \\ 0 & q_1 > \frac{a - c_2}{b} \end{cases}$$

Supongamos que la demanda viene dada por $20 - q_1 - q_2$ y que los costos marginales son 0. Lo más obvio, es que ninguno producirá cantidades mayores que 20. Pero mirando la función de reacción, o de mejor respuesta, uno ve que aún si el otro produjera 0, no sería óptimo producir más de 10. Probablemente, si más de 10 no es óptimo para 0, no sea óptimo para ninguna cantidad $q_{-i} > 0$ del oponente. Verificamos eso ahora: 10 da un beneficio de $10\,(10 - q_{-i})$ mientras que producir $q_i > 10$ arrojaría unos beneficios de $B\,(q_i, q_{-i}) = q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$, que es menor que $10\,(10 - q_{-i})$, pues para q_i mayor que 10 es decreciente y son iguales en $q_i = 10$. Esto se puede ver de la derivada de los beneficios

$$\frac{dB}{dq_i} = 20 - 2q_i - q_{-i} < 0 \quad \text{si} \quad q_i > 10.$$

También, de la gráfica de los beneficios,



vemos que si q_{-i} no será más chico que 0, $20 - q_{-i}$ no será más grande que 20, por lo que (la mitad, donde está el máximo) $10 - q_{-i}/2$ no será más grande que 10. Por lo tanto, $10 - q_{-i}/2$ queda a la izquierda de 10, y por lo tanto, si q_i es mayor que 10, como la pendiente es negativa, convendrá elegir siempre 10 y no q_i. Quizás haya algo mejor que 10, pero seguro que 10 le "gana" a q_i, que es la idea de dominancia ¿Por qué elegimos 10 como la cantidad que "domina"? Porque 10 es la mejor respuesta a que el otro produzca 0.

Sabiendo que ninguno de los dos va a producir más que 10, las cantidades q_i menores que 5 están dominadas por 5, pues 5 arroja unos beneficios de $5\,(15 - q_{-i})$ mientras que producir $q_i < 5$ arroja $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ que para q_i entre 0 y 5 y $q_{-1} < 10$, es creciente, y son iguales en $q_i = 5$. ¿Por qué elegimos 5 como la cantidad que "domina"? Porque 5 es la mejor respuesta a que el otro produzca 10.

Sabiendo que ninguno de los dos va a elegir cantidades afuera de $[5, 10]$, cantidades mayores que $7.5 = \frac{15}{2}$ están dominadas por $\frac{15}{2}$, pues esto arroja beneficios de $\frac{15}{2}\left(\frac{25}{2} - q_{-i}\right)$ y producir $q_i > \frac{15}{2}$ arroja $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ que es decreciente para $q_i > \frac{15}{2}$ cuando $q_{-i} > 5$. ¿Por qué elegimos $\frac{15}{2}$ como la cantidad que "domina"? Porque $\frac{15}{2}$ es la mejor respuesta a que el otro produzca 5.

Si el otro no va a producir más de $\frac{15}{2}$, cantidades menores a $\frac{25}{4}$ están dominadas pues $q_i\,(20 - q_i - q_{-i})$ es creciente para $q_{-i} < \frac{15}{2}$ y $q_i < \frac{25}{4}$.

Continuando de esta manera, tenemos que los límites superior e inferior del intervalo van evolucionando como muestra la siguiente tabla (de cada número, ponemos en diagonal hacia abajo su mejor respuesta)

$$\begin{array}{cc}
0 & 10 \\
5 & 10 \\
5 & \frac{15}{2} \\
\frac{25}{4} & \frac{15}{2} \\
\frac{25}{4} & \frac{55}{8} \\
\frac{105}{16} & \frac{55}{8} \\
\frac{105}{16} & \frac{215}{32}
\end{array}$$

Los números siguen la siguiente progresión

$$f(n) = 10\left(\sum_{t=0}^{t=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} 5$$

que converge, por supuesto, a

$$\frac{10}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{20}{3}.$$

Vemos entonces que si los empresarios son racionales, no jugarán más de 10. Si los empresarios saben que el otro es racional, no jugarán menos de 5. Si los empresarios saben que el otro sabe él es racional, no jugarán más de 15/2. Continuando de esa manera, vemos que el la única cantidad que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas es 20/3 (que es el equilibrio de Cournot que ya han visto en otros cursos). ■

Ejercicio 3. Este juego se utiliza algunas veces para mostrar que la eliminación iterada de estrategias dominadas no es una buena predicción de juego. En particular, sucede que cuando se juega este juego, lo que se observa es que la gente no juega la única estrategia que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas. Considere el siguiente juego. Hay 10 jugadores, y el espacio de estrategias de cada uno es $S_i = [0, 100]$. El jugador que nombra el número más cercano a 1/2 del promedio de los números nombrados por todos se gana 1 peso. Es decir, si para cada perfil de estrategias s definimos

$$\overline{s} = \frac{\sum s_i}{10}$$

y la distancia de cada estrategia s_i a $\overline{s}/2$ como

$$d_i(s) = \left|\frac{\overline{s}}{2} - s_i\right|$$

la utilidad de cada jugador para un perfil de estrategias s es

$$u_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_i(s) = \min_j d_j(s) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Parte A. Encuentre las estrategias dominadas en este juego.

Parte B. Encuentre las estrategias que son dominadas una vez que se eliminaron las estrategias dominadas para todos los jugadores. Es decir, encuentre las estrategias que son dominadas si se sabe que los demás jugadores no jugarán una estrategia dominada.

Parte C. Demuestre que si, repitiendo los pasos anteriores n veces, se sabe que nadie jugará ningún número mayor que $100/2^{n-1}$, entonces las estrategias entre $100/2^{n-1}$ y $100/2^{n}$ están dominadas.

Parte D. Demuestre que el único perfil que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas es aquél en el cual todos juegan 0.

Aunque es difícil argumentar en contra de la eliminación iterada (desde un punto de vista lógico al menos), sucede que en la mayoría de los juegos de interés no hay estrategias dominadas. Por lo tanto, el concepto de equilibrio "se jugará algún perfil de estrategias que sobreviva la eliminación iterada de estrategias dominadas" no es muy útil: en la mayoría de los casos no elimina ninguna estrategia. Es decir, en muchos casos no arroja predicciones concretas (hay multiplicidad de equilibrios).

La gran contribución de John Nash a la teoría de juegos fue "inventar" un concepto de equilibrio que es "razonable" y que arroja una predicción concreta en una gran variedad de contextos. Un perfil de estrategias $s \in S = S_1 \times ... \times S_I$ es un **equilibrio de Nash** en el juego $\Gamma_N = \left[I, \{S_i\}_1^I, \{u_i\}_1^I\right]$ si para todo i,

$$u_i(s) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para todo } s_i' \in S_i.$$

Es decir, un perfil de estrategias s es un equilibrio de Nash si, suponiendo que los demás van a jugar $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_I)$, el jugador i maximiza su utilidad jugando s_i. Visto de otra forma, un perfil s es un equilibrio de Nash si no hay ningún jugador i que quiera desviarse de s_i, dado lo que están haciendo los demás: no existe i tal que para algún s_i', $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$.

El siguiente ejercicio muestra que siempre que la eliminación iterada de estrategias dominadas arroja una predicción única (el "mejor de los mundos" para alguien que desee utilizar ese concepto de equilibrio), esa predicción también será un equilibrio de Nash. Es decir, siempre que la eliminación iterada "sirve", también sirve el equilibrio de Nash.

Ejercicio 4. Demuestre que si en un juego (con una cantidad finita de estrategias) hay un único perfil de estrategias que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas (es decir, el juego es soluble por eliminación iterada de estrategias dominadas) entonces ese perfil de estrategias es un equilibrio de Nash.

Ejercicio 5. Los jugadores Juan e Inés van a jugar un juego. La naturaleza ha elegido con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una de las siguientes matrices de pagos

		Ines	
		I	D
Juan	A	11,-1	1,1
	B	-1,11	1,1

		Ines	
		I	D
Juan	A	-1,11	1,1
	B	11,-1	1,1

Parte A ¿Cuáles son los equilibrios de cada una de las matrices de pagos?

Parte B Escriba la matriz de pagos que resulta si nadie sabe cuál es la matriz elegida por la naturaleza. Encuentre el o los equilibrios de Nash para esa matriz de pagos.

Parte C Si a Juan se le diera la opción de ver cuál matriz ha sido elegida (y que Inés sepa si Juan observó eso) ¿Debería Juan averiguar qué matriz ha sido elegida?

Problem 3.A Consider the following game. What is the equilibrium payoff of player I?

		II	
		Left	Right
I	Top	0 , 1	2 , 2

Part B. Consider now the following game, in which Player I has more options (more choices, more strategies, more possibilities). What is the equilibrium payoff of Player I? Is it larger or smaller than in Part A?

		II	
		Left	Right
I	Top	0 , 1	2 , 2
	Bottom	1 , 2	3 , -1

Part C. Could the reversal between Parts A and B happen when there is only one decision maker (i.e. can more choices make you worse off in a single agent decision problem?)

Part D. Discribe (in no more than 5 lines) a situation in which a monopolist would be better off if he had less options.

Ejemplo 6. El equilibrio de Nash en el juego de Cournot. Para encontrar el equilibrio de Nash en este juego, debemos encontrar un par (q_1, q_2) tal que q_1 sea la mejor respuesta a q_2, y q_2 sea la mejor respuesta a q_1. Es decir, $(q_1, q_2) = [b_1(q_2), b_2(q_1)]$, o, lo que es lo mismo,

$$(q_1, q_2) = [b_1(b_2(q_1)), b_2(b_1(q_2))].$$

Por lo tanto, poniendo

$$q_1 = \frac{1}{2}\frac{a - b\frac{1}{2}\frac{a-bq_1-c_2}{b} - c_1}{b}$$

y operando obtenemos $q_1 = (a + c_2 - 2c_1)/3b$. En forma similar, $q_2 = (a + c_1 - 2c_2)/3b$. Cuando crece el costo marginal de la firma 1, la cantidad producida en equilibrio de la firma 1 se reduce, y la de la firma 2 aumenta (no es que eso sea muy importante). Los beneficios de la firma 1 en equilibrio son $(a - 2c_1 + c_2)^2/9b$. ■

Ejercicio 129 Variante del modelo de Becker de regulación. Hay dos grupos de presión que tratan de influir sobre el gobierno para que regule la economía en su favor. La presión se mide en cantidad de dinero gastada en hacer lobby. Juegan el siguiente juego: $I = \{1, 2\}$ es el conjunto de jugadores; $S_i = \mathbf{R}_+$ es el espacio de estrategias para los individuos $i = 1, 2$; y si los individuos ejercen presiones $(p_1, p_2) \in S_1 \times S_2$, las utilidades son

$$\begin{aligned} u_1(p_1, p_2) &= I(p_1, p_2) - ap_1 \\ u_2(p_1, p_2) &= I(p_2, p_1) - bp_2 \end{aligned}$$

donde $I(x, y) = \log(2x - y)$ es la influencia que tiene el grupo que invirtió x.

Parte A. Encuentre la funciones de reacción para los grupos, y grafíquelas para $a = b = 1$.
Parte B. Encuentre el equilibrio de Nash de este juego. Le quedará como función de a y b.
Parte C. ¿Qué pasa con los p de equilibrio cuando suben a o b? Muéstrelo usando los p de equilibrio, y grafique las funciones de reacción para los casos $a = b = 1$ y $a = b = 2$.

Ejercicio 130 Tres individuos $I = \{1, 2, 3\}$ deben votar por uno de dos candidatos, A o B. El candidato con más votos gana. El candidato A le da una utilidad de 1 a los votantes 1 y 2, y 0 al 3; el candidato B le da una utilidad de 0 a los votantes 1 y 2 y 1 al 3.

Parte A. Escriba este juego en forma normal.
Parte B. Encuentre todos los equilibrios de este juego.
Parte C. Recuerde que una estrategia s_i para el jugador i es (débilmente) **dominada** si para algún $s_i' \in S_i$ sucede que

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_{-i} \in S_{-i}$$

y la desigualdad es estricta para algún perfil $s_{-i}' \in S_{-i}$. Encuentre las estrategias dominadas para cada jugador.
Parte D. Si los jugadores sólo juegan estrategias que no están dominadas, ¿hay algún equilibrio en que salga electo B?

Ejercicio 7. Cada uno de I heladeros debe decidir en qué parte del intervalo $[0, 1]$ colocar su carrito. En cada punto x del intervalo, hay una densidad, o "cantidad", $f(x) > 0$ de individuos. Cada heladero le venderá a un individuo si y sólo si él es el heladero más cercano: cada individuo comprará un helado seguro, y se lo comprará al heladero que esté más cerca. Si k heladeros coinciden en su ubicación, cada uno se llevará $1/k$ de los consumidores que atraiga esa ubicación. Los heladeros quiere maximizar sus ganancias, y tienen un costo de 0 por cada helado.

Parte A. Escriba este juego en forma normal.

Parte B. Encuentre el único equilibrio cuando $I = 2$.

Parte C. Muestre que no hay equilibrio cuando $I = 3$.

Ejercicio 8. Remates. Un objeto será asignado a uno de I jugadores a cambio de un pago. La valuación, en términos monetarios, del objeto por parte del individuo i es v_i con $v_1 > v_2 > ... > v_I > 0$, con v_i conocidos. El mecanismo para asignar el objeto es un remate con sobre cerrado: los jugadores hacen ofertas (números mayores o iguales que 0) y el objeto es asignado al jugador con el "nombre" más chico, de entre los que presentaron la oferta más grande, y éste debe pagar un precio.

Parte A. Remate de Primer Precio. En este tipo de remate el ganador debe pagar el precio que ofreció. Escriba el remate de primer precio como un juego en forma normal.

Parte B. Muestre que en el remate de la Parte A, en cualquier equilibrio, el jugador 1 se lleva el objeto.

Parte C. Remate de Segundo Precio. En este tipo de remate el ganador debe pagar el precio más alto dentro de los que no se llevaron el objeto, de tal manera que si nadie ofreció el mismo precio que el ganador, el ganador paga el segundo precio más alto. Escriba el remate de segundo precio como un juego en forma normal.

Parte D. Muestre que en un remate de segundo precio hacer una oferta de v_i es una estrategia débilmente dominante para el jugador i : su utilidad cuando ofrece v_i es débilmente mayor que su utilidad cuando ofrece cualquier otra cosa, independientemente de las acciones de los demás, y en algunos casos es estrictamente mejor.

Parte E. Muestre que en el remate de segundo precio, para cada $i = 2, ..., I$ hay un equilibrio en el cual el jugador i gana el objeto.

Ejercicio 131 El gobierno quiere construir un puente entre dos ciudades A y B. El costo del puente para el gobierno es C, y si se construye el puente vale $v_A \geq 0$ para A y $v_B \geq 0$ para B. Asumimos que $v_A + v_B \geq C$, de tal manera que vale la pena construir el puente.

El gobierno no sabe cuánto vale el puente para cada ciudad (y típicamente querrán mentir para pagar menos). Por lo tanto el gobierno anuncia que cada ciudad debe ofrecer una suma de dinero para pagar; la ciudad i ofrece s_i. Si $s_A +\ s_B \geq C$, el puente se construye, y A paga $C - s_B$ (si $s_B \leq C$, o 0 en otro caso) mientras que B paga $C - s_A$ (si $s_A \leq C$, o 0 en otro caso). Si $s_A + s_B < C$, el puente no se construye. La utilidad para una ciuadad es el valor del puente para ella, menos el pago que haga, si se hace el puente, o 0 de lo contrario.

Parte A. Escriba el juego en forma normal.
Parte B. Encuentre una estrategia dominante (y muestre que es dominante).

Ejercicio 9. Fudenberg y Tirole. Considere los siguientes juegos.

s_1 \ s_2	I	D
A	1,3	4,1
B	0,2	3,4

s_1 \ s_2	I	D
A	-1,3	2,1
B	0,2	3,4

Parte A. Demuestre que el panel de la izquierda se puede resolver por eliminación iterada de estrategias dominadas, y encuentre el único equilibrio. ¿Qué utilidad recibe el jugador 1 en equilibrio?

Parte B. Muestre que el juego en el panel de la derecha (en el cual hemos reducido las utilidades para el jugador 1 de jugar A) también se puede resolver por eliminación iterada de estrategias dominadas. Encuentre el único equilibrio de este juego. ¿Qué utilidad recibe el jugador 1 en equilibrio? Explique por qué una reducción en la utilidad de jugar A beneficia al jugador 1.

Ejercicio 10. Sea $I = \{1, 2\}$ el conjunto de jugadores; $S_i = \mathbf{R}_+$ para $i = 1, 2$ los conjuntos de estrategias y para $k > 1$,

$$u_1(s) = k \log(e_1 + e_2) - e_1 \quad \text{y} \quad u_2(s) = \log(e_1 + e_2) - e_2,$$

para $e_i \in S_i$, las funciones de utilidad. El juego representa la situación de dos jugadores que alquilan un apartamento, y deben usar su esfuerzo para limpiar. La higiene del apartamento es el logaritmo de la suma de los esfuerzos, y a cada jugador le disgusta limpiar. Al jugador 1 le importa más la higiene que al jugador 2.

Parte A. Encuentre las funciones de reacción de ambos jugadores. Tenga cuidado con las esquinas. En particular, ¿cuál es la mejor respuesta de, por ejemplo, el jugador 2 si el jugador 1 decide poner muchísimo esfuerzo en limpiar?

Parte B. Dibuje en el mismo par de ejes ambas curvas de reacción, y encuentre el equilibrio gráficamente.

Parte C. Demuestre que el equilibrio encontrado es único.

Ejercicio 11. Sean: $I = \{1, ..., n\}$ un conjunto de jugadores; $S_i = \mathbf{R}_+$ para $i = 1, ..., n$ los conjuntos de estrategias y

$$u_i(s) = 2\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\right) + \beta\left(\prod_{j=1}^{n} s_j\right) - s_i^2$$

las funciones de utilidad. Recordamos que una estrategia s_i **domina estrictamente** a una estrategia $\widetilde{s}_i$ si para todo s_{-i} $u(s) > u(\widetilde{s}_i, s_{-i})$. Una estrategia s_i es estrictamente dominante si domina estrictamente a todas las demás estrategias $\widetilde{s}_i$.

Parte A. Suponga que $\beta = 0$, y encuentre la estrategia estrictamente dominante.

Parte B. Demuestre que la estrategia en la Parte A domina estrictamente a todas las demás.

Parte C. Demuestre que si $\beta > 0$ no existe una estrategia estrictamente dominante.

Ejercicio 12. Un equilibrio "estúpido". Considere el siguiente juego. Hay 2 jugadores, y el espacio de estrategias para cada uno es $S_i = [0, 100]$. Cada uno debe nombrar un número, y la utilidad de ambos es el producto de los dos números. Es decir, $u_i(s) = s_1 s_2$.

Parte A. Encuentre los dos equilibrios de este juego.

Parte B. Encuentre todas las estrategias que son dominadas. Si dice que alguna estrategia es dominada, demuestre su respuesta.

Parte C. Una estrategia s_i es **dominante** si domina a todas las $s_i' \in S_i$. ¿Hay alguna estrategia dominante? Demuestre su respuesta.

Parte D. Si asumimos que los jugadores jugarán un equilibrio, pero uno que nadie use estrategias dominadas, ¿Qué jugarán?

Ejercicio 13. Considere el modelo de Cournot con 2 jugadores, demanda $a - b(q_1 + q_2)$ y costos marginales iguales a c. Suponga que las firmas deciden coludirse y producir en iguales cantidades, de tal manera de maximizar los beneficios conjuntos (es decir, se transforman en un monopolista). Calcule el nivel de producto de monopolio (observe que es menor que el del equilibrio de Cournot). Suponga ahora que la firma 1 decide violar el acuerdo, y la 2 no. ¿Cuánto producirá la firma 1, y cuáles serán los beneficios de ambas firmas?

Ejercicio 14. El siguiente juego es una variante del juego de Cournot, con I jugadores

$$\Gamma_N = \left\{ \{1, 2, ..., I\}, \{\mathbf{R}_+\}_{i=1}^{I}, \left\{ q_i \left[a - b \left(\sum_{i=1}^{I} q_i \right) - c \right] \right\}_{i=1}^{I} \right\}.$$

Parte A. Encuentre las funciones de reacción (sea cuidadoso con las condiciones de segundo orden, y con la condición de borde $q_i = 0$).

Parte B. Encuentre el equilibrio de Nash.

Parte C. ¿Qué pasa con el precio de equilibrio cuando $I \to \infty$?

Ejercicio 132 Tragedia de los Comunes. Hay un campo al cual tienen acceso n granjeros, que pueden elegir el número de vacas que pueden poner en un predio común; el granjero i elige el número $v_i \in \mathbf{R}_+$ que desea poner en el predio; el número total de vacas es $V = \sum_1^n v_i$. Mantener cada vaca tiene un costo de c, y los Ingresos por cada vaca son $I(V)$, una función diferenciable y estrictamente decreciente del número de total de vacas en el predio.

Parte A. Encuentre el equilibrio de Nash (cuántas vacas elegirá cada granjero) cuando $I(V) = \frac{1}{V}$. Encuentre también el número total de vacas V^M (de "monopolio") que maximiza el beneficio de todos los granjeros en su conjunto (asuma que el ingreso total por 0 vacas es \$1, porque $1/V$ no está definido para $V = 0$). Muestre que el número de vacas en el equilibrio de Nash, V^N es estrictamente mayor que V^M, cuando $n \geq 2$.

Parte B. Encuentre la condición que debe cumplir cada v_i si no sabemos la forma funcional de I (sólo que es derivable, estrictamente decreciente, y cóncava) para que $\left(v_1^N, ..., v_n^N\right)$ sea un equilibrio de Nash (puede asumir que el óptimo es interior). Encuentre la condición que debe cumplir V^M para maximizar los beneficios de los granjeros en su conjunto. Muestre que $V^N > V^M$.

Ejercicio 133 Este es otro juego donde cada uno de los n agentes debe decidir si contribuir al bien público o no. El bien se provee si y sólo si al menos un individuo contribuye. El valor del bien es v_i para el individuo i, $v_i \sim U[0, 1]$. La utilidad del individuo es el valor del bien (si se provee) menos el costo de provisión, que es c si el individuo provee el bien y 0 en otro caso.

En este caso, una estrategia para cada jugador es una función de su tipo v_i a $\{si, no\}$. Un equilibrio es un perfil de estrategias tal que cada una es la mejor respuesta a la estrategia de los otros. Se puede mostrar que para que sea un equilibrio, cada tipo de cada jugador debe estar eligiendo en equilibrio la acción que maximiza su utilidad dada la estrategia de los otros (es decir, es decir, se maximiza "tipo por tipo"). Hallar el equilibrio simétrico de Nash de este juego. ¿Cómo varía la probabilidad de que el bien se provea con n? ¿Son estos resultados esperables? En caso afirmativo, explique. En caso contrario, indique a que pueden deberse los resultados obtenidos.

Existencia del equilibrio de Nash

Lo que aparece en estas notas es una versión ampliada de la demostración de existencia en el trabajo de Geanakoplos, "Nash and Walras Equilibrium via Brouwer," que pueden encontrar en

www.cowles.yale.edu

en la parte de los discussion papers.

Hasta ahora, en todos los ejemplos que hemos visto, siempre existía al menos un equilibrio de Nash. Puede suceder, sin embargo, que en un cierto juego no exista un equilibrio. El siguiente ejemplo, matching pennies, es uno de ellos.

Ejemplo 15. En este juego, dos jugadores deben apoyar al mismo tiempo una moneda en una mesa. Si coinciden en "ambas cara" o "ambas número", el jugador 1 se queda con las monedas (gana \$1). Si no coinciden, gana 2. Formalmente, el juego es: $I = \{1, 2\}$; estrategias $S_i = \{C, N\}$ $i = 1, 2$; utilidad de 1, $u_1(s, s) = -u_1(s, t) = 1$ para $s, t \in S_i$, $s \neq t$; utilidad de 2, $u_2 = -u_1$. En la siguiente matriz se representa el juego, y se han eliminado los pagos del jugador 2, pues son el opuesto de los de 1 :

		Jugador 2	
		Cara	Número
Jugador 1	Cara	1	-1
	Número	-1	1

Es bastante fácil ver que este juego no tiene un equilibrio: para cada perfil de estrategias (s_1, s_2), si $s_1 = s_2$, el jugador 2 quiere jugar su otra estrategia (es decir, no se cumple que $u_2(s) \geq u_2(s_1, t)$ donde $t \neq s_2$); si $s_1 \neq s_2$, el jugador 1 querrá cambiar su estrategia. ■

El ejemplo anterior muestra que vale la pena preguntarse si hay alguna clase general de juegos en los cuales uno pueda asegurar que existirá un equilibrio. En particular, muchas veces nos planteamos modelos, y nos interesa saber qué propiedades tiene el equilibrio. Por ejemplo, en el modelo de Cournot, queremos saber si un aumento en los costos aumenta el precio de equilibrio. Si no podemos calcular el equilibrio explícitamente, muchas veces podemos decir "si hay un equilibrio, cuando sube el costo, sube el precio". El problema es que podemos estar hablando sobre algo que no existe. Entonces lo que tenermos que hacer es asegurarnos que existe un equilibrio, y a ahí si, decir "en cualquier equilibrio, cada vez que suba el costo, subirá el precio".

Antes de pasar al enunciado y demostración del teorema de existencia del equilibrio de Nash, necesitamos algunas definiciones. Para $X \subseteq \mathbf{R}^m$ para algún m, diremos que X es **convexo** si para todo $x, y \in X$, y $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X$. Para una función $f : X \to \mathbf{R}$, donde X es un conjunto convexo, diremos que f es:

cóncava si para todo $x, y \in X$, y $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

estrictamente cóncava si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0, 1)$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

estrictamente convexa si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0, 1)$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

La siguiente es una propiedad útil para verificar la concavidad o convexidad de funciones. No la demostraremos.

Lema. Para $X \subseteq \mathbf{R}$, sea $f : X \to \mathbf{R}$ una función cuya derivada segunda existe para todo $x \in X$. La función f es cóncava si y sólo si $f"(x) \leq 0$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 16 Demostrar que si una función $g : S \to \mathbf{R}$, para S convexo y $S \subseteq \mathbf{R}^l$, es tal que $g(s) = u(s) - n(s)$ para una una función cóncava u y una función estrictamente convexa n, entonces g es estrictamente cóncava.

Ejercicio 17. Demostrar que si una función $g : S \to \mathbf{R}$, para S convexo y $S \subseteq \mathbf{R}^l$, es estrictamente cóncava, entonces existe a lo sumo un único s^* tal que

$$s^* = \arg\max_{s \in S} g(s).$$

Ejercicio 18. Demostrar que para $\overline{s} \in \mathbf{R}^l$ para algún l, $n(s) = \sum_1^l (s_j - \overline{s}_j)^2$ es estrictamente convexa.

Ejercicio 19. Demostrar que si S_i contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún l_i es cerrado, **acotado** (existe $c > 0$ tal que para todo $s_i \in S_i$ se cumple que $\|s_i\| < c$) y convexo para todo i, entonces $S = S_1 \times S_2 ... \times S_I$ es cerrado, acotado y convexo.

Para $f : X \to \mathbf{R}$ con $X \subseteq \mathbf{R}^l$ f es **continua** en $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tal que

$$\|x - x'\| < \delta_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Decimos que la función f es continua si es continua para todo x.

Ejercicio 20. Suponga que para $i = 1, 2, ..., I$, G_i es una función de $S = S_1 \times S_2 ... \times S_I$ en S_i, para S_i contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún l_i. Sea $G : S \to S$ definida por $G(s) = (G_1(s), G_2(s), ..., G_I(s))$.

Parte A. Muestre que para todo $x, y \in S$, $\|G(x) - G(y)\| = \sqrt{\|G_1(x) - G_1(y)\|^2 + ... + \|G_I(x) - G_I(y)\|^2}$.

Parte B. Usando la Parte A, muestre que si cada G_i es continua, entonces G es continua. La idea es sencilla: si se logra que cada $G_i(x)$ esté cerca de $G_i(y)$, entonces $G(x)$ estará cerca de $G(y)$.

Ejercicio 21. Mostrar que una función $f : X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq \mathbf{R}^l$ es continua en x si y sólo si para toda secuencia $\{x_n\}$ con $x_n \to x$, se cumple que $f(x_n) \to f(x)$ (Pista: cuando asuma que f no es continua en algún x para demostrar que existe una secuencia $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x$, pero no se cumple que $f(x_n) \to f(x)$, tome x_n tal que $\|x_n - x\| < \delta_n = 1/n$).

El siguiente teorema es un caso particular de lo que se llama el Teorema del Máximo.

Teorema del Máximo. Sean $X \subseteq \mathbf{R}^l$; $Y \subseteq \mathbf{R}^m$; $f : X \times Y \to \mathbf{R}$. Si f es continua y Y es cerrado y acotado,

$$h(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$$

es una función, y si para todo x,

$$G(x) = \{y \in Y : f(x, y) = h(x)\} = \arg\max_{y \in Y} f(x, y)$$

es una función, entonces es continua.

Prueba. Como toda función continua en un conjunto cerrado y acotado tiene un máximo, para cada x, $h(x)$ está bien definida (en el sentido que el máximo existe, y es un número, y no por ejemplo, ∞).

Demostraremos ahora que si G es una función, entonces es continua: que si $x_n \to x$, $G(x_n) \to G(x)$. Como Y es cerrado y acotado, existe una subsecuencia de $\{G(x_n)\}$ que converge a algún $y \in Y$. Por simplicidad, continuamos llamando $\{G(x_n)\}$ a dicha subsecuencia. Queremos demostrar que $y = G(x)$. Para ello, tomamos un $z \in Y$ cualquiera y vemos que por definición de G,

$$f(x_n, G(x_n)) \geq f(x_n, z). \tag{64}$$

Para demostrar que $y = G(x)$, debemos mostrar que $f(x,y) \geq f(x,z)$, por lo que supongamos que

$$f(x,y) < f(x,z)$$

para llegar a una contradicción (que $f(x,y) \geq f(x,z)$ es "obvio" intuitivamente, si tomamos límites en (64) y usamos la continuidad de f, pero lo vamos a hacer formalmente). Definamos

$$\varepsilon = \frac{f(x,z) - f(x,y)}{2} > 0.$$

Como f es continua, existen δ_y y δ_z tales que

$$\begin{gathered} d((x_n, G(x_n)), (x,y)) < \delta_y \Rightarrow |f(x_n, G(x_n)) - f(x,y)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n, G(x_n)) < f(x,y) + \varepsilon \\ d((x_n, z), (x,z)) < \delta_z \Rightarrow |f(x_n, z) - f(x,z)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n, z) > f(x,z) - \varepsilon \end{gathered}$$

Usando estas dos ecuaciones y la definición de ε, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_n, G(x_n)) &< f(x,y) + \frac{f(x,z) - f(x,y)}{2} = \frac{f(x,z) + f(x,y)}{2} \\ &= f(x,z) - \frac{f(x,z) - f(x,y)}{2} = f(x,z) - \varepsilon < f(x_n, z) \end{aligned}$$

lo que contradice la ecuación (64). Para completar la demostración, debemos mostrar que existen $(x_n, G(x_n))$ y (x_n, z) tales que $d((x_n, G(x_n)), (x,y)) < \delta_y$ y $d((x_n, z), (x,z)) < \delta_z$. Pero eso se deduce del hecho que $(x_n, G(x_n)) \to (x,y)$ y $(x_n, z) \to (x,z)$. ■

Ejemplo 22. Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y) = -y^2 + 2xy - 4$. En este ejemplo $X = Y = \mathbf{R}$. Para cada x, el y que maximiza f es $y = x$. Por lo tanto,

$$h(x) = \max_{y \in Y} f(x,y) = x^2 - 4.$$

Para cada x, el y que maximiza f es único, por lo que $G(x)$ es una función. El teorema del máximo nos dice que debe ser continua. En efecto, vemos que $G(x) = x$ es continua. ■

Ejercicio 23. Parte A. Sean $X = Y = [0,1]$ y $f(x,y) = -y^2 + xy$. Encuentre $G(x)$ (observe que es continua).

Parte B. Repita la Parte A para $f(x,y) = -\left(y + \frac{x}{y}\right)$.

Teorema de punto fijo de Brouwer. Sea $S \subseteq \mathbf{R}^n$ para algún n, un conjunto cerrado, acotado y convexo, y sea $G : S \to S$ una función continua. Entonces G tiene un punto fijo, es decir, existe un s tal que $G(s) = s$.

Para ver que cada uno de los supuestos cumple algún rol relevante vemos que si no pedimos que S sea cerrado, $f:(0,1)\rightarrow(0,1)$ definida por

$$f(x)=\frac{1+x}{2}$$

no tiene punto fijo. Si no pedimos que S sea acotado, tenemos que $f:\mathbf{R}_{+}\rightarrow\mathbf{R}_{+}$ definida por $f(x)=x+1$ tampoco tiene punto fijo. Si no requerimos que S sea convexo, vemos que $f:\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$ definida por $f(x)=1-x$ tampoco tiene punto fijo. Finalmente, si G es discontinua, tenemos que $G:[0,1]\rightarrow[0,1]$ definida por

$$G(x)=\begin{cases}1 & x\leq\frac{1}{2}\\ 0 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

tampoco tiene punto fijo.

Ahora enunciamos y demostramos el resultado principal de estas notas. Sea $\Gamma=\left[I,\{S_i,u_i\}_{i=1}^{I}\right]$ un juego entre I jugadores, en el cual S_i, el espacio de las estrategias para el jugador i, es un conjunto cerrado, acotado y convexo contenido en $\mathbf{R}^{l_i}$ para algún l_i. Asumamos también que u_i es continua para todo i. Diremos que Γ es un **juego cóncavo** si para todo i, y todo $s_{-i}\in S_{-i}=\Pi_{j\neq i}S_j$, $u_i(s_i,s_{-i})$ es cóncava en s_i : para todo $s_i,\widetilde{s}_i\in S_i$ y $\alpha\in[0,1]$ tenemos que

$$u_i(\alpha s_i+(1-\alpha)\widetilde{s}_i,s_{-i})\geq\alpha u_i(s_i,s_{-i})+(1-\alpha)u_i(\widetilde{s}_i,s_{-i}).$$

Teorema (Existencia del equilibrio de Nash). Todo juego cóncavo tiene un equilibrio de Nash.

Prueba. Definamos $G_i:S\rightarrow S_i$ mediante

$$G_i(\overline{s_1},\overline{s_2},...,\overline{s_I})=\arg\max_{s_i\in S_i}\left[u_i(s_i,\overline{s_{-i}})-\|s_i-\overline{s_i}\|^2\right],$$

donde $\|s\|^2=\sum_1^l s_j^2$ para $s\in\mathbf{R}^l$. Esta función nos da, para un perfil de estrategias $\overline{s}$, la "mejor respuesta" del jugador i. No es la mejor respuesta "en serio" porque a la utilidad se le resta un término de distancia entre la estrategia "candidata" s_i y aquella con la que "se empezó" $\overline{s_i}$. Es decir, se trata de mejorar la utilidad, pero sin moverse demasiado: se penalizan los movimientos del status quo $\overline{s_i}$.

Paso 1: demostrar que G_i es en efecto una función. Para ello debemos demostrar que para cada $\overline{s}$ existe un y sólo un s_i que maximiza $u_i(s_i,\overline{s_{-i}})-\|s_i-\overline{s_i}\|^2$. La existencia de al menos uno se deduce del hecho que $u_i(s_i,\overline{s_{-i}})-\|s_i-\overline{s_i}\|^2$ es una función continua de s_i, y que S_i es cerrado y acotado. Que es sólo uno se deduce del hecho que u_i es cóncava, y $\|s_i-\overline{s_i}\|^2$ es estrictamente convexa en s_i (ver ejercicios 16, 17 y 18).

Paso 2: demostrar que G_i es continua para todo i. Para hacer esto, usaremos el Teorema del Máximo. Tenemos que $u_i(s_i,\overline{s_{-i}})-\|s_i-\overline{s_i}\|^2$ es continua en $(s_i,\overline{s})$ (aca s_i es el equivalente de x en el Teorema del Máximo, y $\overline{s}$ el equivalente de y), y también que S es cerrado y acotado. También sabemos por el paso 1 que G_i es una función. Entonces, tenemos que G_i es continua.

Paso 3: demostrar que $G:S\rightarrow S$ definida por $G(s)=(G_1(s),G_2(s),...,G_I(s))$ tiene un punto fijo. Esto se deduce inmediatamente del Ejercicio 20 y del teorema de punto fijo de Brouwer, pues se cumplen todas sus hipótesis.

Paso 4: demostrar que si $\overline{s}$ es un punto fijo de G, entonces $\overline{s}$ es un equilibrio de Nash. Supongamos que no lo es, es decir, que existe algún i, y alguna estrategia s_i tal que $u_i(s_i,\overline{s}_{-i})>u_i(\overline{s})$. En ese caso tenemos que para todo $\varepsilon\in(0,1)$

$$\begin{aligned}u_i(\varepsilon s_i+(1-\varepsilon)\overline{s}_i,\overline{s}_{-i})-\|\varepsilon s_i+(1-\varepsilon)\overline{s}_i-\overline{s}_i\|^2 &\geq \varepsilon u_i(s_i,\overline{s}_{-i})+(1-\varepsilon)u_i(\overline{s}_i,\overline{s}_{-i})-\|\varepsilon s_i-\varepsilon\overline{s}_i\|^2\\ &= u_i(\overline{s}_i,\overline{s_{-i}})+\varepsilon[u_i(s_i,\overline{s}_{-i})-u_i(\overline{s}_i,\overline{s}_{-i})]-\varepsilon^2\|s_i-\overline{s}_i\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$\varepsilon < \frac{u_i(s_i, \overline{s}_{-i}) - u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i})}{\|s_i - \overline{s}_i\|^2}$$

obtenemos que

$$u_i(\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) - \|\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i - \overline{s}_i\|^2 > u_i(\overline{s}_i, \overline{s}_{-i}) = u_i(\overline{s_i}, \overline{s}_{-i}) - \|\overline{s_i} - \overline{s_i}\|^2 \tag{65}$$

lo que contradice que $\overline{s}$ es un punto fijo de G. Si lo fuera, tendríamos $G(\overline{s}) = \overline{s}$, y por tanto, $G_i(\overline{s}) = \overline{s}_i$, o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} G_i(\overline{s}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} \left[u_i(s_i, \overline{s_{-i}}) - \|s_i - \overline{s_i}\|^2 \right] = \overline{s}_i \Leftrightarrow \\ u_i(\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2 &\geq u_i(\widetilde{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\widetilde{s}_i - \overline{s_i}\|^2 \text{ para todo } \widetilde{s}_i \in S_i. \end{aligned}$$

En particular, debemos tener que para $\widetilde{s}_i = \varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i$

$$u_i(\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2 \geq u_i(\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i, \overline{s_{-i}}) - \|\varepsilon s_i + (1-\varepsilon)\overline{s}_i - \overline{s_i}\|^2$$

lo que contradice la ecuación (65). ■

La función G utilizada en la demostración del teorema es un sustituto de la "función" que se usa habitualmente para encontrar equilibrios, que es la "función" de mejor respuesta. Definimos

$$B_i(s) = \arg\max_{x \in S_i} u(x, s_{-i})$$

como el conjunto de las mejores respuestas de i cuando los demás juegan s_{-i}. Si para cada s_{-i} la mejor respuesta es única, B_i es una función. Si para algún s_{-i} hay dos estrategias para el jugador i que son óptimas, entonces B_i ya no es una función, sino una correspondencia. Las correspondencias le asignan a cada elemento de su dominio, un subconjunto del codominio. B_i es la **correspondencia de mejor respuesta**.

Definimos ahora la **correspondencia de mejor respuesta agregada** $B : S \rightrightarrows S$ (esa es la notación para una correspondencia) mediante

$$B(s) = (B_1(s), ..., B_I(s)).$$

La utilidad de esta correspondencia es que los los puntos fijos de esta correspondencia son los equilibrios de Nash del juego. Un punto fijo para una correspondencia es un s tal que $s \in B(s)$. En el caso particular de la correspondencia de mejor respuesta agregada, si s es un punto fijo, quiere decir que para cada i, s_i es una de las mejores respuestas cuando los demás juegan s_{-i}. Vemos entonces lo que decíamos antes: los puntos fijos de B son los equilibrios de Nash.

Otra forma útil de trabajar con las mejores respuestas es la siguiente. Asumamos que B_i es una función (y no una correspondencia). Si $B_1(B_2(s_1)) = s_1$, entonces $(s_1, B(s_1))$ es un equilibrio de Nash. Esto es lo que se hace en general para resolver el juego de Cournot. Se iguala la función de mejor respuesta del jugador 1 a q_1 y se sustituye la mejor respuesta del jugador 2 en el lugar de q_2. Despejando se encuentra q_1.

Ejercicio 24. Para los siguientes juegos

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left[\{1,2\}, \{\mathbf{R}_+, u_i(s_1, s_2) = s_1 s_2\}_1^2 \right] \\ \Gamma_2 &= \left[\{1,2\}, \{\mathbf{R}_{++}, u_i(s_1, s_2) = s_1 s_2\}_1^2 \right] \end{aligned}$$

determine:

Parte A. Si existe o no un equilibrio de Nash.

Parte B. Si se aplica el teorema de existencia de equilibrio visto en clase.

Ejercicio 25. Existencia de un equilibrio de Nash en un modelo de Cournot. Hay dos firmas, con costos marginales c. Cada una debe elegir un nivel de producción $q_i \in [0,1]$, y enfrentan una demanda continua $p(Q)$ tal que $p' < 0$ y $p'' < 0$, donde $Q = q_1 + q_2$. Los beneficios de la firma i son,

$$q_i \left[p\left(q_1 + q_2\right) - c \right].$$

El juego en forma normal es

$$\Gamma_N = \left\{ \{1,2\}, \{[0,1], q_i \left[p\left(q_1+q_2\right) - c \right]\}_{i=1}^{2} \right\}.$$

Demostrar que existe un equilibrio de Nash.

Ejercicio 26. Bertrand. Hay dos jugadores, con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = [0,10]$. Las funciones de utilidad son

$$u_i(s) = \begin{cases} s_i\left(20 - s_i\right) & s_i < s_j \\ \frac{1}{2} s_i \left(20 - s_i\right) & s_i = s_j \\ 0 & s_i > s_j \end{cases}.$$

Este juego corresponde a una situación en que las firmas eligen un precio (esa es su estrategia) y la firma que elige el precio menor enfrenta toda la demanda del mercado, que está dada por $q = 20 - p$ (y los costos marginales son 0).

Parte A. Muestre que $s_i = 0$ es una estrategia dominada.

Parte B. Muestre que ningún precio mayor que 0 es dominado.

Parte C. Encuentre el único equilibrio (encuentre un equilibrio y muestre que no hay ningún otro).

Ejercicio 27. Decimos que una estrategia s_i **domina débilmente** a otra s_i' si para cualquier combinación de las estrategias de los demás, a s_i le va débilmente mejor que a s_i': $u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. Una estrategia es **débilmente dominante** si domina débilmente a todas las demás estrategias s_i' del jugador i. Demuestre que si un jugador tiene dos estrategias débilmente dominantes s_i y s_i', para cualquier perfil s_{-i} de estrategias de los demás, $u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = u_i\left(s_i', s_{-i}\right)$.

Ejercicio 28. En una planta nuclear, para que haya un accidente, deben fallar una máquina (que falla con probabilidad p_m) y cada uno de n individuos. La probabilidad de que cada individuo falle, si invierte un esfuerzo de e, es $p = (1-e)^a$ para $a > 1$. La utilidad esperada del individuo i para un perfil de esfuerzos $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ es

$$u_i(e) = -p_m D \prod_{j=1}^{j=n} p\left(e_j\right) - e_i$$

donde D es el daño.

Parte A. Encuentre el único equilibrio simétrico (todos juegan lo mismo) de este juego.

Parte B. Muestre que cuando n sube, sube la probabilidad total de accidente en el equilibrio.

Ejercicio 29. Hay dos firmas, cada una puede elegir un nivel de producto $q \in \mathbf{R}_+$, la demanda viene dada por $p = 10 - q_1 - q_2$ y los costos son $c(q) = q^2$.

Parte A. Encuentre las funciones de reacción de las firmas.

Parte B. Encuentre el equilibrio de Nash.

Ejercicio 30. Hay 3 firmas, cada una puede elegir un nivel de producto $q \in \mathbf{R}_+$, la demanda viene dada por $p = 120 - 2Q$ y los costos son $c_i(q) = 10 + iq^2$.
Parte A. Encuentre las funciones de reacción de las firmas.

Parte B. Encuentre el equilibrio de Nash.

Ejercicio 31. Hay dos individuos $i = 1, 2$ que deben ejercer un nivel de esfuerzo $e_i \in \mathbf{R}_+$. El individuo no quiere esforzarse ni más ni menos que el otro (un cierto sentido de justicia), por lo que su utilidad contiene un término $-(e_1 - e_2)^2$. Por otro lado, el esfuerzo del otro hace más productivo mi esfuerzo, por lo que las utilidades también contienen el término $e_1 e_2$. Finalmente, hacer un esfuerzo e_i le cuesta e_i al individuo i. Por tanto las utilidades son $u_1(e_1, e_2) = e_1 e_2 - (e_1 - e_2)^2 - e_1$ y $u_2(e_1, e_2) = e_1 e_2 - (e_1 - e_2)^2 - e_{2.}$. Encuentre el equilibrio de Nash.

Ejercicio 134 Basado en el paper de Cornes del Quarterly Journal of Economics de 1993. Suponga que hay k individuos y que cada uno posee m unidades de un bien. El individuo debe distribuír sus unidades entre lo que consume y, y lo que dona q para un bien público. La cantidad total del bien público es $Q = \sum_1^k q_i$. La función de utilidad de cada individuo es $u(y, Q) = yQ$.

Parte A. Escribir este juego en forma normal.
Parte B. Encontrar el único equilibrio de Nash en que $q_i = q_j$ para todo i y j.
Parte C. Encuentre la única asignación Pareto Óptima. Esto es, hay que maximizar la utilidad del individuo 1, sujeto a la cantidad de bienes que hay en la economía, y que las utilidades de los otros individuos sean mayores o iguales que u_i.
Parte D. Muestre que el ratio entre la cantidad en el equilibrio de Nash, y la cantidad en la asignación Pareto Óptima decrece con el número de individuos (el problema de free riding se agrava cuando crece la población).

Ejercicio 135 Cada uno de dos vecinos debe elegir cuánto trabajar; un trabajo t_i le reporta un ingreso t_i al individuo i (el trabajo t_i puede ser cualquier número $t_i > 0$). El problema es que cuanto más plata tiene el vecino, menos la disfruta él. Tomando en cuenta el costo del esfuerzo (que es t_i^2), las utilidades son,

$$u_1(t_1, t_2) = \frac{2t_1}{t_2} - t_1^2 \quad \text{y} \quad u_1(t_1, t_2) = \frac{2t_2}{t_1} - t_2^2.$$

Encuentre el, o los, equilibrios de este juego.

Ejercicio 136 Este es un ejemplo de la tragedia de los comunes. Hay dos granjeros que pueden poner sus cabras en un terreno común. El granjero i elige el número de cabras g_i para poner en el terreno común. El valor de mercado de cada cabra es una función $v(g_1, g_2) = 120 - g_1 - g_2$ que depende del número de cabras en el terreno (cuantas más cabras, menos vale cada una pues puede comer menos). El costo de comprar g cabras para cada granjero es cg.

Parte A. Plantee el juego en forma normal.
Parte B. Encuentre el equilibrio de Nash.
Parte C. Encuentre el número óptimo de cabras que elegirían tener conjuntamente los dos granjeros para maximizar el valor de la suma de las cabras (menos el costo de adquirirlas). Compárelo con la cantidad total de cabras de la Parte B.
Parte D. Si hubiera tres granjeros, y el valor de las cabras fuera $v = 120 - g_1 - g_2 - g_3$, ¿cuál sería el equilibrio de Nash?

Ejercicio 137 Hay tres jugadores, $i = 1, 2, 3$. Cada uno elige su estrategia s_i del intervalo $S_i \subseteq \mathbf{R}$. Para una función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y otra $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, la función de utilidad del jugador i es $u_i(s) = s_i f(s_{-i}) + (1 - s_i) g(s)$. ¿Qué propiedades sobre S_i, f y g aseguran que existe un equilibrio de Nash?

Soluciones

Ejercicio 129. El individuo 1 debe elegir p_1 para maximizar $\log(2p_1 - p_2) - ap_1$, que arroja $\frac{2}{2p_1 - p_2} - a = 0 \Leftrightarrow p_1^*(p_2) = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{a}$. El individuo 2 debe elegir p_2 para maximizar $\log(2p_2 - p_1) - bp_2$, y queda $p_2^*(p_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{b}$. El equilibrio se da cuando $p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{a} \Leftrightarrow p_1^* = \frac{4}{3a} + \frac{2}{3b}$ y $p_2^* = \frac{4}{3b} + \frac{2}{3a}$.

Queremos ver cómo cambia el equilibrio cuando cambia uno solo de los costos de hacer lobby (el a representa cuánto se pierde en la actividad de hacer lobby). Vemos que cuando sube a el individuo 1 es menos agresivo (su función de reacción cae), y lo mismo para el individuo 2 cuando sube b.

Ejercicio 130.A. Los jugadores son $I = \{1,2,3\}$, $S_i = \{A, B\}$ y $u_1(s) = u_2(s) = 1 - u_3(s)$, con

$$u_1(s) = \begin{cases} 1 & s \in \{(A,A,A),(A,A,B),(A,B,A),(B,A,A)\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Otra forma de representar los pagos es, con (u_1, u_2, u_3) en cada celda,

$$\begin{array}{ccc} & \scriptstyle s_3=A & \\ & s_2 = A & s_2 = B \\ s_1 = A & 1,1,0 & 1,1,0 \\ s_1 = B & 1,1,0 & 0,0,1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} & \scriptstyle s_3=B & \\ & s_2 = A & s_2 = B \\ s_1 = A & 1,1,0 & 0,0,1 \\ s_1 = B & 0,0,1 & 0,0,1 \end{array}.$$

130.B. Los equilibrios son (A,A,A), (A,A,B) y (B,B,B): a nadie le va mejor desviándose (en los casos (A,A,A) y (B,B,B) porque no cambiaría nada, en el caso (A,A,B) porque 1 y 2 están jugando su mejor respuesta y 3 también). En los demás casos: si sale A electo, es porque 3 lo está votando y podría cambiar el resultado; si B sale electo, 1 o 2 podrían cambiar el resultado.

130.C, D. Para los jugadores 1 y 2 la estrategia B está dominada, mientras que para 3 la A está dominada:

$$\begin{aligned} u_1(A,A,B) &> u_1(B,A,B),\ u_1(A,B,A) > u_1(B,B,A),\ u_1(A,A,A) \geq u_1(B,A,A) \text{ y } u_1(A,B,B) \geq u_1(B,B,B) \\ u_3(A,A,B) &\geq u_3(A,A,A),\ u_3(A,B,B) > u_3(A,B,A),\ u_3(B,A,B) > u_3(B,A,A) \text{ y } u_3(B,B,B) \geq u_3(B,B,A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el único perfil de estrategias en que nadie juega estrategias dominadas es (A,A,B), es un equilibrio, y no se elige a B.

Ejercicio 134.A. El conjunto de individuos es $I = \{1,2,...,k\}$, y el espacio de estrategias es $S = [0,m]$, ya que los individuos eligen cuánto q donar en ese intervalo. Las utilidades son $u_i(s_1,...,s_k) = (m - s_i)\sum_1^k s_i$.

134.B. Volviendo a la notación de la letra del problema, el individuo debe elegir y, q_i para maximizar

$$y\left(\sum\nolimits_{j\neq i} q_j + q_i\right) \text{ sujeto a } y + q_i = m \Leftrightarrow \text{elegir } y \text{ para } \max y\left(\sum\nolimits_{j\neq i} q_j + m - y\right) \Leftrightarrow y = \frac{\sum_{j\neq i} q_j + m}{2}.$$

En el equilibrio simétrico $q_i = q$ para todo i, y por lo tanto $y = \frac{(k-1)q+m}{2}$. Si usamos esto en la restricción presupuestal queda

$$y + q = m \Leftrightarrow \frac{(k-1)q + m}{2} + q = m \Leftrightarrow q = \frac{m}{k+1} \Rightarrow Q^{Nash} = \frac{k}{k+1}m.$$

134.C. El "planificador" debe elegir $Q, \{y_i\}_1^k$ para maximizar $y_1 Q$ sujeto a $y_1 = km - \sum_2^k y_i - Q$ y que $y_i Q = u_i$ para $i = 2,...,k$. Queda entonces $y_1 = km - \sum \frac{u_i}{Q} - Q$ y por tanto hay que elegir Q para maximizar

$$y_1 Q = \left(km - \sum_2^k \frac{u_i}{Q} - Q\right) Q \Rightarrow Q^{Pareto} = \frac{km}{2}$$

134.D. Tenemos
$$\frac{Q^P}{Q^N}=\frac{\frac{km}{2}}{\frac{k}{k+1}m}=\frac{k+1}{2}$$
que crece con k.

Ejercicio 135. El individuo 1 debe elegir t_1 para maximizar $\frac{2t_1}{t_2}-t_1^2$, que tiene como condición de primer orden $t_1t_2=1$, que es la misma que la condición de primer orden del individuo 2. Por lo tanto, cualquier combinación (positiva) de t_1 y t_2 con $t_1t_2=1$ es un equilibrio. La interpretación es que si, por ejemplo, el $t_1=\frac{1}{10}$ y $t_2=10$, el 10 trabaja mucho, y eso hace que el esfuerzo de 1 no le sirva (a 1) para mucho, entonces se esfuerza poco, que hace que al 2 le rinda mucho (en utilidad) su dinero.

Ejercicio 4. Sea s el único perfil de estrategias que sobrevive la eliminación iterada de estrategias dominadas y supongamos que no es un equilibrio de Nash del juego original, y que por tanto existe algún jugador i que tiene una estrategia s_i' tal que
$$u_i\left(s_i',s_{-i}\right)>u_i\left(s_i,s_{-i}\right). \tag{66}$$
Como s_i' fue eliminada en algún paso por alguna estrategia s_i'', debíamos tener que para todas las estrategias de los contrarios que aún no habían sido eliminadas, s_{-i}'' (entre las que se hallaba s_{-i}) debíamos tener $u_i\left(s_i'',s_{-i}''\right)\geq u_i\left(s_i',s_{-i}''\right)$, y en particular $u_i\left(s_i'',s_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i',s_{-i}\right)$. Si $s_i=s_i''$, tenemos una contradicción con la ecuación (51), por lo que supongamos que $s_i''\neq s_i$, y que por lo tanto, s_i'' fue eliminada por alguna estrategia s_i^3 en algún paso siguiente. Es decir, para todas las estrategias de los contrarios que aún no habían sido eliminadas, s_{-i}^3 (entre las que se hallaba s_{-i}) debíamos tener $u_i\left(s_i^3,s_{-i}^3\right)\geq u_i\left(s_i'',s_{-i}^3\right)$, y en particular $u_i\left(s_i^3,s_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i'',s_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i',s_{-i}\right)$. Si $s_i^3=s_i$ obtenemos una contradicción con la ecuación (51), por lo que supongamos que $s_i^3\neq s_i$. Este proceso se termina en algún momento, pues hay una cantidad finita de estrategias. Por lo tanto, habrá algún n para el cual $s_i^n=s_i$ que eliminó a s_i^{n-1}, y para el cual se cumplía $u_i\left(s_i^n,s_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i^{n-1},s_{-i}\right)\geq u_i\left(s_i',s_{-i}\right)$. Como esto contradice la ecuación (51), se demuestra que s es un equilibrio de Nash.

Ejercicio 5.A. El equilibrio en la primera matriz es (A,D) y en la segunda (B,D).

5.B. Si Juan juega A e Inés I, con probabilidad $\frac{1}{2}$, Juan recibe 11, y con probabilidad $\frac{1}{2}$ recibe -1. Por tanto, si no se sabe qué matriz ha salido, la utilidad de Juan de jugar A cuando Inés juega I es 5. Procediendo de esa manera obtenemos que
$$\begin{aligned} u_J(A,I) &= u_J(B,I)=u_I(A,I)=u_I(B,I)=5\\ u_J(A,D) &= u_J(B,D)=u_I(A,D)=u_I(B,D)=1\end{aligned}$$
y los equilibrios son (A,I) y (B,I).

5.C. Si Juan observa qué matriz ha sido elegida, Inés piensa: si juego I, recibo -1 seguro, porque Juan elegirá A si fue la primera matriz, y B si fue la segunda; en cambio, si elijo D, recibo 1 seguro. Por lo tanto, Inés jugará D, y ambos recibirán 1. En cambio, si Juan no observa qué matriz ha sido elegida, ambos recibirán 5. Lo "raro" de este juego, es que Juan no quiere obtener información. La razón, es que obtener información en este caso, cambia el comportamiento estratégico de Inés.

Ejercicio 8.A. El conjunto de jugadores es $I=\{1,2,..,I\}$ y para cada uno, su conjunto de estrategias es $S_i=\mathbf{R}_+$. Las funciones de utilidad son
$$u_i(s)=\begin{cases} v_i-s_i & \text{si } \begin{cases} s_i>s_j\forall j\neq i\\ \text{o}\\ s_i=\max s_j \text{ e } i<j \text{ para todo } j \text{ con } s_i=s_j\end{cases}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

8.B. Supongamos que en algún equilibrio el objeto se lo lleva algún jugador $i \neq 1$. Para que eso sea un equilibrio, debemos tener $v_i \geq s_i$, ya que el jugador i siempre puede asegurarse una utilidad de 0. El jugador 1 podría ofrecer v_i, ganar el objeto y obtener una utilidad estrictamente positiva $v_1 - v_i$, lo que constituye una contradicción, ya que el jugador 1 estaba obteniendo en el "equilibrio" propuesto una utilidad de 0.

Algunas veces, al intentar resolver este ejercicio, la gente hace algún razonamiento y concluye "por lo tanto, en cualquier equilibrio debemos tener que para cada jugador j, $v_j \geq s_j$." Esto es falso. Hay un equilibrio en el cual $s_i = \frac{v_1+v_2}{2}$ para todo i.

8.C. El conjunto de jugadores es $I = \{1, 2, .., I\}$ y para cada uno, su conjunto de estrategias es $S_i = \mathbf{R}_+$. Definimos

$$\overline{s}_{-i} = \max_{j \neq i} s_j$$

como el máximo de las ofertas de "los otros" jugadores. Las funciones de utilidad son

$$u_i(s) = \begin{cases} v_i - \overline{s}_{-i} & \text{si } \begin{cases} s_i > s_j \forall j \neq i \\ \text{o} \\ s_i = \overline{s}_{-i} \text{ e } i < j \text{ para todo } j \text{ con } s_i = s_j \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8.D. Ofrecer v_i domina a s_i para $v_i > s_i$ pues si $\overline{s}_{-i} \geq v_i$ ó $s_i > \overline{s}_{-i}$, la utilidad de ambas ofertas es la misma (en el primer caso ambas ofertas pierden, en el segundo, ambas ganan y pagan $\overline{s}_{-i}$), mientras que si $v_i > \overline{s}_{-i} > s_i$, una oferta de v_i es estrictamente mejor que una de s_i pues gana el objeto y obtiene una utilidad estrictamente positiva, mientras que s_i lo perdería (ignoramos el caso en que $s_i = \overline{s}_{-i}$ pues no aclara nada y es complicado de analizar por el tema de los subíndices). En forma similar, ofrecer v_i domina a s_i para $s_i > v_i$ pues si $\overline{s}_{-i} > s_i$ ó $v_i > \overline{s}_{-i}$, la utilidad de ambas ofertas es 0, mientras que si $s_i > \overline{s}_{-i} > v_i$, una oferta de v_i es estrictamente mejor que una de s_i, pues con s_i se gana el objeto, pero se obtiene una utilidad estrictamente negativa, mientras que ofreciendo v_i se obtiene 0.

8.E. Para $G > v_1$ vemos que el perfil de estrategias en que $s_i = G$ y $s_j = 0$ para todo $j \neq i$ es un equilibrio.

Ejercicio 131.A. El conjunto de jugadores es $\{A, B\}$, y las estrategias son $S_A = S_B = \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$. Las utilidades son

$$u_A(s_A, s_B) = \begin{cases} v_A - \max\{C - s_B, 0\} & s_A + s_B \geq C \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \text{ y } u_B(s_A, s_B) = \begin{cases} v_B - \max\{C - s_A, 0\} & s_A + s_B \geq C \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

131.B. La estrategia dominante para i es ofrecer v_i. Analizamos el caso de A, el de B es similar y se omite. Si $C \leq s_B$, la utilidad de ofrecer v_A es la misma que la de ofrecer cualquier otro s_A (es v_A, pues se construye el puente y A no paga nada). Si $C - v_A \leq s_B < C$, ofrecer v_A lleva a la construcción del puente (pues $s_B + v_A \geq (C - v_A) + v_A = C$) y la utilidad es $v_A - (C - s_B) = s_B - (C - v_A) \geq 0$; elegir cualquier otro $s_A \neq v_A$ sólo cambia algo si no se hace el puente (siempre que se hace, paga lo mismo), y en ese caso la utilidad sería 0. Por lo tanto otra vez no hay nada mejor que ofrecer v_A. Si $s_B < C - v_A$, ofrecer v_A lleva a que no se construya, y da una utilidad de 0. Cualquier otra oferta que lleve a que no se construya también da 0 (y por tanto no es mejor que v_A), y si ofrece $s_A \geq C - s_B$ el puente se construye y la utilidad es $v_A - (C - s_B) < 0$.

Ejercicio 10.A. En el caso del jugador 1, si $e_2 \geq k$ la mejor respuesta es $b_1(e_2) = 0$. De otra manera, la mejor respuesta es $b_1(e_2) = k - e_2$. En forma similar, para el jugador 2 la mejor respuesta es la misma que la del jugador 1 reemplazando k por 1.

10.C. El único equilibrio es cuando $e = (k, 0)$. Para ver eso, notamos que no hay otro con $e_2 = 0$, ya que eso implica necesariamente que $e_1 = k$ (porque 1 juega su mejor respuesta). Por otra parte, si hubiera algún equilibrio con $e_1 = 0$, tendríamos (de la mejor respuesta de 2) que $e_2 = 1$, que implica a su vez $e_1 = k-1 > 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si hubiera otro equilibrio, tendría que ser con $e_1 > 0$ y $e_2 > 0$ y eso implica necesariamente que se cumplen las condiciones de primer orden con igualdad: $e_1 = k - e_2$ y $e_2 = 1 - e_1$. Sustituyendo obtenemos $k = 1$, lo que es una contradicción.

Ejercicio 11.A. Derivando e igualando a 0 obtenemos $s_i^D = 1$.

11.B. Sea s_i una estrategia cualquiera para el individuo i. Tenemos que para cualquier perfil de estrategias s_{-i} de los oponentes,

$$u_i\left(s_i^D, s_{-i}\right) = 2\left(s_i^D + \sum_{j\neq i} s_j\right) - s_i^{D2} = 2s_i^D + 2\sum_{j\neq i} s_j - s_i^{D2} > 2s_i + 2\sum_{j\neq i} s_j - s_i^2 = u_i(s)$$

para todo $s_i \neq s_i^D$ pues $2s_i^D - s_i^{D2} > 2s_i - s_i^2$.

11.C. Supongamos que s^D es la estrategia estrictamente dominante para todos los jugadores. La estrategia que maximiza la utilidad cuando $s_j = 0$ para todo $j > 1$ es $s = 1$, por lo que debemos tener $s^D = 1$. Supongamos ahora que todos los jugadores $j > 1$ juegan 1. En ese caso, jugar 1 da una utilidad de $2n+\beta-1$, mientras que jugar $1+\beta/2$ da una utilidad de $2n+\beta-1+\frac{\beta^2}{4}$, por lo que no hay una estrategia dominante.

Ejercicio 13: El problema es elegir q para maximizar $(a - bq - c)\,q$. La solución es

$$\frac{1}{4}\frac{(a-c)^2}{b}$$

con $q = \frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$. El producto de equilibrio en el caso de Cournot es $\frac{2}{3}\frac{a-c}{b} > \frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$.

Si la firma 1 decide desviarse, producirá

$$b_1\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{3}{8}\frac{a-c}{b}.$$

Los beneficios de la firma 1 serán

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(a-c)^2}{b}$$

que son mayores a $\frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b}$ (la mitad de los beneficios de coludirse).

Ejercicio 14.A. El jugador 1 elige q_i para maximizar su utilidad. Llamando $Q_{-i} = \sum_{j\neq i} q_j$, obtenemos que la condición de primer orden es

$$a - b\left(\sum_{j=1}^{I} q_j\right) - c - bq_i = 0 \Leftrightarrow a - b\,(q_i + Q_{-i}) - c - bq_i = 0 \Leftrightarrow q_i = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}.$$

La derivada segunda de la función objetivo es $-2b$, por lo que la condición de primer orden es necesaria y suficiente para un óptimo interior. Si $a - c < bQ_{-i}$ el q_i óptimo es 0. La función de reacción es entonces

$$r_i\left(Q_{-i}\right) = \begin{cases} \frac{a-c-bQ_{-i}}{2b} & Q_{-i} \geq \frac{a-c}{b} \\ 0 & Q_{-i} < \frac{a-c}{b} \end{cases}.$$

14.B. El equilibrio simétrico se da cuando

$$q = r_i\left((I-1)\,q\right) \Leftrightarrow q = \frac{a-c-b\,(I-1)\,q}{2b} \Leftrightarrow q = \frac{a-c}{b\,(1+I)}.$$

No hemos descartado otros equilibrios, pero eso se puede hacer. En particular, el juego se puede resolver por eliminación iterada de estrategias dominadas.

14.C. El precio de equilibrio es

$$P = a - b\left(\sum_{j=1}^{I} q_j\right) = a - bI\frac{a-c}{b\,(1+I)} = \frac{a+Ic}{1+I} \to c.$$

Cuando aumenta la competencia, el precio se acerca al costo marginal.

Ejercicio 132.A. Si $(v_1^*, ..., v_n^*)$ es un equilibrio de Nash, cada v_i^* debe maximizar $v_i \frac{1}{v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*} - cv_i$ cuya condición de primer orden es

$$\frac{\left(v_i^* + \sum_{j\neq i} v_j^*\right) - v_i^*}{\left(v_i^* + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)^2} = c. \tag{67}$$

con condición de segundo orden:

$$\left(\frac{v_i + \sum_{j\neq i} v_j^* - v_i}{\left(v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)^2} - c\right)' = \left(\frac{\sum_{j\neq i} v_j^*}{\left(v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)^2} - c\right)' = -\sum_{j\neq i} v_j^* \frac{2\left(v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)}{\left(v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)^4} = -\frac{2\sum_{j\neq i} v_j^*}{\left(v_i + \sum_{j\neq i} v_j^*\right)^3} \leq 0.$$

Como $V = \sum_1^n v_i^*$ es el mismo para todos los i, cada v_i^* satisface (67) con V :

$$\frac{V - v_i^*}{V^2} = c \Leftrightarrow v_i^* = V - cV^2$$

(y son todos iguales). Entonces queda (en el camino asumiremos que $v \neq 0$, que ya lo habíamos hecho al asumir que la condición de primer orden caracterizaba la solución)

$$v = nv - cn^2v^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = 1 - cnv \Leftrightarrow v = \frac{n-1}{cn^2}$$

y se verifica que $v \geq 0$. La cantidad total de equilibrio es $V^N = \frac{n-1}{cn}$.

Si los granjeros se juntaran y decidieran maximizar el beneficio conjunto, el mismo sería $V.\frac{1}{V} - cV = 1 - cV$ que se maximiza con

$$V^M = 0 < \frac{n-1}{cn} = V^N.$$

132.B. Cada granjero debe maximizar

$$v_i I\,(V) - cv_i \Rightarrow I\,(V) + v_i^* I'\,(V) = c.$$

La condición de segundo orden es

$$I'\,(V) + I'\,(V) + v_i^* I''\,(V) \leq 0$$

Como V es el mismo para todo el mundo, e I' es menor estricto que 0, debemos tener $v_i^* = v_j^*$ para todo i y j. Sumando esta ecuación entre todos los agentes, obtenemos

$$nI\,(V) + VI'\,(V) = nc \Leftrightarrow I\left(V^N\right) + \frac{1}{n}V^N I'\left(V^N\right) = c.$$

Cuando queremos maximizar los beneficios conjuntos, los granjeros maximizan

$$VI(V) - cV \Rightarrow I\left(V^M\right) + V^M I'\left(V^M\right) = c.$$

Como I es cóncava, y estrictamente decreciente, I' es (estrictamente) negativa y decreciente y por lo tanto $I(V) + VI'(V)$ es decreciente pues su derivada es $2I' + VI'' < 0$. Si tuviéramos $V^M \geq V^N$, se cumpliría

$$c = I\left(V^M\right) + V^M I'\left(V^M\right) \leq I\left(V^N\right) + V^N I'\left(V^N\right) < I\left(V^N\right) + \frac{1}{n} V^N I'\left(V^N\right) = c,$$

lo que sería una contradicción.

Ejercicio 133. Un equilibrio simétrico es uno en el cual un jugador contribuye si y sólo si su valuación es mayor que una constante k (esta es la función de los tipos a las acciones). La constante k debe ser tal que los que tienen $k < v$ quieran contribuir, y si $k > v$ no quieran contribuir, y alguien con $v = k$ es indiferente (cuando todos los demás siguen esta estrategia). Si el jugador j con valoración $v = k$ es indiferente, su utilidad de contribuir es $k - c$, mientras que si no contribuye, su utilidad es 0 si nadie contribuye, o v si alguien contribuye:

$$U_j(no) = P(v_i < k, i \neq j)\, 0 + P(\exists i, v_i > k)\, k = k^{n-1} 0 + \left(1 - k^{n-1}\right) k = \left(1 - k^{n-1}\right) k.$$

El equilibrio es entonces cuando

$$U_j(si) = U_j(no) \Leftrightarrow k - c = \left(1 - k^{n-1}\right) k \Leftrightarrow c = k^n \Leftrightarrow k = c^{\frac{1}{n}}.$$

La probabilidad que al menos uno provea es

$$P(prov) = 1 - P(v_i \leq k, \forall i) = 1 - k^n = 1 - c.$$

Ejercicio 16. Debemos demostrar que para todo $x, y \in S$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$

$$g(\alpha x + (1-\alpha) y) > \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y).$$

Tenemos que para todo $x, y \in S$, $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} g(\alpha x + (1-\alpha) y) &= u(\alpha x + (1-\alpha) y) - n(\alpha x + (1-\alpha) y) \\ (\text{concavidad } u) &\geq \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y) - n(\alpha x + (1-\alpha) y) \\ (\text{convexidad estricta } n) &> \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y) - \alpha n(x) + (1-\alpha) n(y) \\ &= \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y). \end{aligned}$$

Ejercicio 17. Asumamos que existen s^* y x, con $s^* \neq x$, que maximizan g (con lo cual, en particular, $g(s^*) = g(x)$). Tenemos que para $\alpha \in (0,1)$

$$g(\alpha s^* + (1-\alpha) x) > \alpha g(s^*) + (1-\alpha) g(x) = g(s^*)$$

lo que contradice que s^* maximiza g.

Ejercicio 18. Tenemos que para $s \neq x$ y $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
n(\alpha s + (1-\alpha x)) &= \sum_1^l (\alpha s_j + (1-\alpha) x_j - \overline{s}_j)^2 \\
&= \sum_1^l (\alpha (s_j - \overline{s}_j) + (1-\alpha)(x_j - \overline{s}_j))^2 \\
&= \sum_1^l \left(\alpha (s_j - \overline{s}_j)^2 + (1-\alpha)(x_j - \overline{s}_j)^2 - \alpha (1-\alpha)(s_j - x_j)^2\right) \\
&= \alpha n(s) + (1-\alpha) n(x) - \alpha (1-\alpha) \sum_1^l (s_j - x_j)^2 \\
&< \alpha n(s) + (1-\alpha) n(x)
\end{aligned}$$

Ejercicio 19. Cerrado. Tomamos una secuencia $\{s^n\}$ en S tal que $s^n = (s_1^n, ..., s_I^n) \to s = (s_1, ..., s_I)$. Debemos demostrar que $s \in S$. Como $s^n \in S$ para todo n, $s_i^n \in S_i$ para todo n. También, como $s^n \to s$, para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$,

$$\varepsilon > \|s^n - s\| = \sqrt{\|s_1^n - s_1\|^2 + \|s_2^n - s_2\|^2 + ... + \|s_I^n - s_I\|^2} \geq \sqrt{\|s_i^n - s_i\|^2} = \|s_i^n - s_i\|$$

por lo que debemos tener que $s_i^n \to s_i$. Como S_i es cerrado, tenemos que $s_i \in S_i$. Deducimos entonces que $s \in S$ como queríamos demostrar.

Acotado. Como S_i es acotado para cada i, existe un M_i tal que $\|s_i\| < M_i$ para todo $s_i \in S_i$. Tenemos entonces que para todo $s \in S$, definiendo $M \equiv \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + ... + M_I^2}$ tenemos

$$\|s\| = \sqrt{\|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 + ... + \|s_I\|^2} < \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + ... + M_I^2} = M$$

por lo que S es acotado.

Convexo. Tomamos x e y en S y $\lambda \in [0,1]$. Como S_i es convexo para todo i, tenemos que $\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \in S_i$, por lo que

$$\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, ..., \lambda x_I + (1-\lambda) y_I) \in S.$$

Ejercicio 20.A. Para cada G_i tenemos que $G_i(x) = \left(G_i^1, G_i^2, ..., G_i^{l_i}\right)$ y como $G(x) = (G_1(x), G_2(x), ..., G_I(x))$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{j=l_1} \left(G_1^j(x) - G_1^j(y)\right)^2 + ... + \sum_{j=1}^{j=l_I} \left(G_I^j(x) - G_I^j(y)\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{j=l_1} \left(G_1^j(x) - G_1^j(y)\right)^2}\right)^2 + ... + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{j=l_I} \left(G_I^j(x) - G_I^j(y)\right)^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\|G_1(x) - G_1(y)\|^2 + ... + \|G_I(x) - G_I(y)\|^2}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

20.B. Como cada G_i es continua, para $\varepsilon/\sqrt{I}$ existe δ_i tal que

$$\|x - y\| < \delta_i \Rightarrow \|G_i(x) - G_i(y)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{I}}.$$

Dado ε, existe $\delta \equiv \min_i \delta_i$ tal que

$$\begin{aligned} \|x-y\| &< \delta \Rightarrow \|G_i(x)-G_i(y)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{I}} \quad \forall i \Rightarrow \\ \|G(x)-G(y)\| &= \sqrt{\|G_1(x)-G_1(y)\|^2+...+\|G_I(x)-G_I(y)\|^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{I}+...+\frac{\varepsilon^2}{I}} = \varepsilon \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 21. $\Rightarrow$) Asumimos que f es continua y debemos mostrar que $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$. Asumiendo continuidad de f y $x_n \to x$, debemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que $n \geq N_\varepsilon$ implica $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.
Como f es continua, para el ε elegido, existe un δ_ε tal que $\|x' - x\| < \delta_\varepsilon$ implica $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Como $x_n \to x$, dado el δ_ε encontrado, existe N_{δ_ε} tal que $n \geq N_{\delta_\varepsilon}$ implica $\|x_n - x\| < \delta_\varepsilon$. Fijando entonces $N_\varepsilon = N_{\delta_\varepsilon}$ vemos que

$$n \geq N_\varepsilon = N_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow \|x_n - x\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Asumimos ahora que $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$ y debemos mostrar que f es continua, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x - x'\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Si f es discontinua, existe un ε tal que para todo δ, hay algún x' tal que $\|x - x'\| < \delta$ pero $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Construiremos ahora una secuencia $\{x_n\}$ que cumple las siguientes propiedades: $x_n \to x$; $f(x_n) \to f(x)$; para todo n, $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Eso constituye una contradicción, ya que para n "grande" deberíamos tener $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$.

Para construir la secuencia $\{x_n\}$, para cada n, tomamos cualquier x_n tal que $\|x_n - x\| < 1/n$ pero

$$|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon. \tag{68}$$

Como f es discontinua, tal x_n siempre existe. La secuencia que formamos así converge a x, y por lo tanto, $f(x_n) \to f(x)$. Por eso, para el ε dado, existe un N tal que $n \geq N$ implica $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$, lo que contradice la ecuación (68).

Ejercicio 23.A. Tenemos

$$G(x) = \arg\max_{y \in Y} f(x, y) = \frac{x}{2}$$

que es continua.

23.B. Queda $G(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 24.A. En Γ_1 el único equilibrio es $(s_1, s_2) = (0, 0)$. Es un equilibrio porque para $s_2 = 0$ cualquier s_1 maximiza, y en particular $s_1 = 0$ maximiza. Similarmente para 2. Es el único, porque si $s_i > 0$, no existe una mejor respuesta.

En Γ_2 no hay equilibrio (por la misma razón que en Γ_1 no hay equilibrio con $s_i > 0$).

24.B. Γ_1 no es un juego cóncavo, pues $\mathbf{R}_+$ no es acotado. Obviamente, Γ_2 no es un juego cóncavo, pues si lo fuera tendría un equilibrio. Lo que falla es que $\mathbf{R}_{++}$ no es ni cerrado ni acotado.

Ejercicio 25. Una forma de hacer este ejercicio, es demostrando que el juego es un juego cóncavo, y aplicar el resultado de existencia de Geanakoplos. Para demostrar que es un juego cóncavo, debemos verificar que los espacios de estrategias son convexos, cerrados y acotados, y que la función de utilidad (de pagos, de beneficios, o como quieran llamarla) es cóncava en la estrategia propia.

Verificar que los espacios de estrategias son convexos, cerrados y acotados es trivial, pues son, para cada jugador, el intevalo $[0,1]$. Para verificar que los pagos son cóncavos, tomaremos derivadas (no es necesario hacerlo con la definición de concavidad, pues la función es diferenciable):

$$\begin{aligned} \frac{d\left(q_1\left[p\left(q_1+q_2\right)-c\right]\right)}{dq_1} &= p\left(q_1+q_2\right)-c+q_1p'\left(q_1+q_2\right) \\ \frac{d^2\left(q_1\left[p\left(q_1+q_2\right)-c\right]\right)}{dq_1dq_1} &= 2p'\left(q_1+q_2\right)+q_1p''\left(q_1+q_2\right)<0 \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 29.A. La firma 1 debe elegir q_1 para maximizar $q_1\left(10-q_1-q_2-q_1\right)$ que arroja

$$r_1\left(q_2\right)=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}q_2$$

y en forma similar, $r_2\left(q_1\right)=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}q_1$.

29.B. Debemos tener $q_1=r_1\left(q_2\right)$ y $q_2=r_2\left(q_1\right)$, o lo que es lo mismo,

$$q_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}q_1\right)\Leftrightarrow q_1=2=q_2.$$

Ejercicio 30.A,B. La firma i debe elegir q_i para, dado Q_{-i}, maximizar

$$\left(120-2q_i-2Q_{-i}\right)q_i-10-iq_i^2$$

Las condiciones de primer orden arrojan

$$q_i\left(Q_{-i}\right)=\frac{120-2Q_{-i}}{4+2i}$$

por lo que el equilibrio resuelve el sistema

$$\begin{aligned} q_1 &= \tfrac{120-2q_2-2q_3}{6} \\ q_2 &= \tfrac{120-2q_1-2q_3}{8} \\ q_3 &= \tfrac{120-2q_1-2q_2}{10} \end{aligned}$$

Las cantidades de equilibrio son $q_1=\frac{72}{5}$, $q_2=\frac{48}{5}$, $q_3=\frac{36}{5}$.

Ejercicio 32. La condición de primer orden es $e_2-2\left(e_1-e_2\right)-1=0$, o $e_1=\frac{3}{2}e_2-\frac{1}{2}$, y simétricamente $e_2=\frac{3}{2}e_1-\frac{1}{2}$. Queda entonces $e_1=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}e_1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$, o $e_1^*=e_2^*=1$.

Ejercicio 136A,B. El juego en forma normal es $I=\{1,2\}$, $S_1=S_2=\mathbf{R}_+$ (puede elegir cualquier número positivo de cabras), y

$$u_1\left(g_1,g_2\right)=g_1\left(120-g_1-g_2\right)-cg_1,\text{ y } u_2\left(g_1,g_2\right)=g_2\left(120-g_1-g_2\right)-cg_2.$$

El granjero 1 elige g_1 para maximizar $g_1\left(120-g_1-g_2-c\right)$, que arroja $g_1\left(g_2\right)=\frac{120-g_2-c}{2}$. En forma similar obtenemos $g_2\left(g_1\right)=\frac{120-g_1-c}{2}$. La condición de equilibrio es que g_1 debe ser la mejor respuesta a g_2, cuando g_2 es la mejor respuesta a g_1 :

$$g_1=\frac{120-\frac{120-g_1-c}{2}-c}{2}\Leftrightarrow 4g_1=240-120+g_1+c-2c\Leftrightarrow g_1=\frac{120-c}{3}$$

y luego obtenemos también $g_2(g_1) = \frac{120-g_1-c}{2} = \frac{120-c}{3}$.

136.C. Si decidieran conjuntamente el número de cabras, maximizarían $G(120 - G - c)$, que da un número óptimo de $G = \frac{120-c}{2}$, que es menor que $g_1 + g_2 = 2\frac{120-c}{3}$. Tenemos que en el equilibrio de Nash hay sobre explotación del recurso común.

136.D. El individuo 1 debe elegir g_1 para maximizar $g_1(120 - g_1 - g_2 - g_3 - c)$ que da como resultado $g_1(g_2, g_3) = \frac{120-g_2-g_3-c}{2}$. En forma análoga, $g_2 = \frac{120-g_1-g_3-c}{2}$ y $g_3 = \frac{120-g_1-g_2-c}{2}$. Si llamamos G al total de cabras, $G = g_1 + g_2 + g_3$, vemos que restando $\frac{g_1}{2}$ en la función de reacción de 1 obtenemos

$$g_1 - \frac{g_1}{2} = \frac{120 - g_2 - g_3 - c}{2} - \frac{g_1}{2} \Leftrightarrow \frac{g_1}{2} = \frac{120 - G - c}{2} \Leftrightarrow g_1 = 120 - G - c.$$

Procediendo de igual manera para g_2 y g_3, llegamos a $g_2 = g_3 = 120-G-c$. Por lo tanto, las tres cantidades son iguales, y de la ecuación $g_1 = 120 - 3g_1 - c$ obtenemos $g_1 = \frac{120-c}{4}$ (y también $g_2 = g_3 = \frac{120-c}{4}$).

No importa cuánta gente haya, la cantidad óptima de cabras para maximizar el beneficio conjunto se mantiene en $G = \frac{120-c}{2}$. Sin embargo, cuanto más gente hay, el número de cabras en equilibrio sigue aumentando. En este caso, con tres jugadores, el número de cabras es $\frac{3}{4}(120 - c) > \frac{2}{3}(120 - c)$ que era la cantidad con dos jugadores. Eso es una idea vieja: cuanto más gente hay, más grave es el problema de la sobre explotación de los recursos. Aunque la idea suena razonable, no se cumple en todos los modelos, sin embargo.

Ejercicio 137. Para poder aplicar el Teorema de Existencia, se precisa que todas las funciones de utilidad sean cóncavas en la estrategia del agente. Así precisamos que $u_i(s) = s_i f(s_{-i}) + (1 - s_i) g(s)$ sea cóncava en s_i, y por el teorema que está en las notas, alcanza para eso que $\partial^2 u_i / \partial s_i^2 \leq 0$, es decir,

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i} = f(s_{-i}) - g(s) + (1 - s_i)\frac{\partial g}{\partial s_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i^2} = -\frac{\partial g}{\partial s_i} - \frac{\partial g}{\partial s_i} + (1 - s_i)\frac{\partial^2 g}{\partial s_i^2}.$$

Por lo tanto alcanza con asumir que para todo i, $\frac{\partial g}{\partial s_i} \geq 0$ y: $\frac{\partial^2 g}{\partial s_i^2} \leq 0$ si $S_i \subset (-\infty, 1]$; o $\frac{\partial^2 g}{\partial s_i^2} \geq 0$ si $S_i \subset [1, \infty)$.

Se necisita que los intervalos S_i sean cerrados y acotados (ya son convexos por ser intervalos) y que f y g sean continuas.

Estrategias mixtas

En estas notas enunciamos y demostramos un teorema que describe (o caracteriza) la forma exacta de los equilibrios en estrategias mixtas. Las notas también contienen una serie de ejercicios que utilizan esta caracterización para encontrar los equilibrios en estrategias mixtas de ciertos juegos.

Para un conjunto finito $X = (x_1, ..., x_n)$ definimos ΔX como el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X. Formalmente

$$\Delta X = \left\{ p \in \mathbf{R}_+^n : \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1 \right\}.$$

Para un juego en forma normal $\Gamma_N = \left[I, \{S_i, u_i\}_1^I \right]$ en el cual los espacios de estrategias S_i son finitos para todo i, el juego $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta S_i, u_i\}_1^I \right]$ se llama su extensión mixta.

Teorema 0: Sea $\Gamma_N = \left[I, \{\Delta S_i, u_i\}_1^I \right]$ un juego en forma normal, y sea $S_i^+(\sigma) \subseteq S_i$ el conjunto de estrategias que el jugador i juega con probabilidad estrictamente positiva en el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$. El perfil de estrategias σ es un equilibrio de Nash en Γ_N si y sólo si para todo i

(i) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i', \sigma_{-i})$ para todo $s_i, s_i' \in S_i^+(\sigma)$
(ii) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i})$ para todo $s_i \in S_i^+(\sigma), s_i' \in S_i$.

Prueba: Supongamos primero que σ no es un equilibrio de Nash. Demostraremos que se viola entonces (i) o (ii). Si σ no es un equilibrio, quiere decir que existe un jugador i, y una estrategia σ_i' para ese jugador, tal que $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Como $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) = \sigma_i'(s_1) u_i(s_1, \sigma_{-i}) + ... + \sigma_i'(s_n) u_i(s_n, \sigma_{-i})$ tiene que haber alguna estrategia s_i' tal que $u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i})$ para toda $s_i \in S_i^+(\sigma)$, lo cual viola la condición (ii).

Supongamos ahora que se violan (i) o (ii). Demostraremos que entonces σ no puede ser un equilibrio de Nash. Si se viola una de las dos condiciones (cualquiera de las dos), existen $s_i \in S_i^+(\sigma)$ y $s_i' \in S_i$ tales que $u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$. Construiremos ahora una estrategia σ_i' para el jugador i, que le da una utilidad estrictamente mayor que σ_i cuando los oponentes juegan σ_{-i}, y con eso quedará demostrado que σ no es un equilibrio de Nash. La estrategia σ_i' que nos definimos, es una en la cual el jugador i juega s_i' cada vez que le tocaría jugar s_i. Formalmente,

$$\sigma_i'(s) = \begin{cases} \sigma_i(s) & \text{si } s \notin \{s_i, s_i'\} \\ \sigma_i(s_i) + \sigma_i(s_i') & \text{si } s = s_i' \\ 0 & \text{si } s = s_i \end{cases}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) &= \sum_{s \notin \{s_i, s_i'\}} \sigma_i'(s) u_i(s, \sigma_{-i}) + \sigma_i'(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}) + \sigma_i'(s_i') u_i(s_i', \sigma_{-i}) \\ &= \sum_{s \notin \{s_i, s_i'\}} \sigma_i'(s) u_i(s, \sigma_{-i}) + 0 + \sigma_i'(s_i') u_i(s_i', \sigma_{-i}) \\ &= \sum_{s \notin \{s_i, s_i'\}} \sigma_i(s) u_i(s, \sigma_{-i}) + \sigma_i'(s_i') u_i(s_i', \sigma_{-i}) \\ &= \sum_{s \notin \{s_i, s_i'\}} \sigma_i(s) u_i(s, \sigma_{-i}) + (\sigma_i(s_i) + \sigma_i(s_i')) u_i(s_i', \sigma_{-i}) \\ &> \sum_{s \notin \{s_i, s_i'\}} \sigma_i(s) u_i(s, \sigma_{-i}) + \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}) + \sigma_i(s_i') u_i(s_i', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 1: En el juego de matching pennies de la figura, encontrar todos los equilibrios.

		Jugador 2	
		Cara	Número
Jugador 1	Cara	1	-1
	Número	-1	1

Ejercicio 2: En el juego de Meeting in New York de la figura, encontrar todos los equilibrios para $a, b > 0$.

		Jugador 2	
		Empire States	Grand Central
Jugador 1	Empire States	a,a	0,0
	Grand Central	0,0	b,b

Ejercicio 3. En el siguiente juego, encuentre todos los equilibrios, tanto en estrategias puras, como en estrategias mixtas. (Pista: utilice la caracterización de los equilibrios en estrategias mixtas para demostrar que el Jugador 2 nunca usará una de sus acciones en un equilibrio en estrategias mixtas).

	I	M	D
A	4,5	0,1	9,0
B	1,1	8,7	9,0

Ejercicio 4. La batalla de los sexos. Juan e Inés prefieren pasar una velada juntos, antes que separados. A Juan le gusta el fútbol y a Inés le gusta la música clásica. Quedaron en encontrarse, pero no recuerdan si en el Estadio o en el Solís. La matriz de pagos para este juego es

		Inés	
		Estadio	Solís
Juan	Estadio	2,1	0,0
	Solís	0,0	1,2

Encuentre todos los equilibrios de este juego.

Ejercicio 5. La batalla de los sexos, con boxeo. Juan (jugador I) e Inés (jugadora II) prefieren pasar una velada juntos, antes que separados. A I le gusta el fútbol y a II le gusta la música clásica. A ninguno le gusta el boxeo. Quedaron en encontrarse, pero no recuerdan si en el Estadio (opción c), en el Solís (opción b) o en el Luna Park (opción a). La matriz de pagos para este juego es

			II	
		a	b	c
I	a	0,0	0,3	0,5
	b	3,0	2,3	1,1
	c	5,0	1,1	3,2

Encuentre todos los equilibrios de este juego. Para ello, demuestre, usando la caracterización de los equilibrios, que ninguno de los dos jugadores jugará la estrategia a en un equilibrio. La estrategia a se llama "dominada" pues para cualquier cosa que haga el otro jugador, la estrategia b me da una utilidad mayor que la a. Una vez eliminada la estrategia a, encuentre los equilibrios del siguiente juego.

		II	
		b	c
I	b	2,3	1,1
	c	1,1	3,2

Ejercicio 6. En el siguiente juego, encontrar todos los equilibrios en estrategias mixtas (el jugador I elige filas y el II columnas).

	I	M	D
A	1,0	1,2	0,3
B	0,3	0,2	1,0

Para hacerlo, siga los siguientes pasos.

Parte A Sea p la probabilidad con que I juega A. Grafique con p en las abcisas la utilidad de II de jugar I, M, o D. Utilice la caracterización de las estrategias mixtas para mostrar que II nunca jugará las tres acciones con probabilidad positiva. En particular, ¿hay algún p que haga que las utilidades de II de sus tres acciones sean iguales?

Parte B Muestre que no hay equilibrios en estrategias puras. Muestre también que no hay ningún equilibrio en el cual II juega sólamente I y M. Muestre que no hay ningún equilibrio en el cual II juega sólo I y D.

Parte C. Encuentre el equilibrio en el cual II juega M y D.

Ejercicio 7. En el siguiente juego, encontrar todos los equilibrios en estrategias mixtas (el jugador I elige filas y el II columnas).

	I	M	D
A	0 ; 2	1 ; 1	2 ; 0
B	2 ; 0	1 ; 1	0 ; 2

Para hacerlo, siga los siguientes pasos.

Parte A Sea p la probabilidad con que I juega A. Demuestre que no hay ningún equilibrio en el cual $p > \frac{1}{2}$.

Parte B Demuestre que no hay ningún equilibrio en el cual $p < \frac{1}{2}$.

Parte C Sean (q_I, q_M) las probabilidades con que II juega I y M respectivamente. Demuestre que no hay ningún equilibrio en el cual $q_I \neq 1 - q_I - q_M$ (es decir, en cualquier equilibrio II debe jugar I y D con la misma probabilidad).

Parte D Demuestre que $p = \frac{1}{2}$ y $(q_I, q_M) = (a, 1-2a)$ para todo $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ es un equilibrio.

Ejercicio 8. Los pagos en el siguiente juego

		Ladrón: Robar	Ladrón: No Robar
Dueño	Alarma	*v - a, - p*	*v - a, 0*
	No Alarma	*0 , v*	*v , 0*

representan una situación en la cual un auto vale $\$v$. El dueño puede elegir ponerle alarma con un costo de $\$a < v$, en cuyo caso, el auto estará seguro, y si el ladrón intenta robar el auto, irá seguro a prisión, recibiendo una pena de p. Si el ladrón no intenta robar, recibe 0 de pena, mientras que si intenta robar y no hay alarma, se queda con el valor del vehículo, y el dueño con nada.

Parte A. Encuentre el único equilibrio en estrategias mixtas.

Parte B. Llame a la probabilidad con la que el ladrón intenta robar la "tasa de criminalidad". ¿Tiene algún efecto sobre la tasa de criminalidad un aumento en p, la pena que podría recibir el ladrón? Explique porqué.

Ejercicio 9. Sean $I = \{1,2\}$ y $S_i = \{a,b,c\}$ para $i = 1,2$. Las utilidades son $u_i(c,c) = 4$, $u_i(b,b) = 2$ y $u_i(a,a) = 1$ y para $s \neq s'$, $u_i(s,s') = 0$ para $i = 1,2$.

Parte A. Dibuje la matriz de pagos de este juego.

Parte B. Encuentre todos los equilibrios de este juego.

Ejercicio 10. Poner una estrategia σ_i' que sea mejor que σ_i (de la demostración de mixtas) que le asigne prob positiva a las mismas que σ_i, más una, y pedir que construyan una σ_i^* que sea mejor que ambas

Ejercicio 11. Bienes públicos. El problema del free rider. Considere un juego en el cual si una persona "aporta", recibe 10 de utilidad, sin importar lo que hagan los demás. Si la persona no aporta, pero alguien más lo hace, entonces la persona recibe 15, pero si nadie más aporta, recibe -85.

Parte A. Calcule 3 equilibrios de este juego cuando hay sólo dos jugadores.

Parte B. Calcule el único equilibrio simétrico (todos juegan la misma estrategia) cuando hay n jugadores.

Parte C. Calcule la probabilidad de que al menos una persona aporte como función de n. Calcule el límite cuando n tiende a infinito de esta expresión.

Ejercicio 138 Kitty Genovese; caso real. Una mujer está siendo golpeada, apuñalada y violada en el estacionamiento al aire libre de un edificio. Ella grita y todas las luces en los n apartamentos se prenden, y los vecinos se ven unos a otros mirando. Los pagos (en niveles de utilidad) para cada uno de los n vecinos son los mismos: si yo llamo mi pago es 0; si no llamo y alguien llama, mi pago es 1; si no llamo y nadie llama, mi pago es -2.

Parte A. Cada individuo i tiene que elegir una probabilidad p_i de llamar a la policía. Si todos los demás vecinos están eligiendo llamar con la misma probabilidad p, calcule la utilidad del individuo 1 de llamar seguro, y la utilidad de no llamar seguro. Encuentre el p que hace que sean iguales. Para este p hay un equilibrio de Nash: si todos los demás llaman con esa probabilidad, a mi me da lo mismo elegir cualquier $q \in [0.1]$ y llamar con esa probabilidad q; por lo tanto, llamar con probabilidad p es una mejor respuesta.

Parte B. Calcule la probabilidad de que al menos una persona llame, como función de n. Muestre que es decreciente en n.

Ejercicio 139 Hay dos individuos $i = 1, 2$ que deben elegir con qué probabilidad jugar la acción A en el siguiente juego

	A	B
A	$1,3$	$1,0$
B	$0,1$	$2,2$

Encuentre los tres equilibrios de este juego. ¿Cuáles serían los equilibrios si el pago para el individuo 2 del perfil de estragegias (B, B) fuera 1?

Ejercicio 140 El jugador 1 puede elegir una de 4 rutas a, b, c o d (listadas de rápida a lenta). Las rutas más rápidas son más suceptibles a avalanchas. El jugador 2 debe elegir si usar un explosivo o no para causarle una avalancha al jugador 1. Los pagos son

	No	Usa
a	$12,0$	$0,6$
b	$11,1$	$1,5$
c	$10,2$	$4,2$
d	$9,3$	$6,0$

Parte A. Sea p la probabilidad que 1 le asigna a que 2 no use el explosivo. ¿qué debería hacer 1, si piensa que $p > \frac{2}{3}$? ¿y si $p < \frac{2}{3}$? ¿y si $p = \frac{2}{3}$?
Parte B. ¿Hay alguna ruta que 1 no debería tomar seguro? Es decir, ¿hay alguna estrategia dominada?
Parte C. Encuentre un equilibrio de Nash en que un jugador juega una estrategia pura s, y el otro una mixta. Encuentre otro equilibrio en estrategias mixtas en que a la estrategia pura del equilibrio anterior se le asigna una probabilidad de 0. ¿Hay otros equilibrios?

Ejercicio 141 Considere el siguiente juego (tomado del libro "A Course in Microeconomic Theory" de Kreps)

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	$200,6$	$3,5$	$4,3$	$0,-1000$
s_2	$0,-1000$	$5,-1000$	$6,3$	$3,20$

Parte A. Encuentre los equilibrios en estrategias puras.
Parte B. Encuentre un equilibrio en estrategias mixtas.
Parte C. Argumente, lo más formalmente que pueda, que no existe ningún otro equilibrio.

Ejercicio 142 Un ciudadano (jugador 1) tiene que decidir si rellenar honestamente la declaración jurada para el cálculo del IRPF o maquillar los números a su favor. El jugador 2 es un funcionario de la DGI; su problema es elegir cuánto esfuerzo $e \in [0, 1]$, dedicar a auditar al jugador 1. Esforzarse e le cuesta $c(e) = 100e^2$. Si el ciudadano es honesto, su utilidad es 0, mientras que el auditor no recibe nada y debe pagar el costo de su esfuerzo, por lo que la utilidad será $-100e^2$. Si el ciudadano miente en la declaración y lo agarran, le debe pagar 100 al auditor (su beneficio neto es -100), y el auditor tiene un beneficio neto de $100 - 100e^2$. Si el ciudadano miente y no lo agarran, su utilidad es 50 (lo que se ahorró de impuestos) y la del auditor es $-100e^2$. Si el auditor ejerce un esfuerzo e, la probabilidad de agarrar al ciudadano si mintió es de e.

Parte A. ¿Cuál es la mejor respuesta del funcionario si está convencido que el ciudadano está evadiendo?
Parte B. ¿Cómo cambia su respuesta si el funcionario cree que es honesto?
Parte C. Si el funcionario cree que el ciudadano es honesto con probabilidad p, cómo varía el nivel de esfuerzo óptimo en función de p? (encuentre la mejor respuesta del funcionario a una estrategia mixta del ciudadano, cuando elige ser honesto con probabilidad p).
Parte D. ¿Este problema tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras?¿Por qué? (esto requiere una demostración).
Parte E. ¿Hay algún equilibrio en que el ciudadano juega estrategias mixtas? (no considere estrategias mixtas para el funcionario, que en este caso serían distribuciones de probabilidad sobre el intervalo $[0, 1]$). Si lo hay, encuéntrelo.

Ejercicio 143 Encuentre todos los equilibrios (en puras y mixtas) en este juego.

	I	C	D
A	$1,2$	$3,5$	$2,1$
M	$0,4$	$2,1$	$3,0$
B	$-1,1$	$4,3$	$0,2$

Ejercicio 144 En el siguiente juego encuentre todos los equilibrios en estrategias mixtas (encuentre los que haya, y argumente que no hay otros).

	I	D
T	$2,0$	$2,1$
M	$3,3$	$0,0$
B	$0,1$	$3,0$

Cuando un ejercicio pide encontrar todos los equilibrios, lo más seguro es ser metódico. Primero eliminar todas las estrategias estrictamente dominadas, iterativamente. Luego, ver discutir de alguna forma organizada todos los casos. Por ejemplo, en el ejercicio anterior hay dos formas de ser ordenado: podemos ver primero si hay equilibrios en que se juegan las tres estrategias (no lo hay, pues para cualquier p que elija el jugador II de jugar I, hay a lo sumo dos mejores respuestas; eso se puede ver en un gráfico de $u_I(T,p), u_I(M,p)$ y $u_I(B,p)$, por lo que el jugador I nunca será indiferente entre sus tres estrategias); luego ver cuándo hay equilibrios donde dos estrategias se juegan con probabilidad positiva (sólo puede ser con T y B o con T y M; con M y B, el jugador II jugará seguro I, que implicaría que el I juega sólo M) y finalmente los equilibrios en que I juega una estrategia pura.

Otra forma sistemática es, viendo el mismo gráfico de las utilidades de I, discutir según p. Las intersecciones de las utilidades son en $p = \frac{1}{3}$ y $p = \frac{2}{3}$. Entonces nos preguntamos si hay equilibrio con $p = 0$, con $0 < p < \frac{1}{3}$, con $p = \frac{1}{3}$, con $\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$, con $p = \frac{2}{3}$, con $\frac{2}{3} < p < 1$, o con $p = 1$. No es muy largo el procedimiento, y nos aseguramos de cubrir todos los casos.

never a best response implies strictly dominated in mixed strategies

Ejercicio 2. Sean σ_1 y σ_2 las probabilidades que le asignan los jugadores 1 y 2 a ES. Ya sabemos que los perfiles $(1,1)$, $(0,0)$ y $\left(\frac{b}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$ son equilibrios. Supongamos que hay otro equilibrio (p,q) para $p,q \notin \left\{0, \frac{b}{a+b}, 1\right\}$. Supongamos en particular que $p \in \left(0, \frac{b}{a+b}\right)$. En ese caso, $u_2(p, GC) > u_2(p, ES)$, por lo cual, la condición (i) de la caracterización nos dice que ES no es jugado por el jugador 2 en el equilibrio, por tanto, $q = 0$. Como $u_1(GC, 0) > u_1(ES, 0)$, sabemos, otra vez por la condición (i) que ES no será jugado por 1 en equilibrio, por tanto obtenemos $p = 0$. Eso constituye una contradicción porque supusimos que $p \in \left(0, \frac{b}{a+b}\right)$.

En forma similar, uno muestra que $p \in \left(\frac{b}{a+b}, 1\right)$ no puede ser parte de un equilibrio. Finalmente, uno debe seguir los mismos pasos para demostrar que $q \in \left(0, \frac{b}{a+b}\right)$ y $q \in \left(\frac{b}{a+b}, 1\right)$ no pueden ser parte de un equilibrio.

Ejercicio 5. La caracterización nos dice que si una estrategia se juega en equilibrio, no puede haber ninguna otra que nos de mayor utilidad, dada la estrategia del otro jugador. Escribiendo la utilidad esperada de jugar a para cualquier estrategia de II observamos que es menor que la utilidad de jugar b. Por ello, I nunca jugará a. En forma similar descartamos a para II. La solución del juego cuando se eliminó a es fácil y se omite.

Ejercicio 6.A. En la gráfica (que no se presenta acá) se ve que no hay ningún p para el cual

$$u_2(p, I) = u_2(p, M) = u_2(p, D).$$

Formalmente,

$$\begin{aligned} u_2(p, I) &= u_2(p, M) \Leftrightarrow p = \frac{1}{3} \\ u_2(p, D) &= u_2(p, M) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

por lo cual, la caracterización de los equilibrios en estrategias mixtas nos dice que no hay ningún equilibrio en el cual el jugador II asigna probabilidad positiva a sus tres estrategias.

6.B De la matriz es fácil ver que no hay equilibrios en estrategias puras. Supongamos que (σ_1, σ_2) es un equilibrio de Nash en el cual el jugador II juega sólo I y M (es decir, $\sigma_2(I) + \sigma_2(M) = 1$). En ese caso, la caracterización de los equilibrios en estrategias mixtas nos dice que el jugador I querrá jugar sólo A, pues

$$u_1(A, \sigma_2) = 1 > 0 = u_1(B, \sigma_2).$$

Obtenemos entonces $\sigma_1(A) = 1$. Pero si esto es así, debemos tener que $\sigma_2(D) = 1$, pues

$$\begin{aligned} u_2(\sigma_1, D) &= 3 > 2 = u_2(\sigma_1, M) \\ u_2(\sigma_1, D) &= 3 > 0 = u_2(\sigma_1, I). \end{aligned}$$

Tenemos pues una contradicción: no puede suceder que $\sigma_2(I) + \sigma_2(M) = 1$ y que $\sigma_2(D) = 1$.

Finalmente, no hay ningún equilibrio en el cual II mezcla sólo I y D, pues si así fuera, tendría que ser indiferente entre esas dos estrategias, y ello sólo es posible cuando $\sigma_1(A) = 1/2$, y ello arroja

$$u_2(\sigma_1, I) = u_2(\sigma_1, D) = \frac{3}{2} < 2 = u_2(\sigma_1, M).$$

6.C. Ya vimos que no hay ningún equilibrio en el cual II juega sus tres estrategias. Vimos también que no hay equilibrios en estrategias puras. También, aunque hay potencialmente varios equilibrios en los cuales el jugador II mezcla 2 de sus 3 estrategias, en la Parte B vimos que no puede mezclar I y M ni I y D. Por lo tanto, sólo nos resta encontrar el equilibrio en el cual II mezcla entre M y D. Haciendo las cuentas de siempre, obtenemos:

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \left\{ \; \left(\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right) \quad \text{este es el equilibrio en el cual II juega } M \text{ y } D \right.$$

Ejercicio 7.A Si $p > \frac{1}{2}$, el jugador II juega seguro I (pues la utilidad de I es mayor que la de las otras estrategias, y la caracterización nos dice que entonces se juega sólo I). En ese caso, el jugador I juega B seguro, lo que quiere decir que $p = 0$.

7.B. Si $p < \frac{1}{2}$, II juega D, y el jugador I juega A, por lo que $p = 1$.

7.C. Si $q_I > 1 - q_I - q_M$, la utilidad de I de jugar B será mayor que la de jugar A, y por la caracterización sabemos que $p = 0$, por lo que no puede ser un equilibrio. Si en cambio $q_I < 1 - q_I - q_M$, I jugará A seguro, lo que tampoco puede ser.

7.D. Para estas probabilidades, $U_I(A) = 1 = U_I(B)$ por lo que I está jugando una mejor respuesta. De la misma manera, para $p = \frac{1}{2}$, $U_{II}(I) = U_{II}(M) = U_{II}(D) = 1$, por lo que II también está jugando su mejor respuesta.

Ejercicio 8. Para un perfil de estrategias (s_1, s_2) las utilidades del dueño y del ladrón son

$$\begin{aligned} u_d(s_1, s_2) &= s_1 s_2 (v-a) + s_1(1-s_2)(v-a) + (1-s_1)s_2 0 + (1-s_1)(1-s_2)v = s_1(s_2 v - a) + (1-s_2)v \\ u_l(s_1, s_2) &= s_2((1-s_1)v - s_1 p) = s_2(v - s_1(v+p)). \end{aligned}$$

Como son funciones lineales, no podemos derivar para encontrar la mejor respuesta, pues serán típicamente soluciones de esquina. Así, nos fijamos en el signo del coeficiente que multiplica a la variable de elección y nos queda que las mejores respuestas son

$$b_d(s_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_2 < \frac{a}{v} \\ [0,1] & \text{si } s_2 = \frac{a}{v} \\ 1 & \text{si } s_2 > \frac{a}{v} \end{cases} \quad \text{y} \quad b_l(s_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_1 > \frac{v}{v+p} \\ [0,1] & \text{si } s_1 = \frac{v}{v+p} \\ 1 & \text{si } s_1 < \frac{v}{v+p} \end{cases}$$

Vemos que el único punto de intersección de las mejores respuestas es $(s_1, s_2) = \left(\frac{v}{v+p}, \frac{a}{v}\right)$ (dibuje las mejores respuestas para verificarlo). Sólo para ser repetitivo vamos a hacerlo sin la gráfica: si $s_1 < \frac{v}{v+p}$ en un equilibrio, entonces deberíamos tener que como s_2 es una mejor respuesta, tiene que ser $s_2 = 1$ (si el dueño no pone alarma seguro, es óptimo para el ladrón robar), pero si $s_2 = 1$, para que sea un equilibrio, debemos tener $s_1 = 1$, que es una contradicción. En forma similar descartamos perfiles con $s_1 > \frac{v}{v+p}$, pues ello implica $s_2 = 0$, y eso a su vez implicaría $s_1 = 0$. Acabamos de demostrar que no hay equilibrios con $s_1 < \frac{v}{v+p}$ ni con $s_1 > \frac{v}{v+p}$. En forma similar podemos descartar equilibrios con $s_2 > \frac{a}{v}$ y equilibrios con $s_2 < \frac{a}{v}$. Por lo tanto sólo nos queda como candidato $(s_1, s_2) = \left(\frac{v}{v+p}, \frac{a}{v}\right)$. Vemos que si $s_1 = \frac{v}{v+p}$ entonces cualquier s_2 es una mejor respuesta, por lo que $s_2 = \frac{a}{v}$ es una mejor respuesta; por otro lado, si $s_2 = \frac{a}{v}$, entonces cualquier s_1 es una mejor respuesta, y en particular $s_1 = \frac{v}{v+p}$ es una mejor respuesta. Eso muestra que $(s_1, s_2) = \left(\frac{v}{v+p}, \frac{a}{v}\right)$ es un equilibrio, pues cada uno está jugando una mejor respuesta a lo que hace el otro.

Ejercicio 11.A. Hay dos equilibrios en estrategias puras, que son: que el jugador 1 aporte y el 2 no; que el 2 aporte y el 1 no. Hay otro en estrategias mixtas que es que ambos jueguen Aportar (A) con probabilidad 95%.

11.B. Si hay n jugadores y cada uno juega A con probabilidad α, la utilidad de jugar A para cualquiera de ellos es 10, mientras que la de jugar N es

$$\left(1-(1-\alpha)^{n-1}\right)15-(1-\alpha)^{n-1}85.$$

Igualando a 10 obtenemos

$$\left(1-(1-\alpha)^{n-1}\right)15-(1-\alpha)^{n-1}85=10 \Leftrightarrow \alpha=1-\left(\frac{5}{100}\right)^{\frac{1}{n-1}}=1-20^{\frac{1}{1-n}}.$$

11.C. La probabilidad de que al menos una persona aporte es el complemento de la probabilidad de que nadie aporte:

$$P\left(\text{al menos 1 aporte}\right)=1-P\left(\text{ningún aporte}\right)=1-(1-\alpha)^n=1-20^{\frac{n}{1-n}}$$

Tomando el límite vemos que la probabilidad de que al menos una persona llame es

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-20^{\frac{n}{1-n}}\right)=\frac{19}{20}.$$

La enseñanza económica de este ejercicio es que la probabilidad de que el bien público (que alguien aporte) se provea es decreciente en n : cuanto más gente hay, todos confían en que alguien más aportará, y el problema del "free rider" (la gente que quiere garronear, y que otros hagan lo que ellos deberían hacer) se hace más grave. Vemos que

$$P\left(\text{al menos 1 aporte}\right)=1-20^{\frac{n}{1-n}}=1-\frac{1}{20^{\frac{n}{n-1}}}$$

decrece con n.

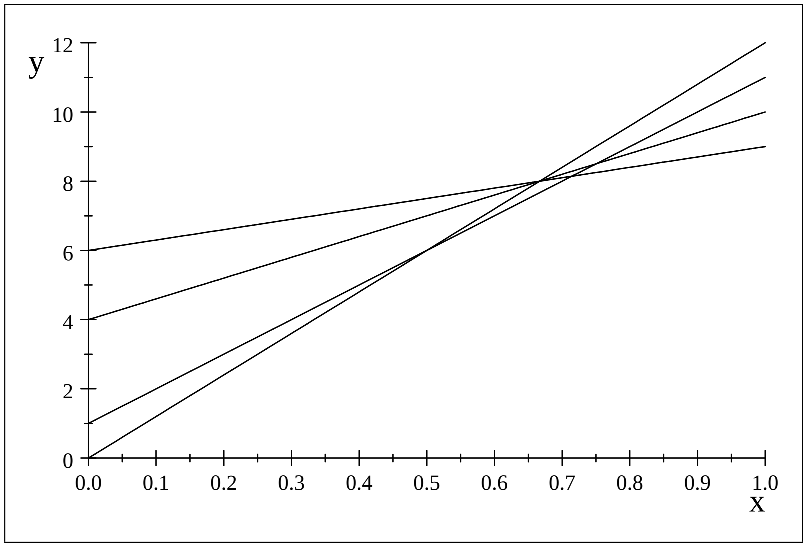
Ejercicio 139. El individuo 1 elige α y el 2 elige β. Un equilibrio es con $\alpha=\beta=0$ y otro es con $\alpha=\beta=1$. En el tercero, β es tal que

$$u_1(A,\beta)=1=2(1-\beta)=u_1(B,\beta)\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{2}$$

y α es tal que

$$u_2(\alpha,A)=3\alpha+1-\alpha=2-2\alpha=u_2(\alpha,B)\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{4}$$

Ejercicio 140.A. Los pagos de 1 son $U(a,p)=12p$, $U(b,p)=10p+1$, $U(c,p)=6p+4$ y $U(d,p)=3p+6$.



Los cortes a partir de los cuales conviene jugar a son $U(a,p) \geq U(b,p) \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$; $U(a,p) \geq U(c,p) \Leftrightarrow p \geq \frac{2}{3}$; $U(a,p) \geq U(d,p) \Leftrightarrow p \geq \frac{2}{3}$. Por lo tanto, para $p > \frac{2}{3}$ le conviene jugar a. Si $p < \frac{2}{3}$, conviene jugar d ya que en ese caso los cortes son $U(d,p) \geq U(a,p) \Leftrightarrow p \leq \frac{2}{3}$ (ya sabíamos eso); $U(d,p) \geq U(b,p) \Leftrightarrow p \leq \frac{5}{7} \approx 0.714$; $U(d,p) \geq U(c,p) \Leftrightarrow p \leq \frac{2}{3}$. Si $p = \frac{2}{3}$, le da lo mismo jugar a, c o d.

140.B. La utilidad de jugar b es $10p + 1$. De la gráfica vemos que podría estar siempre por debajo de una combinación de a y d. Entonces, planteamos jugar a con propbabilidad x y d con probabilidad $1 - x$, que nos da una utilidad esperada de $x12p + (1-x)(3p+6) = (9x+3)p + (6-6x)$, y queremos que el coeficiente sobre p sea mayor que 10 (eso sucede si $x \geq \frac{7}{9} = 0.78$, y que el término independiente sea mayor que 1 (que sucede si $x \leq \frac{5}{6} = 0.83$). Por lo tanto, para $x = \frac{4}{5}$, a esa estrategia le va mejor que a b, sin importar cuanto sea p :

$$x12p + (1-x)(3p+6) = \frac{4}{5}12p + \left(1 - \frac{4}{5}\right)(3p+6) = \frac{51}{5}p + \frac{6}{5} > 10p + 1.$$

Por otro lado, una cuenta parecida (jugar a y d mezcladas) para comparar con la estrategia c arroja $9x + 3 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ y $6 - 6x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la utilidad de jugar a con probabilidad $\frac{1}{3}$ y d con probabilidad $\frac{2}{3}$ nos da una utilidad de $\left(9 * \frac{1}{3} + 3\right)p + \left(6 - 6 * \frac{1}{3}\right) = 6p + 4$. Es decir, c no está dominada (da la misma utilidad que la mezcla, sin importar lo que haga el jugador 2).

Ejercicio 140.C. El que juega la estrategia pura no puede ser el jugador 2, ya que en ese caso el jugador 1 elegiría a si 2 jugara No, llevando a que 2 quiera jugar Usa (eso no es un equilibrio entonces), mientras que si 2 eligiera Usa en equilibrio, el jugador 1 jugaría d, que llevaría a 2 a querer cambiar a No (tampoco es un equilibrio).

Por las cuentas anteriores, si 1 juega la estrategia pura c, a 2 le da lo mismo jugar cualquier cosa, por lo que si juega $\frac{2}{3}$ (tiene que ser $\frac{2}{3}$, porque de lo contrario 1 juega a o d), el jugador 1 está contento jugando c, y es un equilibrio.

	No	Usa
a	$12, 0$	$0, 6$
b	$11, 1$	$1, 5$
c	$10, 2$	$4, 2$
d	$9, 3$	$6, 0$

Por otro lado, el jugador 1 podría jugar a con probabilidad q y d con $1 - q$ para dejar a 2 indiferente entre usar explosivos o no:

$$U_2(q,\text{No}) = 0q + 3(1-q) = 6q + 0(1-q) = U_2(q,\text{Usa}) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow U_2(q,\text{No}) = U_2(q,\text{Usa}) = 2.$$

De la parte A sabemos que para que 1 esté indiferente, 2 debe jugar No con probabilidad $\frac{2}{3}$, y entonces tenemos otro equilibrio en que 1 juega a con probabilidad $\frac{2}{3}$ y d con probabilidad $\frac{1}{3}$; el jugador 2 juega No con probabilidad $\frac{2}{3}$ (el jugador 1 no juega c, como pide el ejercicio).

Hay otra cantidad de equilibrios en que 2 juega $\frac{2}{3}$ (dejando a 1 indiferente entre a, c y d) y el jugador 1 elige c con probabilidad x, y una combinación de $\frac{1}{3}$ de a y $\frac{2}{3}$ de d con probabilidad $1-x$ (es decir, una mezcla entre los dos equilibrios analizados antes, en la que la proporción de a y d se mantiene constante). En ese caso la uilidad del jugador 2 de Usar o No explosivos es la misma: llamemos X a la distribución de probabilidades $\left((1-x)\frac{2}{3}, 0, x, (1-x)\frac{1}{3}\right)$ sobre las acciones a, b, c y d de tal manera que la utilidad de 2 de sus dos acciones es

$$U_2(q,\text{No}) = (1-x)\frac{1}{3}0 + x2 + (1-x)\frac{2}{3}3 = 2 = (1-x)\frac{1}{3}6 + x2 + (1-x)\frac{2}{3}0 = U_2(q,\text{Usa}).$$

Es decir, para cada x hay un equilibrio de ese tipo.

Ejercicio 141. La estrategia t_2 está dominada por la t_1, así que la ignoramos. Si el jugador 1 juega s_1 con probabilidad p, el jugador 2 obtiene utilidades

	t_1	t_3	t_4
u_2	$6p - 1000(1-p)$	3	$20(1-p) - 1000p$

.

Para $p = 0$, el jugador 2 juega t_4 seguro, por lo que 1 juega $p = 0$, y tenemos un equilibrio.

Para $0 < p < \frac{1}{60}$, el jugador 2 jugaría t_4 seguro, y el jugador 1 jugaría $p = 0$, con lo cual no hay un equilibrio ahí.

Para $\frac{1}{60} < p < \frac{1003}{1006}$, el jugador 2 jugaría t_3 seguro, por lo que el 2 jugaría $p = 0$, por lo que no hay equilibrio con esos p.

Para $\frac{1003}{1006} < p < 1$, el jugador 2 juega t_1 seguro, por lo que el jugador 2 jugaría $p = 1$, por lo que no hay equilibrio.

Para $p = 1$, 2 juega t_1 y 1 juega $p = 1$, por lo que ahí hay otro equilibrio.

Ya tenemos los dos equilibrios en estrategias puras. El equilibrio en estrategias mixtas debe ser con $p = \frac{1}{60}$ o $p = \frac{1003}{1006}$. Tenemos sin embargo, que con $p = \frac{1}{60}$, el jugador 2 jugaría alguna combinación entre t_3 y t_4, pero cualquiera sea la combinación, el jugador 1 jugaría $p = 0$ con certeza, por lo que no puede haber un equilibrio ahí.

Para $p = \frac{1003}{1006}$, el jugador 2 juega t_1 con probabilidad q y t_3 con probabilidad $1-q$. En ese caso, para que 1 sea indiferente entre sus dos estrategias, debemos tener

$$u_1(s_1, q) = 200q + 4(1-q) = 6(1-q) = u_1(s_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{101}.$$

Ya encontramos los 3 equilibrios. Y de pasada, hicimos la discusión que muestra que no hay más: para $p = 0$, tenemos un equilibrio; para $p < \frac{1}{60}$ no hay equilibrio; $p = \frac{1}{60}$, tampoco; para $\frac{1}{60} < p < \frac{1003}{1006}$ tampoco hay equilibrio; para $p = \frac{1003}{1006}$ hay un segundo equilibrio; para $\frac{1003}{1006} < p < 1$ no hay equilibrio, y para $p = 1$ está el tercero.

Ejercicio 142. Supongamos que el ciudadano es honesto con probabilidad p (eso incluye los casos en que evade seguro, y que es honesto seguro). La función de utilidad del funcionario es

$$u_f(p,e) = p\left(-100e^2\right) + (1-p)\left(e\left(100 - 100e^2\right) + (1-e)\left(-100e^2\right)\right) = 100e(1-e-p)$$

que como es una parábola con raíces 0 y $1-p$ se maximiza en $e=\frac{1-p}{2}$.

Las utilidades del ciudadano de ser honesto o hacer trampa, cuando el funcionario hace un esfuerzo e, son

$$u_c(h,e)=0 \text{ y } u_c(t,e)=e(-100)+(1-e)\,50.$$

Vemos entonces que no hay equilibrios en los que el ciudadano juega una estrategia pura. Si el equilibrio fuera (p,e), con $p=0$, la mejor respuesta del funcionario sería ejercer un esfuerzo de $\frac{1}{2}$, pero en ese caso la utilidad de hacer trampa sería -25, que es menor que 0, y la mejor respuesta del ciudadano sería jugar $p=1$, lo que contradice que $p=0$.

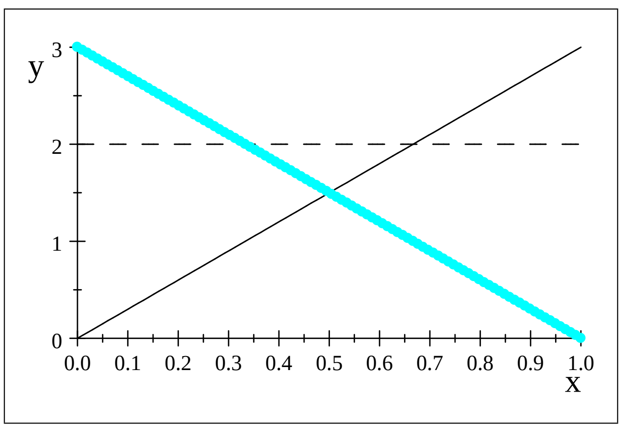
Por otro lado, si $p=1$ tenemos $e=0$, en cuyo caso la utilidad de hacer trampa es 50, mayor que 0, por lo que si estamos en un equilibrio, el individuo debe estar jugando "hacer trampa, $p=0$", que contradice $p=1$.

Para que el ciudadano juege estrategias mixtas debemos tener $u_c(h,e)=u_c(t,e)\Leftrightarrow e=\frac{1}{3}$. Eso a su vez implica que $\frac{1-p}{2}=\frac{1}{3}$, o $p=\frac{1}{3}$.

Ejercicio 143. Como C domina a D para 2, nunca la jugará en mixtas (por la caracterización). Sabiendo que D no se juega, M es dominada para 1, y por tanto no se jugará en mixtas tampoco. Entonces, I es dominada por C para 2, y por tanto la eliminamos también. En el único equilibrio (en mixtas o puras), 1 juega B y 2 juega C.

Ejercicio 144. Las utilidades de Top, Medio y Bajo, cuando el jugador II juega I con probabilidad q son $u_I(T,q)=2$, $u_I(M,q)=3q$ y $u_I(B,q)=3(1-q)$.

(i) Es fácil ver que las tres acciones del jugador I nunca tienen las mismas utilidades, por lo que no hay ningún equilibrio en el que I mezcla entre T,M y B.



(ii) Buscamos un equilibrio en el cual I mezcla entre T y B. En ese caso, debemos tener $u_I(T,q)=2=u_I(B,q)=3(1-q)\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}$. Por otro lado, si el jugador II está mezclando, debemos tener que es indiferente entre sus estrategias; para que eso suceda, el jugador I debe estar mezclando. Si a es la probabilidad de T y $1-a$ la probabilidad de B, debemos tener $u_{II}(a,I)=1-a=a=u_{II}(a,D)\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

(iii) No hay equilibrio en que I mezcla entre M y B (pues cuando las utilidades se igualan, T es una mejor respuesta).

(iv) Para que el jugador I quiera mezclar entre T y M, debemos tener $u_I(T,q)=2=3q=u_I(M,q)\Leftrightarrow q=\frac{2}{3}$. Igual que en la parte (ii), el jugador I debe mezclar, y usar a tal que $u_{II}(a,I)=3(1-a)=a=u_{II}(a,D)\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$.

(v) Por último, hay un solo equilibrio en el que el jugador I juega estrategias, puras, y eso es cuando juega M y el jugador II juega I.