1 El problema del agente y el principal

Muchas situaciones de interés para la economía se pueden analizar utilizando el siguiente marco teórico. Hay un "principal", que en la mayoría de los casos que analizaremos es el dueño de la empresa. También hay un "agente", que es un empleado de la empresa. El principal quiere inducir al agente a hacer la "acción" que sea mejor para la empresa. Habitualmente se asume que lo que se hace es escribir un contrato en el cual se dice que el agente debe hacer tal acción, en cuyo caso se le pagará una cierta suma, y que si no cumple tendrá ciertas consecuencias. Sin embargo, en muchos casos es muy difícil, sino imposible, para el principal observar las acciones del agente.[1] Se presenta entonces un caso de información asimétrica: el agente sabe qué acción tomó, y el principal no. Se plantea entonces el problema de qué debe hacer el principal para inducir al agente a hacer lo "correcto". En este capítulo estudiaremos la forma que toman los contratos óptimos para el principal, cuando sólo puede observar las "consecuencias" de las acciones del agente. En particular, asumiremos que el principal puede observar los niveles de producto que resultan de las acciones del agente.

Aunque no recibe mucho crédito, uno de los primeros modelos de agente principal fue elaborado en un contexto bastante distinto por Joseph Stiglitz, quien analizó la "racionalidad" económica de la medianería (una institución milenaria en la cual un cultivador que corre con los gastos de una plantación divide a la mitad los frutos de su cosecha con el dueño de la tierra). Otros nombres para el problema de agente principal son "riesgo moral" o "moral hazard" y modelos de "acción oculta" o "hidden action".

Formalmente entonces, asumiremos que hay n niveles de producto $x_i, i = 1, 2, ..., n$, que recibe el principal, y unas acciones a, b, etc (en general serán sólo dos) que puede tomar el agente. También, cada acción tiene un determinado costo para el agente. Por ejemplo, esforzarse mucho es más costoso que esforzarse poco. Para cada acción i, $c(i)$ será el costo para el agente. Asumiremos que el principal no puede observar la acción, pero sí el nivel de producto. Para que el supuesto tenga sentido, no puede suceder que a cada acción corresponda un solo nivel de producto, pues si así fuera, observar el producto sería equivalente a observar la acción. Por lo tanto, a cada acción $i = a, b, ...$ le corresponderá una distribución de probabilidades π_i sobre los niveles de producto. Así por ejemplo si la acción a hace que ocurra un nivel de producto de 1 con probabilidad $\frac{1}{3}$ y un nivel de producto de 2 con probabilidad $\frac{2}{3}$, tendremos

$$\pi_a(1) = \frac{1}{3} = 1 - \pi_a(2).$$

Algunas veces, en vez de $\pi_a(x_i)$ escribiremos π_{ia} para el nivel de producto i. Asumiremos también que hay un cierto nivel de "utilidad de reserva" $\overline{u}$ para el agente. Este nivel de utilidad representa la utilidad que recibiría si trabajara en la mejor alternativa a trabajar en la empresa.

Para tratar de inducir al agente a hacer la acción correcta el principal debe diseñar un sistema de incentivos s que le pague al trabajador $s(x_i)$ cuando ocurra el producto x_i. Algunas veces escribiremos s_i en vez de $s(x_i)$. El "valor" que le asigna el trabajador a cada cantidad de dinero s viene especificado por una función de utilidad u. Si el trabajador recibe $\$s$, el nivel de utilidad que alcanza es de $u(s)$ menos lo que le haya costado en términos de utilidad la acción que eligió. Asumiremos en todo momento que u es estrictamente creciente, y con derivada estrictamente positiva. En general se asumirá también que el agente es averso al riesgo, o lo que es lo mismo, que la derivada segunda de u es negativa.

En el proceso de diseño del esquema de incentivos, el principal enfrentará dos tipos de restricciones. La primera es la **restricción de participación**: si el principal quiere que el trabajador elija la acción a, por ejemplo, deberá cumplirse que el trabajador quiera elegir a, y no irse de la empresa. En términos formales

[1] O puede ser que el principal las observe, pero que sea imposible demostrar ante un juez cuál fue la acción tomada por el agente. En ese caso, el contrato tampoco tiene mucho sentido.

tenemos que la restricción de participación es

$$\sum_{1}^{n} \pi_a(x_i)\, u(s(x_i)) - c(a) \geq \overline{u}. \qquad \text{(PARTICIPACION)}$$

El lado izquierdo de la desigualdad es la utilidad de elegir la acción a: la sumatoria representa la utilidad esperada y $c(a)$ son los costos para el agente de hacer a.

La segunda restricción es la **restricción de incentivos**: si el principal quiere que el agente elija la acción a, por ejemplo, deberá cumplirse que el trabajador quiera elegir a, y no b u otra acción. Formalmente,

$$\sum_{1}^{n} \pi_a(x_i)\, u(s(x_i)) - c(a) \geq \sum_{1}^{n} \pi_b(x_i)\, u(s(x_i)) - c(b). \qquad \text{(INCENTIVOS)}$$

El lado izquierdo es, igual que antes, la utilidad para el agente de elegir la acción a. El lado derecho es la utilidad para el agente de elegir la acción b: la distribución de probabilidades sobre los pagos $s(x_i)$ es la correspondiente a b, y el costo de la acción, es el costo de b.

El problema del principal se resuelve en dos etapas. Primero el principal debe imaginarse que quiere implementar la acción a, por ejemplo, y encontrar la mejor forma de hacerlo. Una vez que resuelve ese problema calcula la utilidad que recibiría en ese caso. Luego hace lo mismo para todas las demás acciones. La segunda etapa es comparar todas las utilidades calculadas en la primera etapa y elegir la acción que le da la mayor utilidad.

En la primera etapa del problema del principal el problema de elegir el esquema óptimo para implementar la acción b es entonces: Elegir $s_1, s_2, ..., s_n$ para maximizar

$$\begin{aligned} & & & \sum_{1}^{n} \pi_{ib}(x_i - s_i) \\ \text{sujeto a } & \sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) & \geq & \ \overline{u} \\ & \sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) & \geq & \sum_{1}^{n} \pi_{ia} u(s_i) - c(a), \text{ para todo } a \neq b \end{aligned}$$

El primer renglón es la función objetivo del principal: debe maximizar el valor esperado de sus ingresos x_i menos sus costos. La disyuntiva que enfrenta el principal es que si elige sueldos s_i muy bajos, el trabajador se irá de la empresa. También, debe elegir los sueldos de tal forma que el trabajador elija la acción que el principal quiere. Analizaremos ahora la solución a este problema asumiendo que hay sólo dos acciones posibles a y b.

El Lagrangiano para el problema del principal es

$$L = \sum_{1}^{n} \pi_{ib}(x_i - s_i) + \lambda \left(\sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) - \overline{u} \right) + \mu \left(\sum_{1}^{n} \pi_{ib} u(s_i) - c(b) - \sum_{1}^{n} \pi_{ia} u(s_i) + c(a) \right)$$

y la condición de primer orden con respecto a s_i es

$$\begin{aligned} -\pi_{ib} + \lambda \pi_{ib} u'(s_i) + \mu (\pi_{ib} u'(s_i) - \pi_{ia} u'(s_i)) &= 0, \text{ para } i = 1, 2, ..., n \\ \frac{1}{u'(s_i)} &= \lambda + \mu \left[1 - \frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}} \right], \text{ para } i = 1, 2, ..., n \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Aunque en general puede resultar difícil computacionalmente resolver este sistema (junto con las restricciones de participación e incentivos), hay tres lecciones muy importantes y generales que se desprenden de la ecuación (1.1):

1. Si para un sistema de incentivos $s_1, ..., s_n$ "candidato" a ser óptimo, la restricción de incentivos está inactiva (es decir, el lado izquierdo es más grande que el derecho) entonces el esquema de sueldos debe ser constante si el agente es averso al riesgo. Para ver eso, notamos que si la restricción de incentivos está inactiva, entonces su multiplicador asociado μ debe ser 0. En ese caso, la ecuación (1.1) nos dice que $1 = \lambda u'(s_i)$ para todo i. Como u' es estrictamente decreciente, ello es posible sólo si $s_1 = s_2 = ... = s_n$. La intuición detrás de este resultado es bien general y fácil: si el agente es averso al riesgo, y el principal no, no tiene sentido que el agente absorba ningún tipo de riesgo, pues para el principal es "gratis" absorverlo él. Para asegurarle el nivel de utilidad de $\overline{u}$ al agente, el principal tiene que pagar más en promedio si los sueldos tienen riesgo (son distintos para distintos niveles de producto) que si no lo tienen. Vemos entonces que si el principal quiere implementar la acción con el costo c más bajo, el problema es muy sencillo: se pone un sueldo constante, en cuyo caso la restricción de incentivos se satisface automáticamente, y se elige dicho sueldo para que el nivel de utilidad alcanzado con ese sueldo sea $\overline{u}$. Para ver formalmente que la solución para implementar la acción de costo más bajo son óptimos los sueldos constantes, puedo resolver el problema del principal *sin* la restricción de incentivos. Eso nos da la ecuación (1.1) pero con $\mu = 0$ (es decir, sin el segundo término) lo que implica sueldos constantes. Como la solución *sin* la restricción de incentivos es también la solución *con* la restricción (siempre que la solución cumpla con la restricción ignorada, que la cumple en este caso), vemos que los sueldos constantes son óptimos.

2. La contracara de la primera lección, es que si se quiere implementar una acción que no es la de mínimo costo para el agente, los sueldos no serán constantes. Si se ponen sueldos constantes, el agente elegirá la acción de mínimo costo. Esta transferencia de riesgo del principal al agente genera una ineficiencia relativo a lo que sucedería si se pudieran observar las acciones del agente: el principal podría bajar el promedio de sueldos, manteniendo el nivel de utilidad del agente constante, y así aumentar su propia utilidad. La parte "observable" de esta lección, es que en muchas circunstancias los pagos de los trabajadores dependen de su productividad: para los gerentes están los "bonos" y para los trabajadores manuales, está el pago a destajo.

3. La tercera lección es que los pagos serán más altos cuanto más "informativo" sobre la acción elegida es el nivel de producto ocurrido. El número $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ se llama el ratio de verosimilitud de a con respecto a b si ocurrió x_i. Nos dice cuán probable es que el agente haya elegido a y no b, si ocurrió el nivel de producto x_i : si π_{ia} es grande, quiere decir que es muy probable que ocurra x_i cuando el agente hace a, y si π_{ib} es pequeño, quiere decir que el nivel de producto x_i es poco probable si se hace b. Para ver eso, calculemos con la regla de Bayes la probabilidad que el agente haya elegido a y no b, si ocurrió el nivel de producto x_i:

$$P(a \mid x_i) = \frac{P(x_i \mid a) P(a)}{P(x_i \mid a) P(a) + P(x_i \mid b) P(b)} = \frac{\pi_{ia} P(a)}{\pi_{ia} P(a) + \pi_{ib} P(b)} = \frac{P(a)}{P(a) + \frac{\pi_{ib}}{\pi_{ia}} P(b)}$$

   Por lo tanto, si $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es grande, quiere decir que es muy probable que el agente haya elegido a y no b. Por lo tanto, si queremos implementar b, sería razonable "castigar" al agente con un sueldo bajo en este caso. Eso ocurre en el esquema óptimo, ya que si $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es grande, el lado derecho de la ecuación (1.1) es pequeño, por lo que $u'(s_i)$ debe ser grande, o lo que es lo mismo, s_i pequeño.

Una sutileza que se desprende de la tercera conclusión es que los pagos de bonos y esas cosas, no tendrían que ser crecientes con el nivel de producto alcanzado, sino que tendrían que depender de cuán informativos son los niveles de producto sobre la acción elegida. Por supuesto, si se cree que $\frac{\pi_{ia}}{\pi_{ib}}$ es creciente (o decreciente) en x_i, los bonos serán crecientes en el nivel de producto.

A menudo, en la discusiones de política económica, o de gerenciamiento, se ignora una lección fundamental del problema que estamos analizando: por más que sea obvio que se está eligiendo una acción que no es la que genera mayores niveles de producto, puede ser muy caro inducir al agente a elegir la acción correcta. Para ilustrar esto, resolveremos uno de los problemas más sencillos de agente principal, en el marco de una discusión de política económica y educativa.

Ejemplo 1 Los vouchers para educación. En la actualidad, en muchos países se está discutiendo la posibilidad de implementar en la educación pública un sistema de vouchers. Mediante el mismo, se premiaría a las maestras, escuelas, o directoras que tuvieran mejores rendimientos. Para medir rendimientos se utilizan unas pruebas que se dan a todos los estudiantes del país y se comparan los rendimientos de las distintas escuelas en dichos exámenes.

Para analizar la conveniencia de esta medida de política, analizamos un modelo de agente principal. El principal es el gobierno, y el agente es la directora de la escuela. Hay dos acciones posibles para la directora: actuar como una vaga a o trabajar b (piensen en b como la acción "buena" y en a como la "alternativa"). Hay dos niveles posibles de "producto" para cada acción: $x_1 = 0$ es el evento "más de la mitad de la clase reprueba los exámenes generales"; $x_2 = 1$ es "menos de la mitad reprueba". Las distribuciones de probabilidad vienen dadas por: $\pi_{1a} = \frac{1}{2}$ y $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$. La utilidad de la maestra de un sueldo de s es $u(s) = \log s$. Los costos son $c(a) = 1$, $c(b) = b \geq 1$ y la utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Para implementar a, debemos poner un sueldo constante s que le de a la directora una utilidad de 0 :

$$\pi_{1a} u(s) + \pi_{2a} u(s) - c(a) = \overline{u} \Leftrightarrow u(s) - 1 = 0 \Leftrightarrow s = e.$$

La utilidad del gobierno en este caso es

$$V(a) = \frac{1}{2}(0 - e) + \frac{1}{2}(1 - e) = \frac{1}{2} - e$$

Para implementar b, sabemos que ambas restricciones están activas: la de participación está "siempre" activa, pues de si no lo estuviera, se podrían bajar ambos sueldos un poquito; la de incentivos está activa, pues si no lo estuviera, la ecuación (1.1) nos dice que los sueldos deberían ser constantes, pero con sueldos constantes, el agente hace a. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b &= 0 \\ \frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b &= \frac{1}{2}\log s_1 + \frac{1}{2}\log s_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Llamando u_i a $\log s_i$ tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 - b = 0 \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 = 3 - 2b \\ u_2 = 2b - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = e^{3-2b} \\ s_2 = e^{2b-1} \end{array}$$

Tenemos ahora que

$$V(b) = \frac{1}{4}(0 - e^{3-2b}) + \frac{3}{4}(1 - e^{2b-1})$$

por lo que conviene implementar b si y sólo si

$$V(b) \geq V(a) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(0 - e^{3-2b}) + \frac{3}{4}(1 - e^{2b-1}) \geq \frac{1}{2} - e.$$

Definiendo $x = e^{2b}$, tenemos que vale la pena implementar la acción b si y sólo si

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x^2e^{-1} + \left(\frac{1}{4} + e\right)x - \frac{1}{4}e^3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}e + \frac{2}{3}e^2 + \frac{1}{6}\sqrt{e^2 + 8e^3 + 4e^4} \geq x \\ &\Leftrightarrow b \leq 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 4e + \sqrt{1 + 8e + 4e^2}}{6e} \end{aligned}$$

La conclusión de política económica es que puede ser muy caro implementar un sistema de vouchers en el cual las maestras se esfuercen. ■

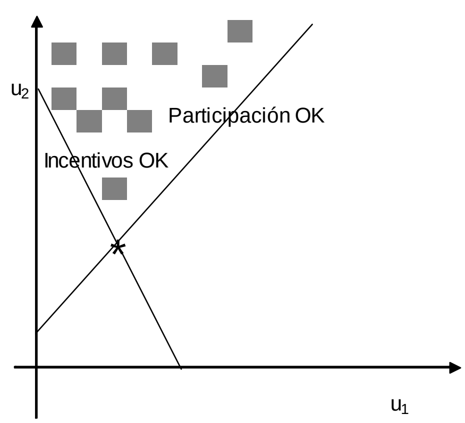
Análisis gráfico del problema de 2×2. Asumamos que hay dos acciones a, b y dos niveles de producto x_1, x_2. Pondremos $a \equiv \pi_{1a}$ y $b \equiv \pi_{1b}$ con $a > b$. Sea $f \equiv u^{-1}$, de tal manera que $f(u_1)$ nos dice cuál es la cantidad de dinero que hará que el agente tenga una utilidad de u_1.[2] Como la utilidad es estrictamente creciente, la inversa existe. Además, el problema de elegir niveles de salarios es equivalente al de elegir niveles de utilidad, pues a cada nivel de utilidad le corresponde un solo nivel de salario. Por eso estudiaremos el problema desde esta nueva perspectiva. El problema del principal cuando quiere implementar b, es entonces el de elegir los niveles de utilidad u_1, u_2 para maximizar

$$\begin{aligned} & b(x_1 - f(u_1)) + (1-b)(x_2 - f(u_2)) \\ \text{sujeto a } bu_1 + (1-b)u_2 - c_b &\geq \overline{u} \\ bu_1 + (1-b)u_2 - c_b &\geq au_1 + (1-a)u_2 - c_a \end{aligned}$$

Nos quedan entonces dos restricciones lineales

$$\begin{aligned} u_2 &\geq \frac{\overline{u} + c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1 \\ u_2 &\geq u_1 + \frac{c_b - c_a}{a-b} \end{aligned}$$

que determinan que la región de donde se pueden elegir los pares de u_1 y u_2 es la pintada con cuadritos grises en la siguiente gráfica.



Cuando queremos implementar b, las dos restricciones están activas, por lo que el óptimo se encuentra en el punto marcado con *. El agente está completamente asegurado cuando para todo nivel de producto, tiene el mismo sueldo, es decir cuando $u_2 = u_1$. Cuando el principal maximiza su utilidad sólo sujeto a la restricción

[2] Formalmente, definimos $f(u)$ (para cada u tal que existe s con $u(s) = u$) como el número s tal que $f(u) = f(u(s)) \equiv u^{-1}(u(s)) = s$.

de participación, sabemos que $u_1 = u_2$, por lo que las curvas de indiferencia del principal son tangentes a la restricción de participación a lo largo de la línea de 45°. Formalmente, sustituyendo la restricción de participación en la función objetivo del principal obtenemos

$$b\left(x_1 - f\left(u_1\right)\right) + (1-b)\left(x_2 - f\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right)\right)$$

y la condición de primer orden es

$$\begin{aligned} -bf'\left(u_1\right) + (1-b) f'\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right)\frac{b}{1-b} &= 0 \Leftrightarrow \\ f'\left(\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1\right) &= f'\left(u_1\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

De la definición de f, dada por $f\left(u\left(s\right)\right) \equiv u^{-1}\left(u\left(s\right)\right) = s$, y derivando con respecto a s, obtenemos el resultado del teorema de la función inversa: para u tal que existe s para el cual $u = u\left(s\right),$

$$\frac{du^{-1}\left(u\left(s\right)\right)}{du}\frac{du\left(s\right)}{ds} = 1 \Leftrightarrow \frac{du^{-1}\left(u\left(s\right)\right)}{du} = \frac{1}{u'\left(s\right)} \Leftrightarrow f'\left(u\right) = \frac{du^{-1}\left(u\right)}{du} = \frac{1}{u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)}.$$

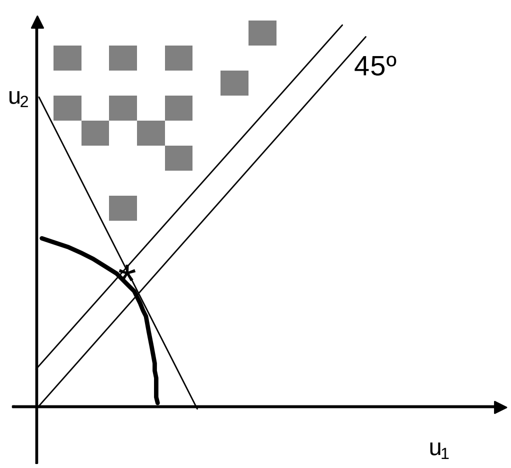
Por lo tanto, f'' se obtiene derivando esta ecuación:

$$f''\left(u\right) = \frac{d^2u^{-1}\left(u\right)}{du^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\frac{du^{-1}(u)}{du}}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\frac{1}{u'(u^{-1}(u))}}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^2} = -\frac{u''\left(u^{-1}\left(u\right)\right)}{\left[u'\left(u^{-1}\left(u\right)\right)\right]^3} > 0.$$

Esto implica que f' es monótona, y por la ecuación (1.2) tenemos que

$$\frac{\overline{u}+c_b}{1-b} - \frac{b}{1-b}u_1 = u_1 \Leftrightarrow u_2 = u_1.$$

Lo que nos dice esto es que en ausencia de problemas de información (cuando se puede ignorar la restricción de incentivos) es óptimo asegurar al agente completamente. En términos gráficos tenemos



La curva gruesa es la curva de indiferencia del princpal en el óptimo. Comparando las soluciones con y sin información asimétrica, vemos que en ambos casos el agente recibe $\overline{u}$, pero con información asimétrica, la utilidad del principal es menor, pues está en una curva de indiferencia más alta (la utilidad del principal crece cuanto más bajas están sus curvas de indiferencia). Esta pérdida de bienestar y eficiencia se debe a que en el caso de información asimétrica el agente recibe su nivel de utilidad $\overline{u}$ con sueldos con riesgo, mientras que en el caso de información simétrica, los sueldos son sin riesgo. Como el agente es averso al riesgo, el nivel de $\overline{u}$ se consigue con sueldos más altos en promedio cuando los mismos tienen riesgo. El principal preferiría sacarle el riesgo al trabajador, y bajar los sueldos en promedio. El problema es que si hace eso, el trabajador hace a y no b. ■

Ejemplo 2 Otro ejemplo de 2×2**.** Sean: $x_i = i$ y $\pi_{ia} = \frac{1}{2}$ para $i = 1,2$; $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$; $c_a = \frac{1}{4}$ y $c_b = \frac{1}{2}$; $u(s) = \sqrt{s}$ y $\overline{u} = \frac{3}{4}$. Para implementar a, ponemos $s_1 = s_2 = s$ y la utilidad del agente igual a $\overline{u}$ para obtener $s = 1$ y unos beneficios para el principal de $\frac{1}{2}$. Para implementar b,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sqrt{s_1} + \frac{3}{4}\sqrt{s_2} - \frac{1}{2} &= \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\sqrt{s_1} + \frac{1}{2}\sqrt{s_2} - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

resolviendo para $\sqrt{s_1}$ y $\sqrt{s_2}$ (un sistema lineal) y elevando al cuadrado obtenemos $s_1 = \frac{1}{4}$ y $s_2 = \frac{9}{4}$ y los beneficios del principal son 0. ■

Ejemplo 3 Un ejemplo con tres niveles de producto. Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$. El problema que debe resolver el principal si desea que el agente elija la acción k (para $k = a, b$) es: elegir s_1, s_2 y s_3 para maximizar

$$\sum_1^3 (x_i - s_i)\,\pi_{ik}$$

sujeto a

$$\sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{ik} - c_k \geq \overline{u} \tag{1.3}$$

$$\sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{ik} - c_k \geq \sum_1^3 u(s_i)\,\pi_{im} - c_m \text{ para } m = a, b \tag{1.4}$$

Las condiciones de primer orden para este problema se obtienen derivando con respecto a s_i y son

$$\frac{1}{u'(s_i)} = \lambda + \mu\left[1 - \frac{\pi_{im}}{\pi_{ik}}\right], \text{ para } i = 1,2,3 \tag{1.5}$$

donde λ es el multiplicador de la restricción de participación y μ el de la de incentivos.

Supongamos que $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, $c_a = \overline{u} = 0 < c = c_b$. Supongamos además que $\pi_{1b} = \frac{1}{4}$, $\pi_{2b} = d$ y $\pi_{3b} = \frac{3}{4} - d$ y que $u(s) = \log s$.

Resolveremos dos casos: $d = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$, pero antes, un resultado que será útil en muchas circunstancias.

Lema 4 *Si la función de utilidad es continua, y no acotada por debajo, la restricción de participación está siempre operativa. Es decir, el agente recibirá un nivel de utilidad* $\overline{u}$*, y el principal siempre está dispuesto a pagar algo por relajar la restricción de participación.*

Prueba: Supongamos que (s_i^z) es una solución al problema del principal, cuando quiere implementar la acción z pero que

$$\sum_1^n u(s_i^z)\,\pi_{iz} - c_z > \overline{u}.$$

Encontraremos un esquema de pagos (s_i^*) que satisface las restricciones de participación y de incentivos y que le da al principal unos beneficios estrictamente mayores que aquellos que arroja el esquema (s_i^z). Definimos $\Delta \equiv \sum u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z - \overline{u} > 0$ y para cada i definimos $v_i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ mediante $v_i(r) = u(s_i^z - r)$ que hereda de u la continuidad y que no es acotada por debajo. Como $v_i(0) > u(s_i^z) - \Delta$ y para r suficientemente grande $u(s_i^z) - \Delta > v_i(r)$, existe un r_i^* tal que $v_i(r_i^*) = u(s_i^z) - \Delta$. Por lo tanto, para $s_i^* = s_i^z - r_i^*$ tenemos

$$u(s_i^*) = u(s_i^z - r_i^*) = v_i(r_i^*) = u(s_i^z) - \Delta.$$

Tenemos entonces que $s_i^* < s_i^z$, para todo i, por lo cual los beneficios para el principal son estrictamente mayores bajo (s_i^*) que bajo (s_i^z). Además,

$$\begin{aligned}
\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{iz} - c_z &= \sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{iz} - c_z \\
&= \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - \Delta - c_z \\
&= \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} + c_z + \overline{u} - c_z = \overline{u}
\end{aligned}$$

por lo que (s_i^*) satisface la restricción de participación. Ahora, verificaremos que satisface la de incentivos:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{iz} - c_z &\geq \sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ia} - c_a \Leftrightarrow \\
\sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{iz} - c_z &\geq \sum_1^n [u(s_i^z) - \Delta]\pi_{ia} - c_a \Leftrightarrow \\
\sum_1^n u(s_i^z)\pi_{iz} - \Delta - c_z &\geq \sum_1^n u(s_i^z)\pi_{ia} - \Delta - c_a
\end{aligned}$$

y esta última ecuación se satisface pues habíamos empezado suponiendo que (s_i^z) era una solución, y que por tanto cumplía la restricción de incentivos. ■

Comentario. Otra forma de ver que la restricción de participación siempre estará activa con utilidad continua y no acotada por debajo (en el caso en que hay sólo dos acciones posibles) es la siguiente. Supongamos lo contrario y sea (s_i^z) es una solución al problema del principal, cuando quiere implementar la acción z pero que

$$\sum u(s_i^z)\pi_{iz} - c_z > \overline{u}.$$

Tomemos un nivel de producto i tal que $\pi_{iz} < \pi_{ia}$ para la otra acción (la que no se quiere implementar). En tal caso, reduciendo s_i^z en ε, para ε chico, las dos restricciones aún se cumplirán, y el nuevo plan arroja mayores beneficios que (s_i^z). Eso contradice que (s_i^z) fuera óptimo.

Volvemos ahora al ejemplo que estábamos tratando antes del Lema.

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Primera parte: beneficios de implementar b.* La condición de primer orden en la ecuación (1.5) implica que

$$s_1 = s_2 \overset{(1.3)}{\Rightarrow} u_2 = 2c - u_3 \overset{(1.4)}{\Rightarrow} u_3 = 4c.$$

(aquí ya usamos que la ecuación (1.3) se satisface con igualdad) Por lo tanto, obtenemos $u_1 = u_2 = -2c$. Como además $u_i = \log s_i$, encontramos

$$s_1 = s_2 = e^{-2c} \text{ y } s_3 = e^{4c}.$$

El valor de los beneficios esperados (máximos) cuando el principal quiere implementar b es entonces

$$V_b = \sum_1^3 (x_i - s_i)\,\pi_{ib} = 3 - \frac{e^{-2c} + e^{4c}}{2}.$$

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Segunda parte: beneficios de implementar a*. En el problema de implementar a, la restricción de incentivos (ecuación 1.4) no es operante, pues $c_a = 0 \leq c_b$. Por lo tanto, $\mu = 0$ en la ecuación 1.5, y obtenemos que $s_i = s$ para todo i. El problema ahora es hallar el nivel s óptimo. Eso se resuelve sustituyendo $s_i = s$ en la ecuación 1.3, para obtener $u(s) = 0$, o equivalentemente, $s_i = 1$ para todo i. Obtenemos entonces que los beneficios máximos cuando queremos implementar a son

$$V_a = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

Caso 1: $d = \frac{1}{4}$. *Tercera parte: elegir la acción a implementar*. Una vez que tenemos los beneficios máximos si implementamos a, y aquellos si implementamos b, debemos decidir qué acción es la mejor.

$$V_b \geq V_a \Leftrightarrow \frac{8}{3} \geq e^{-2c} + e^{4c} \equiv g(c)$$

Como $g'(c) = -2e^{-2c} + 4e^{4c} > 0$ para todo c, $\lim_{c\to\infty} g(c) = \infty$ y $g(0) = 2 < \frac{8}{3}$, obtenemos que existe un c^* tal que $V_b \geq V_a$ si y sólo si, $c \leq c^*$.

Una característica de este problema, con $d = \frac{1}{4}$, es que cuanto más grande el producto, más grande el salario. Ahora veremos un caso en que no es así.

Caso 2: $d = \frac{1}{2}$. Haciendo exactamente lo mismo que en el caso 1, obtenemos $s_1 = s_3 = e^{-2c}$ y $s_2 = e^{4c}$. Luego, $V_b = \frac{11}{4} - \frac{e^{-2c}+e^{4c}}{2}$ y, por supuesto, $V_a = \frac{5}{3}$. Una cosa que debemos verificar, es que V_b debería ser menor ahora que en el caso 1 (y lo es). La razón es que cuesta lo mismo implementar b en ambos casos (pues el contenido informacional es el mismo en ambos casos) pero el producto obtenido en este caso es menor que en el caso 1, ya que la distribución sobre productos es peor. Como antes,

$$V_b \geq V_a \Leftrightarrow \frac{13}{6} \geq e^{-2c} + e^{4c} \equiv g(c)$$

y otra vez, existe un $\widehat{c} < c^*$ tal que $V_b \geq V_a$ si y sólo si, $c \leq \widehat{c}$. Para $c \in (\widehat{c}, c^*)$, vale la pena implementar b si $d = \frac{1}{4}$ y no si $d = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 5 Encuentre V_b, V_a y s_i, para $i = 1, 2, 3$, para $d \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. Encuentre los niveles de c para los cuales es óptimo implementar la acción b.

Ejercicio 6 En el ejemplo desarrollado más arriba, suponga que $x_i = i$, y demuestre que con $d = \frac{1}{2}$, b no es una acción óptima para ningún nivel de $c > 0$.

Ejercicio 7 En el modelo de agente principal con dos acciones, $u'' < 0$ y n niveles posibles de producto para cada acción, suponga que cae únicamente el costo de la acción b. Es decir, suponga que c_b cae desde un nivel $\widetilde{c_b}$ a un nivel $c_b^* < \widetilde{c_b}$ y que c_a se mantiene constante. Demuestre que $V_b(c_b^*) \geq V_b(\widetilde{c_b})$. Pista: esto se puede hacer explícitamente, o con el Lagrangiano, o con el Teorema de la Envolvente (ver Sección **??**). Demuestre que si la función de utilidad del agente es esctrictamente creciente, continua y no está acotada por debajo, entonces $V_b(c_b^*) > V_b(\widetilde{c_b})$ (Pista: utilice la construcción que hicimos en la demostración del Lema 4). Otra forma, dado que las dos restricciones quedan con desigualdad estricta (si ponemos los sueldos óptimos $\widetilde{s}_i$, con c_b^* es restarle ε a todos los sueldos: el principal gana más plata, y se siguen cumpliendo las restricciones.

Ejercicio 8 Muestre que en el problema con dos acciones, es mejor usar una zanahoria (bajar el costo de la acción a, que se quiere implementar) que un garrote (subir el costo de la acción b, la alternativa). Por supuesto, la suba de un costo debe ser igual o "comparable" a la baja del otro (si no, no tiene gracia). En particular, demuestre que la solución al problema del principal con costos $(c_a, c_b) = \left(c_a^0 - \Delta, c_b^0\right)$ para $\Delta > 0$, es mejor que la solución cuando los costos son $(c_a, c_b) = \left(c_a^0, c_b^0 + \Delta\right)$. (Si quieren, pueden hacerlo con Δ arbitrariamente pequeño, y usando el teorema de la envolvente).

Ejercicio 9 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$. Supongamos que $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, $c_a = 1 < c_b$ y $\overline{u} = -\frac{3}{2}$. Supongamos además que $\pi_{1b} = \pi_{2b} = \frac{1}{4}$, $\pi_{3b} = \frac{1}{2}$ y que $u(s) = -e^{-s}$.

Parte A. Encuentre los contratos óptimos para implementar a y b.

Parte B. Encuentre los niveles de c_b para los cuales el principal quiere implementar b.

Ejercicio 10 Deberes. El gerente de una empresa puede ejercer un esfuerzo alto $e_a = 2$ o un bajo esfuerzo $e_b = 1$. El ingreso de la empresa -sin contar los costos- puede ser o bien $\pi_1 = 16$ o $\pi_2 = 2$. La elección del gerente afecta la probabilidad de que un beneficio particular se dé. Si elige e_a entonces ocurre π_1 con probabilidad $p = 3/4$, mientras que si elige e_b el resultado π_1 se da con probabilidad $1/4$. El dueño de la empresa es neutral al riesgo y diseña un contrato que especifica un pago y_i contingente a los ingresos π_i. La función de utilidad del gerente es $u(s, e) = \sqrt{s} - e$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$.

Parte A. Resuelva el contrato de información completa y establezca la acción que querrá inducir el dueño. ¿Qué acción querrá hacer el gerente?
Parte B. Pruebe que el contrato anterior no es de equilibrio cuando el esfuerzo del gerente no es observable. Resuelva el contrato de segundo óptimo (el mejor, cuando el gerente no puede observar la acción del gerente). Compare los beneficios que obtiene el dueño en esta situación respecto de la del punto anterior.
Parte C. Comente las implicaciones que tiene la existencia de información asimétrica para compartir los riesgos entre agente y principal.

En general, pero no siempre, asumiremos que todas las acciones le asignan probabilidad positiva a todos los niveles de producto. Para ver por qué, imaginemos que una acción (digamos la a) le asigna probabilidad positiva a un cierto x_i, pero la acción b (de costo alto) no. Si queremos implementar la acción b, no habrá "problema" de agencia, pues alcanzará con pagarle un sueldo fijo al agente (que le asegure $\overline{u}$ si hace b) para todos los niveles de producto menos para x_i, y pagarle "menos infinito" si ocurre x_i. En ese caso, el agente no querrá hacer la acción a, pues con una probabilidad positiva ocurrirá el nivel de producto x_i y ello le dará una utilidad muy pequeña (que más que compensará la ganancia de costo por hacer a en vez de b). Este tipo de contrato se llama "burning oil" pues es como avisarle al agente: "si sale el producto x_i te quemo en aceite hirviendo". En algunos casos, cuando la utilidad está acotada por debajo, o lo sueldos admisibles tienen una cota inferior, no se podrá hacer el burning oil, y volverá a surgir el problema de la agencia aunque no todas las acciones le asignen probabilidad positiva a todos los niveles de producto.

Ejemplo 11 Supongamos que hay: tres niveles de producto x_1, x_2 y x_3; dos acciones a y b, con $\pi_{ia} = \frac{1}{3}$ para todo i, y $\pi_{1b} = 0$, $\pi_{2b} = \frac{1}{3}$ y $\pi_{3b} = \frac{2}{3}$. El costo de a es $c_a = 0$ y el de b es $c_b = 1$. La utilidad es $u(s) = \log s$ y $\overline{u} = 0$. Para implementar a ponemos $s_1 = s_2 = s_3 = s$ y nos queda $\log s = 0 \Leftrightarrow s = 1$. Para implementar b ignoramos la restricción de incentivos; sabemos que en ese caso lo óptimo es fijar sueldos constantes $s_2 = s_3 = z$ (el sueldo s_1 no aparece en el problema) y queda $\log z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = s_2 = s_3 = e$.

Luego, podemos elegir s_1 para hacer que se cumpla la restricción de incentivos: $\log z - 1 \geq \frac{1}{3}\log s_1 + \frac{2}{3}\log z \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{3}\log s_1 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow s_1 \leq e^{-2}$.

Ejercicio 12 Hay dos acciones a y b, con costos 0 y $c > 0$ respectivamente. Hay dos niveles posibles de producto, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. La acción a da un nivel de producto x_1 con probabilidad 1 y la acción b da el nivel de producto x_2 con probabilidad 1. La función de utilidad del agente es $u(s) = \sqrt{s}$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} < 0$, pero con $\overline{u} + c > 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar a.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para implementar b.

Parte C. ¿Para qué niveles de c conviene implementar a y para cuáles b?

Ejercicio 13 En el modelo de agente principal, suponga que hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Suponga que $\pi_{ia} = \frac{1}{2}$ para todo i, $\pi_{1b} = p < \frac{1}{2}$, y $c_a = \overline{u} = 0 < c = c_b$. La función de utilidad del agente es $u(s) = \log s$. Encuentre cuanto cuesta implementar cada acción, y cuál es la acción óptima. Los resultados deben estar sólo como función de c y p.

Ejercicio 14 Un agente es contratado por un principal neutral al riesgo para trabajar en un proyecto. Si el proyecto sale bien, el principal recibe \$1.000, y si el proyecto sale mal, 0. La probabilidad de éxito es $1 - e^{-h}$ donde h es el número de horas que el agente dedica al proyecto. El agente tiene una función de utilidad estrictamente creciente $u(s)$, con $u'' < 0$, sobre sus niveles de salario s (que no tienen porqué ser positivos). El agente trabajará en total 40 horas, y cualquier tiempo de ese total que no dedique al proyecto, lo trabajará lavando platos a \$10 por hora.

Parte A. Suponga que el principal puede observar la cantidad de horas trabajadas en el proyecto, y que puede hacer los pagos depender de las horas trabajadas y del éxito del proyecto (le puede pagar un salario total s_e si el proyecto resulta exitoso, o s_f si el proyecto falla). El agente puede aceptar o rechazar el contrato.

I. Escriba el problema que debe resolver el principal para maximizar su ingreso esperado.

II. Muestre que en la solución a este problema, los pagos al agente no dependen del resultado. Utilice esta propiedad para encontrar el número óptimo de horas de trabajo.

Parte B. Suponga ahora que el principal no puede observar las horas trabajadas, y que el contrato sólo puede especificar el pago como función del resultado. Otra vez, el agente puede aceptar o rechazar el contrato.

I. Escriba el problema que debe resolver el principal para maximizar su ingreso esperado.

II. Demuestre que para cualquier $h^* > 0$ que el principal quiera que el agente trabaje, el principal deberá pagar un sueldo más alto si el proyecto es exitoso. En otras palabras, si el principal quiere que el trabajador haga algo (trabaje una cantidad positiva de horas), deberá pagarle más si el proyecto es exitoso, que si no lo es.

Notemos que en el ejercicio anterior no había un costo separado de hacer una cierta acción: el costo de hacer un cierto h, era que dejaba de lavar platos esas h horas. Eso es relevante, porque muestra que no todos los problemas que vayamos a ver entran exacto en el marco de las notas, sino que hay variaciones, pero las mismas ideas se aplican.

Ejercicio 15 Efficiency Wages. Salarios de eficiencia. Esta es la teoría de Shapiro y Stiglitz (Shapiro, C. and Stiglitz, J. (1984), "Equilibrium unemployment as a worker discipline device," American Economic Review, June 1984) de por qué los salarios son más altos que lo que "deberían ser", y por qué no bajan, aún si hay desempleo: si bajan los salarios, los trabajadores no ejercen esfuerzo. Este ejercicio tiene un "aire" de agente principal, pero no se precisa saber nada de agente principal para resolverlo. La utilidad de cada trabajador de una firma depende de su sueldo w y su esfuerzo e de acuerdo a la función $U(w, e) = w - e$. El trabajador puede elegir niveles de esfuerzo 0 o 1. El valor del producto de la firma es αm, donde $\alpha > 0$ y m es el número de empleados que eligen $e = 1$. La firma puede monitorear el esfuerzo de sólo un trabajador. Si $e = 0$ para el trabajador, no se le paga ese período. Si $e = 1$, se le paga w. Todos los trabajadores no monitoreados ganan w, y todos los trabajadores tienen iguales chances de ser monitoreados. Suponga que la firma emplea n trabajadores.

Parte A. Encuentre los valores de n y w para los cuales los trabajadores elegirán $e = 1$.

Parte B. Escriba el problema que debe resolver la firma para maximizar beneficios, asumiendo que puede elegir n y w.

Parte C. Encuentre los valores óptimos de n y w.

Parte D. Muestre (hay tres maneras distintas) que cuando sube α suben los beneficios del principal.

Ejercicio 16 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y $b > a > 0$. Los niveles posibles de producto son x_1 y $x_2 > x_1$. Las acciones del agente no son observables, y la función de utilidad del agente es $u(s, k) = -e^{-s} - k$, para $k = a, b$ y s el salario (que puede ser negativo). El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u} < -1 < -b$.

Parte A. Si $\pi_{2a} = \frac{9}{10}$ y $\pi_{2b} = 1$ y $\frac{x_1 - x_2}{10} < \ln\left(\frac{b+\overline{u}}{a+\overline{u}}\right)$, diseñe un contrato de equilibrio.

Parte B. Si $\pi_{2a} = a$ y $\pi_{2b} = b$, para $1 > b > a > 0$, diseñe un contrato de equilibrio.

Ejercicio 17 Hay dos acciones que puede tomar el agente, a y b, con $a = \log 5/4$ y $b = 3a/2$. Los niveles posibles de producto son $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$. Las acciones del agente no son observables y la función de utilidad del agente es $u(s, k) = \log s - k$ para $k = a, b$. La utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$. Si el agente hace la acción a, la distribución de probabilidades sobre los niveles de producto es $\pi_{1a} = \pi_{2a} = 1/2$, y si hace la acción b, la distribución es $\pi_{1b} = 1/4 = 1 - \pi_{2b}$.

Parte A. Calcule las utilidades del principal cuando implementa a, y cuando implementa b. ¿Qué acción querrá implementar el principal?

Parte B. Repita la Parte A, asumiendo que $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ejercicio 18 En teoría, este problema fue el causante de la crisis que golpeó a Argentina y Uruguay en el 2001 y 2002. El federalismo argentino es así: las provincias recaudan impuestos, los pasan al gobierno central, y éste reparte lo recaudado entre las provincias. Este diseño sería bueno si la recaudación no dependiera de la voluntad de las provincias, y fuera aleatoria (en ese caso, el diseño está bueno porque al compartir lo recaudado es como un seguro para las provincias). Pero como la recaudación depende del esfuerzo que hagan las provincias, y sólo una parte de la recaudación vuelve a la provincia, las mismas tienen incentivos a no recaudar nada. Esta falla en el diseño fue la que generó un déficit fiscal gigante que hundió primero a Argentina y después a Uruguay.

Imaginemos que hay Gobierno Central y dos provincias. La utilidad de la provincia i es

$$\sqrt{g_i} - t_i$$

donde g_i es el gasto de la provincia y t_i son los impuestos recaudados en esa provincia. Suponga ahora que el gobierno central quiere maximizar su superávit fiscal esperado, sujeto a que las provincias tengan una utilidad mayor que $\overline{u}$ (que puede ser la utilidad de hacer un plebiscito y hacerse independientes. No asumimos nada sobre el signo de $\overline{u}$). Suponga también que las provincias transfieren toda su recaudación al gobierno, y que luego este les devuelve una parte. Las provincias sólo pueden gastar lo que les transfiere el Gobierno. Para simplificar, suponga también que p, la probabilidad de que la recaudación sea alta, puede ser sólo $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$, dependiendo del nivel de "esfuerzo" de la provincia (no hay un esfuerzo explícito en el modelo); asumiremos también que las realizaciones de la recaudación son independientes entre las provincias.[3] El nivel de recaudación alto es \$1 y el bajo es \$0.

Parte A. Llame s_A y s_B a las transferencias del gobierno a las provincias si la recaudación de la provincia fue Alta o Baja respectivamente, y escriba el problema de maximización del Gobierno Central, suponiendo que quiere implementar la acción que hace que la recaudación sea alta con probabilidad $\frac{3}{4}$.

Parte B. Encuentre los niveles óptimos de s_A y s_B, de la parte A.

Parte C. ¿Para qué niveles de $\overline{u}$ el Gobierno prefiere implementar la acción que da recaudación alta con probabilidad $\frac{3}{4}$, y para cuáles la acción que da recaudación alta con probabilidad $\frac{1}{4}$?

Ejercicio 19 Suponga que el producto es $x = \varepsilon f(e)$, donde $e \in [0, \infty)$ es el esfuerzo del agente y ε es una variable aleatoria que puede tomar valores ε_1 y ε_2, con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, con iguales probabilidades. La función f es continua y estrictamente creciente. El agente es averso al riesgo, y su utilidad tiende a menos infinito cuando el ingreso tiende a 0. Formalmente, la utilidad del agente cuando recibe \$$s$ y se esforzó e es $u(s) - c(e)$ y $\lim_{s \to 0} u(s) = -\infty$. La función $u(s)$ es estrictamente cóncava y $c(e)$ es estrictamente creciente. El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u}$. El principal puede observar x, pero no puede observar ni e ni ε.

Parte A. Sea e^* el nivel de esfuerzo que maximiza la utilidad del principal si todo es observable. Suponga que el principal ofrece un contrato que paga s^* si el producto no baja de $\varepsilon_1 f(e^*)$, y s_* en caso contrario. Encuentre s^* y s_* para que el principal maximice su utilidad y el agente elija e^*. Para hacerlo, siga los siguientes pasos.

I. Encuentre el s^* para que, si se elige e^*, el agente obtenga $\overline{u}$.

II. Sea e_* el mínimo e tal que $\varepsilon_2 f(e) \geq \varepsilon_1 f(e^*)$. Argumente que sea cual sea s_*, el agente sólo debe considerar los niveles de esfuerzo 0, e_* y e^*.

III. Elija s_* para que la utilidad de elegir e^* sea mayor que la utilidad de elegir e_* o 0.

Parte B. Suponga que ahora ε se distribuye uniforme en $[1, 2]$. Suponga que la función de utilidad es $\log s - e$ y que $f(e) = e$ y que $\log \frac{3}{2} > \overline{u}$.

[3] Este supuesto no es muy razonable, en principio, porque cuando a una provincia le va bien, les va bien a todas. Sin embargo, uno puede pensar que esto es "por encima" de cualquier otro ciclo conjunto que estén viviendo las provincias. Además, la independencia es "la razón" por la cual se diseñó el sistema como se diseñó: si la recaudación fuera perfectamente correlacionada entre las provincias, no habría ninguna razón para "compartir riesgos".

I. Encuentre el nivel e^* que el principal querrá implementar si el nivel de esfuerzo es observable.

II. Encuentre los niveles s^* y s_* tales que: el sueldo es s^* si el producto es mayor o igual que e^* y s_* en caso contrario; el agente quiere elegir e^*; s^* y s_* maximizan la utilidad del principal. Esta parte es equivalente a la parte A, pero con la distribución de ε cambiada.

Ejercicio 20 Un trabajador puede hacer dos niveles de esfuerzo, bueno o malo, que inducen probabilidades de error en la producción de 25% y 75% respectivamente. La utilidad del agente (trabajador) es $U(w,e) = 100 - \frac{10}{w} - e$, donde w es el sueldo recibido y e vale 2 si el esfuerzo es bueno y 0 si es malo (la desutilidad del esfuerzo se incurre independientemente de si el producto tiene errores o no). El nivel de utilidad de reserva del agente es 0. Los errores de producción son observables y por tanto se pueden incluir en los contratos. Los niveles de esfuerzo no son observables. El producto obtenido vale 20 si no hay errores y 0 si los hay. La utilidad del principal es $u(z) = z$ cuando z es la riqueza final (típicamente tenemos que $z = x - s$).

Parte A Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo malo, y calcule la utilidad del principal en este caso.

Parte B Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo bueno cuando el nivel de esfuerzo es observable. Calcule la utilidad del principal en este caso.

Parte C Calcule el contrato óptimo si se quiere implementar un esfuerzo alto cuando el esfuerzo no es observable. Calcule la utilidad del principal en este caso. Comparando las partes A y C, ¿Qué nivel de esfuerzo querrá implementar el principal?

Ejercicio 21 Lea el siguiente pedazo de artículo aparecido en La Nación el 7 de Noviembre de 2002.

> En cambio, para la Argentina es mucho más importante el hecho de que un ideólogo de los republicanos en materia económica, como Kenneth Rogoff, que en la actualidad es nada menos que el director de investigaciones y principal economista del Fondo Monetario Internacional, haya comenzado a desmontar la teoría del riesgo moral en los salvamentos. Esa teoría, que fue el caballito de batalla de los republicanos ultraconservadores, dice que los rescates del organismo multilateral hacen que los prestamistas y tenedores de títulos públicos puedan escapar sin sufrir pérdidas. Así, no habría riesgo alguno en colocaciones irresponsables.
>
> El riesgo sería, en cambio, para los contribuyentes de los países centrales. Los Estados Unidos son los mayores accionistas del FMI y por eso el secretario del Tesoro, Paul O´Neill, dijo que no quería poner en riesgo el dinero de los "plomeros y carpinteros". Rogoff, que fue uno de los que desarrolló la teoría que ahora anima las políticas del FMI, ha dicho hace poco en una publicación del organismo que no hay prueba alguna de que la teoría es acertada (para los préstamos entre naciones). Si estas ideas se revisan y las políticas respecto de los salvamentos cambian, habrá más tranquilidad para quienes podrían necesitar muy pronto de uno, como es el caso de Brasil. Si, por el contrario, la Argentina es lanzada en los próximos días sin miramientos a la cesación de pagos con los organismos multilaterales, Brasil debería poner sus barbas en remojo. Y hay quienes creen que incluso antes de la victoria republicana existía un plan para llevar a la Argentina a lo más profundo del abismo.
>
> En el gobierno hay funcionarios que comentan con la mayor de las reservas que creen que Krueger impulsa esta línea. Aseguran que quiere ver un default completo, para lanzar luego su prometido

sistema de resolución de crisis de países similar al que se aplica en los Estados Unidos para las quiebras empresariales. Quienes así opinan dicen que Krueger sueña despierta con que ese esquema puede llevarla a obtener nada menos que el Premio Nobel en economía que alcanzó su implacable crítico, Joseph Stiglitz.

Conteste en no más de 5 renglones cada una de las siguientes preguntas

Parte A ¿Qué tiene que ver la teoría del agente principal con este artículo?

Parte B ¿Si tiene algo que ver, porqué sería malo que el FMI rescatara a los países?

Parte C Si no hubiera problemas de "reputación" o de "juegos repetidos" ¿tendría alguna relevancia esta crítica? Es decir, ¿sería óptimo dejar a los países quebrar si ello no influyera en lo que los países pueden inferir sobre su futuro en caso que les toque dar default?

Ejercicio 22 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre dos niveles de esfuerzo $e = 6$ y $e = 4$, y hay tres estados posibles de la naturaleza, cada uno con probabilidad $\frac{1}{3}$. Los niveles de producción, según los esfuerzos y estados se presentan en la tabla siguiente:

		Estados		
		ε_1	ε_2	ε_3
Esfuerzos	$e = 6$	60.000	60.000	30.000
	$e = 4$	30.000	60.000	30.000

La función objetivo del principal y del agente son respectivamente

$$\pi(x, w) = x - w \quad y \quad U(w, e) = \sqrt{w} - e^2$$

donde x es el nivel de producto, w el salario y e el nivel de esfuerzo. La utilidad de reserva es $\overline{u} = 114$.

Parte A. ¿Cuáles serían los contratos óptimos que implementarían $e = 4$ y $e = 6$ si hubiera información perfecta? ¿Cuál nivel de esfuerzo querría implementar el principal con información perfecta?

Parte B. Con información asimétrica (si sólo el agente puede saber su nivel de esfuerzo), encuentre el mejor contrato que implementa $e = 4$, el mejor contrato que implementa $e = 6$, y calcule los beneficios del principal en cada caso. ¿Qué nivel de esfuerzo querrá implementar el principal?

Ejercicio 23 El "problema" de la agencia con un agente neutral al riesgo. Suponga que el agente puede elegir cualquier $b \in [0, 1]$, que el costo para el agente de elegir b es $c_b = b^2$ y que la distribución de probabilidad que la acción b induce sobre los niveles de producto $1, 2$ y 3 es

$$(\pi_{1b}, \pi_{2b}, \pi_{3b}) = \left(\frac{2}{3}(1 - b), \frac{1}{3}, \frac{2}{3}b\right).$$

Suponga que la función de utilidad del agente está dada por $u(s) = s$, y su nivel de utilidad de reserva es 0.

Parte A. Demuestre que para cada acción b, el nivel de beneficios esperados del principal si puede diseñar el contrato para implementar b sin las restricciones de incentivos es

$$\frac{2}{3}(1 - b) + \frac{1}{3} * 2 + \frac{2}{3}b * 3 - b^2$$

Parte B. Encuentre la acción b^* que maximiza los beneficios (no restringidos por problemas de incentivos) de la Parte A.

Parte C. Encuentre F para que

$$\frac{2}{3}(1-b^*)(1-F)+\frac{1}{3}(2-F)+\frac{2}{3}b^*(3-F)-b^{*2}=0.$$

En un contrato de franquicia, este F es la suma fija que debe pagar el agente a cambio de quedarse con el producto de la firma.

Parte D. Para el F de la Parte C, demuestre que el contrato

$$(s_1,s_2,s_3)=(1-F,2-F,3-F)$$

es óptimo para implementar b^*, aún con las restricciones de incentivos.

Parte E. Demuestre que principal querrá implementar b^*.

Parte F. Explique, en menos de 5 renglones, porqué le parece que el problema del principal es tan fácil –considerando que hay infinitas acciones, tres niveles de producto, etc–.

Ejercicio 24 Deberes. La utilidad del agente es $u(s)=\log s$ y la utilidad de reserva es $\overline{u}=0$ Puede tomar 3 acciones, i,m,d, con costos $c_d>c_m>c_i$. Las distribuciones de probabilidad para los 3 niveles de producto $x_i=e^i$, para $i=1,2,3$ son (sólo escribimos las probabilidades de x_1 y x_2, dado que las de x_3 salen por diferencia):

	i	m	d
x_1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar cada una de las acciones. Pista: para implementar d, demuestre que si están activas las restricciones de participación, y la de incentivos con m, al individuo le convendrá hacer i (por lo que no se implementa d en este caso). Y cuando resuelva con la de participación de d y la de incentivos de d contra i activas, no olvide verificar que se cumple la de incentivos de d contra m.
Parte B. Asuma ahora que $x_i=e^i$ para todo i, y que $c_i=1$, $c_m=2$ y $c_d=3$. ¿Cuál es el contrato óptimo?
Parte C. Repita las Partes A y B, asumiendo que la utilidad del agente es $u(s)=s$.

Ejercicio 25 En el curso de Tópicos de Micro hay dos parciales. En cada parcial, a los alumnos les puede ir bien (b) o mal (m), dependiendo si hicieron un esfuerzo alto ($e_A=2$) o bajo ($e_B=1$). Para simplificar, asumimos que hay un solo alumno. Las probabilidades de cada resultado como función del esfuerzo vienen dadas por la siguiente tabla

	A	B
b	p	$1-p$
m	$1-p$	p

para $p>\frac{1}{2}$. La función de utilidad del profesor es e^1+e^2. Debe elegir las notas en el primer y segundo parciales, y la nota final del curso como función de las notas de los parciales. A los alumnos sólo les importa la nota final del curso y los niveles de esfuerzo. Sean $n^1,n^2\in\{n_b,n_m\}$ las notas del primer y segundo parcial.

Supondremos $n_m = 1$ y $n_b \geq 1$, y n_b será la variable de elección. Supongamos que el profesor promete al principio del curso que la nota final del curso será

$$F = \min\left\{n^1, n^2\right\}.$$

Para una nota final F y niveles de esfuerzo e^1 y e^2, la utilidad del alumno es

$$u = F - e^1 - e^2.$$

Parte A. Plantee las utilidades de los estudiantes de cada par de esfuerzos.

Parte B. Asuma que los alumnos eligen al principio del curso los niveles de esfuerzo para ambos parciales (es decir, no re-optimizan en la mitad del curso). Plantee el problema que debe resolver el profesor si está obligado a usar $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$.

Parte C. Resolver el problema de la Parte B y calcular la utilidad del profesor. Esta es la utilidad cuando ambas partes pueden "comprometerse" a cumplir un plan.

Parte D. Asuma ahora que los alumnos pueden decidir luego del primer parcial si desean elegir un esfuerzo alto o bajo para el segundo parcial. Calcule la utilidad esperada del profesor, antes de empezar el curso, si se mantiene la regla $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$.

Parte E. Suponga que al alumno le fue mal en el primer parcial. Suponga también que el profesor rompe su promesa de fijar $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$, y asegura que la nota final será n^2. Encuentre qué restricción debe satisfacer n_b para que el alumno quiera elegir e_A.

Parte F. Encuentre la utilidad del profesor, antes de empezar el curso, si sólo él sabe que violará su promesa en caso que al alumno le vaya mal en el primer parcial y el alumno puede re-optimizar en la mitad del curso.

Parte G. Teniendo en cuenta todas las partes anteriores, evalúe en 5 renglones la conveniencia de la regla $F = \min\left\{n^1, n^2\right\}$ para los fines del profesor.

Ejercicio 26 Este ejercicio explica en forma sencilla una de las teorías de la estructura de financiamiento óptimo de las empresas. En la teoría clásica, de Modigliani-Miller, al dueño de la empresa le da lo mismo elegir cualquier proporción entre deuda y fondos propios para financiar sus proyectos. Esta teoría dice que la deuda es buena para darle incentivos correctos a los administradores. El dueño de una empresa, el principal, debe elegir qué proporción de un proyecto de \$100 financia con deuda, y qué proporción con fondos propios. La tasa de interés de la deuda es 20%, y la de los fondos propios es 10% (es lo que le saca el dueño a su dinero en el banco).

Tanto el agente como el principal saben que cualquier dinero que se invierta en el proyecto rinde seguro 40%. El problema es que el agente puede usar los fondos para el proyecto, o para su "satisfacción personal", en cuyo caso el dinero le rinde a la empresa 0% (el capital se recupera, pero no rindió nada).

La utilidad del agente de usar \$$d$ en un "desfalco" y \$$c$ en lo "correcto" es

$$u_A(d, c) = d + f(c)$$

donde $f > 0$ y $f' < 1$ para todo c. Si el agente es despedido, tiene una utilidad de 0.

Si el capital recuperado por el principal luego del pago de la deuda es menor estricto que lo que aportó en fondos propios, el administrador pierde su empleo (una restricción alternativa sería que el principal quisiera recuperar, en vez de los fondos invertidos, los fondos invertidos más el interés que éstos hubieran generado. Eso no cambiaría los resultados).

Parte A. Asuma que el principal elige financiar $\$F$ con fondos propios, y $\$100 - F$ con deuda. ¿Cuál será el monto de desfalco elegido por el agente?

Parte B. Calcule la utilidad del principal de financiar F con fondos propios y $100-F$ con deuda (el principal posee \$100, y todo lo que no use en el proyecto le rendirá 10% en el banco). Haga esta parte asumiendo que no sabe cuánto desfalcará el administrador. Es decir, deje el resultado como función de F y d.

Parte C. Asuma ahora que el principal sabe cuánto desfalcará el agente ¿Cuál es la estructura de financiamiento óptima?

Ejercicio 27 Hay dos niveles de esfuerzo posibles $e_a = 1$ o $e_b = 2$, y tres niveles de producto posibles $x_1 < x_2 < x_3$. La distribución de probabilidad generada por cada acción sobre los niveles de producto es

	x_1	x_2	x_3
π_a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
π_b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La función de utilidad del agente es $u(w,e) = \sqrt{w} - ke$ y su utilidad de reserva es $\overline{u} = 2$.

Parte A. Resuelva el problema del principal si desea implementar el esfuerzo e_a.

Parte B. Encuentre el valor de k^* tal que el contrato de "burning oil" típico (con sueldo constante en x_2 y x_3, que le da una utilidad de $\overline{u}$ al agente, y un s_1 lo más bajo posible) es óptimo para implementar e_b si y sólo si $k^* > k$. Interprete en 4 renglones porqué los k chicos sirven para el burning oil, y los grandes no.

Parte C. Encuentre el contrato óptimo para implementar e_b si $k = 3$. (Pregunta que "no importa demasiado": ¿Por qué no está activa la restricción de participación?) Con ese valor de k, ¿Que acción querrá implementar el principal si $x = (1,2,3)$? (Pista: debemos tener $s_1 = 0$. La razón es que sólo aparece en el lado derecho de la restricción de incentivos, y cuanto más chico s_1 más grande es el conjunto de s_2 y s_3 que podemos elegir, por lo que conviene s_1 lo más chico posible).

Hasta ahora hemos analizado casos en los que el número de acciones es finito y reducido. Puede ser útil algunas veces considerar problemas en los que hay un continuo de acciones. Analizaremos ahora uno de esos problemas, y el método para resolverlo: el enfoque de primer orden.

En este problema hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [e_b, e_a]$, y para cada nivel de esfuerzo e, el costo para el individuo es e, y la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e)$. La función de utilidad del individuo es $u(\cdot)$, no acotada por debajo, y su inversa es $f(\cdot)$. Asumimos que π y u son crecientes, cóncavas y que sus derivadas segundas existen y son estrictamente negativas. La utilidad de reserva es $\overline{u}$.

Comenzaremos con el planteo del problema en su versión difícil. El problema que debe resolver el principal si quiere implementar el nivel de esfuerzo e^* es el de elegir u_1 y u_2 para maximizar

$$
\begin{aligned}
& (1-\pi(e^*))(x_1 - f(u_1)) + \pi(e^*)(x_2 - f(u_2)) \\
\text{sujeto a } \; (1-\pi(e^*))u_1 + \pi(e^*)u_2 - e^* \quad & \geq \quad \overline{u} \\
(1-\pi(e^*))u_1 + \pi(e^*)u_2 - e^* \quad & \geq \quad (1-\pi(e))u_1 + \pi(e)u_2 - e \quad \forall e \in [e_b, e_a]
\end{aligned}
$$

Lo difícil de este problema es que hay infinitas restricciones de incentivos. La gracia del enfoque de primer orden es que todas estas restricciones se pueden reducir a una sola ecuación. En particular, lo que nos dicen las restricciones de incentivos es que la función $U(e) \equiv (1-\pi(e))\, u_1 + \pi(e)\, u_2 - e$ se debe maximizar en $e = e^*$. Como π es cóncava, U también lo es siempre que $u_2 \geq u_1$ (que siempre se cumple en el óptimo). Por lo tanto, para cualquier $e^* \in [e_b, e_a]$, si el principal elige u_1 y u_2 para que se cumpla $U'(e^*) = 0$, el agente querrá elegir e^* (eso es la suficiencia de la condición de primer orden para un máximo global). Para $e^* = e_b$ o $e^* = e_a$ no es necesario fijar u_1 y u_2 para que se cumpla la condición de primer orden, y de hecho, como veremos, en general no se cumplirá para e_b. Para ver por qué si u_1 y u_2 son óptimos para implementar e_a, no es necesaria la condición de primer orden, piense en el caso de maximizar x con $x \in [0,1]$: el óptimo se da en $x = 1$, pero la condición de primer orden no se cumple (estamos en una esquina).

De la discusión anterior, deducimos que para cualquier $e^* \in (e_b, e_a)$, las infinitas restricciones se pueden cambiar por $U'(e^*) = 0$, que es

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{\pi'(e^*)}.$$

Sustituyendo esto en la restricción de participación, con igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}(1-\pi(e^*))\, u_1 + \pi(e^*)\, u_2 - e^* \quad &= \quad \overline{u} \Rightarrow u_1 + \pi(e^*)(u_2 - u_1) - e^* = \overline{u} \Rightarrow u_1 + \frac{\pi(e^*)}{\pi'(e^*)} - e^* = \overline{u} \\ &\Rightarrow \quad u_1(e^*) = \overline{u} + e^* - \frac{\pi(e^*)}{\pi'(e^*)} \quad \text{y} \quad u_2(e^*) = \overline{u} + e^* + \frac{1-\pi(e^*)}{\pi'(e^*)}. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

El siguiente ejercicio completa la resolución del modelo.

Ejercicio 28 Suponga que hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [e_b, e_a]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e)$. La función de utilidad del individuo es $u(\cdot)$, no acotada por debajo, y su inversa es $f(\cdot)$. Asumimos que π y u son crecientes, cóncavas y que sus derivadas segundas existen. La utilidad de reserva es $\overline{u}$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar e_b.

Parte B. Encuentre el esquema óptimo para implementar e_a. Muestre que se debe cumplir la condición de primer orden. Para ello, formalice la siguiente idea. Supongamos que u_1 y u_2 son óptimos para implementar e_a pero que no se cumple la condición de primer orden. En ese caso se debe cumplir que $u_2 - u_1 > 1/\pi'(e_a)$. En ese caso, se puede subir u_1 en una cantidad pequeña c y bajar u_2 de forma de que se siga cumpliendo la restricción de participación y el principal tendrá beneficios esperados mayores.

Parte C. Utilizando las Partes A y B y las fórmulas de $u_1(e^*)$ y $u_2(e^*)$ muestre que u_1 es decreciente y u_2 creciente.

Una enseñanza económica en esta vorágine de fórmulas es la siguiente: nunca convendrá implementar niveles bajos de esfuerzo, si $\pi(e_b) > 0$. La razón es que al pasar de e_b a cualquier e chiquito pero mayor que e_b, u_1 salta para abajo y u_2 salta para arriba. Eso se desprende de las fórmulas de la ecuación (1.6) y de la Parte A (eso, a menos que $\pi'(e_b) = \infty$). Este incremento "discreto" o "grande" en el riesgo tiene un costo discreto o grande para el principal, porque el agente es averso al riesgo. El beneficio de implementar $e > e_b$ cambia en forma continua, sin embargo. El resultado es que convendrá implementar e_b.

Ejemplo 29 Suponga que hay dos niveles posibles de producto, x_1 y $x_2 > x_1$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e \in [0,1]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e) = \frac{1+e}{2}$. La función de utilidad del individuo es $u(s) = -1/s$ y la utilidad de reserva es $\overline{u} = -1/2$.

En este caso tenemos que para implementar $e=0$ los pagos en útiles y en dinero son $u_1=u_2=-1/2$ y $s_1=s_2=2$. Para implementar $e\in(0,1]$ se debe elegir

$$u_1(e)=-\frac{1}{2}+e-1-e=-\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad u_2(e)=-\frac{1}{2}+e+2\left(1-\frac{1+e}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Una cosa curiosa de este ejemplo es que con este esquema de pagos, el agente está indiferente entre todos los niveles de esfuerzo. Por lo tanto, implementa "débilmente" a cualquier esfuerzo: el agente quiere hacer el e que le pedimos, pero podría hacer cualquier otro.

Ejercicio 30 Deberes. Hay dos niveles de producto $x_1=0$ y $x_2>0$. El individuo debe elegir un nivel de esfuerzo $e\in[0,1]$, y para cada nivel de esfuerzo e, la probabilidad de éxito x_2 es $\pi(e)=\sqrt{e}$. La función de utilidad del individuo es $u(s)=-1/s$, el costo de un esfuerzo e es e (utilidad de sueldo s y esfuerzo e es $-1/s-e$) y la utilidad de reserva es $\overline{u}=-2$.

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar cada esfuerzo $e\in[0,1]$.

Parte B. Muestre que en este caso los sueldos $u_1(e^*)$ y $u_2(e^*)$ convergen al mismo número, cuando $e^*\to 0$ (es decir, para esfuerzos cercanos a 0, el salario de x_2 no "salta para arriba" y el de u_1 no salta para abajo).

Parte C. Escriba la fórmula para los beneficios del principal de implementar un esfuerzo e cualquiera.

Parte D. Difícil. Muestre que cuando aumenta x_2, aumenta el e^* óptimo (Si quiere, hágalo asumiendo que los valores de x_2 antes y después del cambio son tales que el e^* óptimo es interior. No es importante, pero sólo para que sepan, para cualquier $x_2\leq 2/3$, el esfuerzo óptimo es interior).

Ejercicio 31 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre tres niveles de esfuerzo $e_i=i$ y hay cuatro estados posibles de la naturaleza. Las probabilidades de los distintos niveles de producción, según los esfuerzos se presentan en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4
e_0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$e_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
e_1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$

La función de utilidad del agente es $U(s,e)=u(s)-e=\sqrt{s}-e$ y su utilidad de reserva $\overline{u}=4$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar implementar e_i. Este es el primer ejercicio en el cual hay más de dos (y menos de infinitas) acciones; por supuesto, deberá tener una restricción de incentivos para cada acción que no sea la que se quiere implementar.

Parte B. Si $x_i=i$, encuentre el esfuerzo que querrá implementar el principal.

Ejercicio 32 Hay un agente y un principal. El agente puede elegir entre tres niveles de esfuerzo $e_i=i$ y hay cuatro estados posibles de la naturaleza. Las probabilidades de los distintos niveles de producción, según los esfuerzos se presentan en la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4
e_0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$e_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
e_1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

La función de utilidad del agente es $u(s) = \log s$ y su utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar implementar e_i.

Parte B. Si $x_i = i$, encuentre el esfuerzo que querrá implementar el principal.

Ejercicio 33 Hay uno parecido en el Mas-Colell et al, pero es más complicado que lo necesario, y la solución está mal. En los modelos de Agente-Principal con dos niveles de esfuerzo, el esfuerzo bajo se implementa con sueldos constantes e iguales a lo que serían si las acciones fueran observables. Para implementar el esfuerzo alto, sin embargo, hay que pagarle al agente más de lo que se le pagaría si las acciones fueran observables. Eso hace que si el esfuerzo alto es óptimo con información perfecta, puede no serlo con información asimétrica. Este ejercicio ilustra que esta tendencia a siempre reducir el esfuerzo óptimo es especial del caso de dos esfuerzos.

Hay tres niveles posibles de esfuerzo e_1, e_2 y e_3 que inducen las siguientes probabilidades sobre los productos alto y bajo, $x_a = 10$ y $x_b = 0 : \pi_{a1} = \frac{2}{3}, \pi_{a2} = \frac{1}{2}$ y $\pi_{a3} = \frac{1}{3}$. Para el agente hacer el esfuerzo e_i tiene un costo c_i con $c_1 = \frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{8}{5}$ y $c_3 = \frac{4}{3}$. La función de utilidad es $u(s) = \sqrt{s}$ y la utilidad de reserva $\overline{u} = 0$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo cuando el esfuerzo es observable.

Parte B. Muestre que si el esfuerzo no es observable, entonces e_2 no se puede implementar.

Parte C. Encuentre los niveles de c_2 para los cuales se podría implementar e_2.

Parte D. Encuentre el contrato óptimo cuando el esfuerzo no es observable.

Parte E. Suponga ahora que $c_1 = \sqrt{8}$ y sea $\pi_{a1} = 1$. Encuentre los contratos óptimos cuando el esfuerzo es observable y cuando no es observable. El esfuerzo que quiere implementar el principal es mayor ¿con o sin información asimétrica?

Ejercicio 34 Suponga que si el individuo hace la acción a, la distribución de probabilidad sobre los niveles de producto $(1, 2, 3)$ es $\pi_{1a} = \pi_{2a} = \pi_{3a} = 1/3$. El costo de la acción a para el individuo es $c_a = 0$. Si el individuo hace b en cambio, los retornos son

$$\pi_{1b} = \frac{1}{6},\ \pi_{2b} = \frac{1}{3},\ \pi_{3b} = \frac{1}{2}$$

y el costo es $c_b = 1$. Suponga finalmente que la utilidad de reserva del individuo es $\overline{u} = 0$, y que la función de utilidad del individuo es $u(s) = s$ (no es averso al riesgo).

Parte A. Si las acciones fueran observables, ¿qué acción querría implementar el principal, y cuáles serían sus beneficios? Recuerde que para resolver el problema del principal con acciones observables, debe ignorar la restricción de incentivos.

Parte B. Suponga que las acciones no son observables y encuentre el contrato óptimo para implementar a, el contrato óptimo para implementar b, e inidque qué contrato elegirá el principal.

Parte C. Repita las partes A y B suponiendo que $c_b = 1/10$.

Ejercicio 35 A Manuel lo nombraron Gerente General de una empresa, por un día. El dueño de la empresa está considerando dos planes alternativos de pagos para su nuevo gerente. En el primero, le paga un sueldo fijo de \$ S. Bajo esta alternativa, Manuel elegirá la acción que el dueño le pida. En el segundo plan, le paga \$ 5, y además le paga con una opción de compra de una acción de la empresa, con un precio de ejecución de \$ 2 (Manuel puede comprar la acción a \$2 si así lo desea). Tanto Manuel como el dueño tienen una función de utilidad de $u(x) = x$ (donde x es la riqueza final).

Si Manuel elige la acción i (para $i = f, g$) la distribución de probabilidad sobre los precios de la acción estarán dados por i, donde

	1	2	3
f	0	1	0
g	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

La riqueza inicial de Manuel es 0, y la del dueño de la fábrica es \$ 80 y además posee 10 acciones de la empresa (ambas formas de pago se contabilizan como costos de la empresa, con lo cual los costos no deberían entrar en la función de utilidad del dueño). En el país donde viven, la tasa marginal de impuesto a la riqueza es de 0 para riquezas inferiores a 100, y de 100% para riquezas superiores.

Parte A. Si el dueño elige pagarle con la segunda alternativa, ¿Qué acción elegirá Manuel?

Parte B. ¿Cuál es la utilidad esperada del dueño de elegir la primera forma de pago? ¿Cuál es la utilidad del dueño de elegir la segunda forma de pago? ¿Qué forma de pago elegirá?

Ejercicio 36 El objetivo de este ejercicio es mostrar que cuando dos "sistemas" o "acciones" son complementarias, puede convenir ligar los pagos entre ambos, de tal manera que resulta un salario alto si, por ejemplo, fallan los dos sistemas a la vez (ver MacDonald y Marx, "Adverse Specialization", Journal of Political Economy, 2001). Un trabajador en una planta nuclear puede dedicar su día de trabajo a dos actividades, de las cuales una le gusta más que la otra. Sólo tiene tres formas posibles de dividir su jornada entre las actividades I (la que le gusta) y II (la que no): todo el tiempo a I que llamaremos acción a, mitad y mitad que llamaremos acción b (o *b*uena, ya veremos por qué) o todo el tiempo a II que llamaremos acción c. Cada una de las actividades es esencial para que la planta no explote, en el sendido que si el agente no le dedica tiempo a una actividad, ese sistema fallará seguro, y la planta explotará seguro. Las distribuciones de probabilidad sobre fallas de los sistemas son

	Probabilidad de falla de I	Probabilidad de falla de II
a	0	1
b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c	1	0

La función de utilidad del agente cuando sus sueldos son s es $\log s$ (digamos log en base 10) su utilidad de reserva es $\overline{u} = 0$. Los costos de las tres acciones son $c_a = 0$, $c_b = 1$ y $c_c = 2$. Lo único que es observable para el principal es qué sistemas fallaron. Es decir, hay 3 acciones y 4 niveles de producto (no falla ningún sistema, falla el sistema I, falla el sistema II y fallan ambos) con beneficios (brutos de salarios, es decir, sin haber descontado los salarios) $\pi_n^n, \pi_n^f, \pi_f^n$ y π_f^f respectivamente (el superíndice indica si *f*alló o *no* el sistema I, y el subíndice si falló o no el sistema II).

Parte A. Encuentre el esquema óptimo para implementar a.

Parte B. Encuentre el esquema óptimo para implementar b. Pistas:

a) la restricción de participación está activa (argumente por qué);
b) tiene que haber alguna de las de incentivos activa (argumente por qué)
c) pruebe con la de participación más la de incentivos con respecto a la acción a activa (e ignore la de incentivos con respecto a c), y muestre que la de incentivos con respecto a c se satisface en el óptimo. Para resolver este caso, note que s_n^n, s_n^f y s_f^f entran en forma simétrica en el problema (y si saca las CPO verá que deben ser iguales los tres valores).
d) pruebe con la de participación más la de incentivos con respecto a la acción c activa (e ignore la de incentivos con respecto a a).

Parte C. Encuentre el esquema óptimo para implementar c.

En la solución se ve que aunque la actividad I sea muy rentable (por ejemplo, abaratar la producción de energía nuclear, mientras se controla un termómetro) y le cueste poco al individuo, el principal quiere que el individuo haga la actividad II también. En particular, en la solución se ve que el sueldo cuando falla sólo la actividad II es más bajo que cuando fallan ambas.

Ejercicio 37 Deberes. Este es un problema de Agente Principal, sin "problemas" de agencia, pues el empleado es neutral al riesgo. Supongamos que el dueño de una empresa debe contratar a un empleado. El empleado puede esforzarse mucho (acción a) con costo $c_a = 2$, o poco (acción b) con costo $c_b = 0$. La utilidad del agente, si recibe un salario w y se esfuerza e viene dada por $U(w, e) = w - e$, mientras que su utilidad de reserva es $\overline{u} = 10$. Los salarios pueden ser negativos.

La distribución de probabilidades que genera el esfuerzo sobre los niveles de producto $x_1 = 20$ y $x_2 = x > 20$ viene dada por $\pi_{1a} = \frac{1}{5}$ y $\pi_{1b} = \frac{3}{5}$. Los beneficios del principal (dueño) si el producto es x_i y el salario pagado es w son $x_i - w$.

Parte A. ¿Cuáles son los salarios que pagaría el dueño si quiere que el esfuerzo sea bajo?
Parte B. ¿Cuáles son los salarios que pagaría el dueño si quiere que el esfuerzo sea alto?
Parte C. ¿Cuáles valores de x hacen que el dueño quiera implementar el esfuerzo alto?
Parte D. Para cualquier x que haga que el esfuerzo alto sea óptimo, ¿el contrato óptimo se puede interpretar como una franquicia?
Parte E. Si en vez de ser alto, x es bajo de tal forma que es óptimo implementar un esfuerzo bajo, ¿Hay alguna forma de implementar el contrato óptimo con salarios no constantes? (pista: el agente es neutral al riesgo)

Ejercicio 38 Principal averso al riesgo. Supongamos que no hay información asimétrica, y que el principal puede observar las acciones del agente. Hay dos acciones a y b, con costos c_a y $c_b > c_a$ para el agente. Los niveles de producto posibles son un conjunto $X \subset \mathbf{R}_+$ y esas acciones inducen unas distribuciones de probabilidad π_a y π_b sobre los niveles de producto (por ejemplo, si $X = [0, 2]$, π_a podría ser la uniforme en $[0, 1]$ y π_b una distribución que le asignara probabilidad $1/2$ a los productos 1 y 2). La función de utilidad del agente es u (creciente, cóncava y dos veces derivable), con utilidad de reserva $\overline{u}$, y la del principal es v, con $v' > 0 \geq v''$.

Parte A. Plantee el problema que debe resolver el principal si quiere implementar la acción b. La solución empieza con: para todo $x \in X$, elegir s_x para ...

Parte B. Encuentre cómo cambia s_x cuando cambia x marginalmente: encuentre ds_x/dx. Para ello, obtenga la condición de primer orden, y diferénciela con respecto a x. Luego sustituya por el λ que se obtiene de la condición de primer orden. Muestre que para $r_p = -v''/v'$ y $r_a = -u''/u'$, tenemos

$$\frac{ds_x}{dx} = \frac{r_p}{r_p + r_a}.$$

Eso quiere decir que si el producto sube, el agente recibe cada vez más en sueldo, cuanto más averso al riesgo es el principal. Es decir, el agente está más expuesto al riesgo cuanto más averso es el principal (aún con información completa).

Parte C. Encuentre el contrato óptimo (un sueldo para cada nivel de producto) cuando $c_a = 0$, $c_b = 1$, $X = [0,1]$, π_a es uniforme en $[0,1]$, $\pi_b(x) = 2x$, $u(s) = -e^{-2s}$ y $v(z) = -e^{-z}$. Deje todo como función de $\overline{u}$.

Parte D. Suponga que hay información asimétrica, que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\pi_{1a} = 1/2$, $\pi_{1b} = 1/4$, $c_a = 0$, $c_b = 1$, $u(s) = -e^{-2s}$, $\overline{u} = -\frac{5}{2}$ y $v(z) = -e^{-z}$. Encuentre los contratos óptimos para implementar a y b (los sueldos pueden ser negativos). Indique cuál es mejor para el principal.

Parte E. Pruebe de repetir la Parte D, pero haciendo c_b un poco más chico, de tal manera que la acción óptima a implementar sea la b.

Una de las lecciones del ejercicio anterior es que es difícil encontrar situaciones en las cuales el modelo de agente principal prediga contratos salariales "simples" (como un contrato lineal en el cual me pagan una parte fija, y después \$$x$ por cada unidad adicional que produzco). En particular, se requiere que las funciones tengan aversión absoluta al riesgo constante, que no es una propiedad razonable (cuanto más rica es la gente, menos aversa al riesgo es). Para que esta conclusión tenga "toda su fuerza", tendríamos que haber hecho la Parte B, pero con información asimétrica.

Ejercicio 39 Igual que el Ejercicio 10, con tres niveles de producto

Ejercicio 40 Suponga un inversor que puede elegir entre dos proyectos: A y B. Ambos proyectos requieren una inversión de I. El pago (retorno) x_j $j = A, B$ ocurre con probabilidad p_j y de lo contrario, el proyecto rinde 0.

Suponga: que el retorno esperado de A es mayor que el de B, mayor que I ($p_A x_A > p_B x_B > I$); que la probabilidad de que A sea exitoso es mayor que la de B y ambas estrictamente entre 0 y 1, $1 > p_A > p_B > 0$; que x_B es mayor estricto que x_A. El inversor debe pedir prestado un monto I a un banco. Suponga también que el interés bruto R se paga sólo si el proyecto es exitoso. El pago esperado del inversor con proyecto j es: $U_j(R) = p_j(x_j - R)$ y el beneficio esperado del banco es: $\pi_j = p_j R - I$.

Parte A. Suponga que R no puede ser contingente en el tipo de proyecto. Defina R^* tal que el inversor elige el proyecto A si $R < R^*$. Encuentre R^*.

Parte B. Suponga que el banco es un monopolista y que hay un sólo inversor, ¿cuál es la política de tasa de interés óptima para el banco?

Parte C. Suponga ahora que hay N inversores idénticos y que el banco tiene un monto máximo para prestar de L, con $I < L < NI$. Discuta porqué y cuando puede aparecer el racionamiento de crédito (la demanda de créditos excede a la oferta).

Ejercicio 41 Un individuo puede tomar dos acciones: manejar *a*tentamente, o *d*istraído; si maneja atento, choca con probabilidad $\frac{1}{2}$ mientras que si maneja distraído choca seguro. El costo de manejar atento es $\frac{1}{4}$, y el de manejar distraído es 0. La función de utilidad es $u(x)=\sqrt{x}$ y la utilidad de no comprar seguro es $\overline{u}$. La empresa debe elegir s_a (el pago neto de la empresa al agente en caso de accidente) y s_n (el pago neto de la empresa al agente en caso de no accidente) para maximizar sus beneficios. Así, si implementa la acción a (atento), los beneficios de la empresa serán $-\frac{1}{2}s_a-\frac{1}{2}s_n$. Típicamente, tendríamos $s_a \geq 0 \geq s_n$ (en caso de no accidente, la empresa le "paga" al agente una cantidad negativa. Es decir, recibe del agente lo que le cobró por la prima.).

Parte A. Asuma que la riqueza inicial del individuo es $w=0$, que el auto tiene un valor v, y que cuando choca se pierde todo. Así por ejemplo, si no choca, su riqueza será $w+v+s_n=v+s_n$, mientras que si choca será $w+s_a=s_a$. Elija el esquema óptimo para implementar *d*istraído.

Parte B. Elija el esquema óptimo para implementar *a*tento.

Parte C. Suponga que en la ausencia de la compañía de seguros, el individuo manejaría atento. Es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{v}-\frac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow v \geq \frac{1}{4}$. En este caso, es natural asumir que $\overline{u}=\frac{1}{2}\sqrt{v}-\frac{1}{4}$. Encuentre el esquema preferido por la empresa.

Ejercicio 42 La pareja de árbitros Aguirregaray y Gadea pueden aceptar la coima de Alarcón, el presidente de Nacional, para que asalten a Tacuarembó en el partido de Nacional Tacuarembó (del Apertura 2009), o no. El monto de la coima es $\$\ln\frac{2e+1}{e+2}$. La acción a es aceptar la coima, la n es no aceptarla. Hay dos niveles posibles de producto: el partido no parece un asalto, x_2, o sí lo parece $x_1<x_2$. Si se dejaron coimear, el partido parecerá un asalto con probabilidad $\frac{2}{3}$, mientras que si no se dejaron coimear, parecerá un asalto con probabilidad $\frac{1}{3}$. La función de utilidad de la dupla arbitral (imaginemos que la dupla tiene una sola función de utilidad), si reciben $\$s$ es $-e^{-s}$; la utilidad de reseva es $\overline{u}=-\frac{e+2}{3e}$.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para implementar a (¿se aplica el análisis hecho en clase, con costos para cada acción?). Para verificar que esté bien, parte de la respuesta es aproximadamente 0.236.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para implementar n.

Parte C. La AUF ha recibido varios pedidos de sanciones para los jueces. Algunos (abogados) argumentan que no se puede sancionarlos porque no hay pruebas de la supuesta coima. Está usted de acuerdo con la aseveración "no importa si recibieron la coima o no; de hecho, probablemente no la hayan agarrado; el castigo está justamente para que no acepten la coima."

Ejercicio 43 Un estudiante debe trabajar en sus "deberes". Si un problema le sale bien al alumno, el profesor recibe $\$x_2$ en términos esperados de aumento de sueldo; y si sale mal, 0. La probabilidad de éxito es $\sqrt{p}$ donde p es el porcentaje de las horas del día que el estudiante dedica al problema. El profesor paga premios en pesos, en vez de dar notas; paga un premio si el problema está bien, y otro si está mal.[4] El estudiante tiene una función de utilidad por un premio de s y porcentaje de horas de ocio $o=1-p$ que está dada por $\sqrt{s}+1-p$. El estudiante trabajará en total algún porcentaje entre 0 y 1 de su tiempo, y cualquier tiempo de ese total que no dedique al proyecto, lo dedicará al ocio. La utilidad de reserva es $\overline{u}=2$.

[4] Esto de los premios en plata es una forma reducida de un modelo más natural en el cual el profesor no puede regalar notas (pierde su capacidad de dar incentivos, y con eso los alumnos se vuelven malos, y el profesor pierde plata) y a los alumnos las buenas notas le significan mejores empleos en el futuro.

Parte A. Encuentre el contrato óptimo para que el agente trabaje un porcentaje p de horas, para $p \in (0, 1)$.

Parte B. Encuentre el contrato óptimo para que el agente trabaje 0% de sus horas y el contrato para que trabaje 100% de sus horas.

Parte C. Encuentre la utilidad del profesor de implementar cada p (lo que llamamos V_p habitualmente). Encuentre el p que quiere implementar el principal, si $x_2 = \frac{7}{2}$.

Parte D. Encuentre los niveles de x_2 para los cuales $p = 1$ es óptimo.

Igual que marx, pero con las dos acciones con igual costo. sobre Agente

Agente-Principal: Soluciones

Ejercicio 5. Implementar b. Tenemos

$$\frac{\ln s_1}{4} + d \ln s_2 + \left(\frac{3}{4} - d\right) \ln s_3 - c = \frac{\ln s_1 + \ln s_2 + \ln s_3}{3} = 0$$

por lo que de la última igualdad sacamos $s_1 = \frac{1}{s_2 s_3}$ y sustituimos en la primera ecuación

$$\left(d - \frac{1}{4}\right) \ln s_2 + \left(\frac{1}{2} - d\right) \ln s_3 - c = 0 \Leftrightarrow s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}}$$

Las tres ecuaciones correspondientes a las condiciones de primer orden son ahora

$$\begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ s_2 - \mu\left[1 - \frac{1}{3d}\right] = \lambda \\ s_3 - \mu\left[1 - \frac{4}{3(3-4d)}\right] = \lambda \end{array} \overset{1=2}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ \frac{3d(s_2 - s_1)}{4d-1} = \mu \\ s_3 - \mu\left[1 - \frac{4}{3(3-4d)}\right] = \lambda \end{array} \overset{\lambda \text{ y } \mu \text{ en } 3}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_1 - \mu\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \lambda \\ \frac{3d(s_2 - s_1)}{4d-1} = \mu \\ s_3 = \frac{s_1(3-8d) + s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \end{array}$$

Tenemos entonces

$$\begin{array}{c} s_3 = \frac{s_1(3-8d) + s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \\ s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}} \\ s_1 = \frac{1}{s_2 s_3} \end{array} \overset{3 \text{ en } 1}{\Leftrightarrow} \begin{array}{c} s_3 = \frac{\frac{1}{s_2 s_3}(3-8d) + s_2 8d(2d-1)}{(4d-1)(4d-3)} \\ s_3 = e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{-2+4d}} \end{array} \overset{2 \text{ en } 1}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{\frac{-2c}{-1+2d}} s_2^{\frac{4d-1}{4d-2}} = \frac{(3-8d)\, e^{\frac{2c}{2d-1}} s_2^{\frac{8d-3}{2-4d}} + s_2 8d\,(2d-1)}{(4d-1)\,(4d-3)}$$

Esta última ecuación es muy fea, pero implica un único valor de s_2 para cada d (además de $s_2 = 0$), por lo que el ejercicio está resuelto.

Ejercicio 6. Siguiendo los pasos del ejemplo anterior encontramos $s_1 = s_3 = e^{-2c}$ y $s_2 = e^{4c}$ y es fácil ver que $V_b < V_a$ para todo $c > 0$. La razón para esto es que para implementar b, hay que someter al agente a algo de riesgo, por lo cual hay que elevar el valor esperado de los pagos al agente. De hecho, el valor esperado de los pagos al agente es

$$\frac{e^{-2c} + e^{4c}}{2} > 1,$$

donde 1 es el valor esperado de los pagos al agente cuando se implementa a. Por lo tanto, implementar b cuesta más que implementar a, y sin embargo, el producto esperado bajo b es 2, y el producto esperado bajo a, también es 2. Por lo tanto, siempre conviene implementar a.

Ejercicio 7. Para demostrar que $V_b\left(c_b^*\right) \geq V_b\left(\widetilde{c}_b\right)$, basta darse cuenta que el plan óptimo de pagos $\left(\widetilde{s}_i\right)$ cuando los costos son $\widetilde{c}_b$ y c_a sigue satisfaciendo las restricciones de icentivos, y de participación. Por lo tanto, el plan óptimo cuando el costo es c_b^* tiene que ser al menos tan bueno como el plan $\left(\widetilde{s}_i\right)$.

Para demostrar la desigualdad estricta, hay dos formas. La más sencilla, es darse cuenta que si al plan viejo $\left(\widetilde{s}_i\right)$ le restamos ε en todos los sueldos, las dos restricciones, con el nuevo costo c_b^*, se siguen cumpliendo con ε pequeño. Por lo tanto, hay un plan $\left(\widetilde{s}_i - \varepsilon\right)$ que cumple las restricciones y le da estrictamente más beneficios (que el plan $\left(\widetilde{s}_i\right)$)al principal. Por lo tanto, el plan óptimo también le debe dar más beneficios.

Para mostrar la desigualdad estricta con un poco más de "cuidado" (aunque el argumento anterior está bien), construiremos un plan $\left(s_i^*\right)$ a partir del $\left(\widetilde{s}_i\right)$, que cumplirá con las restricciones de incentivos y de participación, y que le dará al principal una utilidad estrictamente mayor que $V_b(\widetilde{c_b})$, por lo tanto $V_b(c_b^*)$, que es débilmente mayor que la que brinda el plan (s_i^*), es estrictamente mayor que $V_b(\widetilde{c_b})$.

Sea s_i^* tal que

$$u(s_i^*) - c_b^* = u(\widetilde{s_i}) - \widetilde{c_b}.$$

Como $c_b^* < \widetilde{c_b}$, obtenemos que $s_i^* < \widetilde{s_i}$. Ahora verifico que el plan (s_i^*) satisface las dos restricciones cuando el costo es c_b^* (sabiendo que el plan $(\widetilde{s_i})$ las satisfacía). Primero, la de participación:

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ib} - c_b^* &= \sum_1^n \left(u(\widetilde{s_i}) - \widetilde{c_b} + c_b^*\right)\pi_{ib} - c_b^* \\ &= \sum_1^n u(\widetilde{s_i})\pi_{ib} - \widetilde{c_b} \geq \overline{u}\end{aligned}$$

Para verificar la de incentivos, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ib} - c_b^* &= \sum_1^n u(\widetilde{s_i})\pi_{ib} - \widetilde{c_b} \\ &\geq \sum_1^n u(\widetilde{s_i})\pi_{ia} - c_a \\ &> \sum_1^n u(s_i^*)\pi_{ia} - c_a\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se verifica pues $s_i^* < \widetilde{s_i}$ y las utilidades son estrictamente crecientes.

Otra solución para ambas partes. Por el Teorema de la Envolvente (ver el Capítulo **??**) sabemos que el cambio en $V_b(c_b)$ cuando cambia c_b es el cambio en el lagrangiano

$$L = \sum_1^n (x_i - s_i)\pi_{ib} + \mu\left(\sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b - \overline{u}\right) + \lambda\left(\sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b - \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a\right)$$

provocado por un cambio en c_b. Por lo tanto,

$$\frac{dV_b(c_b)}{dc_b} = -\lambda - \mu$$

y como ambos multiplicadores deben ser mayores o iguales que 0 en el óptimo, obtenermos que $V_b(c_b^*) \geq V_b(\widetilde{c_b})$.[5] Para demostrar que esta última desigualdad es estricta cuando la utilidad es continua y no acotada por debajo, alcanza con decir que μ es estrictamente positivo. La razón por la cual eso es cierto, es por el lema, que dice que la restricción de participación está siempre activa.

Aunque las dos soluciones pueden parecer distintas son, de hecho, exactamente iguales.

Ejercicio 8. Veamos primero la solución más básica, sin usar "nada". Supongamos que podemos subir el costo de la acción que no queremos implementar (digamos que queremos implementar a, y que podemos subir el costo de b) en $\Delta > 0$. Imaginemos que el plan óptimo luego de la suba es $s_1, s_2, ..., s_n$, y que por lo tanto satisface

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a^0 &\geq \overline{u} \\ \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a^0 &\geq \sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b^0 - \Delta\end{aligned}$$

[5] Como $V_b'(c) \leq 0$ para todo c, tenemos que $V_b(c_b^*) - V_b(\widetilde{c_b}) = \int_{c_b^*}^{\widetilde{c_b}} V_b'(c)\,dc \geq 0$.

Mostraremos ahora que ese mismo plan satisface las restricciones si en vez de subir c_b, bajamos c_a en la misma cuantía; así, sabemos que el óptimo en este segundo caso es al menos tan bueno como en el primero. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a^0 &\geq \overline{u} \Rightarrow \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a^0 + \Delta \geq \overline{u} \\ \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - c_a^0 &\geq \sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b^0 - \Delta \Leftrightarrow \sum_1^n u(s_i)\pi_{ia} - \left(c_a^0 - \Delta\right) \geq \sum_1^n u(s_i)\pi_{ib} - c_b^0\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Se puede mostrar, usando la construcción del Lema 4 que como hemos relajado estrictamente la restricción de participación, la solución luego de bajar el costo de a será estrictamente mejor que antes (mientras que eso puede no ser siempre así cuando subimos el costo de b).

Una forma alternativa (un poco menos general) es viendo que por el teorema de la envolvente, aplicado al Lagrangiano

$$L = \sum_1^n \pi_{ia}(x_i - s_i) + \lambda\left(\sum_1^n \pi_{ia}u(s_i) - c_a - \overline{u}\right) + \mu\left(\sum_1^n \pi_{ia}u(s_i) - c_a - \sum_1^n \pi_{ib}u(s_i) + c_b\right)$$

tenemos que

$$\frac{dL}{dc_a} = -\lambda - \mu \quad \text{y} \quad \frac{dL}{dc_b} = \mu.$$

Eso nos dice que el cambio en la función de valor (el valor máximo que obtiene el principal) es mayor cuando bajamos c_a (por cada "unidad" que bajemos c_a, los beneficios subirán en $\lambda + \mu$) que cuando subimos c_b (en cuyo caso, por cada "unidad" que subamos c_b, los beneficios subirán en μ). Igual que antes, esto nos muestra que si la restricción de participación estaba activa, λ será estrictamente positivo, y bajar c_a será estrictamente mejor que subir c_b.

Ejercicio 9.A. Para implementar a ponemos sueldos constantes y la de participación con igualdad: $s = -\log\frac{1}{2} = \log 2$. Para implementar b, ponemos $s_1 = s_2$ y las dos restricciones con igualdad:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 - c_b = -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 - 1 = -\frac{3}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow u_1 = \frac{3}{2} - 2c_b, u_3 = 4c_b - \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s_1 = s_2 = -\log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) \\ s_3 = -\log\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right)\end{array}\right.$$

9.B. Los beneficios de implementar a son

$$\frac{1}{3}\left(1 + \log\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(2 + \log\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(3 + \log\frac{1}{2}\right) = 2 - \ln 2$$

y los de implementar b son$\frac{1}{2}\ln\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) + \frac{9}{4}$

$$\frac{1}{4}\left(1 + \log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2 + \log\left(2c_b - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(3 + \log\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) + \frac{9}{4}.$$

Los beneficios de implementar b son mejores que los de a si y sólo si

$$\frac{1}{2}\ln\left(2c_b - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2} - 4c_b\right) + \frac{9}{4} \geq 2 - \ln 2 \Leftrightarrow c_b \leq 1.0648$$

Ejercicio 12.A. Hay muchos contratos óptimos, pero todos tienen el mismo s_1. Dos contratos que son naturales son: el contrato de sueldos constantes y burning oil. El problema es que con ninguno de los dos estará activa la restricción de participación: si le pagamos 0 al agente, él igual querrá participar, porque $\overline{u} < 0$. La solución es por supuesto, elegir el s_1 más chico posible, que en este caso es $s_1 = 0$.

12.B. Para implementar b, probamos con $s_1 = 0$ y s_2 para que se cumpla la de participación con igualdad: $s_2 = (\overline{u} + c)^2$. Probamos con la restricción de incentivos y vemos que se viola: si hace a obtendrá 0, que es mayor que $\overline{u}$. Si pensamos un poco, nos damos cuenta que siempre que se cumpla la de participación con igualdad, se violará la de incentivos. Por lo tanto, la de participación estará inactiva. Notamos qeu no pueden estar las dos inactivas en el óptimo: si lo estuvieran, podríamos reducir s_2, que tiene que ser positivo porque es la única manera de conseguir que la utilidad de hacer b sea mayor que la de hacer a, aumentando los beneficios del principal. Probamos con la de incentivos activa

$$u_2 - c = u_1 \Leftrightarrow u_2 = u_1 + c$$

y elegimos u_1 lo más chico posible, pero que el individuo quiera participar. Esto es $u_2 - c \geq \overline{u} \Leftrightarrow u_2 \geq \overline{u} + c \Leftrightarrow u_1 + c \geq \overline{u} + c \Leftrightarrow u_1 \geq \overline{u}$. Como u_1 debe ser positivo, elegimos $u_1 = 0$ y obtenemos $u_2 = c$.

12.C. Los beneficios de implementar a son 1 : recibe 1 seguro, y no paga sueldos. Los beneficios de implementar b son $2 - c^2$, pues recibe 2 seguro, y debe pagar c^2 seguro. Conviene implementar b si y sólo si $2 - c \geq 1 \Leftrightarrow c \leq 1$.

Ejercicio 13.A. Costo de implementar a. Ya sabemos que como el costo de a es 0 y el de b es $c > 0$, la manera más barata de implementar a es con sueldos constantes. Por lo tanto, debemos tener

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1 = u_1 = \overline{u} = 0$$

por lo que $u_1 = u_2 = 0$, es decir, $u(s) = 0 \Leftrightarrow \ln s = 0 \Leftrightarrow s = 1$. Los beneficios esperados para el principal, de implementar a, son entonces

$$V_a = \frac{1}{2}(1-1) + \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$$

13.B. Costo de implementar b. Del análisis gráfico del Varian, sabemos que el contrato óptimo está donde se intersectan la restricción de participación, con la curva de pendiente 1 definida por la igualdad de la restricción de incentivos. De todas maneras, lo resolveremos matemáticamente. Como siempre, del Lagrangiano sabemos que

$$\frac{1}{u'(s_i)} = \lambda + \mu \left[1 - \frac{1}{2\pi_{ib}}\right], \text{ para } i = 1, 2 \tag{1.7}$$

por lo tanto, debemos tener que $\mu > 0$, pues si no, s_i sería constante, y el agente eligiría la acción a, pues tiene un costo menor. Como la restricción de incentivos está activa y la de participación también, obtenemos

$$p \ln s_1 + (1-p) \ln s_2 - c = 0 = \frac{\ln s_1 + \ln s_2}{2}.$$

De la última igualdad deducimos $s_1 = \frac{1}{s_2}$, y sustituyendo en la primera

$$-p \ln s_2 + (1-p) \ln s_2 - c = 0,$$

es decir, $s_2 = e^{\frac{c}{1-2p}}$ y $s_1 = e^{-\frac{c}{1-2p}}$. Los beneficios para el principal de implementar b son

$$V_b = p\left(1 - e^{-\frac{c}{1-2p}}\right) + (1-p)\left(2 - e^{\frac{c}{1-2p}}\right)$$

por lo tanto, b es mejor que a si y sólo si

$$p\left(1 - e^{-\frac{c}{1-2p}}\right) + (1-p)\left(2 - e^{\frac{c}{1-2p}}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Poniendo $x = e^{-\frac{c}{1-2p}}$, obtenemos

$$p - px + (1-p)\,2 - (1-p)\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \geq 0$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} x &\in \left[\frac{3-2p-\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}, \frac{3-2p+\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}\right] \Leftrightarrow \\ -\frac{c}{1-2p} &\in \left[\ln\frac{3-2p-\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}, \ln\frac{3-2p+\sqrt{9-28p+20p^2}}{4p}\right] \end{aligned}$$

etc, etc, y se puede despejar c.

Ejercicio 14.A.I. Hay dos formas fáciles de ver que los sueldos son constantes. La primera, y más económica, es que es un problema de compartir riesgos en el cual una de las partes es aversa al riesgo y la otra no. Si el agente tuviera sueldos no constantes, estaría sujeto a riesgo; para el principal sería más barato asegurarle ese nivel de utilidad con un sueldo fijo (sin riesgo), y se queda él con más plata. La segunda forma de ver el resultado es acordarnos que cuando la restricción de incentivos no está activa (o no hay restricción de incentivos) el multiplicador μ sería 0, y los sueldos serían constantes. Aunque esa cuenta no vale exactamente (por ejemplo, en este problema no hay "costos" de hacer cada acción porque no hay un c_h por cada h, sino que el costo de hacer un h es lo que deja de ganar lavando platos) vale la misma idea.

Veremos igualmente cómo se resuelve el problema, si uno no se da cuenta de las formas fáciles de resolverlo. Para cada h (fijo) que el principal quiera implementar, debe elegir s_e, s_f para maximizar $\left(1-e^{-h}\right)(1000 - s_e) - e^{-h} s_f$ sujeto a

$$\left(1-e^{-h}\right) u\left(s_e + 10\,(40-h)\right) + e^{-h} u\left(s_f + 10\,(40-h)\right) \geq u\,(400)$$

(no hay restricción de incentivos pues la cantidad de horas es observable, y por tanto se puede especificar en el contrato). Siendo λ el multiplicador de la restricción, tenemos que las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} -1 + \lambda u'\left(s_e + 10\,(40-h)\right) &= 0 \\ -1 + \lambda u'\left(s_f + 10\,(40-h)\right) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica, por la concavidad de u, que $s_e = s_f$.

14.A.II. Como es habitual cuando se pueden observar las acciones, ignoraremos, por el momento, la restricción de incentivos. Dejando la restricción de participación con igualdad, obtenemos $s_{h^*} = 10h^*$ y maximizando la función objetivo con respecto a h^* obtenemos que la cantidad óptima de horas es $h^* = \ln 100$.

14.B.I. Para cada h^* que el principal quiera implementar, debe elegir s_e y s_f, los salarios en caso de éxito y fracaso, para maximizar sus beneficios esperados. Poniendo $S_e(h) = s_e + 10\,(40-h)$ y similarmente para S_f, el problema es elegir s_e y s_f para maximizar

$$\begin{aligned} & \left(1-e^{-h^*}\right)(1000 - s_e) - e^{-h^*} s_f \\ \text{s.a } \left(1-e^{-h^*}\right) u\left(S_e(h^*)\right) + e^{-h^*} u\left(S_f(h^*)\right) &\geq u\,(400) \\ \left(1-e^{-h^*}\right) u\left(S_e(h^*)\right) + e^{-h^*} u\left(S_f(h^*)\right) &\geq \left(1-e^{-h}\right) u\left(S_e(h)\right) + e^{-h} u\left(S_f(h)\right) \text{ para todo } h \in [0, 40] \end{aligned}$$

Una vez elegido el esquema de pagos s_e, s_f que implementa cada accion h^*, el principal debe elegir el nivel h^* óptimo.

14.B.II. Para cada $h^* > 0$ que se quiera implementar, si $s_e < s_f$ el agente puede obtener una utilidad de

$$\begin{aligned} u(S_f(0)) &= u(s_f + 400) > u(s_f + 10(40 - h^*)) = u(S_f(h^*)) \\ &= \left(1 - e^{-h^*}\right) u(S_f(h^*)) + e^{-h^*} u(S_f(h^*)) > \left(1 - e^{-h^*}\right) u(S_e(h^*)) + e^{-h^*} u(S_f(h^*)) \end{aligned}$$

por lo que se violaría la restricción de incentivos.

Ejercicio 15.A. Cada trabajador debe comparar la utilidad de $e = 1$, que es $w - 1$, con la utilidad de $e = 0$, que es $\frac{n-1}{n} w$, y elegirá trabajar si y sólo si

$$w - 1 \geq \frac{n-1}{n} w \Leftrightarrow w \geq n$$

15.B. La firma elegirá $w = n$, y luego debe elegir n para maximizar

$$B = \alpha n - n^2$$

que es la forma "reducida" de $\alpha m - wn$, pues ya sabemos que si $w = n$, obtenemos $m = n$.

15.C. Tomando la derivada con respecto a n e igualando a 0 obtenemos $n = w = \frac{\alpha}{2}$.

15.D. La primera forma, es notar que si un plan es óptimo cuando $\alpha = \alpha_b$, ese mismo plan sigue siendo admisible cuando $\alpha = \alpha_a > \alpha_b$, y que cualquiera sea el m que ese plan genere, le dará más beneficios al principal. La segunda forma, es calculando todo, y tomando la derivada de los beneficios con respecto a α. La tercera, es con el Teorema de la Envolvente, pues llamando B a los beneficios óptimos, y siendo el Lagrangiano del problema (cuando se implementa el esfuerzo $e = 1$) $L = n(\alpha - w) + \lambda\left(w - 1 - \frac{n-1}{n} w\right)$, obtenemos

$$\frac{dB}{d\alpha} = \frac{dL}{d\alpha} = n^* > 0.$$

Verificamos que esta forma nos da la misma respuesta que haciendo las cuentas directamente: $dB/d\alpha = n^* = \alpha/2$, y como $B = \alpha n^* - n^{*2} = \alpha^2/4$, nos da $dB/d\alpha = \alpha/2$.

Ejercicio 16.A. El costo de implementar a es $s = -\ln(-a - \overline{u})$, y los beneficios para el principal son

$$\frac{1}{10} x_1 + \frac{9}{10} x_2 + \ln(-a - \overline{u})$$

Para implementar la acción b, hacemos el contrato "burning oil": si ocurre el nivel bajo de producto, le tiramos aceite hirviendo al agente. Para formalizar esto, ignoramos la restricción de incentivos, y resolvemos para el sueldo que obtendría el agente si trabajara b :

$$-e^{-s_2} - b = \overline{u} \Leftrightarrow s_2 = -\ln(-b - \overline{u}).$$

Ahora, para asegurarnos que el agente no querrá desviarse y adoptar la acción a, podemos elegir el sueldo que obtendría el agente en caso de que ocurra x_1 tan bajo como querramos:

$$\begin{aligned} \overline{u} &> \frac{1}{10}\left(-e^{-s_1} - a\right) + \frac{9}{10}\left(-e^{-s_2} - a\right) = \frac{9}{10}(\overline{u} + b) - \frac{1}{10} e^{-s_1} - a \Leftrightarrow \\ e^{-s_1} &> 9b - \overline{u} - 10a \Leftrightarrow -\ln(9b - 10a - \overline{u}) > s_1. \end{aligned}$$

Los beneficios para el principal de implementar b son

$$x_2 + \ln(-b - \overline{u})$$

por lo tanto elegirá implementar b si y sólo si

$$\frac{x_1 - x_2}{10} < \ln\left(\frac{b + \overline{u}}{a + \overline{u}}\right)$$

16.B. El costo de a es el mismo de antes, y los beneficios para el principal son

$$(1 - a) x_1 + a x_2 + \ln(-a - \overline{u}).$$

Para implementar b, igualamos la utilidad esperada de b a $\overline{u}$ y obtenemos

$$-(1 - b) e^{-s_1} - b e^{-s_2} - b = \overline{u} \Leftrightarrow s_2 = -\ln\left(-\frac{1 - b + (b + u) e^{s_1}}{b}\right) + s_1$$

También, sabemos que la restricción de incentivos estará activa, por lo cual

$$\overline{u} = -(1 - a) e^{-s_1} - a e^{-s_2} - a$$

y sustituyendo el valor encontrado para s_2 en esta ecuación obtenemos

$$s_1 = -\ln(-\overline{u})$$

y por tanto $s_2 = -\ln(-\overline{u} - 1)$.

Ejercicio 17. Partes A y B. Para implementar a se eligen sueldos constantes tales que $\log s - a = \overline{u} \Leftrightarrow s = e^{a+\overline{u}}$. Los beneficios son $(x_1 + x_2)/2 - e^{a+\overline{u}}$. Para implementar b, hacemos activa a la restricción de incentivos, y como la utilidad es continua y no acotada por debajo, también igualamos la restricción de participación para obtener

$$\frac{1}{4}\log s_1 + \frac{3}{4}\log s_2 - b = \overline{u} = \frac{1}{2}\log s_1 + \frac{1}{2}\log s_2 - a \Leftrightarrow (s_1, s_2) = \left(e^{3a-2b+\overline{u}}, e^{2b-a+\overline{u}}\right).$$

Los beneficios del principal son entonces

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{1}{4}\left(x_1 - e^{3a-2b+\overline{u}}\right) + \frac{3}{4}\left(x_2 - e^{2b-a+\overline{u}}\right) > \frac{x_1 + x_2}{2} - e^{a+\overline{u}} = V(a) \Leftrightarrow \\ \frac{x_2 - x_1}{4e^{\overline{u}}} &> \frac{3}{4}e^{2b-a} + \frac{1}{4}e^{3a-2b} - e^a \Leftrightarrow \frac{8}{3} > e^{2b-a} = \frac{25}{16} \end{aligned} \tag{1.8}$$

por lo que el principal implementará la acción b.

Si en cambio $x_2 = 2$, la ecuación (1.8) se transforma en $\frac{3}{2} > \frac{25}{16}$, por lo que el principal implementa a.

Ejercicio 18.A. El gobierno debe elegir s_A y s_B para maximizar

$$\frac{3}{4}\frac{3}{4}2(1 - s_A) + 2\frac{1}{4}\frac{3}{4}(1 - s_A - s_B) + \frac{1}{4}\frac{1}{4}2(-s_B) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}s_A - \frac{1}{2}s_B$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}(\sqrt{s_A} - 1) + \frac{1}{4}\sqrt{s_B} &\geq \overline{u} \\ \frac{3}{4}(\sqrt{s_A} - 1) + \frac{1}{4}\sqrt{s_B} &\geq \frac{1}{4}(\sqrt{s_A} - 1) + \frac{3}{4}\sqrt{s_B} \Leftrightarrow \sqrt{s_A} - 1 \geq \sqrt{s_B} \end{aligned}$$

Vemos que llamando a a la acción que hace que la recaudación sea alta con probabilidad $\frac{3}{4}$, y b a la otra, tenemos que este problema es idéntico formalmente al de las notas, si ponemos $c_a = \frac{3}{4}$, $c_b = \frac{1}{4}$, $\pi_{Aa} = \frac{3}{4}$ y $\pi_{Ab} = \frac{1}{4}$.

18.B. Sabemos que, en principio, en el óptimo se cumplen con igualdad las dos restricciones si se quiere implementar la acción con el costo alto (si probamos y vemos que como $\sqrt{s}$ es acotada por debajo, la de participación no queda activa, probamos alguna otra cosa). Tenemos entonces $\sqrt{s_A}-1 = \sqrt{s_B}$ y, sustituyendo esto en la primera restricción, $s_B = \overline{u}^2$, de lo que obtenemos $s_A = (\overline{u}+1)^2$. Vemos que si $\overline{u} \geq 0$, entonces $s_A \geq 1$, y entonces $\sqrt{s_B} \geq 0$, por lo que fue correcta nuestra "prueba" con las dos restricciones activas.

18.C. La utilidad del gobierno de implementar a es

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}s_A - \frac{1}{2}s_B = -2\overline{u}^2 - 3\overline{u}.$$

Para encontrar la utilidad de implementar la acción b, debemos calcular el pago constante que dejará a las provincias indiferentes entre participar y no participar cuando implementan la acción b:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{s}-1\right) + \frac{3}{4}\sqrt{s} = \overline{u} \Leftrightarrow s = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\overline{u} + \overline{u}^2.$$

Esto le da al gobierno una utilidad

$$\frac{1}{8}(1-s) + \frac{3}{8}(1-2s) + \frac{9}{8}(-s) = \frac{1}{2} - 2s$$

y sustituyendo por el s óptimo,

$$\frac{3}{8} - \overline{u} - 2\overline{u}^2.$$

Por lo tanto, la acción a es mejor que la b si y sólo si

$$-2\overline{u}^2 - 3\overline{u} - \left(\frac{3}{8} - \overline{u} - 2\overline{u}^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \overline{u} \leq -\frac{3}{16}.$$

Como no pusimos ninguna restricción sobre $\overline{u}$, a veces es mejor a y a veces mejor b.

Ejercicio 19.A.I. Ponemos la utilidad del agente igual a $\overline{u}$, y como no hay incertidumbre sobre su pago si elige e^* tenemos que

$$u(s^*) - c(e^*) = \overline{u} \Leftrightarrow s^* = u^{-1}(\overline{u} + c(e^*)).$$

19.A.II. El agente nunca elegirá niveles $e > e^*$ pues eligiendo e^* ganará lo mismo, y se esforzará menos. El agente tampoco elegirá niveles $e \in (e_*, e^*)$ pues para todos esos niveles e, su utilidad es

$$\frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e) < \frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e_*).$$

Es decir, para todos esos niveles de e, si tiene suerte, recibe el salario alto s^*, y si no tiene suerte, el salario bajo s_*, pero para todos esos e, la probabilidad de que ocurra el producto alto está fija en $\frac{1}{2}$, y por lo tanto, no vale la pena esforzarse.

Por último, si $e_* > 0$, para todos los niveles $e \in [0, e_*)$ el agente recibirá s_* seguro, por lo que conviene elegir el nivel más bajo de esfuerzo, que es 0.

19.A.III. La utilidad de elegir e^* es $\overline{u}$, como ya vimos. Ahora debemos elegir s_* para que

$$\begin{aligned} \overline{u} &\geq \frac{u(s^*) + u(s_*)}{2} - c(e_*) \Leftrightarrow s_* \leq u^{-1}(2(\overline{u} + c(e_*)) - u(s^*)) = u^{-1}(\overline{u} + 2c(e_*) - c(e^*)) \\ \overline{u} &\geq u(s_*) - c(0) \Leftrightarrow s_* \leq u^{-1}(\overline{u} + c(0)) \end{aligned}$$

(en la primera ecuación se puede hacer alguna cuenta adicional, usando la definición de e_*). Con s^* y s_* elegidos de esta manera, el agente elegirá siempre e^*.

19.B.I. El principal debe elegir (E, s) para maximizar

$$\begin{aligned} & \int_1^2 (\varepsilon f(E) - s)\, d\varepsilon \\ \text{sujeto a } u(s) - c(E) &= \overline{u} \end{aligned}$$

Reemplazando las formas funcionales, de la restricción obtenemos $s = e^{\overline{u}+E}$, y reemplazando en la función objetivo vemos que el principal debe elegir E para maximizar

$$\int_1^2 \left(\varepsilon f(E) - e^{\overline{u}+E}\right) d\varepsilon = f(E)\int_1^2 \varepsilon d\varepsilon - e^{\overline{u}+E} = \frac{3}{2} f(E) - e^{\overline{u}+E}.$$

La condición de primer orden, sustituyendo $f(e)$ por e, arroja $e^* = \log\frac{3}{2} - \overline{u}$.

19.B.II. Como en la parte A, elegimos s^* de forma que el agente sea indiferente entre participar y no participar si elige e^* :

$$u(s^*) - c(e^*) = \overline{u} \Leftrightarrow s^* = e^{\overline{u}+e^*} = \frac{3}{2}.$$

Debemos considerar dos casos: en el primero, cuando el esfuerzo es "muy bajo", el agente siempre recibe el sueldo bajo s_*; en el segundo, recibe algunas veces s_* y otras s^*. El límite que determina cuándo un esfuerzo es muy bajo viene dado por aquél esfuerzo $\overline{e}$, tal que aún si el trabajador tiene suerte y sale $\varepsilon = 2$, el sueldo es bajo: $2\overline{e} = e^* \Leftrightarrow \overline{e} = e^*/2$. La utilidad de elegir $E \leq \frac{e^*}{2}$ es

$$\begin{aligned} & P(\varepsilon E < e^*)\log s_* + (1 - P(\varepsilon E < e^*))\log s^* - E \\ = \;& P(\varepsilon < 2)\log s_* + (1 - P(\varepsilon < 2))\log s^* - E \\ = \;& \log s_* - E. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que s_* debe ser tal que, para todo $E \in \left[0, \frac{e^*}{2}\right]$ debemos tener $\log s_* - E \leq \overline{u}$ por lo que eligiendo $s_* \leq e^{\overline{u}}$ el agente no querrá elegir E en este rango.

La utilidad de elegir $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right]$ es

$$\begin{aligned} U &= P(\varepsilon E < e^*)\log s_* + (1 - P(\varepsilon E < e^*))\log s^* - E \\ &= P\left(\varepsilon < \frac{e^*}{E}\right)\log s_* + \left(1 - P\left(\varepsilon < \frac{e^*}{E}\right)\right)\log s^* - E \\ &= \left(\frac{e^*}{E} - 1\right)\log s_* + \left(2 - \frac{e^*}{E}\right)\log s^* - E \qquad (1.9) \\ &= \frac{\left(\log\frac{3}{2} - \overline{u} - E\right)\log s_* + \left(2E - \log\frac{3}{2} + \overline{u}\right)\log\frac{3}{2} - E^2}{E} \end{aligned}$$

Esta es una función continua en E (pues como $e^* = \log\frac{3}{2} - \overline{u} > 0$, $e^*/2 > 0$, y entonces el denominador nunca es 0) en un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene un máximo y un mínimo. Para cualquier E^* que minimice la función, tendremos $\log\frac{3}{2} - \overline{u} - E^* > 0$, por lo que alcanza con elegir un s_* suficientemente pequeño: entonces, la utilidad máxima de elegir $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right]$ será menor que $\overline{u}$. Eligiendo s_* como el mínimo s entre este valor y $e^{\overline{u}}$ (que des-incentiva esfuerzos $E \leq e^*/2$), obtenemos que el agente no quiere elegir $e \leq e^*$.

Una forma menos "abstracta" de resolverlo es la siguiente. La utilidad de la ecuación (1.9) es tal que si s_* es suficientemente pequeño, la utilidad se maximiza con $E = e^*$. Para ver eso, tomamos la derivada de (1.9) con respecto a E,

$$\frac{dU}{dE} = \frac{\left(\log\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\log\frac{3}{2} - \overline{u}\right)\log s_* - \overline{u}\log\frac{3}{2} - E^2}{E^2}$$

y notamos que si s_* es suficientemente pequeño, entonces dU/dE es positivo (ya que hemos asumido que $\log \frac{3}{2} - \overline{u}$ es positivo). Eso hace que el único E óptimo sea el más grande posible, $E = e^*$. Como la utilidad de e^* es exactamente $\overline{u}$, nos habremos asegurado que no conviene elegir ningún $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right)$, que era exactamente nuestro objetivo. Para hacerlo más concreto aún, los s_* que hacen dU/dE positiva son aquellos para los cuales

$$\left(\log \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\log \frac{3}{2} - \overline{u}\right) \log s_* - \overline{u} \log \frac{3}{2} - E^2 > 0 \Leftrightarrow \log s_* < \frac{\ln \frac{3}{2}\left(\ln \frac{3}{2} - \overline{u}\right) - E^2}{\ln \frac{3}{2} - \overline{u}}$$

y para que esta desigualdad se cumpla para todo E, hay que hacer que se cumpla para el mayor E, $E = e^* = \left(\ln \frac{3}{2} - \overline{u}\right)$. Deducimos que eligiendo

$$\log s_* < \overline{u} = \frac{\ln \frac{3}{2}\left(\ln \frac{3}{2} - \overline{u}\right) - e^{*2}}{\ln \frac{3}{2} - \overline{u}} \leq \frac{\ln \frac{3}{2}\left(\ln \frac{3}{2} - \overline{u}\right) - E^2}{\ln \frac{3}{2} - \overline{u}}$$

el agente no elegirá $E \in \left[\frac{e^*}{2}, e^*\right)$, como buscábamos.

Ejercicio 20.A. Como el costo de el esfuerzo malo es menor, ignoramos la restricción de incentivos y ponemos un sueldo constante:

$$\left(100 - \frac{10}{w} - 0\right)\frac{3}{4} + \left(100 - \frac{10}{w} - 0\right)\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{10}$$

y la utilidad del principal es $\left(20 - \frac{1}{10}\right)\frac{1}{4} + \left(0 - \frac{1}{10}\right)\frac{3}{4} = \frac{49}{10}$.

20.B. Como el esfuerzo es observable, se puede poner en el contrato, y no hay restricción de incentivos. Tenemos entonces que el sueldo debe ser constante y obtenemos

$$\left(100 - \frac{10}{w} - 2\right)\frac{3}{4} + \left(100 - \frac{10}{w} - 2\right)\frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{5}{49}$$

y la utilidad del principal es $\left(20 - \frac{5}{49}\right)\frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{49}\right)\frac{1}{4} = \frac{730}{49}$.

20.C. El problema que enfrenta el principal es el de elegir w_e, w_n (los sueldos en caso de error y no error respectivamente) para maximizar

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{4}(20 - w_n) - \frac{1}{4}w_e & = & 15 - \frac{3}{4}w_n - \frac{1}{4}w_e \\ s.a \quad \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e} - 2\right) & \geq & 0 \\ \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e} - 2\right) & \geq & \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n}\right) + \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e}\right) \end{array}$$

Como la función de utilidad es continua en w y no acotada por debajo, la restricción de participación estará activa, y como en el óptimo la de incentivos estará activa (si no lo estuviera los sueldos serían constantes, y con sueldos constantes el agente hace el esfuerzo malo) el contrato óptimo resuelve el sistema de 2×2 que surge de igualar las dos restricciones

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e} - 2\right) & = & 0 \\ \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n} - 2\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e} - 2\right) - \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{w_n}\right) - \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{w_e}\right) & = & 0 \end{array}$$

La solución es $w_e = \frac{10}{101}, w_n = \frac{10}{97}$, y el beneficio del principal es

$$15 - \frac{3}{4}\frac{10}{97} - \frac{1}{4}\frac{10}{101} = 14.898 > \frac{49}{10}$$

por lo que elige el esfuerzo bueno.

Ejercicio 21.A El FMI es el principal y le presta plata a Argentina que es el agente. El FMI quiere diseñar un esquema que haga que cada vez que le presta a Argentina, Argentina haga algo bueno con la plata.

21.B Si cada vez que ocurre el "producto malo" (que Argentina no tenga posibilidades de repago) el FMI le perdona la deuda (o la rescata), entonces Argentina sabe que el esquema de pagos es un "sueldo constante", y no tendrá incentivos a hacer nada bueno con la plata, y se la gastará en lo que le dé más placer, y no en lo que el FMI quiere.

21.C En cada caso particular, al FMI le gustaría rescatar al fundido (para evitar crisis sociales como la de Argentina en 2002). El problema es que si lo hace, el próximo que pida plata sabrá que puede "timbearse" la plata pues llegado el momento, el FMI le perdonará la deuda, o lo rescatará (no es lo que yo digo, es lo que dice la teoría del agente principal, o de moral hazard, aplicada en este contexto)

Ejercicio 22.A. Para $e = 6$, el principal debe elegir w para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{2}{3}(60.000 - w) + \frac{1}{3}(30.000 - w) \\ s.a \quad 114 & \leq & \sqrt{w} - 6^2 \end{aligned}$$

lo que arroja $w = 22.500$ y beneficios de 27 500. Para $e = 4$, obtenemos $w = 16.900$ y beneficios de 23.100. El economista elige el contrato con $e = 6$.

22.B. Si hay información asimétrica, cuando se quiere implementar $e = 4$, el contrato es el mismo. Cuando se quiere implementar $e = 6$ se deben elegir w_6 y w_3 para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{2}{3}(60.000 - w_6) + \frac{1}{3}(30.000 - w_3) \\ s.a \quad 114 & \leq & \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_6} - 6^2\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_3} - 6^2\right) \\ \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_6} - 6^2\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_3} - 6^2\right) & \geq & \frac{1}{3}\left(\sqrt{w_6} - 4^2\right) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{w_3} - 4^2\right) \end{aligned}$$

Como las dos restricciones están activas, igualamos ambos lados de la restricción de participación a 114 y obtenemos $w_3 = 12.100$, $w_6 = 28.900$ y beneficios de 26.700, por lo que el economista elige $e = 6$.

Ejercicio 23.A. El principal debe elegir s_1, s_2 y s_3 para maximizar

$$\begin{aligned} & & \frac{2}{3}(1-b)(1-s_1) + \frac{1}{3}(2-s_2) + \frac{2}{3}b(3-s_3) \\ \text{sujeto a } 0 & \leq & \frac{2}{3}(1-b)s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3}bs_3 - b^2. \end{aligned}$$

Cualquier esquema de pagos (s_1, s_2, s_3) que cumpla con la restricción de participación con igualdad será tal que

$$b^2 = \frac{2}{3}(1-b)s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{2}{3}bs_3$$

y por lo tanto obtendrá unos beneficios de

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(1-b)(1-s_1)+\frac{2-s_2}{3}+\frac{2}{3}b(3-s_3) &= \frac{2}{3}(1-b)+\frac{2}{3}+2b-\left[\frac{2}{3}(1-b)s_1+\frac{s_2}{3}+\frac{2}{3}bs_3\right] \\ &= \frac{2}{3}(1-b)+\frac{2}{3}+2b-b^2 \qquad (1.10)\end{aligned}$$

(que es la expresión a la que queremos llegar). Como la función de utilidad del agente es no acotada por debajo y continua, en el contrato óptimo la restricción de participación debe estar activa, y los beneficios serán como en (1.10).

Nota: vemos que cualquier contrato que cumpla la restricción de Participación (para el esfuerzo b) con igualdad es óptimo (para implementar b), pues: todos los contratos que cumplen la restricción de participación con igualdad arrojan la misma utilidad, y el óptimo cumple la restricción con igualdad.

23.B. La solución es $b=\frac{2}{3}$.

23.C. Tenemos que sustituyendo por el b^* de la Parte B se obtiene $F=\frac{16}{9}$.

23.D. Por construcción el contrato satisface la restricción de participación. También, como b^* maximiza

$$\frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2$$

también maximiza

$$\frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2-F.$$

Por lo tanto, para todo b

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(1-b^*)(1-F)+\frac{1}{3}(2-F)+\frac{2}{3}b^*(3-F)-b^{*2} &= \frac{2}{3}(1-b^*)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b^**3-b^{*2}-F \\ &\geq \frac{2}{3}(1-b)+\frac{1}{3}*2+\frac{2}{3}b*3-b^2-F \\ &= \frac{2}{3}(1-b)(1-F)+\frac{1}{3}(2-F)+\frac{2}{3}b(3-F)-b^2.\end{aligned}$$

Es decir, se satisfacen todas las restricciones de incentivos. Ello demuestra que el contrato de la Parte C es óptimo para implementar b^* : lo implementa, pues se cumplen las dos restricciones, y es óptimo pues (como mostramos en la Parte A) cualquier contrato que le de la utilidad de reserva al agente es óptimo.

23.E. Demostraremos que el principal querrá implementar b^* de dos formas “distintas” (son la misma). Para la primera, llamemos $V(b)$ al valor máximo de la utilidad que puede alcanzar el principal cuando quiere implementar b y debe satisfacer las dos restricciones, y llamemos $\widetilde{V}(b)$ al valor máximo de la utilidad que puede alcanzar el principal cuando quiere implementar b y debe satisfacer *sólo* la restricción de participación. Es decir, queremos mostrar que para todo b, $V(b^*)\geq V(b)$.

Notamos que para todo b $\widetilde{V}(b)\geq V(b)$, y recordamos, de la Parte A, que b^* maximiza $\widetilde{V}(b)$:

$$\widetilde{V}(b^*)\geq\widetilde{V}(b)$$

para todo b. Por lo tanto,

$$\widetilde{V}(b^*)\geq\widetilde{V}(b)\geq V(b)$$

Como el plan $(1-F,2-F,3-F)$ es óptimo para implementar b^* en el problema con información asimétrica (de la Parte D) da una utilidad para el principal $V(b^*)$, y como ese plan cumple la restricción de participación con igualdad (por las Parte C) es óptimo para implementar b^* sin la restricción de incentivos (por la Parte A), por lo que $V(b^*) = \widetilde{V}(b^*)$. Tenemos entonces que para todo b,

$$V(b^*) = \widetilde{V}(b^*) \geq \widetilde{V}(b) \geq V(b)$$

como queríamos demostrar.

Para la "segunda" forma de demostrar lo mismo, llamemos: $\widetilde{A}$ al subconjunto de $[0,1] \times \mathbf{R}^3$ formado por cuartetos de la forma $[b,(s_1,s_2,s_3)]$ que satisfacen la restricción de participación (son los pares de [esfuerzo,planes] que satisfacen la restricción); A al subconjunto de $\widetilde{A}$ definido por los $[b,s] \in \widetilde{A}$ tales que

$$\frac{2}{3}(1-b)(1-s_1) + \frac{2-s_2}{3} + \frac{2}{3}b(3-s_3) \geq \frac{2}{3}(1-a)(1-s_1) + \frac{2-s_2}{3} + \frac{2}{3}a(3-s_3), \forall a \in [0,1]$$

(son los planes en $\widetilde{A}$ que no tienen problemas de incentivos). El problema del principal es el de elegir $[b,s] \in A$ para maximizar

$$f(b,s) = \frac{2}{3}(1-b)(1-s_1) + \frac{2-s_2}{3} + \frac{2}{3}b(3-s_3).$$

En las Partes A y C demostramos que $[b^*,(1-F,2-F,3-F)]$ es óptimo en el problema de maximizar $f(b,s)$ con $(b,s) \in \widetilde{A}$ (en la Parte A mostramos que cualquiera que cumpla participación con igualdad es óptimo, y en la C que el plan en cuestión la cumple con igualdad). Como, por la Parte D, $[b^*,(1-F,2-F,3-F)] \in A$, tenemos que $[b^*,(1-F,2-F,3-F)]$ es óptimo en el problema de maximizar $f(b,s)$ con $(b,s) \in A$.

Ejercicio 25.A Tenemos que

$$\begin{aligned}
u(e_A,e_A) &= p^2 n_b + \left(1-p^2\right) n_m - e_A - e_A = p^2 n_b - p^2 - 3 \\
u(e_A,e_B) &= u(e_B,e_A) = p(1-p) n_b + (1-p(1-p)) n_m - e_A - e_b = p(1-p) n_b - p(1-p) - 2 \\
u(e_B,e_B) &= (1-p)^2 n_b + \left(1-(1-p)^2\right) n_m - e_B - e_B = (1-p)^2 n_b - (1-p)^2 - 1
\end{aligned}$$

25.B. En términos generales, el problema de agente principal se puede escribir como sigue. Si le llamamos v a la función de utilidad del principal, para cada acción b que el principal quiera implementar, debe resolver el problema de elegir $s = (s_1, ..., s_n)$ para maximizar

$$\begin{aligned}
& v(b,s) \\
\text{sujeto a } u(b,s) &\geq \overline{u} \\
u(b,s) &\geq u(a,s) \text{ para todo } a
\end{aligned}$$

En este problema, las acciones posibles del agente son $(e_A,e_A), (e_A,e_B), (e_B,e_A)$ y (e_B,e_B). Por lo tanto, para dejar el planteo del problema exactamente igual que uno de agente principal, podemos escribir el problema del profesor de la siguiente manera. Elegir n_b para maximizar

$$\begin{aligned}
v(e_A,e_A,n_b) &= 4 \\
\text{sujeto a } u(e_A,e_A,n_b) &\geq u(e_A,e_B,n_b) \\
u(e_A,e_A,n_b) &\geq u(e_B,e_B,n_b)
\end{aligned}$$

Como no se especificó que hubiera una restricción de participación, no es necesario plantearla.

En realidad, escribir el problema de esa manera es matar una hormiga con un cañón. Alcanza con decir que, como el profesor siempre quiere implementar los esfuerzos más altos, debe elegir n_b para que

$$u(e_A,e_A) \geq \max\{u(e_A,e_B), u(e_B,e_B)\}.$$

25.C. Se deben cumplir

$$\begin{aligned} u(e_A, e_A) &\geq u(e_A, e_B) \Leftrightarrow n_b \geq \frac{p(2p-1)+1}{p(2p-1)} \\ u(e_A, e_A) &\geq u(e_B, e_B) \Leftrightarrow n_b \geq \frac{2p+1}{2p-1}. \end{aligned}$$

Como $\frac{2p+1}{2p-1} \geq \frac{p(2p-1)+1}{p(2p-1)}$ la solución es fijar $n_b \geq \frac{2p+1}{2p-1}$. En ese caso el profesor obtiene una utilidad de $e_A + e_A = 4$.

25.D. Si al alumno le va mal en el primer parcial, la nota final será $n_m = 1$, independientemente del esfuerzo del alumno. Por lo tanto, el alumno elegirá e_B, y ello le arroja una utilidad al profesor de $e_A + e_B = 3$. Si al alumno le va bien en el primer parcial se puede verificar que, con n_b como antes, el alumno elegirá e_A nuevamente en el segundo parcial y el profesor obtendrá 4. Por tanto, la utilidad esperada es

$$U = p4 + (1-p)3 = p + 3.$$

25.E. Para que el alumno quiera implementar e_A se debe cumplir que

$$\begin{aligned} u(e_A, e_A) &\geq u(e_A, e_B) \Leftrightarrow \\ pn_b + (1-p)n_m - e_A - e_A &\geq (1-p)n_b + pn_m - e_A - e_B \Leftrightarrow \\ pn_b - p - 3 &\geq (1-p)n_b + p - 3 \Leftrightarrow \\ n_b &\geq 2\frac{p}{2p-1} \end{aligned}$$

25.F. El profesor promete $n_b > \frac{2p+1}{2p-1}$ y $F = \min\{n^1, n^2\}$. El alumno elige e_A en el primer período (porque se cree la promesa) y otra vez e_A en el segundo período cuando el profesor asegura que la nota será n^2. Por tanto la utilidad del profesor es nuevamente 4.

25.G. Obviamente, los alumnos pueden re-optimizar en la mitad del camino, por lo que la regla F proporciona muy malos incentivos una vez que al alumno le fue mal. Por lo tanto, si al profesor no le gusta cambiar las reglas por la mitad del camino, la regla F es mala.

Ejercicio 26.A. El agente no querrá que el monto del desfalco sea tal que el valor post pago de la deuda sea menor que F, por tanto, debe elegir d para maximizar

$$\begin{aligned} & d + f(100-d) \\ \text{sujeto a } \underbrace{\frac{7}{5}(100-d)+d}_{\text{retorno del proyecto}} - \underbrace{(100-F)\frac{6}{5}}_{\text{pago de deuda e intereses}} \geq{} & F \end{aligned}$$

Como la función objetivo es creciente en d, el agente querrá elegir d lo más grande posible, siempre que se cumpla la restricción: $d = 50 + \frac{1}{2}F$

26.B. El retorno total del proyecto (para el principal) de elegir financiar F con fondos propios y $100 - F$ con deuda

$$\underbrace{(100-F)\frac{11}{10}}_{\text{retorno del banco}} + \underbrace{\frac{7}{5}(100-d)+d}_{\text{retorno del proyecto}} - \underbrace{(100-F)\frac{6}{5}}_{\text{pago de deuda e intereses}} = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}d$$

lo cual es obvio: por cada peso desfalcado por el agente, el principal pierde 40% (que es el retorno del proyecto).

26.C. Sustituyendo $d = 50 + \frac{1}{2}F$ en la utilidad del principal obtenemos

$$U_P(F) = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}d^* = 130 + \frac{1}{10}F - \frac{2}{5}\left(50 + \frac{1}{2}F\right) = 110 - \frac{1}{10}F$$

y el principal elegirá $F = 0$: todo con deuda, a pesar que es más cara que los fondos propios.

Dos cosas a tener en cuenta. Primero, puede ser inviable para la política de un banco financiar el 100% de un proyecto con deuda, y por eso no observamos que todos los proyectos sean financiados con deuda (eso podría ser porque los bancos quieren un poco de compromiso de parte de los dueños de la empresa). Lo segundo, es ¿porqué no manda preso el principal al agente, por más que sus acciones sean observables? Una de las razones posibles, es que por más que sean observables entre ellos, no se puedan demostrar en una corte.

Ejercicio 27.A. El principal pagará un sueldo fijo w que le de al agente una utilidad de 2 :

$$\sqrt{w} - k = 2 \Leftrightarrow w = (2+k)^2.$$

27.B. El contrato burning oil típico es aquél en cual $w_1 = 0$ y se elige w tal que

$$\sqrt{w} - 2k = 2 \Leftrightarrow w = 4(1+k)^2.$$

Para este nivel de salario, la utilidad de hacer e_a es

$$\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}(2+2k) - k = \frac{4}{3} + \frac{k}{3}$$

por lo que si $k > 2 \equiv k^*$, el contrato burning oil no sirve para implementar e_b pues al agente le va mejor haciendo e_a. La razón por la cual los k chicos sirven y los grandes no es que si k es grande, el salario no importa tanto como el esfuerzo, y entonces $w = 0$ no es tan grave. Si la utilidad se pudiera achicar tanto como uno quisiera bajando el salario (por ejemplo usando $\log w$), este problema no aparecería.

27.C. Es obvio que fijar $w_1 = 0$ es óptimo, los otros dos sueldos los fijamos usando la ecuación (1.1), que en este caso nos dice que los sueldos en x_2 y en x_3 deben ser iguales. El nivel se fija para que se cumpla la restricción de incentivos:

$$\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}\sqrt{w} - 3 = \sqrt{w} - 6 \Leftrightarrow w = 81.$$

La de incentivos debe estar activa (de lo contrario, los sueldos serían constantes, y el agente haría la acción de costo bajo). Lo "curioso" es que la de participación no está activa: $\sqrt{w} - 6 = 3 > 2$. La razón sólo puede ser una: que la función de utilidad es acotada por debajo, y por tanto no se cumple el lema.

Ejercicio 28.A. Este es el más fácil, como siempre: sueldo constante que cumpla la restricción de participación. La razón es la misma de siempre y valen los mismos argumentos. Tendríamos entonces

$$u - e_b = \overline{u} \Leftrightarrow u = \overline{u} + e_b \Leftrightarrow s = f(\overline{u} + e_b).$$

28.B. Notamos primero que no puede ser $u_2 - u_1 < 1/\pi'(e_a)$ pues eso querría decir que $U'(e_a) < 0$, y eso a su vez querría decir que el plan (u_1, u_2) no implementa e_a, pues se violaría la restricción de incentivos, y el agente querría hacer una acción $e < e_a$. Supongamos entonces que en el plan óptimo para implementar e_a se cumple que $u_2 - u_1 > 1/\pi'(e_a)$. En este caso, tenemos que u_2 es "demasiado" grande, y el agente querría seguir aumentando su esfuerzo (para aumentar más la probabilidad de éxito). Si el u_2 es demasiado grande, quiere decir que u_1 debe ser chico (de lo contrario le estaríamos regalando utilidad al agente). Deducimos entonces que este plan tiene “demasiado” riesgo, y que el principal podría ganar más dinero reduciendo el riesgo. Eso nos lleva a tratar el siguiente plan. Para mostrar que (u_1, u_2) no es óptimo, reduciremos el riesgo para el agente, manteniendo la restricción de participación activa, de tal forma que el principal gane más dinero (porque el agente es averso al riesgo). Como π es cóncava, si alteramos u_1 y u_2 sólo marginalmente, de tal forma que se siga cumpliendo esa desigualdad, la acción óptima para el agente seguirá siendo e_a. Si aumentamos u_1 en c, para que se siga cumpliendo la restricción de participación debemos reducir u_2 en un x tal que

$$(1-\pi(e_a))(u_1+c)+\pi(e_a)(u_2-x)=(1-\pi(e_a))u_1+\pi(e_a)u_2 \Leftrightarrow x=c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}.$$

En términos esperados la cantidad de “útiles” que le cuesta al principal este incremento en c de u_1 y reducción de $c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}$ en u_2 es 0. Pero como la utilidad es cóncava, el aumento de u_1 cuesta menos plata que lo que gana con la caída de u_2. Formalizamos ahora, esta idea. El beneficio para el principal de reducir u_1 en c de esta manera es

$$B(c)=(1-\pi(e_a))(x_1-f(u_1+c))+\pi(e_a)\left(x_2-f\left(u_2-c\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}\right)\right)$$

donde $f(u_1+c)$ es lo que se debe pagar en caso de fracaso (x_1) para que el agente obtenga una utilidad de u_1+c. Si reducir u_1 marginalmente de esta manera aumenta los beneficios, el plan original no podía ser óptimo y por tanto se debía cumplir la condición de primer orden. Derivando B con respecto a c, usando $f'=1/u'$ y evaluando en 0 obtenemos

$$\begin{aligned} B'(0) &= -(1-\pi(e_a))f'(u_1)+\pi(e_a)f'(u_2)\frac{1-\pi(e_a)}{\pi(e_a)}=(1-\pi(e_a))(f'(u_2)-f'(u_1)) \\ &= (1-\pi(e_a))\left(\frac{1}{u'(s_2)}-\frac{1}{u'(s_1)}\right) \end{aligned}$$

y como u es cóncava $u'(s_1)>u'(s_2)$ y queda $B'(0)>0$.

Surge, por supuesto, la pregunta: ¿pero dónde usamos que $u_2-u_1>1/\pi'$? La respuesta es que eso se usa para argumentar que si aumentamos u_1 un poco y bajamos u_2 un poco, todavía se cumplirá $u_2-x-u_1-c>1/\pi'$, y por tanto el “nuevo plan” seguirá cumpliendo la restricción de incentivos. Es decir, no habíamos usado esa condición explícitamente, pero la necesitamos para asegurarnos que con el plan modificado se siguen cumpliendo todas las restricciones de incentivos.

28.C. Haremos sólo el caso para u_1 decreciente. De la discusión que precede a (1.6) y de la Parte B sabemos que para todo $e\in(e_b,e_a]$ se cumple que

$$u_1(e)=\overline{u}+e-\frac{\pi(e)}{\pi'(e)}.$$

Por lo tanto,

$$u_1'(e)=1-1+\frac{\pi(e)\pi''(e)}{\pi'^2(e)}<0$$

como queríamos demostrar. También, tenemos que demostrar que para cualquier $e>e_b$ tendremos $u_1(e)<u_1(e_b)$. Para eso recordamos que para cualquier función estrictamente cóncava π (con derivada segunda negativa) se cumple que

$$\pi(e)=\pi(e_b)+\int_{e_b}^{e}\pi'(s)\,ds\geq\int_{e_b}^{e}\pi'(s)\,ds>\int_{e_b}^{e}\pi'(e)\,ds=\pi'(e)(e-e_b)$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\pi(e) &> \pi'(e)(e-e_b) \Leftrightarrow e-\frac{\pi(e)}{\pi'(e)}-e_b<0 \Leftrightarrow \overline{u}+e-\frac{\pi(e)}{\pi'(e)}-(\overline{u}+e_b)<0 \\
&\Leftrightarrow u_1(e)-u_1(e_b)<0 \Leftrightarrow u_1(e)<u_1(e_b)
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 31.A. Para implementar e_0 se pone $s_1=0$ y $s_2=s_3=s_4$ y se eligen los sueldos para que se cumpla con ingualdad la restricción de participación: $s_2=s_3=s_4=16$.

Para implementar e_1, eliminamos $e_{1/2}$ con burning oil, y nos imaginamos un problema con sólo dos acciones. En ese caso tendremos las tres condiciones de optimalidad y las dos restricciones activas,

$$
\left.\begin{array}{rcl}
2\sqrt{s_2} &=& \lambda-\mu \\
2\sqrt{s_3} &=& \lambda+\frac{\mu}{5} \\
2\sqrt{s_4} &=& \lambda+\frac{\mu}{5}
\end{array}\right\} \Rightarrow s_3=s_4 \quad y \quad
\begin{array}{c}
\frac{\sqrt{s_2}}{6}+\frac{5\sqrt{s_3}}{12}+\frac{5\sqrt{s_4}}{12}-1=4 \\
\frac{\sqrt{s_2}}{3}+\frac{\sqrt{s_3}}{3}+\frac{\sqrt{s_4}}{3}-0=4
\end{array}
$$

De las tres primeras obtenemos $s_3=s_4$ y sustituyendo en las restricciones obtenemos $s_3=36$ y $s_2=0$. Verificamos que no vale la pena hacer $e_{1/2}: \frac{4}{9}6-\frac{1}{2}=\frac{13}{6}$ que es menor que $\overline{u}$.

Para implementar $e_{1/2}$, nos quedaría un sistema gigante (aún asumiendo $s_3=s_4$, nos quedan 3 CPO, más tres restricciones para encontrar 3 sueldos y tres multiplicadores). Probamos mejor, primero, asumiendo que la de incentivos de e_1 no está activa, y viendo que pasa (si lo pensamos un poco, vemos que se cumplirá la restricción ignorada, porque con $u_2=u_3=u_4$ que se cumple en la solución, convendrá hacer e_0 y no e_1 pues ambas pagan el mismo sueldo seguro, pero e_0 tiene un menor costo); después asumiendo que la de incentivos de e_0 no está activa y viendo qué pasa.

Si eliminamos la de incentivos de e_1, nos queda $s_2=s_3=s_4$, y las dos restricciones activas:

$$
\left.\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3}u_1+\frac{2}{3}u_2-\frac{1}{2} &=& 4 \\
u_2 &=& 4
\end{array}\right\} \Leftrightarrow u_1=\frac{11}{2} \text{ y } u_2=u_3=u_4=4.
$$

En este caso, hacer e_1 da un sueldo de u_2 seguro, igual que haciendo e_0, pero con un costo de 1, por lo que se cumple la restricción de incentivos con respecto a e_1.

Probamos ahora de eliminar la de incentivos de e_0. Tendremos $s_3=s_4$, y debemos averiguar s_1 y s_2 con las condiciones de optimalidad y las dos restricciones activas:

$$
\left.\begin{array}{rcl}
2\sqrt{s_1} &=& \lambda+\mu \\
2\sqrt{s_2} &=& \lambda+\frac{\mu}{4} \\
2\sqrt{s_3} &=& \lambda-\frac{7\mu}{8}
\end{array}\right\} \Rightarrow u_1=\frac{5}{3}u_2-\frac{2}{3}u_3 \quad y \quad
\begin{array}{c}
\frac{1}{3}u_1+\frac{2}{9}u_2+\frac{4}{9}u_3-\frac{1}{2}=4 \\
\frac{1}{6}u_2+\frac{5}{6}u_3-1=4
\end{array}
$$

Obtenemos $u_1=\frac{83}{22}, u_2=\frac{95}{22}$ y $u_3=\frac{113}{22}$. Sustituyendo en la restricción de incentivos de e_0, vemos que no se cumple: $\frac{1}{3}\frac{95}{22}+\frac{2}{3}\frac{113}{22}=\frac{107}{22}$ que es mayor que 4. Por lo tanto, la solución para implementar $e_{1/2}$ es la calculada en el primer caso (ignorando incentivos de e_1). Una curiosidad del último calculo (la solución ignorando incentivos para e_0) es que el μ queda con un valor negativo y la razón es que el óptimo en este problema (sólo con las dos restricciones usadas) es con la de incentivos inactiva, pues queremos implementar (entre $e_{1/2}$ y e_1) la de costo bajo (y en ese caso la de incentivos no debería estar activa).

Ejercicio 32.A. Para implementar e_0 se pone s_1 muy pequeño y $s_2=s_3=s_4$ y se eligen los sueldos para que se cumpla con ingualdad la restricción de participación. Para implementar e_1, eliminamos $e_{\frac{1}{2}}$ con burning oil, y nos imaginamos un problema con sólo dos acciones. En ese caso tendremos las tres condiciones de optimalidad

$$\left.\begin{array}{c} s_2 = \lambda - \mu \\ s_3 = \lambda \\ s_4 = \lambda + \frac{\mu}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow s_4 = \frac{4s_3 - s_2}{3}$$

y las dos restricciones activas:

$$\begin{aligned} \frac{\log s_2}{6} + \frac{\log s_3}{3} + \frac{\log s_4}{2} &= 1 \\ \frac{\log s_2}{3} + \frac{\log s_3}{3} + \frac{\log s_4}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Queda

$$\begin{gathered} \frac{\log s_2}{6} + \frac{\log s_3}{3} + \frac{\log s_4}{2} = 1 \\ \log s_2 + \log s_3 + \log s_4 = 0 \\ s_4 - \frac{4s_3 - s_2}{3} = 0 \end{gathered}$$

que implica

$$\begin{aligned} s_2 &= -3\exp\left(\frac{1}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6} + 4\right) + 4\exp\left(-\frac{2}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6} - 2\right) = 2.015\,3 \times 10^{-2} \\ s_3 &= \exp\left(-\frac{2}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6} - 2\right) = 6.102\,9 \\ s_4 &= \exp\left(\frac{1}{3}\ln\frac{4}{1+3e^6} + 4\right) = 8.130\,5 \end{aligned}$$

Ejercicio 33.A. Para implementar e_1 debemos poner $\sqrt{s} - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{25}{9}$ y los beneficios para el principal son $\frac{2}{3}10 - \frac{25}{9} = \frac{35}{9}$. Para implementar e_2 fijamos $s = \frac{64}{25}$ y el beneficio es $\frac{61}{25}$. Finalmente, para e_3 el sueldo es $s = \frac{16}{9}$ y el beneficio $\frac{14}{9}$. El contrato óptimo es el que implementa e_1.

33.B. Las restricciones de incentivos cuando se quiere implementar e_2 son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} &\geq \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{15} \geq \frac{1}{6}u_a - \frac{1}{6}u_b \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} &\geq \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6}u_a - \frac{1}{6}u_b \geq \frac{4}{15} \end{aligned}$$

que no se pueden cumplir simultáneamente. Vemos (no es casualidad) que para que se cumpla la primera restricción de incentivos la diferencia de sueldos (entre a y b) no puede ser muy grande: si lo fuera, el individuo haría el esfuerzo alto. Similarmente, para que se cumpla la segunda, la diferencia de sueldos no puede ser muy chica: si lo fuera, el agente elegiría e_3.

33.C. Igual que en la Parte B, las restricciones de incentivos son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - c_2 &\geq \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} \Leftrightarrow 10 - 6c_2 \geq u_a - u_b \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - c_2 &\geq \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \Leftrightarrow u_a - u_b \geq 6c_2 - 8 \end{aligned} \tag{1.11}$$

por lo que el conjunto de sueldos que cumplen con las restricciones de incentivos es no vacío siempre que

$$10 - 6c_2 \geq 6c_2 - 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \geq c_2.$$

Verificamos que para $c_2 = \frac{3}{2}$ existe al menos un contrato que cumple con las restricciones de participación e incentivos. Luego, como para cualquier $c_2 < \frac{3}{2}$ se "relajan" aún más las restricciones (se achica siempre el lado izquierdo de las desigualdades), cualquier $c_2 \leq \frac{3}{2}$ hará que e_2 sea implementable.

De las ecuaciones (1.11) tenemos que para $c_2 = \frac{3}{2}$ los pares de (u_b, u_a) que cumplen las restricciones de incentivos son $u_a = u_b + 1$ (haga la gráfica con u_b en las abcisas). Los pares (u_b, u_a) que cumplen la restricción de incentivos son $u_a \geq 3 - u_b$. Por lo tanto, los (u_b, u_a) que están sobre la recta $u_a = u_b + 1$ y que tienen $u_b \geq 1$ cumplen las tres restricciones.

33.D. Ya encontramos el contrato óptimo para implementar e_3, y sabemos que no se puede implementar e_2. Encontramos ahora el contrato óptimo para e_1. Como ya vimos que c_2 es "demasiado alto" probamos de resolver el problema sin e_2, y luego verificamos que el óptimo encontrado también cumpla la restricción de incentivos de e_1 contra e_2. Con eso alcanzará, pues si un contrato es óptimo para maximizar los beneficios del principal con 2 restricciones, también será óptimo si se agrega otra restricción.

En este caso, como en todos los problemas de 2×2, ponemos las dos restricciones con igualdad y encontramos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u_b = 1 \\ u_a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_b = 1 \\ s_a = 4 \end{array}\right\}.$$

La restricción de incentivos de e_1 contra e_2 con estos niveles de utilidad se satisface pues

$$0 = \frac{2}{3}u_a + \frac{1}{3}u_b - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} = -\frac{1}{10}.$$

Los beneficios para el principal son

$$\frac{2}{3}(10-4) + \frac{1}{3}(0-1) = \frac{11}{3}$$

que son mayores que los $\frac{14}{9}$ que resultan de implementar e_1.

33.E. Con esfuerzo observable, los beneficios de implementar e_2 y e_3 son como en la Parte A. Para implementar e_1 fijamos $s = 8$ para que se cumpla con igualdad la restricción de participación. Los beneficios son entonces $10 - 8 = 2$. El contrato óptimo es el que implementa e_2.

Con esfuerzos no observables el contrato para implementar e_3 es el mismo. Para implementar e_2 las restricciones son

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq 0 \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq u_a - \sqrt{8} \\ \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \geq \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \end{array}$$

Como el costo de e_1 aumentó (relativo a las otras partes) probamos de resolver el problema sin la restricción de e_2 contra e_1, y como siempre, ponemos las dos restricciones restantes con igualdad para obtener

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} = 0 \\ \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u_a = \frac{12}{5} \\ u_b = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} s_a = \frac{144}{25} \\ s_b = \frac{16}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow v(e_2) = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{144}{25}\right) - \frac{1}{2}\frac{16}{25} = \frac{9}{5} < 2.$$

La restricción de incentivos de e_2 contra e_1 se cumple pues

$$\frac{8}{5} = \frac{1}{2}\frac{12}{5} + \frac{1}{2}\frac{4}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} > u_a - \sqrt{8} = \frac{12}{5} - \sqrt{8} \simeq -0.43$$

Para implementar e_1, probamos con burning oil: $s_a = 8$, $s_b = 0$ y vemos que funciona pues

$$\begin{array}{c} u_a - \sqrt{8} = 0 > -0.19 \simeq \frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{1}{2}0 - \frac{8}{5} = \frac{1}{2}u_a + \frac{1}{2}u_b - \frac{8}{5} \\ u_a - \sqrt{8} = 0 > -0.39 \simeq \frac{1}{3}\sqrt{8} + \frac{2}{3}0 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}u_a + \frac{2}{3}u_b - \frac{4}{3} \end{array}.$$

El beneficio de este contrato para el principal es

$$v(e_1) = 10 - 8 = 2$$

que es mayor que $v(e_2) = 9/5$ y que $v(e_3) = 14/9$.

Con información asimétrica se implementa e_1 mientras que con información perfecta se implementa e_2, un esfuerzo menor.

Ejercicio 34.A. Ambas acciones se pueden implementar óptimamente con sueldos constantes, en el caso de a, con $s = 0$, y en el caso de b con $s = 1$. Otros esquemas de sueldos también sirven porque el individuo es neutral al riesgo. El principal elegirá la acción a.

34.B. El contrato óptimo para implementar a es el mismo. El óptimo para b NO será una franquicia, pues como en la Parte A el principal quiere a, si se hace una franquicia, el agente elige a también. Sea cual sea el contrato óptimo para b, el principal elegirá a, pues lo elegía cuando el problema de b tenía una sola restricción, así que lo seguirá eligiendo cuando el problema de b tenga también la restricción de incentivos (el problema de a cuando las acciones no son observables es el mismo).

34.C. En la Parte A el principal elegirá b, y el contrato óptimo en la Parte B es una franquicia.

Ejercicio 35.A. Para Manuel, g le reporta una utilidad de

$$\frac{1}{2}(5+0) + \frac{1}{2}(5+3-2) = \frac{11}{2}$$

(si la acción vale menos de 2, no la ejecuta, y por tanto obtiene 0, mientras que si vale más de 2, la compra a 2, y la vende al precio de mercado, en este caso 3). Hacer f le reporta 5 que es menor que $\frac{11}{2}$, por lo que elige g.

35.B. Si el dueño elige la primera forma de pago y f obtiene una utilidad de $80 + 20 = 100$. Mientras que si elige la primera forma y g, obtiene

$$\frac{1}{2}(80+10) + \frac{1}{2}(80+20) = 95$$

(en el segundo paréntesis debería ser $80+30$, pero por los impuestos queda en $80+20$). Por lo tanto, si elige la primera forma, le pedirá a Manuel que haga f y obtendrá una utilidad de 100. Si elige la segunda forma de pago, sabe que Manuel elegirá g, y por tanto su utilidad será 95. Concluimos que elegirá la primera forma de pago.

Ejercicio 36.A. Sueldos constantes, $s = 1$.

36.B. Como la función de utilidad es continua y no acotada por debajo, la restricción de participación está activa, y en este caso el principal debe elegir los sueldos s_n^n, s_n^f, s_f^n y s_f^f para maximizar su utilidad

$$\frac{\pi_n^n - s_n^n + \pi_f^n - s_f^n + \pi_n^f - s_n^f + \pi_f^f - s_f^f}{4}$$

$$\begin{array}{lrcl}
s.a & \dfrac{u(s_n^n) + u\left(s_f^n\right) + u(s_n^f) + u\left(s_f^f\right)}{4} - c_b & = & 0 \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f = 4 \\
& \dfrac{u(s_n^n) + u\left(s_f^n\right) + u(s_n^f) + u\left(s_f^f\right)}{4} - c_b & \geq & u\left(s_f^n\right) - c_a \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f - 4 \geq 4 \log s_f^n \\
& \dfrac{u(s_n^n) + u\left(s_f^n\right) + u(s_n^f) + u\left(s_f^f\right)}{4} - c_b & \geq & u\left(s_n^f\right) - c_c \Leftrightarrow \log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f - 4 \geq 4 \log s_n^f - 8
\end{array}$$

Vemos entonces que debemos maximizar $-s_n^n - s_f^n - s_n^f - s_f^f$ sujeto a $\log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f = 4$, $s_f^n \leq 1$, $\log s_n^f \leq 2$. Alguna de las restricciones de incentivos debe estar activa, pues de otro modo el óptimo sería con sueldos constantes, y ello llevaría al agente a hacer la acción a.

Probamos con las dos primeras activas para obtener $s_f^n = 1$ y $\log s_n^n s_n^f s_f^f = 4$. Vemos que los tres sueldos serán iguales y

$s_n^n = 10.000/s_n^f s_f^f$. El problema es entonces el de maximizar $-10.000/s_n^f s_f^f - s_n^f - s_f^f$ y con los sueldos iguales, maximizar $-10000/x^2 - 2x$, con lo que obtenemos $s_n^f = s_f^f = 10\sqrt[3]{10}$. La tercera restricción nos queda

$$\log s_n^f = \log 10\sqrt[3]{10} = \log 10 + \log \sqrt[3]{10} = 1 + \frac{1}{3}\log 10 = \frac{4}{3} < 2,$$

por lo que estuvo bien haberla ignorado (es decir, nunca habrá una solución con las tres activas). La solución en este caso es $s_f^n = 1$, y $s_n^f = s_f^f = s_n^n = 10\sqrt[3]{10}$.

Con la primera y la tercera activas, nos queda $\log s_n^n s_f^n s_n^f s_f^f = 4$ y $s_n^f = 100$ que implica $\log s_n^n s_f^n s_f^f = 2 \Leftrightarrow s_n^n = 100/s_f^n s_f^f$. Como aparecen los tres salarios en forma simétrica, debemos elegir x para maximizar $-100/x^2 - 2x$ lo que arroja $s_n^n = s_f^n = s_f^f = 10^{\frac{2}{3}}$ y se viola la segunda restricción pues debíamos tener $s_f^n \leq 1$ y sin embargo $10^{\frac{2}{3}} = 4.64$.

36.C. Burning oil.

Ejercicio 38.A. Para todo $x \in X$, elegir s_x para maximizar

$$\begin{array}{rcl} & & \int_X v\left(x - s_x\right) d\pi_b\left(x\right) \\ \text{sujeto a } \int_X \pi_b\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_b & \geq & \overline{u} \end{array}$$

(la integral $d\pi$ incluye como caso particular el de π discreta).

38.B. Para cada x, s_x maximiza

$$L = \int_X \pi_b\left(x\right) v\left(x - s_x\right) + \lambda\left(\int_X \pi_b\left(x\right) u\left(s_x\right) dx - c_b - \overline{u}\right) = \int_X \pi_b\left(x\right)\left[v\left(x - s_x\right) + \lambda u\left(s_x\right) dx - c_b - \overline{u}\right] dx.$$

Como la integral es una especie de suma, y cada s_x aparece solamente en uno de los términos de la suma, al derivar con respecto a s_x desaparece la integral y queda sólo

$$-v'\left(x - s_x\right) + u'\left(s_x\right)\lambda = 0 \tag{1.12}$$

Como esa igualdad se satisface para todo x, podemos diferenciar nuevamente con respecto a x, y sustituir por λ de la ecuación (1.12), para obtener

$$\begin{array}{rcl} -v''\left(x - s_x\right)\left(1 - \frac{ds_x}{dx}\right) + u''\left(s_x\right)\frac{ds_x}{dx}\lambda & = & 0 \Leftrightarrow -v''\left(x - s_x\right)\left(1 - \frac{ds_x}{dx}\right) + u''\left(s_x\right)\frac{ds_x}{dx}\frac{v'\left(x - s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{ds_x}{dx} & = & \frac{v''\left(x - s_x\right)}{u''\left(s_x\right)\frac{v'\left(x - s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} + v''\left(x - s_x\right)} = \frac{\frac{v''\left(x - s_x\right)}{v'\left(x - s_x\right)}}{\frac{u''\left(s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} + \frac{v''\left(x - s_x\right)}{v'\left(x - s_x\right)}} \end{array}$$

38.C. Usando que r_p y r_a son constantes para estas funciones de utilidad, nos queda que s_x es lineal en x : $s_x = mx + n$. Utilizando esto, y la ecuación para λ de (1.12) obtenemos

$$\frac{v'\left(x - s_x\right)}{u'\left(s_x\right)} = \frac{e^{s_x - x}}{2e^{-2s_x}} = \frac{e^{(m-1)x+n}}{2e^{-2mx-2n}} = \lambda \Rightarrow \frac{d\left(\frac{e^{(m-1)x+n}}{2e^{-2mx-2n}}\right)}{dx} = \frac{e^{3n+3mx-x}}{2}\left(3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Por supuesto, ya sabíamos esto de la ecuación de ds/dx de la parte anterior, ya que $r_p = 1$ y $r_a = 2$. La ordenada en el origen de los sueldos, n, se obtiene utilizando la restricción de participación (que no ha sido usada hasta ahora):

$$\overline{u} = \int_X \pi_b(x)\, u(s_x)\, dx - c_b = -\int_0^1 2xe^{-2\left(\frac{x}{3}+n\right)} dx - 1 \Leftrightarrow \frac{15}{2}e^{-\frac{2}{3}}e^{-2n} - \frac{9}{2}e^{-2n} - 1 = \overline{u} \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}+2}{15e^{-\frac{2}{3}} - 9}$$

Por supuesto, hasta este último paso no habíamos usado el hecho que fuera la acción a o b, por lo que todo es aplicable para encontrar el contrato óptimo para a :

$$\overline{u} = \int_X \pi_a(x)\, u(s_x)\, dx - c_a = -\int_0^1 e^{-2\left(\frac{x}{3}+n\right)} dx \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{-2n}\left(e^{-\frac{2}{3}} - 1\right) = \overline{u} \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}}{3e^{-\frac{2}{3}} - 3}.$$

Utilizando el contrato óptimo para implementar a y para implementar b, encontramos ahora la utilidad esperada del principal

$$\begin{aligned} V(b) &= -\int_0^1 2xe^{-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}+2}{15e^{-\frac{2}{3}}-9}} dx = 6\sqrt{2}\left(4e^{-\frac{1}{3}} - 3\right)\sqrt{\frac{1}{9 - 15e^{-\frac{2}{3}}}}\sqrt{-\overline{u}-1} = -0.99679\sqrt{-\overline{u}-1} \\ V(a) &= -\int_0^1 e^{-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\log\frac{2\overline{u}}{3e^{-\frac{2}{3}}-3}} dx = 3\sqrt{2}\sqrt{-\overline{u}}\sqrt{\frac{1}{3 - 3e^{-\frac{2}{3}}}}\left(e^{-\frac{1}{3}} - 1\right) = -0.99541\sqrt{-\overline{u}} \end{aligned}$$

La diferencia $V(b) - V(a)$ es positiva en $\overline{u} = -1$, por lo que $V(b) \geq V(a)$, y a medida que $\overline{u}$ cae, la diferencia crece, pues $d(V(b) - V(a))/d\overline{u} \leq 0$.

38.D. Implementar a. Antes de empezar, notamos que si el principal le pagara 0 al agente tanto si sale el producto alto, como si sale el bajo, el agente obtendría una utilidad de -1 (que es más alta que la utilidad de reserva; por tanto, en el óptimo tendremos sueldos negativos; no es nada raro, podríamos cambiar un poco los parámetros para que los sueldos fueran positivos y no cambiaría el problema).

Para resolver, hacemos el cambio de variable $u = e^{-2s_1}$ y $v = e^{-2s_2}$. Probamos sólo con la de participación y verificamos que se cumple la de incentivos. La de participación la ponemos con igualdad y obtenemos $-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow u = 5 - v$. Eso en la función objetivo nos da

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1} - \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2} = -\frac{1}{2}(5-v)^{-\frac{1}{2}}e^{-1} - \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}$$

y la condición de primer orden es

$$\frac{1}{4v^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-2}(5-v)^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}e^{-1}}{(5-v)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Leftrightarrow e^{-2}(5-v)^{\frac{3}{2}} = v^{\frac{3}{2}}e^{-1}$$

y elevando a la $2/3$ obtenemos

$$e^{-\frac{4}{3}}(5-v) = ve^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow v = 5\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{2}{3}} + e^{-\frac{4}{3}}} = 1.6962.$$

Por lo tanto, $u = 5 - 5\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{2}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}} = 3.3038$. La utilidad del principal es entonces

$$-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1} - \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2} = -0.15315.$$

La restricción de incentivos es

$$-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\geq-\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1=-3.0981$$

Implementar b. El problema del principal es entonces elegir u y v para maximizar

$$\begin{array}{rc} & -\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2} \\ \text{sujeto a} & -\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1\geq-\frac{5}{2} \\ & -\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v-1\geq-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v \end{array}$$

El Lagrangiano (para hacer Kuhn-Tucker) es

$$L=-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}-\lambda\left(u+3v-6\right)-\mu\left(v-u+4\right)\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{dL}{du}=\frac{e^{-1}-8u^{\frac{3}{2}}\lambda+8u^{\frac{3}{2}}\mu}{8u^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{dL}{dv}=-\frac{24v^{\frac{3}{2}}\lambda-3e^{-2}+8v^{\frac{3}{2}}\mu}{8v^{\frac{3}{2}}}\end{array}.$$

La solución debe tener estas dos derivadas 0 y $\lambda\left(u+3v-6\right)=\mu\left(v-u+4\right)=0$, con $\mu,\lambda\geq0$. Es fácil ver que la de participación debe estar activa. Imaginemos que no lo estuviera, ahora describiremos cómo hacer para aumentar la utilidad del principal. Como u y v no están acotados por arriba (y al principal le conviene subirlos), si la restricción no estuviera activa, siempre podríamos subir u y v en la misma cantidad y la restricción de incentivos ($v-u+4\leq0$) se seguiría cumpliendo (se cancelarían los incrementos de u y v).

Nos quedan entonces dos casos; las dos restricciones activas, sólo la de participación activa. Comenzamos por la primera. Con las dos activas tenemos $u=\frac{9}{2},v=\frac{1}{2}$ y eso en las condiciones de primer orden iguales a 0 arroja $\lambda=0.037\,09$ y $\mu=0.032273$. Los sueldos son entonces $e^{-2s_1}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow s_1=\frac{1}{2}\ln2-\ln3\simeq-0.75$ y $e^{-2s_2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow s_2=\frac{1}{2}\ln2\simeq0.35$. Cuando sale el producto bueno, el trabajador recibe un sueldo; cuando sale malo, debe pagarle al principal. La utilidad del principal es

$$-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}e^{-1}-\frac{3}{4}v^{-\frac{1}{2}}e^{-2}=-0.18690.$$

Sólo con la de participación activa, nos queda el siguiente sistema

$$e^{-1}-8u^{\frac{3}{2}}\lambda=24v^{\frac{3}{2}}\lambda-3e^{-2}=u+3v-6=0\Leftrightarrow u=2.362,v=1.2127,\lambda=1.266\,8\times10^{-2}$$

pero en ese caso no se cumple la de incentivos, $v-u+4\leq0$.

Entonces, b se implementa con las dos activas, y el contrato óptimo es implementar a.

Ejercicio 39.B. Para implementar la acción a, el principal debe maximizar sus beneficios sujeto a

$$\begin{array}{rcl}\frac{2}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{1}{5}u_3-5 & \geq & \frac{1}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{2}{5}u_3-4\\ \frac{2}{5}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{1}{5}u_3-5 & \geq & 0\end{array}$$

Poniendo la segunda restricción con igualdad, obtenemos $u_3=25-2u_1-2u_2$, y sustituyendo en la primera ecuación, con igualdad, queda $u_1=10-\frac{2}{3}u_2\Rightarrow u_3=5-\frac{2}{3}u_2$. Utilizando estas dos igualdades el problema del principal se reduce al de elegir u_2 para maximizar

$$\frac{2}{3}\left(16-\left(10-\frac{2}{3}u_2\right)^2\right)+\frac{2}{3}\left(12-u_2^2\right)+\frac{1}{3}\left(1-\left(5-\frac{2}{3}u_2\right)^2\right)=-\frac{10}{9}u_2^2+\frac{100}{9}u_2-56$$

El resultado es $u_2=5$, $u_1=\frac{20}{3}$ y $u_3=\frac{5}{3}$.

Ejercicio 40.A. El R^* que deja al cliente indiferente es el que resuelve

$$p_A(x_A - R^*) = p_B(x_B - R^*) \Leftrightarrow R^* = \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B}$$

40.B. Retornos para el banco (asumimos que el banco puede elegir el proyecto, si el empresario es indiferente):

$$Beneficio = \begin{cases} p_B R - I & R \geq R^* \\ p_A R - I & R \leq R^* \end{cases}.$$

El banco no elegirá ninguna tasa R estrictamente más chica que R^*, pues R^* es mejor que cualquiera de ellas (pues implementa A, y da mayores beneficios). Por otro lado, entre las tasas mayores que R^*, la mejor es $R = x_B$, pues con todas el cliente hace B, y con esta lo deja indiferente entre participar y no participar. La decisión es entonces entre R^* (y que el cliente haga A) o $R = x_B$ y que haga B. Por lo tanto, el banco elegirá $R = R^*$ si y sólo si

$$p_A R^* \geq p_B x_B \Leftrightarrow p_A \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B} \geq p_B x_B \Leftrightarrow \frac{p_A}{p_B} \geq x_B \frac{p_A - p_B}{p_A x_A - p_B x_B}$$

que se cumple, pues $p_A/p_B > 1$ y $p_A x_B - p_B x_B < p_A x_A - p_B x_B$, por lo que el lado derecho es menor que 1. Al banco le conviene elegir R^*.

40.C. En este caso, subir la tasa de interés sólo hace que la gente cambie de proyecto (no reduce la demanda). De todas maneras, si subiera la tasa de interés hasta que $R = x_B$, los beneficios del banco serían $p_B x_B - I$ y esto es mejor que fijar los intereses de tal manera que $R = R^*$ si y sólo si

$$p_B x_B - I > p_A R^* - I \Leftrightarrow p_B x_B > p_A \frac{p_A x_A - p_B x_B}{p_A - p_B} \Leftrightarrow \frac{1}{p_A - p_B}\left((x_A - x_B) p_A^2 + x_B (p_A - p_B)^2\right) < 0$$

que es falso. Por lo tanto, al banco no le conviene subir la tasa de interés (y eso a pesar de que nadie deja de pedir el dinero).

Ejercicio 41.A. En este caso, la riqueza del asegurado es constante: $v + s_n = s_a$. Para que se cumpla la restricción de participación con igualdad ponemos $\sqrt{s_a} = \overline{u} \Leftrightarrow s_a = \overline{u}^2$ y queda $v + s_n = \overline{u}^2 \Leftrightarrow s_n = \overline{u}^2 - v$. Otra forma de hacerlo es tipo "burning oil": con $s_a = \overline{u}^2$ y s_n tal que $\frac{1}{2}\sqrt{s_a} + \frac{1}{2}\sqrt{v + s_n} - \frac{1}{4} \leq \overline{u} \Leftrightarrow s_n \leq \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v$.

41.B. Ponemos ambas restricciones activas:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\sqrt{s_a} + \frac{1}{2}\sqrt{s_n + v} - \frac{1}{4} = \overline{u} \\ \sqrt{s_a} = \overline{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} s_n = \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v \\ s_a = \overline{u}^2 \end{array}$$

41.C. Si la compañía quisiera que el individuo fuera atento, de la solución de la Parte B, $s_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - v$ (se puede verificar que $s_n + v \geq 0$) y $s_a = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2$. Los beneficios serían:

$$\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{32}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}v - \frac{1}{16} \geq 0.$$

Si la compañía quisiera que el individuo manejara desatento, pondría $s_a = \frac{1}{16}\left(2\sqrt{v} - 1\right)^2$ y $s_n \leq \left(\overline{u} + \frac{1}{2}\right)^2 - v = \left(\frac{1}{2}\sqrt{v} + \frac{1}{4}\right)^2 - v$. Como $s_a > 0$, los beneficios serían negativos, y la empresa prefiere implementar atento.

Ejercicio 42.A. Aunque esto no entra en lo que hicimos en clase, las mismas ideas se aplican. En particular, si le pagamos un sueldo constante, aceptarán la coima; en tal caso no es necesario incluir la restricción de incentivos. En participación con igualdad:

$$e^{-s-\ln\frac{2e+1}{e+2}} = -\frac{e+2}{3e} \Leftrightarrow -e^{-s} = -\frac{2e+1}{3e} \Leftrightarrow s = \ln 3 - \ln(2e+1) + 1$$

42.B. Ponemos participación e incentivos con igualdad y obtenemos

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{3}e^{-s_1} - \frac{2}{3}e^{-s_2} = -\frac{e+2}{3e} \\ -\frac{2}{3}e^{-\left(\ln\frac{2e+1}{e+2}+s_1\right)} - \frac{1}{3}e^{-\left(\ln\frac{2e+1}{e+2}+s_2\right)} = -\frac{e+2}{3e} \end{array}$$

De la primera, sacamos $e^{-s_1} = \frac{e+2}{e} - 2e^{-s_2}$ y en la segunda nos da $\frac{1}{e} = e^{-s_2}$ o $s_2 = 1$. Sustituyendo en la primera, queda $s_1 = 0$.

42.C. Si la AUF quiere implementar n, fijará $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$. Con esos sueldos, los árbitros se comportarán bien; si tienen la mala suerte de que el partido parece un asalto, igual se los debe castigar. El castigo está justamente para que (a priori) se porten bien los jueces.

Ejercicio 43.A. Repetimos lo que hemos hecho varias veces: participación con igualdad, y la condición de primer orden (del lado derecho de la de incentivos) con igualdad:

$$\begin{array}{rcl} (1-\sqrt{p})\,u_1 + \sqrt{p}u_2 + 1 - p &=& 2 \\ (1-\sqrt{p})\,u_1 + \sqrt{p}u_2 + 1 - p &\geq& \left(1-\sqrt{\widetilde{p}}\right)u_1 + \sqrt{\widetilde{p}}u_2 + 1 - \widetilde{p}, \quad \forall \widetilde{p} \end{array}$$

y la condición de primer orden es: $-\frac{1}{2\sqrt{p}}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{p}}u_2 = 1 \Leftrightarrow u_2 - u_1 = 2\sqrt{p}$. Esto en la restricción de participación da

$$\sqrt{p}\,(u_2 - u_1) + u_1 - p = 1 \Leftrightarrow u_1 = 1 - p \Leftrightarrow s_1 = (1-p)^2.$$

Esto, obviamente, coincide con la solución a este problema dada en la ecuación (1.6), cuando a toda la utilidad del individuo (y a la utilidad de reserva) le restamos 1 (que es una normalización válida). Pero hay que tener cuidado; cuando este problema ha sido usado en parciales, la gente que usó directamente esos resultados puso $u_1 = \sqrt{s_1}$ y $u_2 = \sqrt{s_2}$ en la ecuación (1.6), y eso da mal. Si vamos a usar lo de las notas de clase, debemos tener cuidado que el planteo sea igual al de las notas de clase, y debemos poner $u_1 = \sqrt{s_1} + 1$ y $u_2 = \sqrt{s_2} + 1$.

Finalmente, obtenemos $u_2 = u_1 + 2\sqrt{p} = 1 - p + 2\sqrt{p} \Leftrightarrow s_2 = \left(1 - p + 2\sqrt{p}\right)^2$.

43.B. Para $p = 0$, premios constantes y obtenemos $s = 1$. Para $p = 1$, también vale la solución de la Parte A, $s_2 = 4$, $s_1 = 0$. Para ambos extremos, también se puede usar burning oil: como en ambos casos cada acción le asigna probabilidad 0 a un desenlace (a algún nivel de producto), se puede fijar un sueldo para satisfacer la de participación, y poner el otro sueldo para que se cumpla la de incentivos.

43.C. El valor para el principal de un cierto p, dado x_2 es

$$\begin{array}{rcl} V(p, x_2) &=& (1-\sqrt{p})\,(0 - s_1) + \sqrt{p}\,(x_2 - s_2) = -(1-\sqrt{p})\,(1-p)^2 + \sqrt{p}\left(x_2 - (1 - p + 2\sqrt{p})^2\right) \\ &=& \sqrt{p}x_2 - 2p + 3p^2 - 4p^{\frac{3}{2}} - 1 \end{array}$$

Derivando, obtenemos

$$\frac{\partial V(p, x_2)}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left(x_2 - 12p - 4\sqrt{p} + 12p^{\frac{3}{2}}\right)$$

que cuando $x_2 = \frac{7}{2}$ se iguala a 0 en $p = \frac{1}{4}$ (pueden graficar $V(p, x_2)$, ver que se maximiza cerca de $\frac{1}{4}$ y probar que la derivada en $\frac{1}{4}$ es 0).

43.D. Debemos hacer que $x_2 - 12p - 4\sqrt{p} + 12p^{\frac{3}{2}}$ sea 0 para $p = 1$, y eso sucede cuando $x_2 = 4$